§2.1 正态过程

在现实问题中，满足一定条件的随机变量之和的极限服从正态分布.

电子技术中的热噪声是由大量的热运动引起，也服从正态分布.

由于一个随机过程可以用有限维分布来描述，为研究正态过程应首先研究多维正态分布随机变量.

一、多维正态随机变量

1.概率密度与特征函数

若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

记

$$\mu = E\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

其中$\sigma_1>0,\sigma_2>0$, $|\rho|<1$, 故协方差矩阵满足$|C|\neq 0$.

(X,Y)的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi|C|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\right\}$$

记为$(X,Y)\sim N(\mu,C)$.

定义2.1.1 设 $C=(c_{ij})$ 是 n 阶正定对称矩阵, μ 是 n 维实值列向量, 定义 n 维随机向量

$$X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

的联合密度函数为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\right\} \qquad (*)$$

其中 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, 称 X 服从 n 维正态分布.

记为$X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}} \sim N(\mu, C)$.

注 当$C=(c_{ij})$是n阶正定对称矩阵, 有$|C| \neq 0$;

若$|C|=0$则不能用(*)式给出其概率密度.称X服从退化正态分布或奇异正态分布.

定义2.1.2 n维正态分布随机向量$X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的特征函数为

$$\varphi(t) = \exp\left\{ j\mu^{\mathrm{T}} t - \frac{1}{2} t^T C t \right\} \qquad (**)$$

其中$t = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$.

2.边缘分布及二阶矩

以下结论总假定随机向量X=($X_1, X_2, \ldots, X_n$)^{T}服从$N(\mu, C)$.

非退化

定理2.1.2 n维正态分布随机变量X的任一子向量

$$(X_{k_1}, X_{k_2}, \cdots, X_{k_m})^T$$

也服从正态分布$N(\tilde{\mu}, \tilde{C})$, 其中$\tilde{\mu}$

多元正态分布的边缘分布仍是正态分布

$\tilde{C}$是C 保留第$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 行及列所得的m 阶矩阵.

3.独立性问题

定理2.1.3 n维正态分布随机向量$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立的充要条件是它们两两不相关.

等价于其协方差矩阵是对角阵.

4.正态随机向量的线性变换

定理2.1.4正态随机向量 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^{\mathrm{T}}$，记$E(\mathbf{X})=\boldsymbol{\mu}$,协方差矩阵为$\mathbf{C}$.

对$\mathbf{X}$ 的线性组合

$$Y=\sum_{j=1}^{n} l_j X_j=\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{X},\quad \mathbf{L}^{\mathrm{T}}=(l_1, l_2,\ldots, l_n)$$

有

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{n} l_j \mu_j=\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu},$$

$$D(Y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} l_j l_k c_{jk}=\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{L},$$

正态过程

定理2.1.5 $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 服从n 维正态分布N(μ ,C)的充要条件是它的任何一个非零线性组合

$$\sum_{j=1}^{n} l_j X_j,$$

服从一维正态分布.

可将多维正态随机变量问题转化为一维正态分布问题.

定理2.1.6 若$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$服从n维正态分布$N(\mu,C)$, $K=(k_{ij})_{m\times n}$是任意矩阵,则$Y=KX$服从m维正态分布$N(K\mu,KCK^T)$.

正态分布的线性变换不变性

证 对于任意m维实值列向量t, Y的特征函数为

$$\varphi_Y(t)=E(e^{jt^TY})=E(e^{jt^TKX})=E(e^{j(K^Tt)^TX})$$

$$=\exp\left\{j\mu^T(K^Tt)-\frac{1}{2}(K^Tt)^TC(K^Tt)\right\}$$

$$= \exp\left\{ j(K\mu)^{\mathrm{T}} t - \frac{1}{2} t^{\mathrm{T}} (KCK^{\mathrm{T}}) t \right\}$$

即随机向量Y=KX 服从*m*维正态分布*N*(Kμ, KBK$^{\mathrm{T}}$)

关于定理2.1.6的思考问题:

能否保证Y= KX 服从非退化正态分布 ？

反例: 设随机变量X_0与V相互独立,都服从标准正态分布$N(0,1)$, 令

$$X(1)=X_0+V,\quad X(2)=X_0+2V,\quad X(3)=X_0+3V,$$

问$(X(1),X(2),X(3))$是否服从非退化正态分布?

分析 设

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_0 \\ V \end{bmatrix}=K\begin{bmatrix} X_0 \\ V \end{bmatrix}$$

因

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ V \end{bmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

X的协方差矩阵为

$$\mathbf{KCK^T}=K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}K^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{KCK}^{\mathrm{T}}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

$X=(X(1), X(2), X(3))$不服从非退化正态分布.

一般地，若$X=(X_1, X_2)$是非退化二维正态随机向量,其线性变换 Y= KX, 有

1) 每一分量服从正态分布;

2) 不能构成二维以上的非退化联合正态分布;

3) 当$|KCK^{T}|\neq 0$时, 随机向量Y服从非退化正态分布.

可证明

推论 非退化正态分布随机向量X的行满秩线性变换仍服从非退化正态分布.

定理2.1.7 若随机向量X服从$N(\mu,C)$, 则存在一个正交变换U, 使得Y=UX是一个相互独立的正态随机向量.

证 因C为实对称矩阵, 存在正交阵U, 使

$$\mathrm{UCU}^T=\mathrm{D}=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

d_i 是C的特征向量

又因C是正定阵(从而非奇异)

➡ C 有n个线性无关特征向量

设U是以单位正交特征向量为列构成的正交阵, 令Y=UX 则得证.

二、正态随机过程

定义2.1.3 随机过程$\{X(t), t\in T\}$称为正态过程，如果它的任意有限维分布都是联合正态分布. 即对任意的正整数n和$t_1, t_2, \ldots, t_n\in T$, n维随机变量$(X(t_1),\ldots,X(t_n))$都服从正态分布.

注

1)上述几个定理均可应用于正态过程.

2）若存在n, 对$t_1,t_2, \dots,t_n \in T$, n维随机变量$(X(t_1),\dots,X(t_n))$服从退化正态分布, 称$\{X(t), t \in T\}$为退化正态过程.

3) 正态过程的有限维分布由二阶矩完全确定.

有 对任意的$n\geq 1$， $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$,

$$(X(t_1), \ldots, X(t_n))^{\mathrm{T}} \sim N(\mu, C),$$

$$\mu = \begin{bmatrix} m(t_1) \\ m(t_2) \\ \vdots \\ m(t_n) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C(t_1,t_1) & C(t_1,t_2) & \cdots & C(t_1,t_n) \\ C(t_2,t_1) & C(t_2,t_2) & \cdots & C(t_2,t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C(t_n,t_1) & C(t_n,t_2) & \cdots & C(t_n,t_n) \end{bmatrix}$$

$$C(t_i,t_j) = E\{[X(t_i) - m(t_i)][X(t_j) - m(t_j)]\}$$

$$(1 \leq i, j \leq n).$$

Ex.1 随机振幅电信号

设 $X(t)=\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t, t\in R$

$E(\xi)=E(\eta)=0, E(\xi^2)=E(\eta^2)=\sigma^2,$ ω为常数

ξ与η相互独立同服从正态分布,

1) 试求$X(t)$的均值函数和相关函数;

2）写出一维概率密度和二维概率密度.

解 1) $E\{X(t)\}=E(\xi)\cos\omega t+E(\eta)\sin\omega t=0$

因 $E(\xi\eta)=0$, 故

$$R(s,t)=E\{(\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t)(\xi\cos\omega s+\eta\sin\omega s)\}$$

$$=E(\xi^2)\cos\omega t\cos\omega s+E(\eta^2)\sin\omega t\sin\omega s$$

$$=\sigma^2\cos\omega(s-t)=\sigma^2\cos(\tau),(\tau=s-t)$$

$$\Rightarrow\qquad D(X(t))=R(t,t)=\sigma^2\cos 0=\sigma^2.$$

2) $X(t)$的一维密度为

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\qquad x\in R$$

$X(t_i)$是相互独立正态随机变量的线性组合，故$(X(t_1),X(t_2))$服从二维正态分布，其相关系数为

$$\rho=\frac{R(s,t)-m(s)m(t)}{\sqrt{R(s,s)}\sqrt{R(t,t)}}=\frac{\sigma^2\cos\omega\tau}{\sigma^2}=\cos\omega\tau$$

仅与$\tau=s-t$有关

得过程$X(t)$的二维密度为

$$f(x_1,x_2;s,t)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\cos^2\omega\tau}}e^{-\frac{x_1^2-2x_1x_2\cos\omega\tau+x_2^2}{2\sigma^2(1-\cos^2\omega\tau)}},$$

$$(x,y)\in R_2.$$

Ex.3 设随机过程$\{X(t), t\in T\}$和$\{Y(t), t\in T\}$相互独立，都是正态随机过程，设

$$Z(t)=X(t)+Y(t),\quad t\in R$$

证明 $Z(t)$是正态过程。

证 对任意正整数 n 及 $t_1,t_2,\cdots t_n\in R$

$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$和$(Y(t_1),Y(t_2),\cdots,Y(t_n))$

都是n维联合正态随机向量，并相互独立。

$(Z(t_1),Z(t_2),\cdots,Z(t_n))$ 的n维特征函数为

$$\varphi_z(t_1,t_2,\cdots,t_n;u_1,u_2,\cdots,u_n)$$

$$= E\{e^{j[u_1(X(t_1)+Y(t_1))+\cdots+u_n(X(t_n)+Y(t_n))]}\}$$

$$= E\{e^{j[u_1X(t_1)+\cdots+u_nX(t_n)]}\}E\{e^{j[u_1Y(t_1)+\cdots+u_nY(t_n)]}\}$$

$$= \exp\{j\mu'_X u - \frac{1}{2}u'C_X u\}\exp\{j\mu'_Y u - \frac{1}{2}u'C_Y u\}$$

$$= \exp\{j(\mu_X + \mu_Y)'u - \frac{1}{2}[u'C_X u + u'C_Y u]\}$$

$$= \exp\{\mathrm{j}(\mu_X + \mu_Y)' u - \frac{1}{2}[u'(C_X + C_Y)u]\}$$

由特征函数和分布函数的惟一性定理知

$$(Z(t_1), Z(t_2), \cdots, Z(t_n))$$

是正态随机向量.

例2.1.4　设$\{X_t, t\geq 0\}$是正态过程，证明以下过程仍为正态过程。

（1）对任意的$\tau\geq 0$, $\{X(t+\tau)-X(\tau), t\geq 0\}$

（2）对任意的$\lambda>0$, $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}X(\lambda t), t\geq 0\}$

（3）$$Y(t)=\begin{cases} tX(\frac{1}{t}), & t>0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$$

（4）对$t_0>0$ $$Z(t)=\begin{cases} X(t_0+s)-X(s), & s>0 \\ 0, & s=0 \end{cases}$$