Übungsheft Polynomdivision

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Lösungen auf Seite 24.

Der Abschnitt Grundlagen sollte nur bearbeitet werden, wenn es Probleme beim Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren von Summen oder bei der Anwendung der Potenzgesetze Probleme gibt.

1.1 Terme addieren, subtrahieren und multiplizieren

a) $3x^2 - 4x - 4 + x - 2 =$

b) $7x^2 + 4x - 6 + x^2 - 11x + 13 =$

c) $6x^2 - 2x - 1 + \Big(-4x^2 + 7x + 5 \Big) =$

---

d) $3x^3 + 4x^2 - \Big(2x^3 + 3 \Big) =$

e) $5x^3 + 9x + 4 - \Big(9x - 4 \Big) =$

f) $7x^2 - 9x + 2 - \Big(7x^3 + 9x^2 - 2x \Big) =$

g) $4x^2 - 3x + 2 - \Big(-x^2 - 3x \Big) =$

h) $8x^2 - 6x + 2 - \Big(3x^2 + 7x - 4 \Big) =$

---

i) $\Big(7x + 3 \Big) \cdot \Big(x - 3 \Big) =$

j) $\Big(9x - 1 \Big) \cdot \Big(9x + 1 \Big) =$

k) $\Big(x^2 + 6 \Big) \cdot \Big(-2x^2 + 7 \Big) =$

l) $\Big(1 + x \Big) \cdot \Big(x^2 - 5x - 6 \Big) =$

m) $\Big(x^2 - 3 \Big) \cdot \Big(3x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \Big) =$

1.2 Potenzgesetze anwenden

a) $x^9 \cdot x^5 =$

b) $x^7 \cdot x^2 =$

---

c) $x^7 : x^5 =$

d) $x^{12} : x^8 =$

---

e) $\dfrac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x} =$

2 Sehr einfache Polynomdivision

Lösung auf Seite 25.

Dieses Kapitel sollte nur bearbeitet werden, wenn das Verfahren heute zum ersten Mal angewendet wird.

Lösen Sie die folgenden Quotienten mithilfe der Polynomdivision!

Beispiel:

$$\begin{array}{rrrl}
\big(x^2 & +\ 5x & +\ 6\big) & : \big(x+3\big) = x+2 \\
-\big(x^2 & +\ 3x\big) & & \\
\hline
 & 2x & +\ 6 & \\
 & -\big(2x & +\ 6\big) & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}$$

a) $\big(x^2 + 2x - 15\big) : \big(x+5\big) =$

b) $\big(x^2 - 8x + 7\big) : \big(x-7\big) =$

c) $\big(x^2 + 12x + 27\big) : \big(x+9\big) =$

d) $\big(2x^2 + 3x - 20\big) : \big(x+4\big) =$

e) $\big(12x^2 - 18x - 12\big) : \big(4x+2\big) =$

3 Einfache Polynomdivision

Lösung auf Seite 26.

Lösen Sie die folgenden Quotienten mithilfe der Polynomdivision!

a) $\left(x^3 \; - \; x^2 \; - \; 24x \; - \; 36\right) : \left(x + 2\right) =$

b) $\left(x^3 \; - \; 5x^2 \; - \; 18x \; + \; 72\right) : \left(x - 6\right) =$

c) $\left(24x^3 \; + \; 52x^2 \; + \; 16x \; - \; 12\right) : \left(3x - 1\right) =$

d) $\left(24x^5 \; + \; 76x^4 \; + \; 20x^3 \; - \; 100x^2 \; - \; 44x \; + \; 24\right) : \left(2x + 3\right) =$

4 Komplexe Polynomdivision

Lösung auf Seite 27.

Lösen Sie die folgenden Quotienten mithilfe der Polynomdivision!

a) $\left(x^3 - 8x^2 + 17x - 6\right) : \left(x^2 - 5x + 2\right) =$

b) $\left(x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 6x + 8\right) : \left(x^3 + 4x^2 + x + 2\right) =$

c) $\left(6x^4 - 13x^3 + 9x^2 + 13x - 10\right) : \left(2x^3 - 3x^2 + x + 5\right) =$

d) $\left(4x^5 - 14x^4 + 16x^3 + 3x^2 - 19x + 5\right) : \left(2x^2 - 4x + 1\right) =$

e) $\left(20x^6 + 2x^5 - 31x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 5x + 3\right) : \left(4x^2 + 2x - 3\right) =$

5 Polynomdivision mit fehlenden Gliedern

Lösung auf Seite 28.

Lösen Sie die folgenden Quotienten mithilfe der Polynomdivision!

a) $\left(x^3 \quad - \; 1\right) : \left(x - 1\right) =$

b) $\left(x^9 \quad - \; 1\right) : \left(x^3 - 1\right) =$

c) $\left(x^4 \; - \; 7x^3 \; - \; 5x \; + \; 35\right) : \left(x - 7\right) =$

d) $\left(x^5 \; - \; 2x^3 \; - \; 8x\right) : \left(x^2 + 2\right) =$

e) $\left(x^7 + 2x^4 + 2x^2 - x + 2\right) : \left(x^4 + x^2 + 1\right) =$

f) $\left(6x^6 + 6x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 4x - 10\right) : \left(2x^2 + 2\right) =$

g) $\left(x^9 - 512\right) : \left(x - 2\right) =$

6 Polynomdivision mit Rest

Lösung auf Seite 30.

Lösen Sie die folgenden Quotienten mithilfe der Polynomdivision.

a) $\left(x^2 - 4x + 3\right) : \left(x + 5\right) =$

b) $\left(x^2 - 7x - 1\right) : \left(x - 2\right) =$

c) $\left(x^2 + 10x + 25\right) : \left(x - 5\right) =$

d) $\left(x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 1\right) : \left(x + 3\right) =$

e) $\left(x^3 - 4x^2 + 2x - 5\right) : \left(x^2 + 3\right) =$

f) $\left(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1\right) : \left(x^3 - x^2 + 1\right) =$

7 Polynomdivision mit Fehlern

Lösung auf Seite 31.

Durch Probieren wurde eine Lösung der folgenden Polynome gefunden. Diese wurde nun per Polynomdivision abgespalten. Dabei sind jedoch einige Fehler aufgetreten.

Finden und korrigieren Sie diese!

a)
$$
\begin{array}{l}
\left(x^2 - 2x - 3\right) : \left(x - 3\right) = x - 5 + \dfrac{-18}{x-3} \\
-\left(x^2 - 3x\right) \\
\hline
\quad -5x - 3 \\
\quad -\left(-5x + 15\right) \\
\hline
\qquad -18
\end{array}
$$

b)
$$
\begin{array}{l}
\left(x^2 + 5x + 6\right) : \left(x + 2\right) = x + 7 + \dfrac{20}{x+2} \\
-\left(x^2 + 2x\right) \\
\hline
\quad 7x + 6 \\
\quad -\left(7x + 14\right) \\
\hline
\qquad 20
\end{array}
$$

c)
$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 - 10x^2 + 17x - 8\right) : \left(x - 8\right) = x^2 + 2x + 1 \\
-\left(x^3 - 8x^2\right) \\
\hline
\quad 2x^2 + 17x - 8 \\
\quad -\left(2x^2 - 16x\right) \\
\hline
\qquad x - 8 \\
\qquad -\left(x - 8\right) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

d)
$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 - 6x^2 + 4x + 8\right) : \left(x - 2\right) = x - 6 + \dfrac{6x-4}{x-2} \\
-\left(x^3 - 2x\right) \\
\hline
\quad -6x^2 + 6x + 8 \\
\quad -\left(-6x^2 + 12\right) \\
\hline
\qquad 6x - 4
\end{array}
$$

e)
$$
\begin{array}{l}
\left(x^4 + 5x^3 - 52x^2 - 356x - 480\right) : \left(x + 5\right) = x^3 \\
-\left(x^4 + 5x^3\right) \\
\hline
\quad 0
\end{array}
$$

8 Weiterführende Aufgaben

Lösung auf Seite 32.

a) Beim Bestimmen der Lösungen der Gleichung $0 = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ wurde $x_1 = 3$ als Lösung gefunden. Nach Abspaltung des Linearfaktors $(x - 3)$ blieb $0 = x^2 + 4$ übrig.

Erklären Sie, was dieses Ergebnis für die Anzahl der Lösungen bedeutet!

b) Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion $y = f(x) = x^5 - 4x^4 - 15x^3 + 50x^2 + 64x - 96$ und stellen Sie anschließend deren Linearfaktorzerlegung auf!

c) Erläutern Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen den beiden dargestellten Polynomdivisionen!

$$\begin{array}{l} \left(x^2 - 4x - 21\right) : \left(x - 7\right) = x + 3 \\ \underline{-\left(x^2 - 7x\right)} \\ \qquad 3x - 21 \\ \qquad \underline{-\left(3x - 21\right)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^2 - 4x - 21\right) : \left(x - 7\right) = x + 3 \\ \underline{-x^2 + 7x} \\ \qquad 3x - 21 \\ \qquad \underline{-3x + 21} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Begründen Sie, warum beide Schreibweisen mathematisch korrekt sind!

d) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die folgenden Gleichungen stimmen! Erklären Sie Ihr Vorgehen! Können Sie mehr als eine Vorgehensweise beschreiben?

aa) $(x^2 + 6x + 8) : (x + a) = x + 4$

bb) $(x^2 - 3x - 10) : (x + a) = x - 5$

cc) $(x^2 - 4x + 16) : (x + a) = x - 4$

dd) $(x^3 + 8x^2 - 69x - 252) : (x + a) = x^2 - 4x - 21$

e) Schreiben Sie einem/r Freund/in einen Brief in dem Sie ihm/ihr mit eigenen Worten das Verfahren der Polynomdivision erklären!

f) Diskutieren Sie Vor- und Nachteile der beiden bekannten Schreibweisen für ganzrationale Funktionen:

- Allgemeine Form: $y = f(x) = 3x^4 - 9x^3 - 24x^2 + 36x + 48$
- Linearfaktorzerlegung: $y = f(x) = 3(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 4)$

g) Die nachfolgend dargestellte Funktionsgleichung soll die gleiche Funktion wie in Aufgabe f) beschreiben.

$$y = f(x) = (((3x - 9)x - 24)x + 36)x + 48$$

Zeigen Sie, dass diese Schreibweise in die allgemeine Form überführbar ist!

Notieren Sie wofür diese Funktionsschreibweise in der Praxis genutzt werden könnte!

L Lösungen

L.1 Grundlagen

L.1.1 Terme addieren, subtrahieren und multiplizieren

a) $3x^2 - 4x - 4 + x - 2 = 3x^2 - 3x - 6$

b) $7x^2 + 4x - 6 + x^2 - 11x + 13 = 8x^2 - 7x + 7$

c) $6x^2 - 2x - 1 + \left(-4x^2 + 7x + 5\right) = 2x^2 + 5x + 4$

---

d) $3x^3 + 4x^2 - \left(2x^3 + 3\right) = x^3 + 4x^2 - 3$

e) $5x^3 + 9x + 4 - \left(9x - 4\right) = 5x^3 + 8$

f) $7x^2 - 9x + 2 - \left(7x^3 + 9x^2 - 2x\right) = -7x^3 - 2x^2 - 7x + 2$

g) $4x^2 - 3x + 2 - \left(-x^2 - 3x\right) = 5x^2 + 2$

h) $8x^2 - 6x + 2 - \left(3x^2 + 7x - 4\right) = 5x^2 - 13x + 6$

---

i) $\left(7x + 3\right) \cdot \left(x - 3\right) = 7x^2 - 18x - 9$

j) $\left(9x - 1\right) \cdot \left(9x + 1\right) = 81x^2 - 1$

k) $\left(x^2 + 6\right) \cdot \left(-2x^2 + 7\right) = -2x^4 - 5x^2 + 42$

l) $\left(1 + x\right) \cdot \left(x^2 - 5x - 6\right) = x^3 - 4x^2 - 11x - 6$

m) $\left(x^2 - 3\right) \cdot \left(3x^3 - 5x^2 + 2x - 1\right) = 3x^5 - 5x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 6x + 3$

L.1.2 Potenzgesetze anwenden

a) $x^9 \cdot x^5 = x^{14}$

b) $x^7 \cdot x^2 = x^9$

---

c) $x^7 : x^5 = x^2$

d) $x^{12} : x^8 = x^4$

---

e) $\dfrac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x} = x^5$

L.2 Sehr einfache Polynomdivision

a)
$$\begin{array}{l}
\big(x^2 + 2x - 15\big) : \big(x+5\big) = x - 3 \\
\underline{-\big(x^2 + 5x\big)} \\
\qquad - 3x - 15 \\
\qquad \underline{-\big(- 3x - 15\big)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l}
\big(x^2 - 8x + 7\big) : \big(x-7\big) = x - 1 \\
\underline{-\big(x^2 - 7x\big)} \\
\qquad - x + 7 \\
\qquad \underline{-\big(- x + 7\big)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l}
\big(x^2 + 12x + 27\big) : \big(x+9\big) = x + 3 \\
\underline{-\big(x^2 + 9x\big)} \\
\qquad 3x + 27 \\
\qquad \underline{-\big(3x + 27\big)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l}
\big(2x^2 + 3x - 20\big) : \big(x+4\big) = 2x - 5 \\
\underline{-\big(2x^2 + 8x\big)} \\
\qquad - 5x - 20 \\
\qquad \underline{-\big(- 5x - 20\big)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

e)
$$\begin{array}{l}
\big(12x^2 - 18x - 12\big) : \big(4x+2\big) = 3x - 6 \\
\underline{-\big(12x^2 + 6x\big)} \\
\qquad - 24x - 12 \\
\qquad \underline{-\big(- 24x - 12\big)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

L.3 Einfache Polynomdivision

a)
$$
\begin{array}{rrrrl}
\big(x^3 & -\ x^2 & -\ 24x & -\ 36\big) & : \big(x+2\big) = x^2-3x-18 \\
-\big(x^3 & +\ 2x^2\big) & & & \\
 & -\ 3x^2 & -\ 24x & & \\
 & -\big(-\ 3x^2 & -\ 6x\big) & & \\
 & & -\ 18x & -\ 36 & \\
 & & -\big(-\ 18x & -\ 36\big) & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

b)
$$
\begin{array}{rrrrl}
\big(x^3 & -\ 5x^2 & -\ 18x & +\ 72\big) & : \big(x-6\big) = x^2+x-12 \\
-\big(x^3 & -\ 6x^2\big) & & & \\
 & x^2 & -\ 18x & & \\
 & -\big(x^2 & -\ 6x\big) & & \\
 & & -\ 12x & +\ 72 & \\
 & & -\big(-\ 12x & +\ 72\big) & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

c)
$$
\begin{array}{rrrrl}
\big(24x^3 & +\ 52x^2 & +\ 16x & -\ 12\big) & : \big(3x-1\big) = 8x^2+20x+12 \\
-\big(24x^3 & -\ 8x^2\big) & & & \\
 & 60x^2 & +\ 16x & & \\
 & -\big(60x^2 & -\ 20x\big) & & \\
 & & 36x & -\ 12 & \\
 & & -\big(36x & -\ 12\big) & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

d)
$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\big(24x^5 & +\ 76x^4 & +\ 20x^3 & -\ 100x^2 & -\ 44x & +\ 24\big) & : \big(2x+3\big) = \\
-\big(24x^5 & +\ 36x^4\big) & & & & & \\
 & 40x^4 & +\ 20x^3 & & & & \\
 & -\big(40x^4 & +\ 60x^3\big) & & & & \\
 & & -\ 40x^3 & -\ 100x^2 & & & \\
 & & -\big(-\ 40x^3 & -\ 60x^2\big) & & & \\
 & & & -\ 40x^2 & -\ 44x & & \\
 & & & -\big(-\ 40x^2 & -\ 60x\big) & & \\
 & & & & 16x & +\ 24 & \\
 & & & & -\big(16x & +\ 24\big) & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

$= 12x^4+20x^3-20x^2-20x+8$

L.4 Komplexe Polynomdivision

a)
$$\begin{array}{rrrrl}
\big(x^3 & -\ 8x^2 & +\ 17x & -\ 6\big) & : \left(x^2-5x+2\right) = x-3 \\
-\big(x^3 & -\ 5x^2 & +\ 2x\big) & & \\ \hline
 & -\ 3x^2 & +\ 15x & -\ 6 & \\
 & -\big(-\ 3x^2 & +\ 15x & -\ 6\big) & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrrl}
\big(x^4 & +\ 8x^3 & +\ 17x^2 & +\ 6x & +\ 8\big) & : \left(x^3+4x^2+x+2\right) = x+4 \\
-\big(x^4 & +\ 4x^3 & +\ x^2 & +\ 2x\big) & & \\ \hline
 & 4x^3 & +\ 16x^2 & +\ 4x & +\ 8 & \\
 & -\big(4x^3 & +\ 16x^2 & +\ 4x & +\ 8\big) & \\ \hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrrrrl}
\big(6x^4 & -\ 13x^3 & +\ 9x^2 & +\ 13x & -\ 10\big) & : \left(2x^3-3x^2+x+5\right) = 3x-2 \\
-\big(6x^4 & -\ 9x^3 & +\ 3x^2 & +\ 15x\big) & & \\ \hline
 & -\ 4x^3 & +\ 6x^2 & -\ 2x & -\ 10 & \\
 & -\big(-\ 4x^3 & +\ 6x^2 & -\ 2x & -\ 10\big) & \\ \hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rrrrrrl}
\big(4x^5 & -\ 14x^4 & +\ 16x^3 & +\ 3x^2 & -\ 19x & +\ 5\big) & : \left(2x^2-4x+1\right) = 2x^3-3x^2+x+5 \\
-\big(4x^5 & -\ 8x^4 & +\ 2x^3\big) & & & & \\ \hline
 & -\ 6x^4 & +\ 14x^3 & +\ 3x^2 & & & \\
 & -\big(-\ 6x^4 & +\ 12x^3 & -\ 3x^2\big) & & & \\ \hline
 & & 2x^3 & +\ 6x^2 & -\ 19x & & \\
 & & -\big(2x^3 & -\ 4x^2 & +\ x\big) & & \\ \hline
 & & & 10x^2 & -\ 20x & +\ 5 & \\
 & & & -\big(10x^2 & -\ 20x & +\ 5\big) & \\ \hline
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rrrrrrrl}
\big(20x^6 & +\ 2x^5 & -\ 31x^4 & +\ 4x^3 & +\ 7x^2 & -\ 5x & +\ 3\big) & : \left(4x^2+2x-3\right) = \\
-\big(20x^6 & +\ 10x^5 & -\ 15x^4\big) & & & & & \\ \hline
 & -\ 8x^5 & -\ 16x^4 & +\ 4x^3 & & & & \\
 & -\big(-\ 8x^5 & -\ 4x^4 & +\ 6x^3\big) & & & & \\ \hline
 & & -\ 12x^4 & -\ 2x^3 & +\ 7x^2 & & & \\
 & & -\big(-\ 12x^4 & -\ 6x^3 & +\ 9x^2\big) & & & \\ \hline
 & & & 4x^3 & -\ 2x^2 & -\ 5x & & \\
 & & & -\big(4x^3 & +\ 2x^2 & -\ 3x\big) & & \\ \hline
 & & & & -\ 4x^2 & -\ 2x & +\ 3 & \\
 & & & & -\big(-\ 4x^2 & -\ 2x & +\ 3\big) & \\ \hline
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

$$= 5x^4-2x^3-3x^2+x-1$$

L.5 Polynomdivision mit fehlenden Gliedern

a)
$$
\begin{array}{lllll}
\big(x^3 & & & -\ 1\big) : \big(x-1\big) = x^2+x+1 \\
\underline{-\big(x^3 - x^2\big)} & & & \\
& x^2 & & -\ 1 \\
& \underline{-\big(x^2 - x\big)} & & \\
& & x & -\ 1 \\
& & \underline{-\big(x - 1\big)} & \\
& & & 0
\end{array}
$$

b)
$$
\begin{array}{lllll}
\big(x^9 & & & -\ 1\big) : \big(x^3-1\big) = x^6+x^3+1 \\
\underline{-\big(x^9 - x^6\big)} & & & \\
& x^6 & & -\ 1 \\
& \underline{-\big(x^6 - x^3\big)} & & \\
& & x^3 & -\ 1 \\
& & \underline{-\big(x^3 - 1\big)} & \\
& & & 0
\end{array}
$$

c)
$$
\begin{array}{llll}
\big(x^4 - 7x^3 & -\ 5x\ +\ 35\big) : \big(x-7\big) = x^3-5 \\
\underline{-\big(x^4 - 7x^3\big)} & \\
& -\ 5x\ +\ 35 \\
& \underline{-\big(-\ 5x\ +\ 35\big)} \\
& \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

d)
$$
\begin{array}{llll}
\big(x^5 & -\ 2x^3\ -\ 8x\big) : \big(x^2+2\big) = x^3-4x \\
\underline{-\big(x^5 & +\ 2x^3\big)} \\
& -\ 4x^3\ -\ 8x \\
& \underline{-\big(-\ 4x^3\ -\ 8x\big)} \\
& \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

e)
$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
\big(x^7 & & +\ 2x^4 & & +\ 2x^2 & -\ x & +\ 2\big) & :\ \big(x^4+x^2+1\big) = x^3-x+2 \\
-\big(x^7 & +\ x^5 & & +\ x^3\big) & & & & \\
\hline
 & -\ x^5 & +\ 2x^4 & -\ x^3 & +\ 2x^2 & -\ x & & \\
 & -\big(-\ x^5 & & -\ x^3 & & -\ x\big) & & \\
\cline{2-6}
 & & 2x^4 & & +\ 2x^2 & & +\ 2 & \\
 & & -\big(2x^4 & & +\ 2x^2 & & +\ 2\big) & \\
\cline{3-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

f)
$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\big(6x^6 & +\ 6x^4 & +\ 4x^3 & -\ 10x^2 & +\ 4x & -\ 10\big) & :\ \big(2x^2+2\big) = 3x^4+2x-5 \\
-\big(6x^6 & +\ 6x^4\big) & & & & & \\
\hline
 & & 4x^3 & -\ 10x^2 & +\ 4x & & \\
 & & -\big(4x^3 & & +\ 4x\big) & & \\
\cline{3-5}
 & & & -\ 10x^2 & & -\ 10 & \\
 & & & -\big(-\ 10x^2 & & -\ 10\big) & \\
\cline{4-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

g)
$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
\big(x^9 & & & & & & & & & -\ 512\big) & :\ \big(x-2\big) = \\
-\big(x^9 & -\ 2x^8\big) & & & & & & & & & \\
\cline{1-2}
 & 2x^8 & & & & & & & & -\ 512 & \\
 & -\big(2x^8 & -\ 4x^7\big) & & & & & & & & \\
\cline{2-3}
 & & 4x^7 & & & & & & & -\ 512 & \\
 & & -\big(4x^7 & -\ 8x^6\big) & & & & & & & \\
\cline{3-4}
 & & & 8x^6 & & & & & & -\ 512 & \\
 & & & -\big(8x^6 & -\ 16x^5\big) & & & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & 16x^5 & & & & & -\ 512 & \\
 & & & & -\big(16x^5 & -\ 32x^4\big) & & & & & \\
\cline{5-6}
 & & & & & 32x^4 & & & & -\ 512 & \\
 & & & & & -\big(32x^4 & -\ 64x^3\big) & & & & \\
\cline{6-7}
 & & & & & & 64x^3 & & & -\ 512 & \\
 & & & & & & -\big(64x^3 & -\ 128x^2\big) & & & \\
\cline{7-8}
 & & & & & & & 128x^2 & & -\ 512 & \\
 & & & & & & & -\big(128x^2 & -\ 256x\big) & & \\
\cline{8-9}
 & & & & & & & & 256x & -\ 512 & \\
 & & & & & & & & -\big(256x & -\ 512\big) & \\
\cline{9-10}
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

$$= x^8+2x^7+4x^6+8x^5+16x^4+32x^3+64x^2+128x+256$$

L.6 Polynomdivision mit Rest

a)
$$\begin{array}{rrrl}
\big(x^2 & -\ 4x & +\ 3\big) & :\big(x+5\big) = x-9+\dfrac{48}{x+5} \\
-\big(x^2 & +\ 5x\big) & & \\
\cline{1-2}
 & -\ 9x & +\ 3 & \\
 & -\big(-\ 9x & -\ 45\big) & \\
\cline{2-3}
 & & 48 &
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrl}
\big(x^2 & -\ 7x & -\ 1\big) & :\big(x-2\big) = x-5+\dfrac{-11}{x-2} = x-5-\dfrac{11}{x-2} \\
-\big(x^2 & -\ 2x\big) & & \\
\cline{1-2}
 & -\ 5x & -\ 1 & \\
 & -\big(-\ 5x & +\ 10\big) & \\
\cline{2-3}
 & & -\ 11 &
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrrl}
\big(x^2 & +\ 10x & +\ 25\big) & :\big(x-5\big) = x+15+\dfrac{100}{x-5} \\
-\big(x^2 & -\ 5x\big) & & \\
\cline{1-2}
 & 15x & +\ 25 & \\
 & -\big(15x & -\ 75\big) & \\
\cline{2-3}
 & & 100 &
\end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rrrrrl}
\big(x^4 & +\ 2x^3 & +\ 6x^2 & & +\ 1\big) & :\big(x+3\big) = x^3-x^2+9x-27+\dfrac{82}{x+3} \\
-\big(x^4 & +\ 3x^3\big) & & & & \\
\cline{1-2}
 & -\ x^3 & +\ 6x^2 & & & \\
 & -\big(-\ x^3 & -\ 3x^2\big) & & & \\
\cline{2-3}
 & & 9x^2 & & +\ 1 & \\
 & & -\big(9x^2 & +\ 27x\big) & & \\
\cline{3-4}
 & & & -\ 27x & +\ 1 & \\
 & & & -\big(-\ 27x & -\ 81\big) & \\
\cline{4-5}
 & & & & 82 &
\end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rrrrl}
\big(x^3 & -\ 4x^2 & +\ 2x & -\ 5\big) & :\big(x^2+3\big) = x-4+\dfrac{-x+7}{x^2+3} = x-4-\dfrac{x-7}{x^2+3} \\
-\big(x^3 & & +\ 3x\big) & & \\
\cline{1-3}
 & -\ 4x^2 & -\ x & -\ 5 & \\
 & -\big(-\ 4x^2 & & -\ 12\big) & \\
\cline{2-4}
 & & -\ x & +\ 7 &
\end{array}$$

f)
$$\begin{array}{rrrrrrl}
\big(x^5 & -\ x^4 & +\ x^3 & -\ x^2 & +\ x & -\ 1\big) & :\big(x^3-x^2+1\big) = x^2+1+\dfrac{-x^2+x-2}{x^3-x^2+1} \\
-\big(x^5 & -\ x^4 & & +\ x^2\big) & & & \qquad\qquad\qquad\quad = x^2+1-\dfrac{x^2-x+2}{x^3-x^2+1} \\
\cline{1-4}
 & & x^3 & -\ 2x^2 & +\ x & -\ 1 & \\
 & & -\big(x^3 & -\ x^2 & & +\ 1\big) & \\
\cline{3-6}
 & & & -\ x^2 & +\ x & -\ 2 &
\end{array}$$

L.7 Polynomdivision mit Fehlern

Das fehlerhafte Rechenergebnis ist jeweils eingerahmt.

a)
$$\begin{array}{l}
\left(x^2 - 2x - 3\right) : \left(x - 3\right) = x - 5 + \dfrac{-18}{x-3} \\
-\left(x^2 - 3x\right) \\ \hline
\qquad \boxed{-5x} - 3 \\
\qquad -\left(-5x + 15\right) \\ \hline
\qquad\qquad -18
\end{array}$$

Korrekt: $\left(x^2 - 2x - 3\right) : \left(x - 3\right) = x + 1$

b)
$$\begin{array}{l}
\left(x^2 + 5x + 6\right) : \left(x + 2\right) = x + 7 + \dfrac{20}{x+2} \\
-\left(x^2 + 2x\right) \\ \hline
\qquad \boxed{7x} + 6 \\
\qquad -\left(7x + 14\right) \\ \hline
\qquad\qquad \boxed{20}
\end{array}$$

Korrekt: $\left(x^2 + 5x + 6\right) : \left(x + 2\right) = x + 3$

c)
$$\begin{array}{l}
\left(x^3 - 10x^2 + 17x - 8\right) : \left(x - 8\right) = x^2 + 2x + 1 \\
-\left(x^3 - 8x^2\right) \\ \hline
\qquad \boxed{2x^2} + 17x - 8 \\
\qquad -\left(2x^2 - 16x\right) \\ \hline
\qquad\qquad \boxed{x} - 8 \\
\qquad\qquad -\left(x - 8\right) \\ \hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Korrekt: $\left(x^3 - 10x^2 + 17x - 8\right) : \left(x - 8\right) = x^2 - 2x + 1$

d)
$$\begin{array}{l}
\left(x^3 - 6x^2 + 4x + 8\right) : \left(x - 2\right) = \boxed{x} - \boxed{6} + \dfrac{6x-4}{x-2} \\
-\left(\boxed{x^3} - 2x\right) \\ \hline
\qquad - 6x^2 + 6x + 8 \\
\qquad -\left(\boxed{-6x^2} + 12\right) \\ \hline
\qquad\qquad 6x - 4
\end{array}$$

Korrekt: $\left(x^3 - 6x^2 + 4x + 8\right) : \left(x - 2\right) = x^2 - 4x - 4$

e)
$$\begin{array}{l}
\left(x^4 + 5x^3 - 52x^2 - 356x - 480\right) : \left(x + 5\right) = x^3 \\
-\left(x^4 + 5x^3\right) \\ \hline
\qquad 0 \ \boxed{-52x^2} \ \boxed{-356x} \ \boxed{-480}
\end{array}$$

Korrekt: $\left(x^4 + 5x^3 - 52x^2 - 356x - 480\right) : \left(x + 5\right) = x^3 - 52x - 96$

L.8 Weiterführende Aufgaben

a) Die verbleibende Gleichung $0 = x^2 + 4$ hat keine weitere reelle Lösung. Das bedeutet, dass die Gleichung $0 = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ nur eine reelle Lösung besitzt.

b) Der letzte Koeffizient (96) von f besitzt folgende Teiler: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48$ und 96. Jeweils als Positive und als negative Zahl.

$$f(1) = 1^5 - 4 \cdot 1^4 - 15 \cdot 1^3 + 50 \cdot 1^2 + 64 \cdot 1 - 96 = 0$$

Die erste Nullstelle der Funktion lautet $x_1 = 1$.

$$
\begin{array}{llllll}
\big(x^5 & -\,4x^4 & -\,15x^3 & +\,50x^2 & +\,64x & -\,96\big) : \big(x-1\big) = x^4 - 3x^3 - 18x^2 + 32x + 96 = g(x) \\
-\big(x^5 & -\,x^4\big) & & & & \\
\hline
 & -\,3x^4 & -\,15x^3 & & & \\
 & -\big(-\,3x^4 & +\,3x^3\big) & & & \\
\hline
 & & -\,18x^3 & +\,50x^2 & & \\
 & & -\big(-\,18x^3 & +\,18x^2\big) & & \\
\hline
 & & & 32x^2 & +\,64x & \\
 & & & -\big(32x^2 & -\,32x\big) & \\
\hline
 & & & & 96x & -\,96 \\
 & & & & -\big(96x & -\,96\big) \\
\hline
 & & & & & 0
\end{array}
$$

Die Teilermenge des letzten Koeffizienten der Funktion g bleibt gleich.

$$
\begin{aligned}
g(1) &= 1^4 - 3 \cdot 1^3 - 18 \cdot 1^2 + 32 \cdot 1 + 96 = 108 \\
g(-1) &= (-1)^4 - 3 \cdot (-1)^3 - 18 \cdot (-1)^2 + 32 \cdot (-1) + 96 = 50 \\
g(2) &= 2^4 - 3 \cdot 2^3 - 18 \cdot 2^2 + 32 \cdot 2 + 96 = 80 \\
g(-2) &= (-2)^4 - 3 \cdot (-2)^3 - 18 \cdot (-2)^2 + 32 \cdot (-2) + 96 = 0
\end{aligned}
$$

Die zweite Nullstelle der Funktion lautet $x_2 = -2$.

$$
\begin{array}{lllll}
\big(x^4 & -\,3x^3 & -\,18x^2 & +\,32x & +\,96\big) : \big(x+2\big) = x^3 - 5x^2 - 8x + 48 = h(x) \\
-\big(x^4 & +\,2x^3\big) & & & \\
\hline
 & -\,5x^3 & -\,18x^2 & & \\
 & -\big(-\,5x^3 & -\,10x^2\big) & & \\
\hline
 & & -\,8x^2 & +\,32x & \\
 & & -\big(-\,8x^2 & -\,16x\big) & \\
\hline
 & & & 48x & +\,96 \\
 & & & -\big(48x & +\,96\big) \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

Die Teilermenge des letzten Koeffizienten von h lautet: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24$ und 48. Da $1, -1$ und 2 keine Nullstelle von g waren, können sie auch keine Nullstelle von h sein.

$$\begin{aligned} h(-2) &= (-2)^3 - 5\cdot(-2)^2 - 8\cdot(-2) + 48 = 36 \\ h(3) &= 3^3 - 5\cdot 3^2 - 8\cdot 3 + 48 = 6 \\ h(-3) &= (-3)^3 - 5\cdot(-3)^2 - 8\cdot(-3) + 48 = 0 \end{aligned}$$

Die zweite Nullstelle der Funktion lautet $x_3 = -3$.

$$\begin{array}{rrrrl} \big(x^3 & -\ 5x^2 & -\ 8x & +\ 48\big) : \big(x+3\big) = x^2 - 8x + 16 = i(x) \\ -\big(x^3 & +\ 3x^2\big) & & & \\ \hline & -\ 8x^2 & -\ 8x & & \\ & -\big(-\ 8x^2 & -\ 24x\big) & & \\ \hline & & 16x & +\ 48 & \\ & & -\big(16x & +\ 48\big) & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Die Nullstellen, der verbleibenden quadratischen Funktion, können mittels der Lösungsformel bestimmt werden.

$x_4 = 4$ $\qquad\qquad$ $x_5 = 4$

Linearfaktorzerlegung: $y = f(x) = (x-1)(x+2)(x+3)(x-4)(x-4) = (x-1)(x+2)(x+3)(x-4)^2$

c) Im linken Beispiel wird der zu subtrahierende Teil in Klammern geschrieben. Das rechte Beispiel kommt hingegen ohne Klammern aus. Der allgemeine Aufbau und das Ergebnis sind in beiden Varianten gleich.

Mathematisch korrekt sind beide Varianten, da in der rechten Variante lediglich die Klammer aufgelöst wurde, bevor die Subtraktion (oder hier dann ggf. auch Addition) durchgeführt wurden:

$$-\big(x^2 - 7x\big) = -x^2 + 7x$$

d) Anhand des ersten Beispiels werden fünf Varianten exemplarisch dargestellt:

aa) $(x^2 + 6x + 8) : (x + a) = x + 4$

i: Vergleich der jeweils letzten Glieder:

Es muss gelten: $4 \cdot a = 8 \rightarrow \underline{a = 2}$

ii: Lösen der quadratischen Gleichung:

Da das Ergebnis keinen Rest besitzt, muss $x + 4$ ein Linearfaktor von der Gleichung $0 = x^2 + 6x + 8$ sein und -4 eine Lösung der Gleichung.

Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen kann

$x_1 = -2$ $\qquad\qquad$ $x_2 = -4$

bestimmt werden. Die Lösung $x_2 = -4$ war bereits bekannt, sodass die erste Lösung $x_1 = -2$, als Linearfaktor $x + 2$ genutzt wird. $\rightarrow \underline{a = 2}$

iii: Multiplikation der beiden Linearfaktoren:

$$(x+a)(x+4) = x^2 + (4+a)x + 4a$$

Im Vergleich mit dem Ausgangspolynom müssen die Koeffizienten übereinstimmen:

$$x^2 + (4+a)x + 4a = x^2 + 6x + 8$$

Es gilt demnach:

$$\begin{aligned} 4+a &= 6 \to \underline{a=2} \\ 4a &= 8 \to \underline{a=2} \end{aligned}$$

iv: Polynomdivision mit Parameter rückwärts:

$$\begin{array}{l} \left(x^2 \quad + \ 6x \ + \ 8\right) : \left(x+a\right) = x+4 \\ \underline{-\left(x^2 \quad + \ ax\right)} \\ \qquad (6-a)x \ + \ 8 \end{array}$$

Wenn nun $(6-a)x$ durch x geteilt wird, muss das Ergebnis 4 lauten:

$$\begin{aligned} (6-a)x : x &= 4 \\ 6-a &= 4 \to \underline{a=2} \end{aligned}$$

v: Polynomdivision mit Rest:

$$\begin{array}{l} \left(x^2 \qquad + \ 6x \qquad\quad + \ 8\right) : \left(x+a\right) = x + (6-a) + \dfrac{8-a(6-a)}{x+a} \\ \underline{-\left(x^2 \qquad + \ ax\right)} \\ \qquad (6-a)x \qquad\quad + \ 8 \\ \qquad \underline{-\left((6-a)x \ + \ a(6-a)\right)} \\ \qquad\qquad\quad 8-a(6-a) \end{array}$$

Da die Ausgangsaufgabe keinen Rest hat, muss dessen Zähler gleich null sein:

$$\begin{aligned} 0 &= 8 - a(6-a) = 8 - 6a + a^2 \\ 0 &= a^2 - 6a + 8 \end{aligned}$$

Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Funktionen kann $a_1 = 2$ und $a_2 = 4$ berechnet werden.

Diese werden nun in das Ergebnis der Polynomdivision eingesetzt und mit der Aufgabe verglichen:

$$\begin{array}{rcl} a = 2 & \qquad & a = 4 \\ x + (6-a) = x+4 & & x + (6-a) = x+4 \\ x + (6-2) = x+4 & & x + (6-4) = x+4 \\ x+4 = x+4 \quad \checkmark & & x+2 \neq x+4 \quad ↯ \to \underline{a=2} \end{array}$$

bb) $(x^2 - 3x - 10) : (x+a) = x - 5 \to a = 2$

cc) $(x^2 - 4x + 16) : (x+a) = x - 4 \to a = -4$

dd) $(x^3 + 8x^2 - 69x - 252) : (x+a) = x^2 - 4x - 21 \to a = 12$

e) Beschreibung des Verfahrens mit Division – Multiplikation – Subtraktion.

Beschreibung des Verfahrens mit Rest und ggf. fehlenden Gliedern.

f) (In Satzform) Die Folgende Auflistung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

- Allgemeine Form:
  + Vorteile
    * Polynomgrad ist einfach ablesbar
    * Schreibweise meist kompakter
    * Funktionsgleichung durch mehrere Punkte kann relativ einfach bestimmt werden (Lineares Gleichungsystem)
  – Nachteile
    * Anzahl der Nullstellen ist nicht ablesbar
    * Nullstellen sind teilweise nur schwer zu ermitteln
    * Umwandlung in Linearfaktorzerlegung kompliziert
- Linearfaktorzerlegung:
  + Vorteile
    * Anzahl der Nullstellen ist ablesbar
    * Mehrfachnullstellen sind sofort ersichtlich
    * Nullstellen sind leicht ablesbar
    * Umwandlung in Allgemeine Form relativ einfach
  – Nachteile
    * Funktionsgleichung durch mehrere Punkte ist nur schwer ermittelbar (Nichtlineares Gleichungssystem)
    * Schreibweise meist umfangreicher
    * Polynomgrad ist nicht direkt ablesbar

g) Überführung der Schreibweisen:

$$\begin{aligned}
y &= f(x) = (((3x-9)x-24)x+36)x+48 \\
y &= f(x) = ((3x^2-9x-24)x+36)x+48 \\
y &= f(x) = (3x^3-9x^2-24x+36)x+48 \\
y &= f(x) = 3x^4-9x^3-24x^2+36x+48
\end{aligned}$$

Durch die fehlenden Potenzen ist die Berechnung von Funktionswerten weniger kompliziert und damit schneller, einfacher und effizienter.

- Einfachere Berechnung von Funktionswerten
- Effizientere Programmierung in der Informatik