切比雪夫不等式：$P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=\frac{E\{|X_n-X|^2\}}{\varepsilon^2}$

若 i 为遍历态 $\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{\mu_i}$

若 i 是周期 d 的正常返 $\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_i}$

• $f_{ij}=\sum_{k\in N} p_{ik}+p_{kj}+\sum_{k\in H}p_{ik}$ $H=\{k\mid k\leftrightarrow j\}$

# 电子科技大学开卷考试预备纸

考生姓名：淡峰　班级：2019210801　学号：201[illegible]21080135　专业名称：计算机科学与技术

所在学院（盖章）

科技 数学科学学院

有限马氏链，必有正常返
• 没有零常返
• 所有非常返状态组成的集合不可能是闭集.

$m_x(t)=E(X_t)$　$C(s,t)=R(s,t)-m_x(s)m_x(t)$

$R(s,t)=E[X_sX_t]$

注意事项：该专用纸作为考卷的一部分，必须署名随答卷上交，上交的试卷中缺少或出现多张该预备纸的考生成绩记零分；考场上考生互相传递、交换、看他人的专用预备纸均视为作弊。专用预备纸上盖有考生所在学院鲜章方可带入考场。夹带无学院鲜章的预备纸，视为作弊，成绩记零分。

$E=N+C_1+\cdots+C_k$
$C$：不相交、不可约的正常返闭集.

柯西均方收敛准则：随机变量序列 $\{X_n,n\geq1\}$ 均方收敛 $\Leftrightarrow$ 其为柯西列.

均方极限的性质：$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}X_n=X$，$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}Y_n=Y$

(1) $\lim_{m,n\to\infty}E(X_mY_n)=E(XY)$

(2) $\lim_{n\to\infty}E(X_n)=E(\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}X_n)=E(X)$

(3) $\lim_{n\to\infty}E(|X_n|^2)=E(|\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}X_n|^2)=E(|X|^2)$

(4) $\lim_{n\to\infty}D(X_n)=D(\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}X_n)=D(X)$

(5) $\lim_{n\to\infty}E(e^{juX_n})=E(e^{ju\,\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}X_n})=E(e^{juX})$

洛易夫准则：$\{X_n,n\geq1\}$ 均方收敛 $\Leftrightarrow$ $\lim_{m,n\to\infty}E(X_mX_n)$ 存在.（自相关函数）

• $\{X(t),t\in T\}$ 在 $t_0$ 处收敛 $\Leftrightarrow$ $\lim_{(s,t)\to(t_0,t_0)}E(X(s)X(t))$ 存在.

数字特征间随机变量序列的均方极限.

均方连续准则：$\{X(t),t\in T\}$ 在 $t_0\in T$ 处均方连续 $\Leftrightarrow$ $R(s,t)$ 在 $(t_0,t_0)$ 处连续.

• $\{X(t),t\in T\}$ 均方连续 $\Leftrightarrow$ $R(s,t)$ 在对角线上连续.

• $\{X(t),t\in T\}$ 相关函数 $R(s,t)$ 对角线上连续 $\Leftrightarrow$ 相关函数在 $T\times T$ 上连续.

• $\{X(t),t\in T\}$ 均方连续 $\Rightarrow m_x(t),D_x(t)$ 连续.

均方导数（均方可微准则）$\{X(t),t\in T\}$ 在 $t_0\in T$ 处均方可微 $\Leftrightarrow$ $R(s,t)$ 在 $(t_0,t_0)$ 上广义二阶可微.

即 $\lim_{\substack{\Delta s\to0\\ \Delta t\to0}}\frac{f(s+\Delta s,t+\Delta t)-f(s+\Delta s,t)-f(s,t+\Delta t)+f(s,t)}{\Delta t\Delta s}$ 存在. $f(s,t)$ 在 $(s,t)$ 处广义二阶导数.

（推论）. $\{X(t),t\in T\}$ 的 $R(s,t)$ 在 $T\times T$ 广义二阶可微，则 $R_s'(s,t)$，$R_t'(s,t)$，$R_{st}''(s,t)$，$R_{ts}''(s,t)$ 存在.

4性质：

(1) $m_{x'}(t)=E[X'(t)]=m'(t)$

(2) $R_{x'}(s,t)=E[X'(s)X'(t)]=R''_{st}(s,t)=R''_{ts}(s,t)$

(3) $R_{x'x}(s,t)=R_s'(s,t)$

$R_{xx'}(s,t)=R_t'(s,t)$

若 $\{X(t),t\in[a,b]\}$ 的 $R(s,t)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上可积，则 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方可积，

$E[|\int_a^bX(t)dt|^2]=\int_a^b\int_a^bR(s,t)dsdt$

• $\|\int_a^bX(t)dt\|\leq\int_a^b\|X(t)\|dt$.

• $E[\int_a^bf(t)X(t)dt]=\int_a^bf(t)m_x(t)dt$

• $E[|\int_a^bf(t)X(t)dt|^2]=\int_a^b\int_a^bf(s)f(t)R(s,t)dsdt$

• $E[Y(t)]=E[\int_a^tX(s)ds]=\int_a^tE[X(s)]ds$

$R_Y(s,t)=\int_a^s\int_a^tR_X(u,v)dudv$

$Y(t)=\int_a^tX(u)du\Rightarrow Y'(t)=X(t)$

严平稳过程：$F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)=F(t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau;x_1,x_2,\cdots,x_n)$

二阶矩存在 ~~⇒~~ 严平稳是宽平稳.

正态过程：严平稳 $\Leftrightarrow$ 宽平稳

平稳过程自相关函数满足：

(1) $R_X(0)\geq0$　(2) $|R_X(\tau)|\leq R_X(0)$

(3) $R_X(\tau)$ 为偶函数　(4) 非负定性.

$R_X(\tau)$ 的周期性 $\Leftrightarrow$ $\{X(t)\}$ 周期性.

• 相互独立的平稳 $\Rightarrow$ 联合平稳.

• $\{X(t),t\in T\}$ 均方连续 $\Leftrightarrow$ $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ c.t.

• $\{X(t),t\in T\}$ 均方可微 $\Leftrightarrow$ $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处二次可微

• $\{X(t),t\in T\}$ 均方可微的平稳过程 $\Rightarrow$ $\{X'(t),t\in T\}$ 平稳. 均值函数 $m_{x'}(t)=0$. 自相关函数 $R_{x'}(\tau)=-R_x''(\tau)$

互相关 $R_{xx'}(\tau)=R_x'(\tau)$　$R_{x'x}(\tau)=-R_x'(\tau)$

$\{X(t),t\in T\}$ 均方可微的实平稳过程. $\forall t\in T$，$X(t)$，$X'(t)$ 不相关

$R_{xx'}(0)=0$.　$R_{x'x}(0)=0$.　（正态：独立）

• $E[\int_a^bX(t)dt]=m_x(b-a)$

• $E[\int_a^bX(t)dt]^2=2\int_0^{b-a}[(b-a)-|\tau|]R(\tau)d\tau$

$\{X(t),t\in R\}$ 实平稳，均值具有均方遍历性 $\Leftrightarrow$

$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})(R_x(\tau)-m_x^2)d\tau=0$

$\int_{-\infty}^{+\infty}|C_x(\tau)|d\tau<\infty\Rightarrow\{X(t),t\in R\}$ 均值均方遍历.

$\lim_{\tau\to\infty}R_x(\tau)=m_x^2\Rightarrow\{X(t),t\in R\}$ 均值均方遍历

$\{X(t),t\in R\}$ 实平稳，自相关函数具有均方遍历性 $\Leftrightarrow$

$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{u}{2T})[B(u)-R^2(\tau)]du=0$

$B(u)=E[X(t)X(t+\tau)X(t+u)X(t+\tau+u)]$

$\{X(t),t\in R\}$ 零均值实平稳正态过程.

$\lim_{\tau\to\infty}R_x(\tau)=0\Rightarrow\{X(t),t\in R\}$ 自相关均方遍历

C-K 方程. $p_{ij}^{(k+l)}(m)=\sum_{r\in E}p_{ir}^{(k)}(m)p_{rj}^{(l)}(m+k)$

齐次马氏链：$p_{ij}^{(k+l)}=\sum_{r\in E}p_{ir}^{(k)}p_{rj}^{(l)}$

$f_{ij}^{(n)}=\sum_{i_1\neq j}\sum_{i_2\neq j}\cdots\sum_{i_{n-1}\neq j}p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}j}$

$p_{ij}^{(n)}=\sum_{m=1}^{n}f_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(n-m)}$　$i\to j\Rightarrow f_{ij}>0$

非常返 $f_{ii}<1$；$\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}<\infty$　$\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}=0$.

正常返 $f_{ii}=1$. $\mu_i<+\infty$：

$\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=+\infty$，且 $\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}\neq0$

零常返：$f_{ii}=1$. $\mu_i=+\infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=+\infty$，且 $\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}=0$

1. 积化和差公式：

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$

2. 条件数学期望：

$E(Y|x) = E(Y|X=x) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} y\, dF_{Y|X}(y|x)$

$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)\, dy$

- $E(Y|X=x) = \mu(x)$ $E(X|Y=y) = \delta(y)$ 为实值函数.
- $\mu(X) = E(Y|X)$ $\delta(Y) = E(X|Y)$ 为随机变量

3. 全数学期望公式：$E(X) = E[E(X|Y)]$

$E[g(X)] = E\{E[g(X)|Y]\}$

4. 特征函数：$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} f(x)\, dx$

$\varphi(t) = \sum_k e^{jtx_k} p_k$

$\varphi(t) = E(e^{jtX}) = E(\cos tX) + jE(\sin tX)$

- 单点分布：$P\{X=c\}=1$. $\varphi(u) = e^{juc}$
- 两点分布：$P\{X=0\} = 1-p$ $P\{X=1\} = p$
  $\varphi(u) = q + pe^{ju}$
- 二项分布 $X \sim B(n,p)$ $\varphi(u) = (q+pe^{ju})^n$
- 泊松分布：$X \sim P(\lambda)$ $\varphi(u) = e^{\lambda(e^{ju}-1)}$
- 指数分布 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $(\lambda > 0)$
  $\varphi(u) = \left(1 - \frac{ju}{\lambda}\right)^{-1}$
- 均匀分布：$X \sim U[-a,a]$ $\varphi(t) = \frac{\sin at}{at}$
- 正态分布 $X \sim N(0,1)$ $\varphi(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2}$
  $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\varphi(u) = e^{j\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2}$

变形：X的特征函数 $\varphi_X(t)$. $Y=aX+b$ 的特征函数

$\varphi_Y(t) = e^{jbt}\varphi_X(at)$. $a, b$ 为常数.

5. 特征函数与矩的关系：$E(X^k) = j^{(-k)}\varphi^{(k)}(0)$

6. 反演公式：随机变量的特征函数 $\varphi(t)$ 在 $R$ 上可积，

若X为连续型随机变量 $\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jux} f(x)\, dx$ 则

7. 设 $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ 为零均值4维正态随机变量

(1) $E(X_1X_2X_3X_4) = E(X_1X_2)E(X_3X_4) + E(X_1X_3)E(X_2X_4) + E(X_1X_4)E(X_2X_3)$

(2) $E(X_1^2X_2^2) = E(X_1^2)E(X_2^2) + 2[E(X_1X_2)]^2$

8. 柯西不等式：$|E(XY)|^2 \leq E^2[|XY|] \leq E[X^2]E[Y^2]$

1. 正态过程：(二维) $(X, Y) \sim N(\mu, C)$

$f(x) = \frac{1}{2\pi(\det C)^{\frac{1}{2}}} \exp\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\}$

(n维)

$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det C)^{\frac{1}{2}}} \exp\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\}$

2. 特征函数.

$\varphi(t) = \exp\{j\mu^T t - \frac{1}{2}t^T C t\}$

$X \sim N(\mu, C)$ $Y = KX$,

$Y \sim N(K\mu, KCK^T)$

3. 维纳过程、均方连续、均方可导

(1) 独立增量过程

(2) $\forall s,t \geq 0$, $W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2|t-s|)$

(3) $P\{W_0 = 0\} = 1$. (零初值性)

(4) 正态过程、轨道连续

$E(W_t) = 0$. $E(W_sW_t) = \sigma^2 \min(s,t)$

4. 泊松过程 (1) $N(0) = 0$

(2) 具有平稳独立增量

(3) 具有齐次性，分布仅与 $t-s$ 有关

(4) $P\{N(h)=1\} = \lambda h + o(h)$

$P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

$P\{N(h) = 0\} = 1 - \lambda h$

(5) $N(t) - N(s)$ 服从 $P[\lambda(t-s)]$

(6) 数字特征：$m_X(t) = \lambda t$

$D(t) = \lambda t$

$R(s,t) = \lambda\min\{s,t\} + \lambda^2 st$

$C(s,t) = \lambda\min\{s,t\}$

(7) A在 $(0,\tau]$ 发现了n次；

A在 $(0,s]$ 时间发生了k次；

$P\{N(s)=k | N(\tau)=n\}$

$= C_n^k\left(\frac{s}{\tau}\right)^k\left(1-\frac{s}{\tau}\right)^{n-k}$

(8) $\{T_n\}$ 表示时间间隔，

$\{T_n, n \geq 1\}$ 独立同服从指数分布

$E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

$\{W_n\}$ 表示等待时间服从Γ分布

$f_{W_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

·已知 $(0,t]$ 内A发生n次，则这n次事件的到达时间 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 的联合条件概率密度为：

$f(t_1, t_2, \cdots, t_n | N(t) = n)$

$= \begin{cases} \frac{n!}{t^n} & 0 < t_1 < \cdots < t_n < t \\ 0 & 其他. \end{cases}$

·设总体X有概率密度 $f(x)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是X的简单随机样本生成的顺序统计量，其概率密度为：

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = n!f(x_1)\cdots f(x_n)$

$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

当 $f(x)$ 为 $[0,t]$ 上均匀分布的概率密度时，

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n} & 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < t \\ 0 & 其他. \end{cases}$

(9) 复合泊松过程：$Y_n$ 独立同分布，与 $N(t)$ 独立.

$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$

复合泊松过程也为独立增量过程

$\varphi_X(u,t) = e^{\lambda t[\varphi_Y(u) - 1]}$

$E[X(t)] = \lambda t E[Y_1]$ $D[X(t)] = \lambda t E[Y_1^2]$

(10) 泊松过程的叠加与分解：

·若n个相互独立的泊松过程 $\{N_i(t), t \geq 0\}$，参数分别为 $\lambda_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$，其和 $\{N_1(t) + N_2(t) + \cdots + N_n(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ 的泊松过程.

$N_1(t)$ 为参数 $\lambda_1$ 的泊松过程；$N_2(t)$ 为参数 $\lambda_2$ 的泊松过程：

$P\{N_1(t) = k | N_1(t) + N_2(t) = n\} = C_n^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$

·系统输入为参数λ的泊松过程，每个质点以概率p进入系统A，以 $1-p$ 进入系统B.

$\{N_A(t), t \geq 0\}$ 表示 $[0,t]$ 进入A的质点数；

$\{N_B(t), t \geq 0\}$ 表示 $[0,t]$ 进入B的质点数.

① 对 $\forall t \geq 0$，$N(t) = N_A(t) + N_B(t)$

$\{N_A(t), t \geq 0\}$ 为参数 $\lambda p$ 的泊松过程；

$\{N_B(t), t \geq 0\}$ 为参数 $\lambda(1-p)$ 的泊松过程.

② $\{N_A(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_B(t), t \geq 0\}$ 相互独立.

依分布收敛：$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

·正极限定理：$\{F_n(x)\}$ 弱收敛于 $F(x)$，

$\Rightarrow \{\varphi_n(t)\}$ 收敛于 $\varphi(t)$.

逆极限定理：$\{\varphi_n(t)\}$ 收敛于 $\varphi(t)$，$\varphi(t)$ 在 $t=0$ 连续

$\Rightarrow \{F_n(x)\}$ 弱收敛于 $F(x)$.

此时. $X_n \xrightarrow{d} X$ $(n \to \infty)$

依概率收敛：对 $\forall \varepsilon > 0$，$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0$.

或 $\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$.

则随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于X.

记作 $\lim_{n\to\infty} X_n = X(P)$ 或 $X_n \xrightarrow{P} X$

依概率1收敛：$P\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1$.

$X_n \xrightarrow{a.s.} X$ 或 $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ (a.s.)

定义：$\|X\| = [E(|X|^2)]^{\frac{1}{2}}$

(1) $\forall X, Y \in H$，$|E(XY)| \leq E(|XY|) \leq \|X\| \cdot \|Y\|$

(2) $\forall X \in H$. $|E(X)| \leq E(|X|) \leq \|X\|$

(1)式为：$E^2[XY] \leq E[|X|^2] \cdot E[|Y|^2]$

性质：① $\forall X \in H$. $\|X\| \geq 0$.

② $\|aX\| = |a| \cdot \|X\|$. $\forall a \in R, X \in H$.

③ $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.

均方极限：$d(X, Y) = [E(|X-Y|^2)]^{\frac{1}{2}}$

$\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = \lim_{n\to\infty}\|X_n - X\| = 0$. 称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 均方收敛于随机变量X，称X为 $X_n$ 的均方极限. $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, X_n = X$.

若二阶矩空间H中随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$，满足 $\lim_{m,n\to\infty} d(X_n, X_m) = \lim_{m,n\to\infty}\|X_m - X_n\| = \lim_{m,n\to\infty} E\{|X_m - X_n|^2\} = 0$，则为柯西列.