Introduzione

Serie "Fermat's Christmas Theorem"

2025-11-29

ENG ITA

Un po' di storia

Il giorno di Natale (25 dicembre 1640), Pierre de Fermat scrisse una lettera a Marin Mersenne in cui affermava che ogni numero primo della forma $4n + 1$ può essere scritto come somma di due quadrati. Dichiarò di avere una prova inoppugnabile dell'enunciato.

Il risultato era già stato congetturato da Albert Girard, ma la prima dimostrazione completa fu data da Leonhard Euler, che la annunciò in una lettera inviata a Christian Goldbach.

Oggi il teorema è conosciuto come "Teorema di Fermat sulle somme di due quadrati" o "Teorema di Natale", a causa della data in cui Fermat dichiarò di averne trovato la dimostrazione.

Informazioni storiche più dettagliate si possono trovare nel capitolo corrispondente di Dickinson (1938).

A volte i pensieri casuali sono piacevoli

Siamo annoiati, quindi cominciamo a scrivere qualche calcolo inutile sul nostro quaderno. Ci piacciono molto i numeri primi (spiegheremo il perché più avanti nei post), quindi iniziamo scrivendone alcuni:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 \dots \tag{1}$$

Visto che non abbiamo niente di meglio da fare, cominciamo a porci alcune domande su di loro, ad esempio:

- quanti numeri primi esistono?
- quali numeri possono essere espressi come prodotto di numeri primi?

Queste domande ci piacciono (e daremo loro una risposta nei prossimi post), ma nel processo ce ne poniamo una più sottile:

Domanda: Quando possiamo scrivere un numero primo p come somma di due quadrati? In altre parole, quando possiamo scrivere

$$p = a^2 + b^2$$

con a e b interi?

Cerchiamo di avvicinarci al problema per tentativi, per capirlo meglio.

- Consideriamo il numero primo 2. Possiamo scriverlo come somma di due quadrati? Be', non ci sono molti modi di scrivere 2 come somma di due interi:

  $$2 = 1 + 1$$

  Ma poiché $1^2 = 1$ abbiamo

  $$2 = 1^2 + 1^2$$

  quindi possiamo effettivamente scrivere 2 come somma di due quadrati.

- Proviamo con 3: i soli modi possibili di scrivere 3 come somma di due numeri sono $3 = 1 + 2$ e $3 = 0 + 3$. Tuttavia 2 e 3 non sono quadrati, quindi 3 non ha la proprietà.

- Passiamo al numero 5: possiamo scriverlo come $5 = 2 + 3$, ma siccome 2 e 3 non sono quadrati, dobbiamo cercare un'altra scrittura, che troviamo in $5 = 4 + 1$, dato che $4 = 2^2$ e $1 = 1^2$.

  $$5 = 1^2 + 2^2.$$

- E 7? Possiamo scrivere 7 come:

  - $7 = 0 + 7$, ma 7 non è un quadrato;
  - $7 = 1 + 6$, ma 6 non è un quadrato;
  - $7 = 2 + 5$, ma né 2 né 5 sono quadrati;
  - $7 = 3 + 4$, ma 3 non è un quadrato.

Quindi 7 non può essere scritto come somma di due quadrati.

Continuando questo processo, troviamo che tra i primi nella lista sopra, quelli che soddisfano la proprietà sono:

$$2, 5, 13, 17, 29, 37, 41 \ldots \tag{2}$$

Vogliamo indagare meglio le proprietà di questi primi. Per prima cosa, osserviamo che ci interessano solo i primi dispari (cioè tutti i primi diversi da 2), dato che sappiamo già che 2 può essere scritto come somma di due quadrati. Pertanto, iniziamo a guardarli con attenzione e congetturare il seguente fatto:

> Tutti i primi *dispari* che possono essere scritti come somma di due quadrati hanno resto 1 quando divisi per 4.

Tuttavia, questo ci dice solo che *se* un primo dispari è una somma di due quadrati, allora lascia resto 1 quando diviso per 4. Ma in generale non è facile verificare se un primo è somma di due quadrati, perché dovremmo provare molte possibilità (guarda 7 e immagina primi più grandi). Se vogliamo soltanto sapere se un primo ha resto 1 quando diviso per 4, possiamo calcolarlo velocemente e risparmiare tempo.

Ma forse non abbiamo sprecato tempo a pensare a questo problema. Dal momento che possiamo controllare facilmente qual è il resto di un primo nella divisione per 4, cosa succede se **possiamo scrivere un primo dispari come somma di due quadrati ogni volta che ha resto** 1 **in una tale divisione?** Sarebbe ottimo: potremmo evitare lunghe verifiche caso per caso e limitarci a calcolare il resto, come abbiamo imparato alle elementari. Per fortuna, il teorema su cui vogliamo concentrarci ci dà la risposta:

Theorem 0.1 (Fermat's Christmas Theorem)**.** *Un numero primo dispari p può essere scritto come somma di due quadrati se e solo se ha resto 1 quando diviso per 4.*

Ora capiamo perché il teorema è interessante: riduce un problema difficile (stabilire se un primo dispari è somma di due quadrati) a uno semplice (controllare se il suo resto è 1 nella divisione per 4).

Qualche piano per il futuro

Ho scelto di parlare di questo teorema perché, per me, la parte più interessante è la sua dimostrazione. Come studente di matematica passo la maggior parte del mio tempo a cercare di capire dimostrazioni (per me la matematica è soprattutto questo).

Forse alcuni di voi si stanno chiedendo:

> Che cos'è una dimostrazione matematica?

Non è una domanda semplice (è piuttosto filosofica). In ogni caso, possiamo pensare a una dimostrazione come a un argomento che ci convince della verità di una certa proposizione. Probabilmente non tutti gli argomenti che presenterò saranno dimostrazioni pienamente formali, perché non sarò sempre molto rigoroso. Il mio obiettivo è trasmettere le idee generali più che i dettagli tecnici. Spero che il lettore più attento mi perdonerà se a volte preferisco la semplicità al rigore.

Lo scopo è aiutare i lettori interessati a convincersi del Fermat's Christmas Theorem e, lungo il percorso, spiegare alcune idee matematiche di base.

Un possibile piano per la dimostrazione sarà:

- parlare di alcune proprietà generali degli interi
- parlare di aritmetica modulare
- parlare degli interi gaussiani
- mettere insieme tutti i pezzi

Spero che vi godiate il percorso tanto quanto l'ho fatto io la prima volta che ho imparato queste bellissime idee.

A presto!

> Questo articolo fa parte della serie *Fermat's Christmas Theorem*.
>
> Prossimo: How many primes are there?

Dickinson, L. J. 1938. *History of the Theory of Numbers*. New York: Chelsea Publishing Company.