Неразрешимость системы F

Разрешимость типизации $\lambda_{\rightarrow}$

- Алгебраические термы: $T ::= V \mid f\ T\ \dots\ T$,
- Уравнение в алгебраических термах $\sigma = \sigma'$
- Подстановка переменной: функция $S_0 : V \rightarrow T$, тожественная почти везде.
- Подстановка: $S : T \rightarrow T$, что $S(v) = S_0(v)$ и $S(f\ \theta_1\ \dots\ \theta_n) = f\ S(\theta_1)\ \dots\ S(\theta_n)$
- Решение задачи унификации — такая S, что $S(\sigma) = S(\sigma')$.
- Задача типизации: по лямбда-выражению строим уравнение, находим решение, по решению строим тип.

Система F

$$\frac{}{\Gamma, x:\sigma \vdash x:\sigma}\ \text{(Акс.)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (M\ N) : \tau}\ \text{(Прим.)}$$

$$\frac{\Gamma, x:\sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x.M) : \sigma \to \tau}\ \text{(Абстр.)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall\alpha.\sigma}{\Gamma \vdash M : (\sigma[\alpha := \tau])}\ \text{(Спец.)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \forall\alpha.\sigma}\ \text{(Обобщ.)}$$

Определение

Вывод — записанное в виде списка дерево. То есть, конечная последовательность формул (секвентов) $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ (вида $\Gamma \vdash M : \sigma$), где каждый Δ_i — результат применения какого-то из правил к посылкам Δ_j (и возможно Δ_k), где $j, k < i$.

Специализация перед обобщением

Определение

Пусть для доказательства Δ_i определена функция $c(i)$ («номер заключения для посылки i»), при этом все правила в выводе имеют вид

$$\frac{\Delta_i \qquad \Delta_j}{\Delta_{c(i)}} \ (\text{также } c(i) = c(j)) \qquad \frac{\Delta_i}{\Delta_{c(i)}}$$

В доказательстве специализации идут перед обобщениями, ***если для любой*** *подпоследовательности $\Delta_{m_1}, \dots, \Delta_{m_j}$, такой, что:*

1. $m_i = c(m_{i-1})$;
2. Δ_{m_1} *— заключение аксиомы, правил применения и абстракции;*
3. $\Delta_{m_2}, \dots, \Delta_{m_j}$ *— заключения правил обобщения и специализации;*

выполнено: *существует $1 \leqslant k \leqslant j$, что $\Delta_{m_2}, \dots, \Delta_{m_k}$ — заключения правил специализации, а $\Delta_{m_{k+1}}, \dots, \Delta_{m_j}$ — правил обобщения.*

Полуунификация

Язык термов: $\mathcal{T} ::= V | \mathcal{T} \to \mathcal{T}$.

Определение

Решением задачи полуунификации для $\{\tau_1 \leqslant \mu_1, \tau_2 \leqslant \mu_2\}$ *при* $\tau_1, \tau_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{T}$ *будет* $S : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, *что для неё существуют* S_1 *и* S_2, *что* $S_1(S(\tau_1)) = S(\mu_1)$ *и* $S_2(S(\tau_2)) = S(\mu_2)$.

Теорема

Задача полуунификации для $\{\tau_1 \leqslant \mu_1, \tau_2 \leqslant \mu_2\}$ *неразрешима*

Без доказательства.

Сведение полуунификации к проверке типов

Теорема

Разрешимость задачи проверки типов для F эквивалентна разрешимости полуунификции для $\{\tau_1 \leqslant \mu_1, \tau_2 \leqslant \mu_2\}$ при $\tau_1, \tau_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{T}$.

Доказательство.

Пусть даны $\tau_1, \tau_2, \mu_1, \mu_2$ со свободными переменными $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Рассмотрим контекст:

$$\Gamma := \{b : \forall\beta\gamma.(\gamma \to \gamma) \to \beta,\ \ c : \forall\alpha_1 \ldots \alpha_n \delta_1 \delta_2.(\mu_1 \to \delta_1) \to (\delta_2 \to \mu_2) \to (\tau_1 \to \tau_2)\}$$

И построим формулу:

$$\Gamma \vdash (b\ (\lambda x.c\ x\ x)) : \beta$$

- Решение задачи полуунификации даёт доказуемость формулы в F.
- Наличие доказательства формулы в F позволяет решить задачу полуунификации.

$\square$

По решению строим доказательство

Предположим, есть S, S_1, S_2, что $S_1(S(\tau_1)) = S(\mu_1)$ и $S_2(S(\tau_2)) = S(\mu_2)$.
Рассмотрим $\Gamma' := \Gamma,\ x : \forall.S(\tau_1) \to S(\tau_2)$.
$\Gamma := \{b : \forall\beta\gamma.(\gamma \to \gamma) \to \beta,\ \ c : \forall\alpha_1 \dots \alpha_n\delta_1\delta_2.(\mu_1 \to \delta_1) \to (\delta_2 \to \mu_2) \to (\tau_1 \to \tau_2)\}$

Тогда легко построить вывод следующих формул, применив правила подстановки:

(1) $\Gamma' \vdash c : (S(\mu_1) \to S_1(S(\tau_2))) \to (S_2(S(\tau_1)) \to S(\mu_2)) \to (S(\tau_1) \to S(\tau_2))$
(2) $\Gamma' \vdash x : S_1(S(\tau_1)) \to S_1(S(\tau_2))$
(3) $\Gamma' \vdash x : S_2(S(\tau_1)) \to S_2(S(\tau_2))$

Воспользуемся полуунификацией: $S(\mu_1) = S_1(S(\tau_1))$ и $S(\mu_2) = S_2(S(\tau_2))$

(4) $\Gamma' \vdash cx : (S_2(S(\tau_1)) \to S(\mu_2)) \to (S(\tau_1) \to S(\tau_2))$
(5) $\Gamma' \vdash cxx : S(\tau_1) \to S(\tau_2)$

β — связанная, потому можем гарантировать $S(\beta) = \beta$, $S_1(\beta) = \beta$, $S_2(\beta) = \beta$.

(6) $\Gamma' \vdash cxx : \forall.S(\tau_1) \to S(\tau_2)$
(7) $\Gamma \vdash \lambda x.cxx : (\forall.S(\tau_1) \to S(\tau_2)) \to (\forall.S(\tau_1) \to S(\tau_2))$
(8) $\Gamma \vdash b : ((\forall.S(\tau_1) \to S(\tau_2)) \to (\forall.S(\tau_1) \to S(\tau_2))) \to \beta$
(9) $\Gamma \vdash b\ (\lambda x.cxx) : \beta$

По доказательству строим решение

$\Gamma := \{b : \forall\beta\gamma.(\gamma \to \gamma) \to \beta,\ \ c : \forall\alpha_1 \dots \alpha_n\delta_1\delta_2.(\mu_1 \to \delta_1) \to (\delta_2 \to \mu_2) \to (\tau_1 \to \tau_2)\}$

Пусть доказуемо $\Gamma \vdash b\ (\lambda x.cxx) : \beta$. В формуле нет редексов, потому каждой конструкции должно соответствовать применение соответствующего правила.

Ветка, определяющая тип $\lambda x.cxx$:

$\Gamma, x : \sigma \vdash c : (T(\mu_1) \to T(\delta_1)) \to (T(\delta_2) \to T(\mu_2)) \to (T(\tau_1) \to T(\tau_2))$

$\Gamma, x : \sigma \vdash x : T(\mu_1) \to T(\delta_1)$

$\Gamma, x : \sigma \vdash cx : (T(\delta_2) \to T(\mu_2)) \to (T(\tau_1) \to T(\tau_2))$

$\Gamma, x : \sigma \vdash x : T(\delta_2) \to T(\mu_2)$

$\Gamma, x : \sigma \vdash cxx : T(\tau_1) \to T(\tau_2)$

$\Gamma, x : \sigma \vdash cxx : \forall.T(\tau_1) \to T(\tau_2)$

$\Gamma \vdash \lambda x.cxx : \sigma \to \forall.T(\tau_1) \to T(\tau_2)$

Также, вывод типа b должен оканчиваться на такую формулу:

$\Gamma \vdash b : (\varphi \to \varphi) \to \beta$

Типизация $b(\lambda x.cxx)$ возможна только при помощи правила для применения:

$\Gamma \vdash b(\lambda x.cxx) : \beta$

Анализ доказательства

Правило для вывода типа $b(\lambda x.cxx)$

$$\frac{\Gamma \vdash b : (\varphi \to \varphi) \to \beta \qquad \Gamma \vdash \lambda x.cxx : \sigma \to \forall.T(\tau_1) \to T(\tau_2)}{\Gamma \vdash b(\lambda x.cxx) : \beta}$$

даёт $\varphi = \sigma = \forall.T(\tau_1) \to T(\tau_2)$

Анализируя же правила типизации x:

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : T(\mu_1) \to T(\delta_1)} \quad \frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : T(\delta_2) \to T(\mu_2)}$$

получим четыре равенства:

$T_1(T(\tau_1)) = T(\mu_1)$, $T_2(T(\tau_1)) = T(\delta_2)$, $T_1(T(\tau_2)) = T(\delta_1)$, $T_2(T(\tau_2)) = T(\mu_2)$

$$|\sigma| = \begin{cases} \alpha, & \sigma = \alpha \\ |\tau_1| \to |\tau_2|, & \sigma = \tau_1 \to \tau_2 \\ |\tau|, & \sigma = \forall\alpha.\tau \end{cases}$$

$S_k(\alpha_k) = |T_k(\alpha_k)|$, и $S_k(\varepsilon) = \varepsilon$ для других переменных.

Дополнительные факты

- Задача проверки типов для F эквивалентна задаче нахождения типов.
- Другие методы доказательства: например, унификация второго порядка.