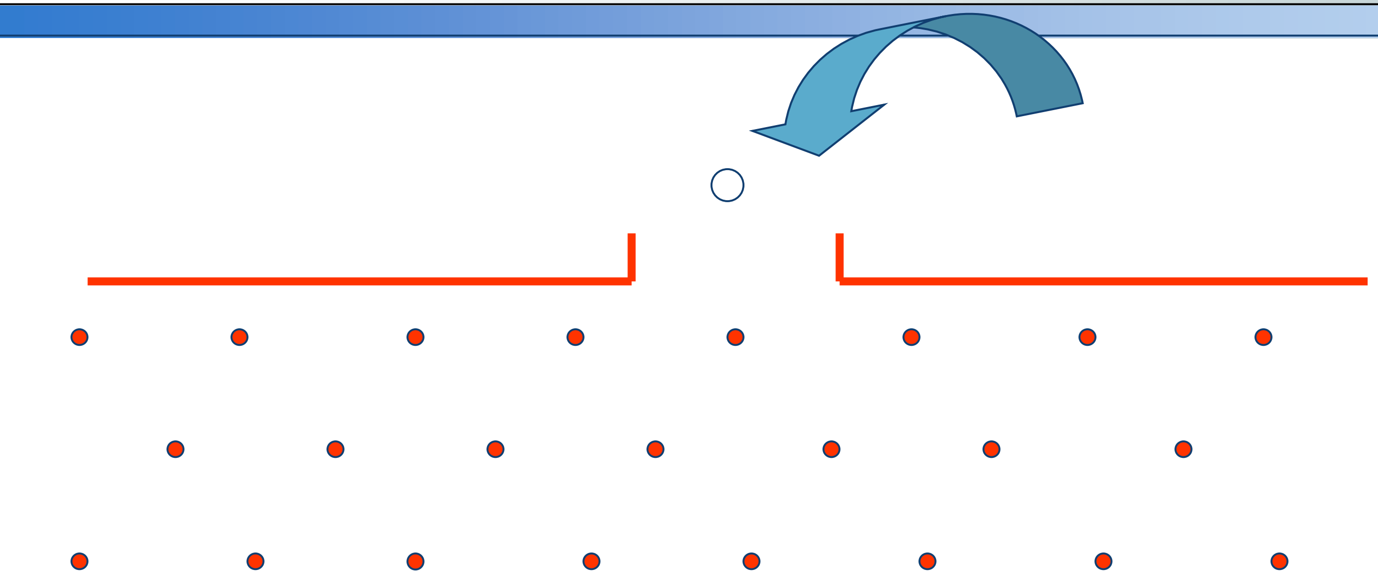
§2.2 维纳过程

一、维纳过程的数学模型

维纳过程是英国植物学家罗伯特.布朗在观察漂浮在液面的花粉运动—布朗运动规律时建立的随机游动数学模型.

EX.1（高尔顿钉板模拟试验）

将一个小球投入无限大高尔顿钉板内，小球各以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或向右移动一格.



$$X(k)=\begin{cases}1, & \text{在第}k\text{层向右位移一格;}\\ -1, & \text{在第}k\text{层向左位移一格.}\end{cases}$$

$X(k)$	-1	1
$P\{X(k)=i\}$	$1/2$	$1/2$

$\{X(k), k \in N^+\}$ 是一个独立随机过程, 令

$$Y(n) = \sum_{k=0}^{n} X(k),$$

小球在第n 次碰撞后所处位置

$\{Y(n), n \in N^+\}$是一个平稳独立增量过程.

均值函数为 $$E[Y(n)] = E\left(\sum_{k=1}^{n} X(k)\right) = 0,$$

方差函数为 $$D[Y(n)] = \sum_{k=1}^{n} D(X(k)) = n,$$

由独立同分布中心极限定理知 $as \quad n\to\infty$

$$P\left\{\frac{Y(n)}{\sqrt{n}}\le y\right\}=P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}X(k)}{\sqrt{n}}\le y\right\}\to\Phi(y)$$

即$Y^{*}(n)=\dfrac{Y(n)}{\sqrt{n}},n=1,2,\cdots$ 依分布收敛到标准正态分布

二、维纳过程的定义

定义2.2.1若随机过程$\{W(t), t\geq 0\}$满足下条件(1)~(3)称$\{W(t), t\geq 0\}$是参数为σ^2的**维纳过程**（或布朗运动）.

（1）$P(W_0=0)=1$;

（2）具有独立增量;

（3）$W(t)-W(s) \sim N(0,\sigma^2|t-s|)$，$(\sigma>0)$.

维纳过程

维纳过程应用广泛：电路理论、通信和控制、生物、经济管理等.

维纳过程的研究成果应用于计量经济学，使其方法论产生了一次飞跃，成功地应用于非平稳的经济过程，如激烈变化的金融商品价格的研究。

三、维纳过程的分布

1.一维分布： $W(t) \sim N(0,\sigma^2 t)$;

2. 增量分布： $W(t) - W(s) \sim N(0,\sigma^2 |t-s|)$;

设$t>s$， 因$W(0)=0$, 且$W(t)$是平稳独立增量过程，故

$$W(t)-W(s)=W(t-s+s)-W(s)$$

与 $$W(t-s)-W(0)=W(t-s)$$

有相同分布$N(0,\sigma^2(t-s))$.

3. 维纳过程是正态过程.

证　设维纳过程$\{W(t), t\geq 0\}$的参数是σ^2,

任取n及$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,

$$X_k \triangleq W(t_k) - W(t_{k-1}),$$

则　$X_k \sim N(0, \sigma^2(t_k - t_{k-1}))$, 　$t_0 = 0, k = 1,2,\cdots,n$

相互独立，且有

$$W(t_k) = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

$$\begin{bmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

正态随机向量的线性变换服从正态分布。

四、维纳过程的数字特征

1. $E\{W(t)\}=0$;

2. $C(s, t)=R(s,t)=\sigma^2 \min(s,t)$

维纳过程是平稳独立增量过程

EX.1 设$\{W(t), t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，求下列过程的均值函数和相关函数.

1) $X(t)=W^2(t),\ t\geq 0$;

2) $X(t)=tW(\frac{1}{t}),\quad t>0.$

解 1） $m_X(t)=E[X(t)]=E[W^2(t)]$

$$=D[W(t)]+\{E[W(t)]\}^2=\sigma^2 t.$$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=E[W^2(s)W^2(t)]$$

$$=E\{W^2(s)[W(t)-W(s)+W(s)]^2\}\quad (s<t)$$

$$= E\{W^2(s)[W(t)-W(s)]^2\}+E[W^4(s)]$$

$$+2E\{W^3(s)[W(t)-W(s)]\}$$

独立增量

$$= E[W^2(s)]E\{[W(t)-W(s)]^2\}+E[W^4(s)]$$

$$=\sigma^2 s\sigma^2(t-s)+3\sigma^4 s^2=\sigma^4(st+2s^2)$$

故 $R_X(s,t)=\sigma^4(st+2\min^2(s,t))$

其中因 $W(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$；

$W(t)-W(s)\sim N(0,\sigma^2|t-s|)$

另因　若$X \sim N(0,\sigma^2)$, 有

$$E(X^n)=\begin{cases}0, & n=1,3,5,\cdots\\ \sigma^n(n-1)(n-3)\cdots 1, & n=2,4,6\cdots\end{cases}$$

2)　$m_X(t)=E[X(t)]=tE[W(\frac{1}{t})]=0,\quad t>0.$

$$R_X(s,t)=E[sW(\frac{1}{s})tW(\frac{1}{t})]=stE[W(\frac{1}{s})W(\frac{1}{t})]$$

$$=st\sigma^2\min(\frac{1}{s},\frac{1}{t})=\sigma^2\min(s,t).$$

五、维纳过程的判定

定理2.2.1 设 $\{W(t), t\geq 0\}$是正态过程，若$W_0=0$，对任意s,t>0,有$E(W_t)=0$,$E(W_sW_t)=C^2\min(s,t)$,且轨道连续，则$\{W(t), t\geq 0\}$是维纳过程。

推论 设$\{W(t),t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，则以下过程仍是维纳过程。

（1） 对任意的$\tau \geqq 0$, $\{W(t+\tau)-W(\tau), t\geqq 0\}$

（2） 对任意的$\lambda>0$, $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}W(\lambda t), t\geq 0\}$

（3） $$Y(t)=\begin{cases} tW(\frac{1}{t}), t>0 \\ 0, \quad t=0 \end{cases}$$