

Example. 举例说明

对于面值为 1, 5, 11 的钞票, 如何用最少张数的钞票来凑出 N 是我们需要关心的

例如, 对于 $N = 15$ 如何求解.

抽象过程 { 首先对过程作抽象: 我们设 $f(x)$ 表示凑出 x 所耗费的最少钞票张数.
那么有 $f(1)=1, f(5)=1, f(11)=1$.
虽然用 5 张面值 1 也能凑成 5, 但要用 5 张, 不如直接用 1 张 5 来凑, 这样耗费更少不是吗.
抽象过程结束, 我们回到问题本身.

对于 $f(15)$ 如何求解呢? 根据最直观的三个已知条件 $f(1)=1, f(5)=1, f(11)=1$
 一张 1 一张 5 一张 11

我们先利用已知条件进行处理.

$15-1=14, 15-5=10, 15-11=4$.
 ↓用一张 1 ↓用一张 5 ↓用一张 11
 $f(14)$ $f(10)$ $f(4)$
 凑 14 最少需要几张 凑 10 呢 凑 4 呢.

那么就有 $f(15) = \min \begin{cases} ① f(1) + f(14) \\ ② f(5) + f(10) \\ ③ f(11) + f(4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① f(14) + 1 \\ ② f(10) + 1 \\ ③ f(4) + 1 \end{cases}$ 因为都是 1 所以不影响我们将 $f(15)$ 转换成求 $\rightarrow f(14), f(10), f(4)$ 的最小值问题

其实问题在此处就已经结束了. 我们将 $f(15)$ 问题分割成 $f(14), f(10), f(4)$ 的最优解了.

凑 15

凑 14

凑 10

凑 4

也就是求 $f(14), f(10), f(4)$ 中的最小值.

但是事实就是, 结果还没有出现, 我并不知道凑 15 or 14 or 10 or 4 的最小张数啊?

没错, 所以接下来就是枯燥且重复性的工作了

对于重复性的工作我们通常用计算机程序来执行.

得 $f(4)$ { 先对 $f(4)$ 也就是凑 4 来说, 面值 11, 5 均大于 4, 无法用来凑面值, 所以只能用 1.
那么 $f(4) = f(4-1) + f(1) = f(3) + 1$
 → 同理 $f(3) = f(3-1) + f(1) = f(2) + 1$
 同理 $f(2) = f(2-1) + f(1) = f(1) + 1$
 又因为 $f(1) = 1 \Rightarrow f(2) = 2 \Rightarrow f(3) = 3 \Rightarrow f(4) = 4$
 当然了, 直觉上来说, 也只能用 4 张 1 来凑 4 了, 所以你的直觉通常比 program 要聪明的多
 也就是你

得 $f(10)$ { 那么对于 $f(10)$ 来说呢?
相信你的直觉, $f(10) = f(5) + f(5) \stackrel{f(5)=1}{=} 2$, 凑 10 要 2 张 5. 很容易是吧.
但是作为 program, 我们仍要对其进行分析.
由于 10 小于面值 11, 无法用 11 来凑, 所以我们用 5 和 1 来凑
所以 $f(10) = \min \begin{cases} f(10-5) + f(5) = f(5) + f(5) = 1 + 1 = 2 \\ f(10-1) + f(1) = f(9) + 1 \stackrel{\min}{=} \begin{cases} f(9-5) + f(5) + 1 = f(4) + 2 \stackrel{f(4)=4}{=} 6 \\ f(9-1) + f(1) + 1 = f(8) + 2 \stackrel{\min}{=} \dots \end{cases} \end{cases}$

$f(10) = 2 \Rightarrow 5 + 5$

$f(9) = 5 \Rightarrow 5 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$

$f(8) = 4 \Rightarrow 5 + 0 + 0 + 0 + 0$

$f(7) = 3 \Rightarrow 5 + 0 + 0 + 0$

$$f(6)=2 \Rightarrow \textcircled{5} \textcircled{1}$$

最后, 对于 $f(4)$.

还是同样的步骤. 14 终于比 11 大了 (可喜可贺), 用 11, 5, 1 均来凑

$$f(4) \equiv \begin{cases} f(4-1) + f(1) = f(3) + 1 = 3 + 1 = 4. \\ f(4-5) + f(5) = f(9) + 1 = 5 + 1 = 6 \\ f(4-1) + f(1) = f(3) + 1 = 3 + 1 = 4 \end{cases}$$

$$f(14)$$

$$f(14)=4 \Rightarrow \textcircled{11} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1}$$

$$f(13)=3 \Rightarrow \textcircled{11} \textcircled{1} \textcircled{1}$$

$$f(12)=2 \Rightarrow \textcircled{11} \textcircled{1}$$

$$f(13) \equiv \begin{cases} f(13-11) + f(11) = f(2) + 1 = 2 + 1 = \textcircled{3} \\ f(13-5) + f(5) = f(8) + 1 = 4 + 1 = \textcircled{5} \\ f(13-1) + f(1) = f(12) + 1 = 2 + 1 = \textcircled{3} \end{cases} \quad \text{min: } \textcircled{3}$$

$$f(12) \equiv \begin{cases} f(12-11) + f(11) = f(1) + 1 = 1 + 1 = \textcircled{2} \\ f(12-5) + f(5) = f(7) + 1 = 3 + 1 = \textcircled{4} \\ f(12-1) + f(1) = f(11) + 1 = 1 + 1 = \textcircled{2} \end{cases} \quad \text{min: } \textcircled{2}$$

回到最开始的问题

$$f(15) = \begin{cases} f(15-11) + f(11) = f(4) + f(11) = 4 + 1 = 5 \\ f(15-5) + f(5) = f(10) + f(5) = 2 + 1 = 3 \leftarrow \text{最小张数} \\ f(15-1) + f(1) = f(14) + f(1) = 4 + 1 = 5. \end{cases}$$

到这里, 计算也结束了.

答案就是 3 张 $\textcircled{5}$

已知条件.

$$f(1) = f(5) = f(11) = 1$$

推导条件.

$$f(4) = 4, f(10) = 2, f(14) = 4$$