# TP 12 : séries semi-convergentes - le théorème de Riemann

*Une série semi-convergente est une série absolument divergente mais convergente. Nous allons explorer une propriété intéressante de ce type de séries : leur convergence et la valeur de leur somme dépend crucialement de l'ordre dans lequel on somme leurs termes !*

**Exercice 1** (série harmonique alternée)**.**

On pose $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Créez une fonction `u(n)` qui prend en argument un entier `n` et qui renvoie le terme d'indice $n$ de la suite $u$.
2. Créez une fonction `S(n)` qui prend en argument un entier `n` et qui renvoie le terme d'indice $n$ de la série de terme général $u$.
3. Créez de même une fonction `Sabs(n)` qui prend en argument un entier `n` et qui renvoie le terme d'indice $n$ de la série de terme général $|u|$.
4. Tracez sur un même graphique à l'aide de matplotlib les 100 premiers termes de $\sum u$ et les 100 premiers termes de $\sum |u|$.
5. Vérifiez que la série de terme général $u$ semble converger vers $\ln(2)$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le terme général d'une série semi-convergente.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n^+ = \frac{u_n + |u_n|}{2} = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad u_n^- = \frac{|u_n| - u_n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n > 0 \\ -u_n & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec cette définition, on s'est arrangé pour que $u^+$ et $u^-$ soient positives, et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = u_n^+ - u_n^- \qquad \text{et} \qquad |u_n| = u_n^+ + u_n^-\ .$$

**Proposition**

Si $\sum |u|$ diverge et $\sum u$ converge, on dit que la série $\sum u$ est semi-convergente.
Dans ce cas les séries $\sum u^+$ et $\sum u^-$ sont toutes deux divergentes vers $+\infty$.

*Démonstration :*

*On suppose $\sum |u|$ divergente et $\sum u$ convergente.*

- *Supposons par l'absurde que $\sum u^+$ soit convergente et $\sum u^-$ divergente. Dans ce cas on aurait $u^- = u^+ - u$ et par somme de séries convergentes, $\sum u^-$ serait convergente : contradiction.*
- *Le même raisonnement s'applique en supposant $\sum u^+$ divergente et $\sum u^-$ convergente.*
- *De même $\sum u^+$ et $\sum u^-$ toutes deux convergentes est exclu puisque la somme des deux diverge.*

*Il ne reste qu'une possibilité : $\sum u^+$ et $\sum u^-$ sont toutes deux divergentes.*
*Puisqu'elles sont à termes positifs, elles sont croissantes et divergent donc vers $+\infty$ d'après le théorème de convergence monotone des suites.*

**Exercice 2.**

Affichez les valeurs des sommes partielles de $\sum u^+$ et de $\sum u^-$ dans le cas de la série harmonique alternée. On affichera cette fois les sommes partielles pour $n$ allant de 0 à 2000.

**Proposition :**

Soit $u$ le terme général d'une série semi-convergente. On pose :

$$E_+ = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, u_n \geqslant 0 \right\} \quad \text{et} \quad E_- = \mathbb{N} \backslash E_+ = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, u_n < 0 \right\} .$$

Alors $E_+$ et $E_-$ sont infinis.

<u>*Démonstration :*</u>

*Supposons par exemple $E_+$ fini. Alors $E_+$ a un plus grand élément, notons le $N$. Cela veut dire que*

$$\forall n \geqslant N + 1 \ , \ u_n < 0 \ .$$

*Mais alors par construction, on aurait $u^+$ qui serait nulle APCR. Donc $\sum u^+$ serait alors convergente.*
*Contradiction, donc $E_+$ est infini.*
*Même raisonnement pour $E_-$.*

**Exercice 3.**

On peut donc, si $\sum u$ est une série semi-convergente, en partant d'un terme d'indice $n$ de la suite $u_n$, toujours trouver le prochain terme positif, ou bien le prochain terme négatif.

1. Créez une fonction `prochain_positif(u, n)` qui prend en argument une fonction `u` et un entier `n` et qui renvoie le premier indice $k$ supérieur strictement à $n$ tel que $u_k \geqslant 0$.
2. Créez encore une fonction `prochain_negatif` dont vous devinerez le rôle à partir du nom.

**Théorème :**

Si $\sum u$ est semi convergente, alors pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\varphi$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{n \geqslant 0} u_{\varphi(n)} \text{ converge vers } \ell \ .$$

**Exercice 4.**

Ajouter à votre script Python les lignes suivantes.

```python
def riemann(u, limite, eps):
    positifs = []
    negatifs = []
    phi=[]
    somme = 0
    while abs(somme - limite) > eps:
        if somme <= limite:
            if len(positifs)==0:
                n=prochain_positif(u,0)
            else:
                n=prochain_positif(u,positifs[-1])
            positifs.append(n)
            phi.append(n)
            somme += u(n)
        else:
            if len(negatifs)==0:
                n=prochain_negatif(u,0)
            else:
                n=prochain_negatif(u,negatifs[-1])
            negatifs.append(n)
            phi.append(n)
            somme += u(n)
    return phi
```

Cette fonction prend en argument le nom d'une fonction `u` qui code le terme générale d'une suite telle que la série de terme général $u$ soit semi-convergente, une limite `limite` et une précision `eps`>0, et qui renvoie une liste d'indices `phi` telle que la somme des termes de $u$ donnés par `phi` soit `eps`-proche de `limite`. C'est à l'utilisateur de fournir une fonction `u` adaptée. Mais l'utilisateur est libre de choisir `limite` et `eps`.

Vérifiez que vous comprenez **toutes** les lignes de ce code et leur rôle.
Testez cette fonction sur la série harmonique alternée avec pour objectif de limite $0,8$ et précision $10^{-4}$.

***Moralité :***

*Si une série n'est pas absolument convergente, on peut obtenir n'importe quel résultat si on ne fait pas attention à l'ordre de sommation des termes. Ce fait est d'un importance capitale en probabilités : en effet lorsqu'on calcule une moyenne statistique, que fait-on ? On collecte $u_0$, $u_1$, etc.. des valeurs obtenues aléatoirement parmi les issues possibles, puis on additionne ces valeurs entre elles pour obtenir la moyenne. Si la série sous-jacente n'est pas absolument convergente, le résultat dépendra alors crucialement de l'ordre dans lequel les valeurs seront apparues, ce qui n'est pas satisfaisant : on attend que la moyenne soit bien définie et ne dépende pas de l'expérience précise.*