Exercices TP d'initiation au $\LaTeX$

Pigassou Mathis*
UFR Informatique, Université Toulouse Capitole, France
Email: mathis.pigassou@ut-capitole.fr

***Abstract*—Réponses du premier au dix-huitième exercice du TP d'initiation au LaTeX.**

***Index Terms*—Mathématiques, $\LaTeX$**

I.

Pour n entier naturel non nul, on pose $u_0 = 0$ et $u_n = u_{n-1} + n$.
Alors

$$\forall n \leq 0, u_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

II.

La formule de Stirling exprime, pour n grand, que

$$n! \sim Cn^n \sqrt{n} \exp -n,$$

où $C = \sqrt{2\pi}$. Cette constante peut se calculer en utilisant la formule de Wallis, que l'on trouve grâce aux intégrales éponymes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx.$$

III.

La fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, dt$$

et appelée "fonction Gamma (d'Euleur)", généralise la factorielle. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n+1) = n!$. On peut aussi montrer que

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

en se ramenant à l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}$ (par changement de variables), cette dernière valant $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (par exemple en considérant le carré de I et un passage en coordonnées polaires).

IV.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$,

$$M \in GL_n(\mathbb{Z}) \iff \det M = \pm 1.$$

V.

Considérons $\phi, \Sigma, \hbar, \epsilon$ et l des réels et $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ un repère orthonormé.

VI.

Écrivons le moment magnétique

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \iiint_V \overrightarrow{OP} \wedge \vec{j}(P) \, dr \quad (\mathcal{V} \text{ étant un volume}).$$

VII.

L'exercice 3 peut aider au calcul de l'intégrale de Fresnel

$$\varphi \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} \exp(ix^2) \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$$

en montrant, pour α dans]0,1[, que

$$J : \alpha \longmapsto \int_{]0,+\infty[} t^{a-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}} \mathrm{t} \, dt$$

vérifie

$$J(\alpha) = \Gamma(\alpha) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha \frac{\pi}{2}}.$$

VIII.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors sa transformée de Fourier, notée $\hat{f}$, est continue et vérifie (pour une définition bien choisie)

$$\hat{f}(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0 \quad \textit{et} \quad \left\| \frac{\hat{f}}{2\pi} \right\|_\infty \leq \|f\|_1 .$$

IX.

Soit $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^*$. Supposons les a_i premiers entre eux dans leur ensemble (pour $i \in \{1, \ldots, k\}$ et notons, pour $n \geq 1$, u_n le nombre de k-uplets $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = n$.
Alors

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}.$$

X.

Pour avoir la valeur d'une intégrale, deux moyens existent :

1) Calculer sa valeur exacte. Différents outils peuvent être utilisés, en particulier :
   - la règle des invariants de Bioche :
     - si $-x \leftarrow x$ est un invariant, on utilise $u = \cos x$,
     - si c'est $\pi - x \leftarrow x$, on utilise $u = \sin x$,
     - si c'est $\pi + x \leftarrow x$, on utilise $u = \tan x$;
   - le théorème des résidus;
   - l'égalité de Plancherel-Parseval.
2) Calculer une valeur approchée. On distingue deux types de méthodes :
   (a) des méthodes déterministes, contenant :
      i. les méthodes de Newton-Cotes,
      ii. les méthodes de Gauss;
   (b) une méthode probabiliste : la méthode de Monte-Carlo.

XI.

À savoir sur les méthodes de quadrature :

Méthode	Ordre
Rectangles à gauche	0
Rectangles à droite	0
Point milieu	1
Trapèzes	1
Simpson	3

XII.

Voici un parallèle entre des méthodes de calcul approché d'intégrales et des shémas de résolution approchée d'équations différentielles ordinaires :

Méthode de quadrature		Schéma EDO
Nom	Ordre	Nom
Rectangles à gauche	0	Euler explicite
Rectangles à droite	0	Euler implicite
Point milieu	1	Euler modifié
Trapèzes	1	Crank-Nicolson
Simpson	3	Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)

XIII.

On a l'identité remarquable, numérotée (1) :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{1}$$

XIV.

Pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, le déterminant de Vandermonde est

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

XV.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$. Alors on peut montrer successivement que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0,$$

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}},$$

$$u_n \underset{+\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{n}} \underbrace{- \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)}_{=O\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)}.$$

XVI.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x}{x} \end{array}$. On peut prolonger f par continuité en $\sin_c$ définie par $\sin_c(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$