

承诺书

我们完全清楚，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式，包括电话、电子邮件、“贴吧”、QQ 群、微信群等，与队外的任何人（包括指导教师）交流、讨论与赛题有关的问题；无论主动参与讨论还是被动接收讨论信息都是严重违反竞赛纪律的行为。

我们以中国大学生名誉和诚信郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会,可将我们的论文以任何形式进行公开展示(包括进行网上公示,在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等)。

我们的报名参赛队号（12 位数字全国统一编号）:

参赛队员(打印并签名): 1. _____

3. _____

(指导教师签名意味着对参赛队的行为和论文的真实性负责)

日期: 2021 年 09 月 11 日

(请勿改动此页内容和格式。此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面，注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对，如填写错误，论文可能被取消评奖资格。)

赛区评阅编号：_____
(由赛区填写)

全国评阅编号：_____
(全国组委会填写)

2021 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人						
备 注						

送全国评阅统一编号：
(赛区组委会填写)

(请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页。)

液滴铺展问题

摘要

水滴铺展问题是一个涉及到流体力学，表面现象等的综合性问题。人类对水滴在固体基板上铺展与稳定的研究从只能研究稳定态的杨氏方程开始，从表面吉布斯函数和表面张力出发，一直探索到拉普拉斯方程，直到近年来中国科学技术大学的最新研究成果杨氏方程的微观力学解释..... 小小的液滴之中蕴含了无数深刻的物理学知识。而如若液滴非稳定，其运动状态又只能用纳维尔-斯托克斯方程这样经典但又深奥难以解决的方程来描述。我们学习研究了前人的成果，在这基础上对几种不同初始情况下的液滴建立了不同的模型来拟合它们形态各异的铺展现象，对比了不同模型之间结果的异同，并且讨论了他们的适用范围和模型建立的合理性。在求解数学模型时，我们又运用了不同的数值计算方法去来求解一阶常微分方程和二阶偏微分方程等难以求得解析解的模型，还使用 Matlab、COMSOL 等软件对数值解进行可视化，且在 Matlab 中设计了合理的算法对第一问的模型进行综合求解。

针对问题一，我们论述了重力对于液滴形态影响极小，可以忽略不计，因此为了易于确定液滴铺展的形变过程，我们提出了球冠模型，将液滴形态随时间的变化问题转化为固液接触面半径随时间的变化问题。基于球面对称性，我们对于接触面三相交界处的液角微元进行受力分析，在综合考虑汽-液、液-液界面液体自身表面内聚力、固体基板对液角微元的吸引力、液滴重力产生的压力与液滴水平层流之间的黏性力后对于液角微元经行受力分析。并基于学界最新提出的杨氏方程微观力学解释，巧妙的将三相交界处三种毛细力与杨氏方程中体现的界面张力建立联系以确定毛细力取值函数，并与我们推导出的压力、粘滞力函数综合构建出描述液角微元运动状态的动力学模型，最终通过 Runge-Kutta 迭代法编程求解。

在问题二中，水滴将先在空气中进行加速下落，而受粘滞阻力其撞击速度不确定，我们根据其释放高度对于其收下落尾速度进行讨论。此后液滴由于撞击而产生形变，不能再简单地视为球缺型，且不利于使用微元法分析受力情况。我们采用了 *Navier – Stokes* 公式对液滴轮廓线进行建模，并通过 *Levelset* 法对 *Navier – Stokes* 公式进行简化处理，使用 COMSOL 软件对模型进行求解。并验证了第一题所建模型的正确性。

在问题三中，微液滴不再与固体基质作用，而是与液体平面相作用，此文中我们以油层作为碰撞液体壁。与固体基质碰撞时的不同是，液体平面会在碰撞过程中发生形变且需要判断水滴是否进入液体基质。我们根据两种液体的密度、动力黏度与界面张力计算其相场变量函数的迁移率，进而确定水滴在油相当中的状态，最后使用 COMSOL 软件进行仿真模拟。

关键字：液滴碰撞 流体力学 液角微元 COMSOL 多相流

一、模板的基本使用 [1]

要使用 \LaTeX 来完成建模论文，首先要确保正确安装一个 \LaTeX 的发行版本。

- Mac 下可以使用 MacTeX
- Linux 下可以使用 \TeX Live ;
- windows 下可以使用 \TeX Live 或者 MikTeX ;

具体安装可以参考 [Install-LaTeX-Guide-zh-cn](#) 或者其它靠谱的文章。另外可以安装一个易用的编辑器，例如 \TeX studio 。

使用该模板前，请阅读模板的使用说明文档。下面给出模板使用的大概样式。

```
\documentclass{cumcmthesis}
%\documentclass[withoutpreface,bwprint]{cumcmthesis} %去掉封面与编号页

\title{论文题目}
\tihao{A} % 题号
\baominghao{4321} % 报名号
\schoolname{你的大学}
\membera{成员A}
\memberb{成员B}
\memberc{成员C}
\supervisor{指导老师}
\yearinput{2017} % 年
\monthinput{08} % 月
\dayinput{22} % 日

\begin{document}
  \maketitle
  \begin{abstract}
    摘要的具体内容。
    \keywords{关键词1\quad 关键词2\quad 关键词3}
  \end{abstract}
  \tableofcontents
  \section{问题重述}
  \subsection{问题的提出}
  \section{模型的假设}
  \section{符号说明}
  \begin{center}
    \begin{tabular}{cc}
      \hline
      \makebox[0.3\textwidth][c]{符号} & \makebox[0.4\textwidth][c]{意义} \\ \hline
      D & 木条宽度 (cm) \\ \hline
    \end{tabular}
  \end{center}
\end{document}
```

```

\end{center}
\section{问题分析}
\section{总结}
\begin{thebibliography}{9}%宽度9
    \bibitem{bib:one} ....
\end{thebibliography}
\begin{appendices}
    附录的内容。
\end{appendices}
\end{document}

```

根据要求，电子版论文提交时需去掉封面和编号页。可以加上 `withoutpreface` 选项来实现，即：

```
\documentclass[withoutpreface]{cumcmthesis}
```

这样就能实现了。打印的时候有超链接的地方不需要彩色，可以加上 `bwprint` 选项。

另外目录也是不需要的，将 `\tableofcontents` 注释或删除，目录就不会出现了。

团队的信息填入指定的位置，并且确保信息的正确性，以免因此白忙一场。

编译记得使用 `xelatex`，而不是用 `pdflatex`。在命令行编译的可以按如下方式编译：

```
xelatex example
```

或者使用 `latexmk` 来编译，更推荐这种方式。

```
latexmk -xelatex example
```

下面给出写作与排版上的一些建议。

二、图片

建模中不可避免要插入图片。图片可以分为矢量图与位图。位图推荐使用 `jpg, png` 这两种格式，避免使用 `bmp` 这类图片，容易出现图片插入失败这样情况的发生。矢量图一般有 `pdf, eps`，推荐使用 `pdf` 格式的图片，尽量不要使用 `eps` 图片，理由相同。

注意图片的命名，避免使用中文来命名图片，可以用英文与数字的组合来命名图片。避免使用 `1, 2, 3` 这样顺序的图片命名方式。图片多了，自己都不清楚那张图是什么了，命名尽量让它有意义。下面是一个插图的示例代码。

注意 `figure` 环境是一个浮动体环境，图片的最终位置可能会跑动。`[!h]` 中的 `h` 是 `here` 的意思，`!` 表示忽略一些浮动体的严格规则。另外里面还可以加上 `bt` 选项，它们分别是 `bottom, top, page` 的意思。只要这几个参数在花括号里面，作用是不分先后顺序



图 1 电路图

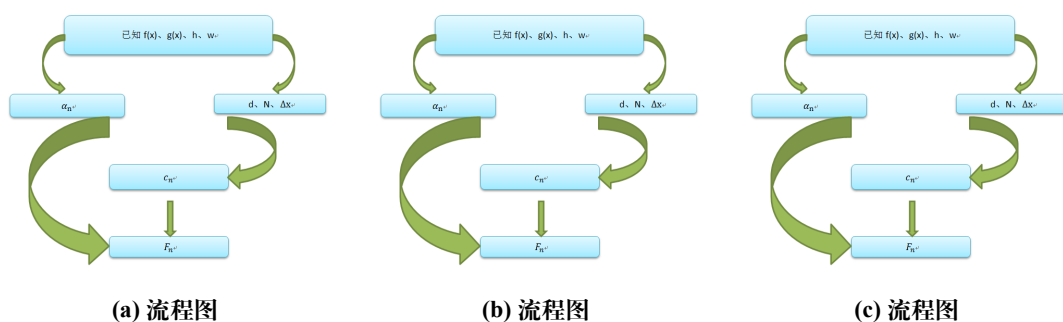


图 2 多图并排示例

的。page 在这里表示浮动页。

`\label{fig:circuit-diagram}` 是一个标签，供交叉引用使用的。例如引用图片 `\cref{fig:circuit-diagram}` 的实际效果是图 1。图片是自动编号的，比起手动编号，它更加高效。`\cref{label}` 由 `cleveref` 宏包提供，比普通的 `\ref{label}` 更加自动化。label 要确保唯一，命名方式推荐用图片的命名方式。

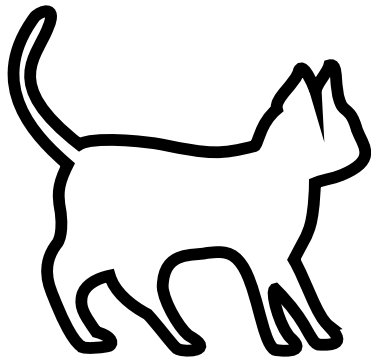
图片并排的需求解决方式多种多样，下面用 `minipage` 环境来展示一个简单的例子。注意，以下例子用到了 `subcaption` 命令，需要加载 `subcaption` 宏包。

这相当于整体是一张大图片，大图片引用是图 2，子图引用别分是图 2a、图 2b、图 2c。

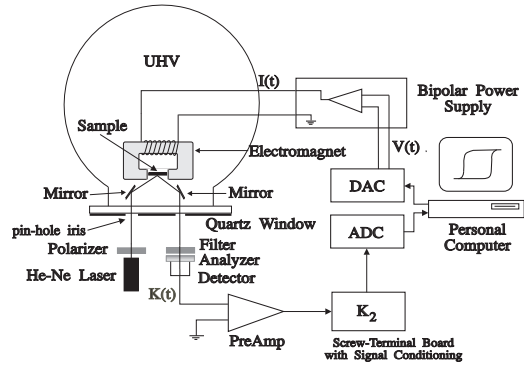
如果原本两张图片的高度不同，但是希望它们缩放后等高的排在同一行，参考这个例子：

三、绘制普通三线表格

表格应具有三线表格式，因此常用 `booktabs` 宏包，其标准格式如表 1 所示。



(a) 一只猫



(b) 电路图

图 3 多图并排示例

表 1 标准三线表格

$D(\text{in})$	$P_u(\text{lbs})$	$u_u(\text{in})$	β	$G_f(\text{psi.in})$
5	269.8	0.000674	1.79	0.04089
10	421.0	0.001035	3.59	0.04089
20	640.2	0.001565	7.18	0.04089

其绘制表格的代码及其说明如下。

```
\begin{table}[!htbp]
  \caption[标签名]{中文标题}
  \begin{tabular}{cc...c}
    \toprule[1.5pt]
    表头第1个格 & 表头第2个格 & ... & 表头第n个格 \\
    \midrule[1pt]
    表中数据(1,1) & 表中数据(1,2) & ... & 表中数据(1,n)\\
    表中数据(2,1) & 表中数据(2,2) & ... & 表中数据(2,n)\\
    .....\\
    表中数据(m,1) & 表中数据(m,2) & ... & 表中数据(m,n)\\
    \bottomrule[1.5pt]
  \end{tabular}
\end{table}
```

table 环境是一个将表格嵌入文本的浮动环境。tabular 环境的必选参数由每列对应一个格式字符所组成：c 表示居中，l 表示左对齐，r 表示右对齐，其总个数应与表的列数相同。此外，@{文本}可以出现在任意两个上述的列格式之间，其中的文本将被插入每一行的同一位置。表格的各行以\\分隔，同一行的各列则以 & 分隔。\\toprule、\\midrule

和 `\bottomrule` 三个命令是由 `booktabs` 宏包提供的，其中 `\toprule` 和 `\bottomrule` 分别用来绘制表格的第一条（表格最顶部）和第三条（表格最底部）水平线，`\midrule` 用来绘制第二条（表头之下）水平线，且第一条和第三条水平线的线宽为 1.5pt，第二条水平线的线宽为 1pt。引用方法与图片的相同。

四、公式

数学建模必然涉及不少数学公式的使用。下面简单介绍一个可能用得上的数学环境。

首先是行内公式，例如 θ 是角度。行内公式使用 `$` `$` 包裹。

行间公式不需要编号的可以使用 `\[` `\]` 包裹，例如

$$E = mc^2$$

其中 E 是能量， m 是质量， c 是光速。

如果希望某个公式带编号，并且在后文中引用可以参考下面的写法：

$$E = mc^2 \tag{1}$$

式 (1) 是质能方程。

多行公式有时候希望能够在特定的位置对齐，以下是其中一种处理方法。

$$P = UI \tag{2}$$

$$= I^2 R \tag{3}$$

`&` 是对齐的位置，`&` 可以有多个，但是每行的个数要相同。

矩阵的输入也不难。

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

分段函数这些可以用 `case` 环境，但是它要放在数学环境里面。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ 为无理数,} \\ 1 & x \text{ 为有理数.} \end{cases}$$

在数学环境里面，字体用的是数学字体，一般与正文字体不同。假如要公式里面有个别文字，则需要把这部分放在 `text` 环境里面，即 `\text{文本环境}`。

公式中个别需要加粗的字母可以用 `$\bm{math symbol}$`。如 $\alpha a \alpha a$ 。

以上仅简单介绍了基础的使用，对于更复杂的需求，可以阅读相关的宏包手册，如 `amsmath`。

希腊字母这些如果不熟悉，可以去查找符号文件 `symbols-a4.pdf`，也可以去 `detexify` 网站手写识别。另外还有数学公式识别软件 `mathpix`。

下面简单介绍一下定理、证明等环境的使用。

定义 1 定义环境

定义 1 除了告诉你怎么使用这个环境以外，没有什么其它的意义。

除了 `definition` 环境，还可以使用 `theorem`、`lemma`、`corollary`、`assumption`、`conjecture`、`axiom`、`principle`、`problem`、`example`、`proof`、`solution` 这些环境，根据论文的实际需求合理使用。

定理 1 这是一个定理。

由定理 1 我们知道了定理环境的使用。

引理 1 这是一个引理。

由引理 1 我们知道了引理环境的使用。

推论 1 这是一个推论。

由推论 1 我们知道了推论环境的使用。

假设 1 这是一个假设。

由假设 1 我们知道了假设环境的使用。

猜想 1 这是一个猜想。

由猜想 1 我们知道了猜想环境的使用。

公理 1 这是一个公理。

由公理 1 我们知道了公理环境的使用。

定律 1 这是一个定律。

由定律 1 我们知道了定律环境的使用。

问题 1 这是一个问题。

由问题 1 我们知道了问题环境的使用。

例 1 这是一个例子。

由例 1 我们知道了例子环境的使用。

证明 1 这是一个证明。

由证明 1 我们知道了证明环境的使用。

解 1 这是一个解。

由解 1 我们知道了解环境的使用。

五、其它小功能

5.1 脚注

利用 `\footnote{具体内容}` 可以生成脚注¹。

5.2 无序列表与有序列表

无序列表是这样的：

- one
- two
- ...

有序列表是这样子的：

1. one
2. two
3. ...

5.3 字体加粗与斜体

如果想强调部分内容,可以使用加粗的手段来实现。加粗字体可以用 `\textbf{加粗}` 来实现。例如：**这是加粗的字体。This is bold fonts**。

中文字体没有斜体设计，但是英文字体有。斜体 *Italics*。

¹脚注可以补充说明一些东西

六、参考文献与引用

参考文献对于一篇正式的论文来说是必不可少的，在建模中重要的参考文献当然应该列出。 \LaTeX 在这方面的功能也是十分强大的，下面介绍一个比较简单的参考文献制作方法。有兴趣的可以学习 `bibtex` 或 `biblatex` 的使用。

\LaTeX 的入门书籍可以看《 \LaTeX 入门》[?]。这是一个简单的引用，用 `\cite{bibkey}` 来完成。要引用成功，当然要维护好 `bibitem` 了。下面是个简单的例子。

参考文献

[1] HP McKean Jr. Nagumo's equation. Advances in mathematics, 4(3):209–223, 1970.

附录 A 模板所用的宏包

表 2 宏包罗列

模板中已经加载的宏包				
ambsy	amsfonts	amsgen	amsmath	amsopn
amssymb	amstext	appendix	array	atbegshi
atveryend	auxhook	bigdelim	bigintcalc	bigstrut
bitset	bm	booktabs	calc	caption
caption3	CJKfntef	cprotect	ctex	ctexhook
ctexpatch	enumitem	etexcmds	etoolbox	everysel
expl3	fix-cm	fontenc	fontspec	fontspec-xetex
geometry	getttitlestring	graphics	graphicx	hobsub
hobsub-generic	hobsub-hyperref	hopatch	hxdetex	hycolor
hyperref	ifluatex	ifpdf	ifthen	ifvtex
ifxdetex	indentfirst	infwarerr	intcalc	keyval
kvdefinekeys	kvoptions	kvsetkeys	l3keys2e	letltxmacro
listings	longtable	lstmisc	ltxcaption	ltxcmds
multirow	nameref	pdfescape	pdftexcmds	refcount
rerunfilecheck	stringenc	suffix	titletoc	tocloft
trig	ulem	uniquecounter	url	xcolor
xcolor-patch	xeCJK	xeCJKfntef	xeCJK-listings	xparse
xtemplate	zhnumber			

以上宏包都已经加载过了，不要重复加载它们。

附录 B 排队算法—matlab 源程序

```

kk=2; [mdd,ndd]=size(dd);
while ~isempty(V)
    [tmpd,j]=min(W(i,V)); tmpj=V(j);
    for k=2:ndd
        [tmp1,jj]=min(dd(1,k)+W(dd(2,k),V));
        tmp2=V(jj); tt(k-1,:)= [tmp1,tmp2,jj];
    end
    tmp=[tmpd,tmpj,j;tt]; [tmp3,tmp4]=min(tmp(:,1));
    if tmp3==tmpd, ss(1:2, kk)=[i;tmp(tmp4,2)];
    else, tmp5=find(ss(:,tmp4)~=0); tmp6=length(tmp5);
    if dd(2,tmp4)==ss(tmp6,tmp4)
        ss(1:tmp6+1, kk)=[ss(tmp5,tmp4);tmp(tmp4,2)];
    else, ss(1:3, kk)=[i;dd(2,tmp4);tmp(tmp4,2)];
    end; end
    dd=[dd, [tmp3;tmp(tmp4,2)]]; V(tmp(tmp4,3))=[];
    [mdd,ndd]=size(dd); kk=kk+1;
end; S=ss; D=dd(1,:);

```

附录 C 规划解决程序—lingo 源代码

```

kk=2;
[mdd,ndd]=size(dd);
while ~isempty(V)
    [tmpd,j]=min(W(i,V)); tmpj=V(j);
    for k=2:ndd
        [tmp1,jj]=min(dd(1,k)+W(dd(2,k),V));
        tmp2=V(jj); tt(k-1,:)= [tmp1,tmp2,jj];
    end
    tmp=[tmpd,tmpj,j;tt]; [tmp3,tmp4]=min(tmp(:,1));
    if tmp3==tmpd, ss(1:2, kk)=[i;tmp(tmp4,2)];
    else, tmp5=find(ss(:,tmp4)~=0); tmp6=length(tmp5);
    if dd(2,tmp4)==ss(tmp6,tmp4)
        ss(1:tmp6+1, kk)=[ss(tmp5,tmp4);tmp(tmp4,2)];
    else, ss(1:3, kk)=[i;dd(2,tmp4);tmp(tmp4,2)];
    end;
end
    dd=[dd, [tmp3;tmp(tmp4,2)]]; V(tmp(tmp4,3))=[];
    [mdd,ndd]=size(dd);
    kk=kk+1;
end;
S=ss;
D=dd(1,:);

```