TP 14 : accélération de convergence – la méthode de Newton

Nous avons vu une technique de résolution d'une équation non linéaire $f(x) = 0$ par la méthode de la dichotomie : on utilise la continuité de la fonction et le théorème des valeurs intermédiaires pour chercher de proche en proche un intervalle contenant la solution. Si on suppose de plus notre fonction dérivable sur l'intervalle dans lequel on cherche la solution à l'équation $f(x) = 0$, on peut accélérer la convergence grâce à la méthode de Newton.

Hypothèses :
- La fonction f est définie, continue et dérivable sur un intervalle $]a;b[$ avec $a < b$
- L'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution sur $]a;b[$

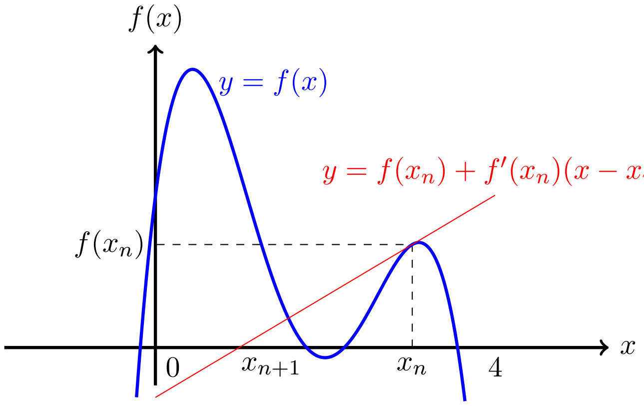

FIGURE 1 – Illustration d'une étape de la méthode de Newton. On cherche une solution sur $[0;4]$. Partant de x_n à l'étape n, on trace la tangente à la courbe de f en x_n, et x_{n+1} est alors défini comme étant l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.

Méthode de Newton :
- On pose $x_0 \in]a;b[$ quelconque
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $f'(x_n) \neq 0$, et si $x_n \in]a;b[$ on pose $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
  Si une des deux conditions n'est pas vérifiée, la méthode échoue.

Exercice 1 (tracé de courbe et de tangentes)**.**

1. Écrire une fonction Python qui prend en entrée deux réels a et b et un entier n et qui trace la courbe de la fonction $x \mapsto \ln(x) + x$ sur le segment $[a;b]$ en calculant n points. On supposera $0 < a < b$.
2. Modifiez votre fonction pour qu'elle prenne en argument un réel c en plus et qu'elle affiche en plus la tangente à la courbe de f en c.

Vous testerez votre fonction sur l'intervalle $[10^{-3};5]$.

Exercice 2 (méthode de Newton)**.**

1. Codez l'algorithme de Newton. Vous créerez une fonction `newton` prenant en argument `f` et `fp` (fonctions représentant f et sa dérivée), un réel `x0` point de départ de la méthode, et un entier `n` nombre d'itérations à faire.
2. Testez-le avec la fonction $x \mapsto \ln(1 + x) - (x - 1)^2$ sur l'intervalle $]-1;4]$ avec $n = 10$ et en prenant successivement : $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$ et $x_0 = 3$.
3. Comparez la vitesse de convergence avec celle de la méthode de dichotomie.
4. Comparez les résultats de la méthode de Newton pour $x_0 = 1$, $x_0 = 1.2$ et $x_0 = 1.4$.
   Expliquer ces résultats.

Formulaire :

Vous aurez besoin des commandes suivantes (dans le désordre)

```
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
np.linspace
for ... in ... :
def ... ( ... ) :
return
print( ... )
if ... :
else :
log
[ ... for ... in ...]
plt.plot( ... , ... )
plt.show()
```