



بسمه تعالی
تمرینات سری دوم نظریه گراف (فصل دوم: درخت ها و فاصله)
موعده تحویل : 94/12/22

1- Centrality یک گراف تعاریف متعددی دارد که از شما می خواهیم برخی از معروف ترین آن ها را برای گراف غیر جهتدار $G(V,E)$ محاسبه کنید و از کاربرد های هر یک از این تعاریف در عمل چند نمونه پیدا کنید.
 $V = O(10^4), V = O(10^4)$

در همه ی قسمت ها جز e گراف G یک گراف وزن دار است.
برای همه ی بخش ها فرمت ورودی و خروجی به شرح زیر است.
ورودی: در خط اول دو عدد طبیعی m,n داده می شود که به ترتیب تعداد راس ها و یال ها است.
سپس یک ماتریس $n*n$ داده می شود که ماتریس مجاورت گراف است.
سپس عدد q داده می شود و در ادامه q خط داده می شود که در هر خط اندیس یک راس آمده است. اندیس ها صفر بیس اند.

خروجی: خروجی شامل q خط است. به ازای هر یک از راس نام برده شده مرکزیت اش را در خط متناظرش چاپ کنید.

a. Degree centrality

$$C_D(v) = \deg(v)$$

v^* نودی با حداکثر Degree centrality است در گراف G است.
و X گرافی با Y راس است که مقدار H را بیشینه می کند. y^* راسی با حداکثر Degree centrality در گراف X است و این مقدار بیشینه به ازای گراف ستاره رخ میدهد که یک نود مرکزی به سایر نو ها متصل است.

$$H = \sum_{j=1}^{|Y|} [C_D(y^*) - C_D(y_j)] = (n-1)(n-2)$$

$$C_D(G) = \frac{\sum_{j=1}^{|v|} [C_D(v^*) - C_D(v_j)]}{H}$$

b. Closeness centrality

فرض: G همبند.

$$C(v) = \frac{1}{\sum_u d(u, v)}$$

c. Harmonic centrality

$$H(v) = \sum_{u \neq v} \frac{1}{d(u, v)}$$

d. Information centrality

$$H(v) = \sum_{u \neq v} \frac{1}{2^{d(u, v)}}$$

e. Betweenness centrality

فرض: G بی وزن و همبند.

$$C_B(v) = \sum_{s \neq t \neq v} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}$$

$\sigma_{st}(v)$: برابر است با تعداد کوتاهترین مسیر های بین s و t که از v می گذرد.

σ_{st} : برابر است با تعداد کوتاهترین مسیر های بین s و t

2- تعدادی دوچرخه‌سوار از تعدادی ایستگاه شروع متفاوت شروع به حرکت به سمت یک ایستگاه پایانی می‌کنند. از هر ایستگاه به دقیقاً یک ایستگاه دیگر باید رفت و در هر لحظه در هر ایستگاه نباید بیش از یک دوچرخه‌سوار باشد (به غیر از ایستگاه پایانی). در هر واحد زمانی هر دوچرخه‌سوار به سمت ایستگاه بعدی، در صورتی که دوچرخه‌سواری در آن ایستگاه نباشد و یا به سمت آن در حال حرکت نباشد، حرکت می‌کند. در غیر این صورت در ایستگاه خودش منتظر می‌ماند. با توجه به اطلاعات ایستگاه‌ها و ایستگاه اولیه دوچرخه‌سوارها شما باید برنامه‌ای بنویسید که محاسبه کند چند واحد زمانی طول می‌کشد تا همه دوچرخه‌سوارها به ایستگاه پایانی برسند.

ورودی : در ابتدا n تعداد ایستگاه‌ها می‌آید و در خط بعد $n-1$ عدد که به ترتیب از ایستگاه‌های شماره ۲ و ۳ و... و n به کدام ایستگاه باید رفت. ایستگاه پایانی ایستگاه ۱ است.

در خط بعد $m < n$ تعداد دوچرخه سوارها می‌آید و در خط بعد از آن m عدد متمایز که بیانگر ایستگاه شروع دوچرخه سوار هاست داده می‌شود. $n \leq 10^5$

خروجی : برنامه باید کمینه زمانی که طول می‌کشد تا همه دوچرخه سوار ها به ایستگاه پایانی برسند را چاپ کند.

خروجی نمونه	ورودی نمونه
1	2 1 1 2
6	12 8 8 8 3 3 3 2 2 1 1 1 8 12 11 10 9 7 6 5 4

3- هر کندوی عسل دارای n خانه است و خیابان کشی‌های بین خانه‌ها به فرم یک درخت است. به تازگی ملکه‌ی قبلی کندوی عسل بازنشسته شده و دخترش ملکه‌ی جدید شده است. او تصمیم دارد که برای رفاه حال زنبورهای دیگر هر روز دستور جارو کردن یکی از خیابان‌های کندو را صادر کند. با جارو شدن یک خیابان زمان پرواز زنبورها در آن خیابان‌ها کاهش می‌یابد. در هر روز دقیقاً یک خیابان جارو می‌شود و زمان پرواز در خیابان i ام به w_i کاهش می‌یابد. فاصله‌ی هر خانه‌ی u از خانه‌ی v را به $d(u,v)$ نشان می‌دهیم. این ملکه سه مامور ویژه دارد که با هم در ارتباط اند و بر انجام امور کندو نظارت می‌کنند. اگر این سه مامور در خانه‌های u, v, w مستقر شده باشند آنگاه برای برقراری ارتباط این سه مامور با یکدیگر باید مسیری به طول $H = d(u,v) + d(v,w) + d(u,w)$ پیموده شود. از آنجایی که ملکه وقت ندارد بهترین مسیر ممکن برای استقرار مامورها تعیین کند فرض می‌کند که این سه مامور به صورت تصادفی در سه خانه‌ی متمایز کندو استقرار یافته‌اند.

می‌خواهیم بدانیم امید ریاضی H پس از هر روز چقدر است. همانطور که گفته شد در پایان هر روز تنها یک خیابان جارو می‌شود و زمان پرواز در آن کم می‌شود. در نتیجه ملکه می‌خواهد امید ریاضی H را پس از هر تغییر محاسبه کند.

ورودی: در خط اول تعداد خانه‌ها داده می‌شود $3 \leq n \leq 10^5$

در $n-1$ خط بعد اطلاعات خیابان‌ها داده می‌شود که خط i شامل سه عدد صحیح s_i, t_i, l_i است که بیان می‌کند

خیابان i ام بین s_i و t_i کشیده شد و دارای طول l_i است. $1 \leq s_i, t_i \leq n, s_i \neq t_i, 1 \leq l_i \leq 10^3$

در خط بعد q داده می‌شود که تعداد روز‌هاست. سپس q خط داده می‌شود که در هر خط دو عدد صحیح i و w_i

داده می‌شود که بدان معناست که زمان پرواز در خیابان i ام به w_i کاهش یافته است.

$(1 \leq k \leq n-1, 1 \leq w_i \leq 10^3)$

خروجی: به ازای هر یک از q خط در ورودی، یک خط در خروجی چاپ کنید که امید ریاضی H در آن روز است. جواب‌ها با خطای 10^{-6} قابل قبول است.

ورودی نمونه	خروجی نمونه
3 1 3 925 2 1 778 3 2 482 2 206 1 512	2814.000000 2262.000000 1436.000000
4 1 2 66 1 3 565 3 4 469 4 2 186 3 226 2 143 1 54	1174.500000 810.000000 724.000000 706.000000

نکات پایانی:

- به فرمت ورودی‌ها و خروجی‌ها توجه کنید.
- می‌توانید از زبان $c++$ یا $java$ استفاده کنید.
- الگوریتم و راه حل خود را در یک گزارش توضیح داده و به همراه کد مربوط به سولات آپلود کنید.

شاد باشید