

# Программа курса «Теория типов»э

ИТМО, группы М3232..М3239

Весенний семестр 2025 г.

1. Бестиповое лямбда-исчисление. Общие определения (альфа-эквивалентность, бета-редукция, бета-эквивалентность). Параллельная бета-редукция. Теорема Чёрча-Россера.
2. Нормальный и аппликативный порядок редукций. **Y**-комбинатор. Слабая и сильная нормализация (определения). Парадокс Карри, парадокс при интерперетации бестипового лямбда-исчисления как логики.
3. Импликационный фрагмент ИИВ. Теорема о замкнутости И.Ф. относительно доказуемости. Комбинаторы, базис SKI, его аналог в логике.
4. Просто типизированное лямбда-исчисление. Исчисление по Чёрчу и по Карри. Изоморфизм Карри-Ховарда. Конъюнкция, дизъюнкция, ложь и соответствующие им конструкции в лямбда-исчислении. Чёрчевские нумералы. Теорема о выразительной силе просто типизированного лямбда-исчисления (формулировка). Нетипизируемость **Y**-комбинатора (доказательство).
5. Алгебраические термы. Задача унификации в алгебраических термах. Алгоритм унификации. Наиболее общее решение задачи унификации.
6. Задачи проверки типа, реконструкции (вывода) типа, обитаемости типа в просто типизированном лямбда-исчислении. Их аналоги в интуиционистском исчислении высказываний. Алгоритм нахождения типа в просто типизированном лямбда-исчислении. Наиболее общий тип, наиболее общая пара.
7. Сильная нормализуемость просто типизированного лямбда-исчисления.
8. Логика второго порядка. Выразимость связок через импликацию и квантор всеобщности в интуиционистской логике 2-го порядка (конъюнкция, дизъюнкция, ложь, отрицание, квантор существования). Простая модель для логики второго порядка. Система *F*. Изоморфизм Карри-Ховарда для системы *F*: квантор всеобщности, упорядоченные пары, алгебраические типы. Экзистенциальные типы. Конструкции **pack** и **abstype**. Абстрактные типы данных.
9. Ранг типа. Частный случай типа. Типы и типовые схемы. Типовая система Хиндли-Милнера. Алгоритм W. Типизация **Y**-комбинатора. Экви- и изорекурсивные типы,  $\mu$ -оператор, **roll** и **unroll**. Примеры конструкций и операторов в языках программирования.
10. Обобщённые типовые системы. Типы, рода, сорта. Лямбда-куб. Краткая характеристика вершин лямбда-куба.  $\Sigma$  и  $\Pi$  типы. Зависимые типы, примеры.
11. Изоморфизм Карри-Ховарда-Воеводского. Равенство как путь в топологическом пространстве. Язык Аренд. Интервальный тип, магия и сое. Стандартные функции: **transport**, **rmap**. Функциональная экстенциональность, её доказуемость в Аренде.  $\Sigma$  и  $\Pi$  типы в языке Аренд. Индуктивные типы, задание отношения «меньше» через индуктивные типы и через  $\Sigma$ -тип. Неравенство. Доказательство неравенств в Аренде.
12. Каков тип типа: необходимость увеличения выразительной силы языка. Типы, универсумы, пропы, множества. Импредикативность. Иерархия универсумов, предикативный и гомотопический уровни. Пропозициональное усечение. Фактор-множества в Аренде. Конструкция `\using \level`.
13. Алгебраическая топология, базовые понятия. Гомотопическая эквивалентность. Фундаментальная группа окружности. Аксиома унивалентности.
14. Сеты и множества. Конструктивная аксиома выбора и её доказуемость. Сетоиды. Аксиома выбора как перестановка кванторов и пропозиционального усечения. Теорема Диаконеску.

15. Парадокс Бурали-Форте. Парадоксальные универсумы, доказательство парадокса Бурали-Форте при существовании парадоксального универсума. Общая идея построения парадокса Жирара в системе  $U^-$ .
16. Линейная логика. Уникальные типы. Комбинаторный базис  $BSKW$ . Полиморфизм (параметрический и наследственный). Отношение «быть подтипом», ко- и контравариантность типов.
17. Проверка на моделях. Линейная темпоральная логика (базовые операции).
18. Категорная абстрактная машина (общая идея, структуры данных: стек, аккумулятор, память инструкций). Инструкции.
19. Неразрешимость системы F. Задача полуунификации.