§3.5 随机过程的均方积分（一）

本节主要介绍黎曼意义下的均方积分概念

一、均方积分概念

定义3.5.1 设$\{X(t), t\in[a,b]\}$是二阶矩过程，$f(t), t\in[a,b]$是普通函数，任意取分点$a=t_0<t_1\cdots<t_n=b$，将区间$[a, b]$分成 n 个小区间，做和

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)X(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k$$

其中$t_k^* \in [t_{k-1}, t_k], k = 1,2,\cdots n.$

记 $\Delta = \max\limits_{1\le k\le n}(t_k - t_{k-1})$

若均方极限 $\mathop{\mathrm{l.i.m}}\limits_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k$

存在, 且与区间$[a, b]$的分法及t^*的取法无关,

称为二阶矩过程$f(t)X(t)$在$[a, b]$上的**黎曼均方积分**,记为

$$\int_a^b f(t)X(t)dt$$

特别当$f(t)\equiv 1,\ t\in[a,\ b]$ 则

$$\int_a^b X(t)dt = \underset{\Delta\to 0}{\text{l.i.m}}\sum_{k=1}^{n} X(t_k^*)(t_k - t_{k-1})$$

称为随机过程$\{X(t), t\in[a,\ b]\}$在$[a,\ b]$上的**均方积分**.

定义3.5.2 设$\{X(t), t\in[a,b]\}$是二阶矩过程, $f(t), t\in[a,b]$是普通函数,任意取分点$a=t_0< t_1\cdots< t_n=b$,将区间$[a,\ b]$分成 n 个小区间, 若均方极限

$$\underset{\Delta \to 0}{\text{l.i.m}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)[X(t_k) - X(t_{k-1})]$$

存在, 且与区间[a, b]的分法及t^*的取法无关, 称为二阶矩过程$f(t)$对$X(t)$在[a, b]上的黎曼—斯蒂阶均方积分,记为

$$\int_a^b f(t)dX(t)$$

二、均方积分准则

定理3.5.1 设$\{X(t),t\in[a,b]\}$是二阶矩过程，$f(t)$是普通函数，$f(t)X(t)$在$[a,b]$上均方可积的充分必要条件是二重积分

$$\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

存在，其中$R(s,t)$是$X(t)$的自相关函数..

证 充分性 若$f(s)\overline{f(t)}R(s,t)$ 的二重积分存在，对$[a, b]\times[a, b]$的任意分割

$$a=t_0< t_1\cdots< t_n=b,\quad a=s_0< s_1\cdots< s_m=b$$及任意

$$(s_k^*,t_j^*)\in(s_{k-1},s_k]\times(t_{j-1},t_j],\quad (k=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$$

有
$$\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

$$=\lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(s_k^*)\overline{f(t_j^*)}R(s_k^*,t_j^*)\Delta s_k\Delta t_j$$

存在,其中

$$\Delta s = \max_{1\le k\le m} \Delta s_k, \quad \Delta s_k = s_k - s_{k-1}$$

$$\Delta t = \max_{1\le j\le n} \Delta t_j, \quad \Delta t_j = t_j - t_{j-1},$$

$$\text{上式} = \lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}} \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} E[f(s_k^*)X(s_k^*)\overline{f(t_j^*)X(t_j^*)}]\Delta s_k \Delta t_j$$

$$= \lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}} \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} E[f(s_k^*)X(s_k^*)\Delta s_k \overline{f(t_j^*)X(t_j^*)\Delta t_j}]$$

$$= \lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}} E[\sum_{k=1}^{m} f(s_k^*)X(s_k^*)\Delta s_k \overline{\sum_{j=1}^{n} f(t_j^*)X(t_j^*)\Delta t_j}]$$

由均方收敛准则知

$$\underset{\Delta\to 0}{\mathrm{l.i.m}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k$$

存在，即$f(t)X(t)$在$[a, b]$上均方可积.

必要性　由洛易夫判别准则,若均方积分

$$\int_a^b f(t)X(t)dt$$

存在,则下列极限存在, 且

$$\lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}} E[\sum_{k=1}^{m} f(s_k^*)X(s_k^*)\Delta s_k \overline{\sum_{j=1}^{n} f(t_j^*)X(t_j^*)\Delta t_j}]$$

$$= E[\int_a^b f(s)X(s)ds \overline{\int_a^b f(t)X(t)dt}]$$

$$(= E[\left|\int_a^b f(t)X(t)dt\right|^2])$$

$$= \int_a^b \int_a^b f(s)\overline{f(t)}E[X(s)\overline{X(t)}]dsdt$$

$$= \int_a^b \int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

注1 实际推出重要公式

$$E[\left|\int_a^b f(x)X(t)dt\right|^2] = \int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

推论1 若$\{X(t),t\in[a,b]\}$的自相关函数$R(s,t)$在$[a,b]\times[a,b]$上可积，则$X(t)$在$[a,b]$上均方可积

$$E[\left|\int_a^b X(t)dt\right|^2] = \int_a^b\int_a^b R(s,t)dsdt$$

重要公式

推论2 若$X(t)$在$[a, b]$上均方连续,则$X(t)$在$[a, b]$上均方可积.

证 根据均方连续性准则,

$\{X(t), t\in[a,b]\}$均方连续, $\xrightarrow{\text{定理4.2.1之推论}}$

$X(t)$的自相关函数$R(s, t)$在$[a, b]\times[a, b]$上连续,

$\Longrightarrow$ $R(s, t)$在$[a, b]\times[a, b]$上可积,

$\xrightarrow{\text{推论1}}$ $X(t)$在$[a,b]$上均方可积.

EX.1 设$X(t)=A\cos at+B\sin at, t\geq 0$，$a$为常数$a\neq 0$, A与B相互独立,均服从$N(0,\sigma^2)$,判断$X(t)$是否均方可积.

解 $m_X(t)=E(A)\cos at+E(B)\sin at=0,$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$

$$=E[A^2\cos as\cos at+B^2\sin as\sin at]$$

$$=\sigma^2\cos a(t-s).$$

在$[0,+\infty]\times[0,+\infty]$上连续, 故$X(t)$ 对所有$t\geq 0$均方连续, 从而均方可积.

定义3.5.3 广义黎曼均方积分定义为

$$\int_a^{\infty} f(t)X(t)dt \triangleq \underset{b\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^{b} f(t)X(t)dt$$

推论3 广义均方积分 $\int_a^{\infty} f(t)X(t)dt$ 存在的充分必要条件是广义二重积分

$$\int_a^{\infty}\int_a^{\infty} f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

存在且有限.

三、均方积分性质

定理3.5.2 均方积分具有以下性质

1）均方积分惟一性

若 $\int_a^b f(t)X(t)dt = Y_1,\ \int_a^b f(t)X(t)dt = Y_2$

则 $Y_1 = Y_2 \quad (a.e.).$

2) 线性性

若$X(t)$,$Y(t)$在$[a, b]$上均方可积, 则对 $\forall \alpha,\beta \in C$

$$\int_a^b [\alpha f(t)X(t) + \beta g(t)Y(t)]dt$$

$$= \alpha\int_a^b f(t)X(t)dt + \beta\int_a^b g(t)Y(t)dt$$

特别有

$$\int_a^b [\alpha X(t)+\beta Y(t)]dt = \alpha\int_a^b X(t)dt+\beta\int_a^b Y(t)dt$$

3）可加性

设$a<c<b$, 若 $\int_a^c f(t)X(t)dt$ 及$\int_c^b f(t)X(t)dt$存在,

则 $\int_a^b f(t)X(t)dt=\int_a^c f(t)X(t)dt+\int_c^b f(t)X(t)dt$

以上各条性质类似于普通黎曼积分.

4）设$X(t)$在$[a, b]$均方连续, 则

$$\left\|\int_a^b X(t)dt\right\| \le \int_a^b \|X(t)\|dt;$$

证　由定理3.5.1之推论1

$$E\left[\left|\int_a^b X(t)dt\right|^2\right]=\int_a^b\int_a^b R(s,t)dsdt$$

$$\le\int_a^b\int_a^b|R(s,t)|dsdt=\int_a^b\int_a^b\left|E[X(s)\overline{X(t)}]\right|dsdt$$

$$\le\int_a^b\int_a^b[E(|X(s)|^2)E(|X(t)|^2)]^{\frac{1}{2}}dsdt$$

许瓦兹不等式

$$=\{\int_a^b[E(|X(t)|^2)]^{\frac{1}{2}}dt\}^2=\{\int_a^b\|X(t)\|dt\}^2$$

定理3.5.3 均方积分的矩

若 $f(t)X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积,则有

定理4.5.1
之注2

1) $E[\int_a^b f(t)X(t)dt] = \int_a^b f(t)m_X(t)dt$

2) $E[\left|\int_a^b f(t)X(t)dt\right|^2] = \int_a^b \int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$

证 1)

$$E[\int_a^b f(t)X(t)dt] = E[\underset{\Delta\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\sum_k f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k]$$

$$= \lim_{\Delta\to 0} E[\sum_k f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k]$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\sum_k f(t_k^*)E[X(t_k^*)]\Delta t_k = \lim_{\Delta\to 0}\sum_k f(t_k^*)m_X(t_k^*)\Delta t_k$$

$$= \int_a^b f(t)m_X(t)dt$$

续EX.1 设$X(t)=A\cos at+B\sin at, t\geq 0$，$a$为常数$a\neq 0$, A与B相互独立,均服从$N(0,\sigma^2)$, 令

$$Y(t) = \int_0^t X(s)ds,$$

计算$m_Y(t)$和$D_Y(t)$.

解 $m_Y(t) = E[Y(t)] = \int_0^t E[X(s)]ds = 0,$

$$R_Y(s,t)=\int_0^s\int_0^t R_X(u,v)dudv$$

$$=\int_0^s\int_0^t \sigma^2\cos a(u-v)dudv$$

$$=\frac{\sigma^2}{a^2}[1-\cos as-\cos at+\cos a(t-s)]$$

$$D_Y(t)=\frac{2\sigma^2}{a^2}(1-\cos at).$$

EX.2 设A, B相互独立同分布于$N(0,\sigma^2)$, $X(t)=At+B$, $t\in[0, 1]$, 试求下列随机过程的数学期望.

$$Z(t)=\int_0^1 X(t)dt, \qquad Y(t)=\int_0^1 X^2(t)dt,$$

解 $\because E[X(t)]=E(A)t+E(B)=0,$

$$E[X^2(t)]=E[A^2t^2+2ABt+B^2]$$

$$=E(A^2)t^2+E(B^2)+2E(A)E(B)t=\sigma^2(1+t^2)$$

$\therefore$ $$E[Z(t)]=\int_0^1 E[X(t)]dt=0,$$

$$E[Y(t)] = \int_0^1 E[X^2(t)]dt$$

$$= \int_0^1 \sigma^2(1+t^2)dt = \frac{4}{3}\sigma^2.$$

四、均方不定积分

定义3.5.4 设$X(t)$ 在$[a, b]$在上均方连续,

$$Y(t)=\int_a^t X(s)ds \qquad \forall t\in[a,b],$$

称为$X(t)$在$[a, b]$上的均方不定积分.

定理3.5.4 设$X(t)$在$[a, b]$上均方连续,则其在$[a, b]$上的均方不定积分 $Y(t)$ 在$[a, b]$上均方可导, 且

1) $Y'(t) = X(t);$

2) $E[Y(t)] = \int_a^t E[X(s)]ds,$

$$m_Y(t) = \int_a^t m_X(s)ds;$$

3) $R_Y(s,t) = \int_a^s \int_a^t R_X(u,v)dudv.$

定理3.5.5 (牛顿-莱布尼兹公式) 设$X(t)$在$[a,b]$上均方可导，$X'(t)$均方连续，则有

$$\int_a^b X'(t)dt = X(b) - X(a)$$

证　$X'(t)$均方连续

$\Rightarrow$ $Y(t)=\int_a^t X'(s)ds$ 在$[a,b]$上均方可导,且

$Y'(t)=X'(t),$

定理4.4.4之1）

$\Rightarrow$ $[Y(t)-X(t)]'=Y'(t)-X'(t)\equiv 0,\quad t\in[a,b],$

$\Rightarrow$ $Y(t)-X(t)=X$

与t无关的随机变量

$\Rightarrow$ $Y(t)=X(t)+X,\quad t\in[a,b],$

令$t=a$,得　$X(a)+X=Y(a)=0,$

$$X = -X(a)$$

$$\int_a^b X'(t)dt = Y(b) = X(b) - X(a).$$

EX.5 设$\{W(t), t\geq 0\}$为参数为σ^2的维纳过程,求积分过程

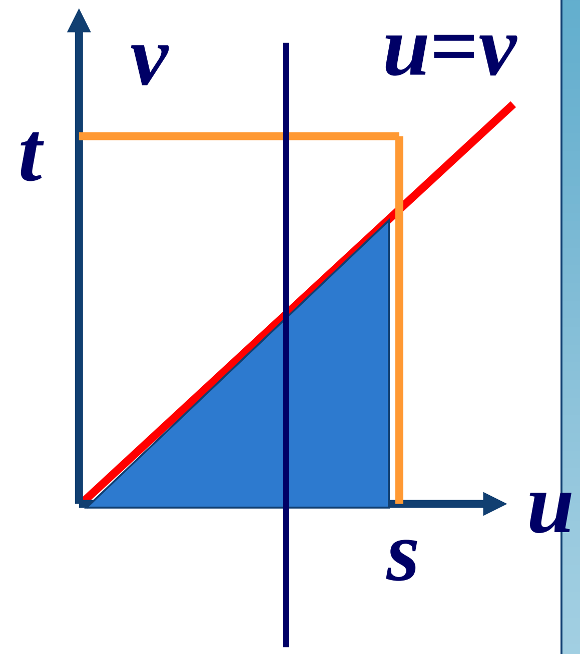
$$X(t) = \int_0^t W(s)ds, \quad t \geq 0,$$

的均值函数和相关函数.

解 $m_X(t)=E[\int_0^t W(s)ds]=\int_0^t E[W(s)]ds=0$,

$$R_X(s,t)=\int_0^s\int_0^t R_W(u,v)dudv$$

$$=\int_0^s\int_0^t \sigma^2\min(u,v)dudv$$



设$s\le t$

$$R_X(s,t)\quad=\sigma^2\int_0^s du\int_0^u \min(u,v)dv$$

$$+\sigma^2\int_0^s du\int_u^t \min(u,v)dv$$

$$=\sigma^2\int_0^s du\int_0^u vdv+\sigma^2\int_0^s du\int_u^t udv$$

$$= \frac{\sigma^2 s^2}{6}(3t - s)$$

由s与t的对称性

$$R_X(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2 s^2}{6}(3t - s), & 0 \le s \le t; \\ \dfrac{\sigma^2 t^2}{6}(3s - t), & 0 \le t < s \end{cases}$$

维纳过程是均方连续, 均方不可导, 均方可积的二阶矩过程.

二阶矩过程的极限、连续、导数、积分，其统计特征主要由相关函数表征.

均方可导 → 均方连续 → 均方可积

逆均不真