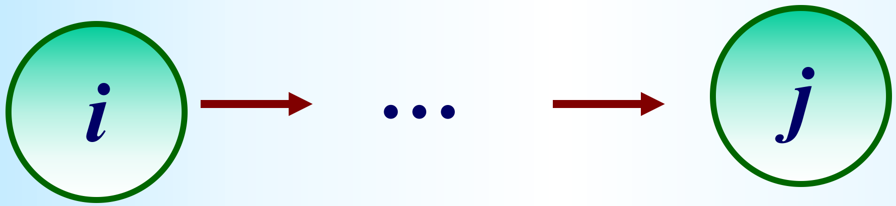
§ 5.4齐次马氏链状态的分类(二)

三、状态间的关系

定义5.4.8 对$\forall i, j \in E$,若存在$n \geq 1$, 使 $p_{ij}^{(n)} > 0$,称自状态i 可达状态j ,记为$i \to j$.

若$i \to j$, $j \to i$同时成立, 称状态i 与状态j 互通,记为 $i \leftrightarrow j$.

注 自i 可达j 表示从节点i 出发, 存在一条路径可到达节点j .



引理2 可达具有传递性

若 $i \to j$, 且$j \to k$, 则$i \to k$.

证 $i \to j$, 则$\exists\, r \geq 1$, 使$p_{ij}^{(r)} > 0$;

$j \to k$, 则$\exists\, n \geq 1$, 使 $p_{ij}^{(n)} > 0$;

由$C-K$方程

$$p_{ik}^{(r+n)} = \sum_{m\in E} P_{im}^{(r)} P_{mk}^{(n)} \geq P_{ij}^{(r)} P_{jk}^{(n)} > 0.$$

即有 $i \to k$.

互通关系是状态空间E上的一个等价关系,即满足

1) 自反性(律) $i \to i$;

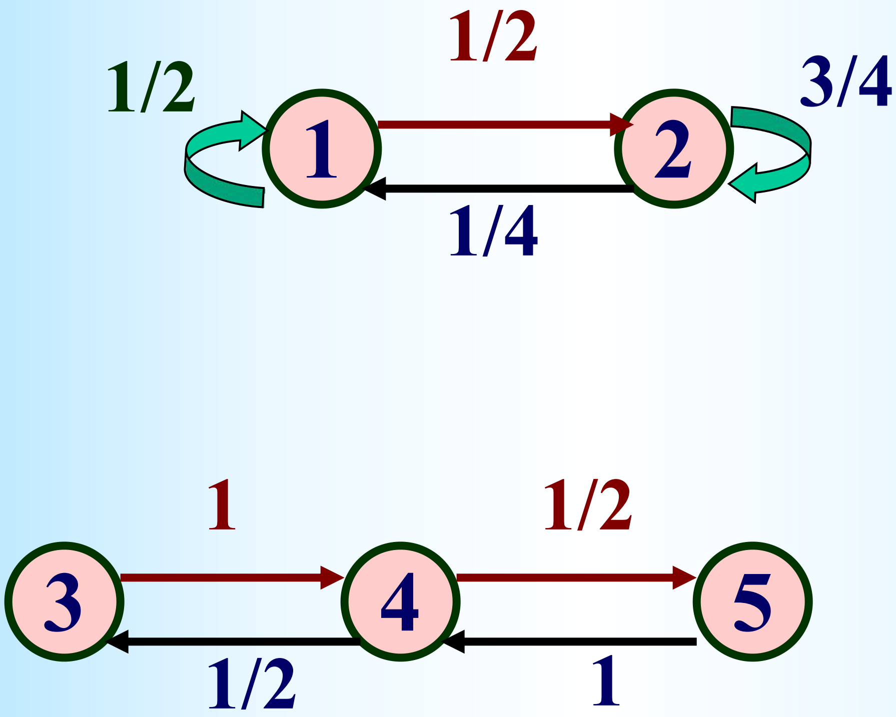
2) 对称性 $i \leftrightarrow j$, 当且仅当 $j \leftrightarrow i$;

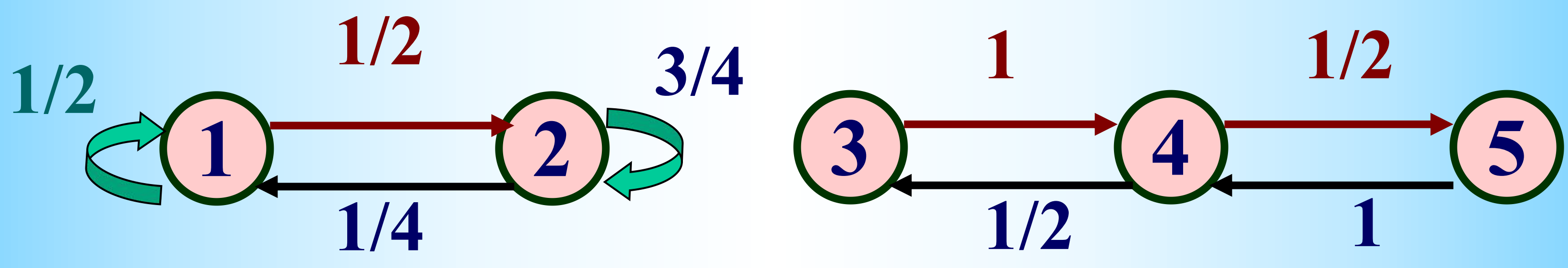
3) 传递性 $i \leftrightarrow k$ 且 $k \leftrightarrow j$, 则 $i \leftrightarrow j$.

EX.4 设马氏链的状态空间$E=\{1,2,3,4,5\}$，其一步转移矩阵为

$$P=\begin{array}{c@{}c}
\begin{bmatrix}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} &
\end{array}$$

其一步状态转移图如下





按互通性可将E 分解为

$$E=\{1,2\}\cup\{3,4,5\}=C_1\cup C_2$$

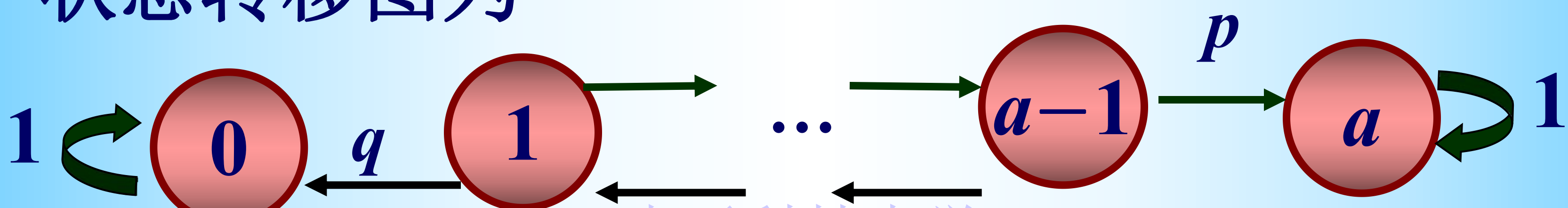
不相交集

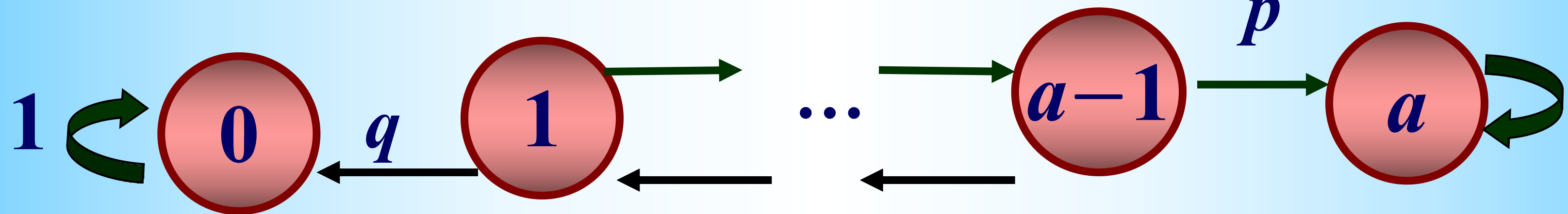
其中，C_i中的状态是互通的，质点运动一旦位于某一类，以后它的状态都保持在此类.

EX.5 设马氏链的状态空间$E=\{0,1,2,\ldots,a\}$，其一步转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (0<q<1,\ 0<p<1)$$

状态转移图为





有 $p_{00}=1,\ f_{00}^{(1)}=1,\ f_{00}^{(n)}=0,(n>1);$

$p_{aa}=1,\ f_{aa}^{(1)}=1,\ f_{aa}^{(n)}=0,(n>1);$

按互通性有 $E=\{0\}\cup\{1,2,\ldots,a-1\}\cup\{a\}$

$=C_1\cup C_2\cup C_3$

状态可由第二类到达第一类或第三类, 反之不真.

定理5.4.5 设状态i 和j 互通, 则

1) i 和j 同为非常返的;

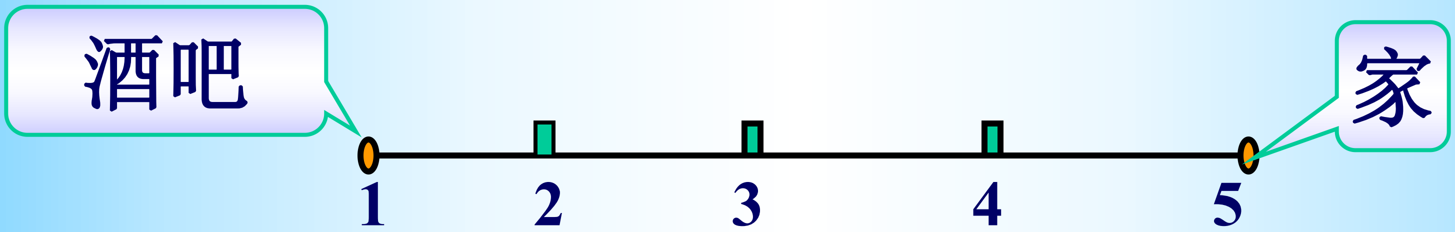
2) i 和j 同为零常返的;

3) i 和j 同为正常返非周期的(遍历状态的);

4) i 和j 都是正常返有周期的, 具有相同周期.

结论 互通状态具有相同类型

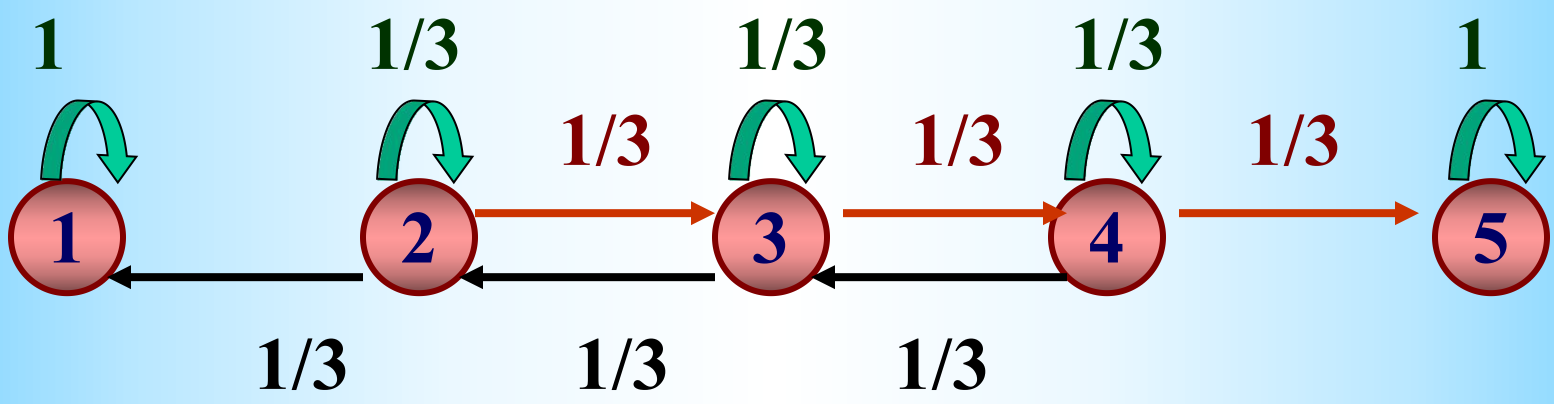
续EX.3 醉汉问题



醉汉在街上徘徊, 在每一个街口以1/3的概率停下, 以1/3的概率向前或向后.

若他又返回酒吧或到家门, 不再游动.

状态转移图为

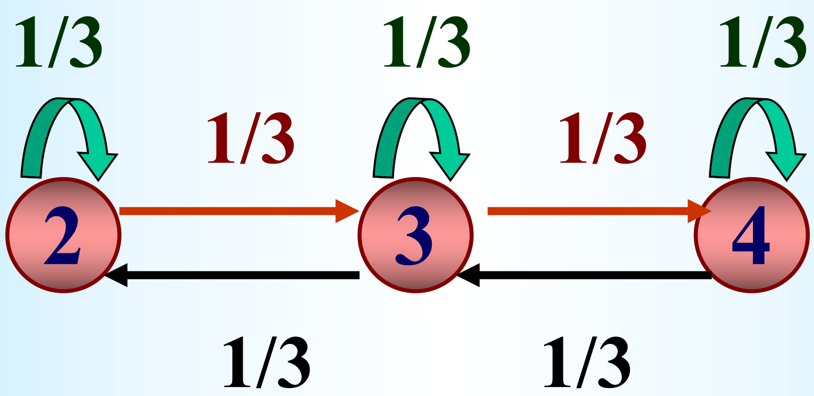


分析状态“ 2”的类型很困难．

先讨论状态“3”的类型.

有限次首达状态“3”的概率分别为

$$f_{33}^{(1)}=\frac{1}{3},\quad f_{33}^{(2)}=2\left(\frac{1}{3}\right)^2,\quad f_{33}^{(3)}=2\left(\frac{1}{3}\right)^3,\cdots$$



一般有 $f_{33}^{(n)} = 2(\frac{1}{3})^n, \quad n = 2,3,\cdots$

状态3 的最终返回概率为

$$f_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{33}^{(n)} = \frac{1}{3} + 2[(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + \cdots (\frac{1}{3})^n + \cdots]$$

$$= \frac{1}{3} + 2 \times \frac{[\frac{1}{3}]^2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} < 1,$$

状态3是非常返的.

因 $p_{33}^{(1)}=\frac{1}{3},\Rightarrow d_3=1,$ 状态3是非周期的.

由于 $2\leftrightarrow 3,\ 3\leftrightarrow 4,$

故3 和4 都是非周期非常返的，且

$$E=\{1\}\cup\{5\}\cup\{2,3,4\}.$$

关于常返状态有下结论：

定理5.4.6 设i, $j\in E$, 且$i\neq j$，则

1）若状态i和j互通, 且j是常返态, 则 $f_{ij}=1$;

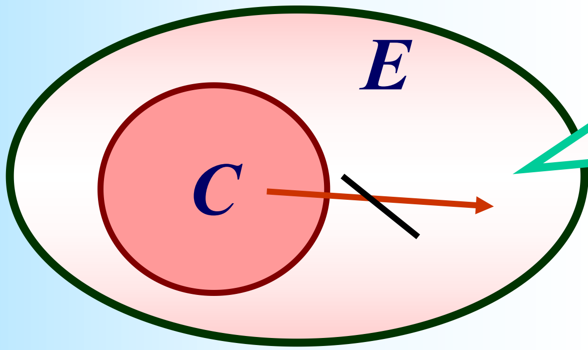
2）若状态i是常返的, 且$i\to j$,则$j\to i$. $(\Rightarrow i\leftrightarrow j)$

一步转移概率

四、闭集、状态空间的分解

定义5.4.9 设E是状态空间, $C\subset E$,若对$\forall i\in C$及$j\notin C$,都有$p_{ij}=0$, 称C为一个闭集.

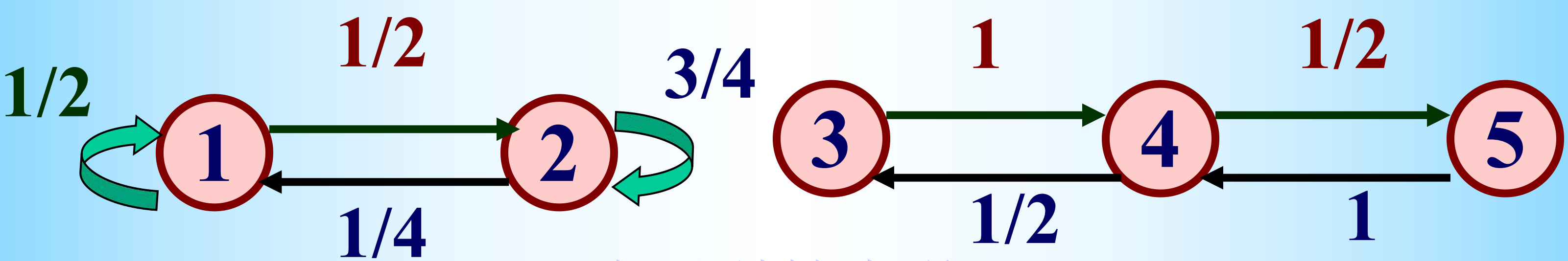
直观解释 自C内部不能到达C的外部.



如果质点运动状态进入C, 将永远停留在C内.

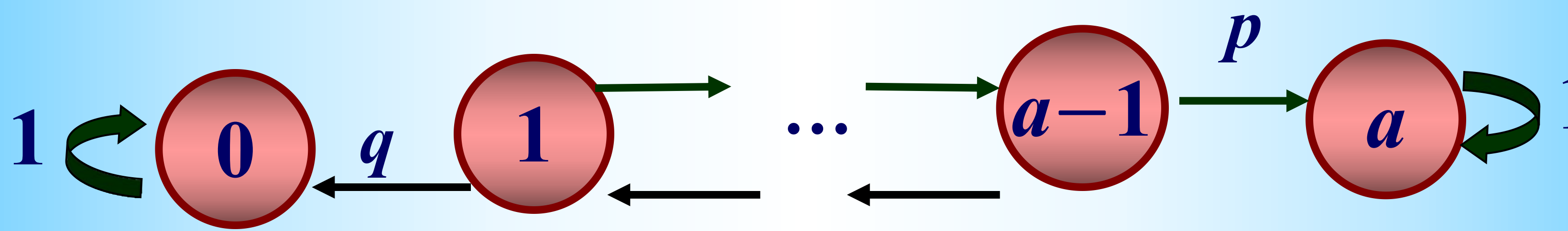
续EX.4 $E=\{1,2\}\cup\{3,4,5\}=C_1\cup C_2$

E、C_1和C_2都是闭集.



续EX.5 有$E=\{0\}\cup\{1,2,\ldots,a-1\}\cup\{a\}$

$$=C_1\cup C_2\cup C_3$$



E、C_1、C_3都是闭集，而C_2不是闭集.

整个状态空间构成一个闭集.

定义5.4.10 若状态单元素集$\{i\}$是闭集，称 i 是**吸收状态**.

续EX.5 有$E=\{0\}\cup\{1,2,\ldots,a-1\}\cup\{a\}$,状态"0"和状态"$a$"是吸收态.

定义5.4.11 若闭集C中不再含有非空的闭真子集,称C是**不可约的**(或不可分的,最小的).

若马氏链的状态空间E是不可约的,称此马氏链是**不可约马氏链**.

定理5.4.7 马氏链所有常返态构成一闭集.

证明 设i为常返态且 $i \to j$, 根据定理6.4.6之2)知$i \leftrightarrow j$, 从而j也为常返态 .

从常返态出发, 只能到达常返态. 故常返态集是闭集.

推论 不可约马氏链或者没有非常返态, 或者 没有常返态.

推论 齐次马氏链不可约的充要条件是它的任意两个状态均互通.

定理5.4.8 分解定理

齐次马氏链的状态空间可唯一地分解成有限个或可列多个不相交的状态子集之并.

$$E=N\cup C_1\cup C_2\cup\ldots$$

其中 1）N是所有非常返态所成之集；

2）每个C_n,（n=1,2,…）均为常返状态组成的不可约闭集.

注1 对$\forall n \geq 1$, C_n内的状态均互通，从而具有相同的状态类型.

注2 对$\forall i, j \in C_n$, $f_{ij} = 1$;

注 3 从常返状态出发,不可能转移到非常返状态.

定理5.4.9 设N是非常返态集, $i \in N$, j是常返态，则最终概率f_{ij}满足以下方程

$$f_{ij} = \sum_{k \in N} p_{ik} f_{kj} + \sum_{k \in H} p_{ik}, \quad (i \in N)$$

其中$H=C(j)$.

证明 $\because f_{kj}=\begin{cases}1, & k\in H;\\ 0, & k\notin H \text{ 且 } k\notin N.\end{cases}$

$$\therefore f_{ij}=P\{\text{经有限步到达 } j \mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in E}P\{\text{经有限步到达 } j \mid X(0)=i, X(1)=k\}$$

$$\cdot P\{X(1)=k \mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{k\in N}p_{ik}f_{kj}+\sum_{k\in H}p_{ik}f_{kj}+\sum_{\substack{k\notin H\\ k\notin N}}f_{kj}p_{ik}$$

$$\because f_{kj}=\begin{cases}1, & k\in H;\\ 0, & k\notin H \text{ 且 } k\notin N.\end{cases}$$

$$f_{ij}=\sum_{k\in N}p_{ik}f_{kj}+\sum_{k\in H}p_{ik}f_{kj}+\sum_{\substack{k\notin H\\ k\notin N}}f_{kj}p_{ik}$$

$$=\sum_{k\in N}p_{ik}f_{kj}+\sum_{k\in H}p_{ik}$$

EX.6 设某企业在每次经营中赢利、亏损的概率分别为p 和$1-p$（$0<p<1$), 各次经营是独立的. 设企业当前财产为i,财产达到N则停止，求企业财产最终达到N 个单位的概率.

分析 记$X(n)$—n 时刻企业的财产.

$\{X(n), n \geq 1\}$是齐次马氏链,一步转移概率为

$$p_{00} = 1, \quad p_{NN} = 1;$$

$$p_{i\,i+1} = p = 1 - p_{i\,i-1}, \quad (i = 1,2,\cdots,N-1)$$

状态空间 $E = \{0\} \cup \{N\} \cup \{1,2,\cdots, N-1\}$

$\{1,2,\ldots,N-1\}$是非常返状态集, 每一个非常返态仅到达有限次.

即在进行限次经营后, 企业或者破产或者达到目标值N.

解

记 $f_i \triangleq f_{iN} = P\{$经有限步最终达到$N \mid X(0)=i\}$

根据定理6.4.9的结论，有

$$f_i = pf_{i+1} + qf_{i-1}, \quad i = 1,2,\cdots,N-1,$$

或 $f_{i+1} - f_i = \dfrac{q}{p}(f_i - f_{i-1})$,（因 $p+q=1$）

由$f_0 = f_{0N} = 0$,得

$$f_2 - f_1 = \frac{q}{p}(f_1 - f_0) = \left(\frac{q}{p}\right) f_1,$$

$$f_3 - f_2 = \frac{q}{p}(f_2 - f_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 f_1,$$

··········

$$f_i - f_{i-1} = \frac{q}{p}(f_{i-1} - f_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} f_1,$$

··········

$$f_N - f_{N-1} = \frac{q}{p}(f_{N-1} - f_{N-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} f_1,$$

将前i —1个等式相加, 得

$$f_i - f_1 = f_1[\frac{q}{p} + (\frac{q}{p})^2 + \cdots + (\frac{q}{p})^{i-1}]$$

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^i}{1-\dfrac{q}{p}} f_1, & \text{如}\, p \neq \dfrac{1}{2}; \\ i\, f_1, & \text{如}\, p = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

又因 $f_N = f_{NN} = 1$, 推得

$$f_1 = \frac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^N},$$

故 $$f_i=\begin{cases}\dfrac{1-\left(q/p\right)^i}{1-\left(q/p\right)^N}, & 如P\neq\dfrac{1}{2};\\[2ex] i/N, & 如P=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

当$N\to\infty$时

$$f_i=\begin{cases}1-\left(q/p\right)^i, & p\neq\dfrac{1}{2};\\[2ex] 0, & P=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

五、有限马氏链

若状态空间E 是有限集合, 称为有限马氏链. 有

1) 所有非常返状态组成的集合不是闭集;

2) 没有零常返状态;

3）必有正常返状态;

4）状态空间可分解为

$$E=N\cup C_1\cup C_2\cup\ldots\cup C_k$$

其中, N为非常返集，$C_1,C_2,\ldots,C_k$为常返闭集.