电子科技大学研究生试卷

（考试时间：16:20 至 18:20，共 2 小时）

课程名称 随机过程及应用 教师______ 学时 60 学分 3

教学方式 堂上授课 考核日期 2018 年 01 月 05 日 成绩______

考核方式：______（学生填写）

一：（10 分）设随机过程 $X(t)=Y\cdot t+c, t\in(0,\infty)$，$c$ 为常数，Y 服从$[0,1]$区间上的均匀分布。

（1）请画出 $X(t)$的任意三条样本函数；

（2）求 $X(t)$的一维概率密度和一维分布函数；

（3）求 $X(t)$的均值函数、相关函数和协方差函数。

二：（15 分）$X(t)=\xi t+W(t)$，其中 $\xi\sim N(0,1)$，$W(t)$是参数为σ^2的维纳过程且与ξ相互独立。

（1）$X(t)$是正态过程吗？说明理由。

（2）$X(t)$是平稳独立增量过程吗？说明理由。

（3）求 $Y_1=X(3)-X(1), Y_2=X(4)-X(2)$之间有协方差 $\mathrm{cov}(Y_1,Y_2)$。

三：（15 分）设某保险公司在$[0,t]$这段时间内接到的索赔次数服从参数为λ的泊松过程$\{N(t),t\ge0\}$，第 k 次索赔发生时的索赔额为 X_k，有 $X_1,X_2,\cdots$ 相互独立同服从于区间$[a,b]$上的均匀分布$(0<a<b)$，且与泊松过程$\{N(t),t\ge0\}$相互独立。

（1）求该保险公司在t时刻之前需要支付的累计索赔的期望值；

（2）由于资金具有时间价值，如果无风险利率为r，那么在当前时刻产生的索赔额大小为x的资金在经过时段s时刻的净现值为xe^{-rs}。求保险公司在t时刻之前需要支付的索赔的累计期望净现值。

四：（10 分）设 X_n（n 为自然数）是相互独立随机变量序列，其分布律为

$$X_n\sim\begin{bmatrix}0 & n & 2n\\ 1-\frac{1}{n^k} & \frac{1}{2n^k} & \frac{1}{2n^k}\end{bmatrix},\quad n=1,2,\ldots$$

其中，k 为确定的正整数。试问该随机变量序列是否依概率收敛？是否均方收敛？说明理由。

五：（15 分）过程 $X(t)=\cos(\omega t+\Theta), t\in(-\infty,+\infty)$，$\omega$ 是常数，Θ 服从 $[0,2\pi]$ 上的均匀分布。

（1）试求该过程的均值函数和相关函数；

（2）判断该过程是否均方连续，是否均方可微；

（3）求 $R_{X''}(s,t)$。

六：（15 分）设 $\{W(t),t\geq 0\}$ 是标准维纳过程，常数 $a>0$，令 $X(t)=W(t+a)-W(t), t\geq 0$，请证明下述结论：

（1）$\{X(t),t\geq 0\}$ 是宽平稳过程且是严平稳过程；

（2）$\{X(t),t\geq 0\}$ 满足均方连续，均方可微，均方可积；

（3）$\{X(t),t\geq 0\}$ 的均值具有均方遍历性。

七：（10 分）设马氏链 $\{x(n),n\geq 0\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3\}$，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

（1）若当前状态为 1，求第 3 步后的状态为 1 的概率；

（2）证明此链具有遍历性，并求其平稳分布。

八：（10 分）设齐次马氏链 $\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3,4\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

（1）画出状态转移概率图形；（2）讨论各状态性质；（3）分解状态空间。