组合数学习题解答

孙世新　卢光辉　戴　波　编　著

张先迪　审

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

组合数学习题解答 / 孙世新编著．—成都：电子科技大学出版社，2006.5

ISBN 7－81114－092－6

Ⅰ.组… Ⅱ．孙… Ⅲ.组合数学 —高等学校—解题 Ⅳ. O • 157-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 031972 号

内 容 提 要

本书是电子科技大学等国内多所高等院校目前正在使用的《组合数学》（电子科技大学出版社出版，2003 年，孙世新编著）教材的配套指导书。其主要内容包括原教材中的每一章的内容概要以及全部习题解答，它几乎涉及计算机专业及非数学专业适用的现行组合数学教材中的所有基本理论、基本问题、基本方法和应用。

本书适合于计算机专业及非数学专业的理科、工科专业的本科生、研究生作为参考书使用，也可作为组合数学教师教学参考用书以及工程技术人员的自学教材或参考书。

组合数学习题解答

孙世新　卢光辉　戴　波　编　著

张先迪　审

出　　版	电子科技大学出版社（成都市建设北路二段四号，邮编：610054）
责任编辑	万晓桐
发　　行	电子科技大学出版社
印　　刷	电子科技大学出版社印刷厂
开　　本	787×1092　1/16　**印张**　13.875　**字数**　338　千字
版　　次	2006 年 5 月第一版
印　　次	2006 年 5 月第一次印刷
书　　号	ISBN 7－81114－092－6/O • 5
印　　数	1～4000 册
定　　价	18.00 元

前　　言

当今，组合数学中的许多问题是数学中的精华，同时也是推动计算机科学与技术蓬勃发展的原动力。组合数学的应用也涉及到自然科学和社会科学的许多领域。比如，它在计算机科学、编码理论、通信网络、电子工程、实验设计、交通运输、社会经济学、管理科学等领域中都有着广泛的使用价值，特别是在计算机科学中有着重要的应用。这不仅因为它是这门学科的重要基础，更主要的原因是计算机科学的核心是算法的研究，而组合算法是算法的重要组成部分。没有组合数学的理论基础，组合算法的深入研究和分析是不可能的。由于以上原因，组合数学在当今世界中受到普遍的高度重视。

由孙世新教授编著、电子科技大学出版社出版的《组合数学》目前已成为国内多所高等院校正在使用的教材。由于教材涉及的内容广、习题多、题难做，使学生在学习这门课程时遇到许多困难。为了使学生更好地学习组合数学，全面掌握组合数学的基本问题、基本原理、基本方法及其应用，编写本书是十分必要的。

本书每章由两部分组成：

1．内容提要：简要地介绍每章的主要基础知识，包括定义、定理以及所使用的方法等。（注意：本书中所使用的定理、公式、图和表的编号都是原教材或原参考文献中对应的定理、公式、图和表的编号。）

2．习题解答：对原教材每章中的习题进行了较详尽的解答和分析（由于原教材中第十一章的所有习题都可以在该章找到答案，故本书未能给出该章的习题解答）。

本书叙述详尽，习题由浅入深、条理清晰、层次分明。读者可通过该书对组合数学有更深刻、更全面的认识和了解，提高分析和解决组合数学问题的能力。本书中每章的内容提要都是对原教材中相应内容的概括和归纳，读者完全能够根据每章的内容提要把原书“由厚变薄”。而每章中习题的解答和分析可以使读者全面而深刻地掌握组合数学中的主要内容、基本原理和使用的方法，并能达到举一反三、纲举目张、立竿见影的效果。该书适合于计算机专业及非数学专业的理科、工科专业的本科生、研究生作为参考书使用，也可作为组合数学教师的教学参考用书以及工程技术人员自学的教材或参考书。

本书的编写得到了电子科技大学计算机学院和研究生院领导的支持和鼓励，同时也得到了编者的许多学生的支持和帮助，特别是编者的博士和硕士研究生们，他们使用过本书原稿并指出了一些错误和缺点，并对本书的编写做了许多工作。在此一并向他们表示最衷心、最诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中难免存在不少错误和缺点，恳请读者批评指正。

编　者

2005 年 10 月于电子科技大学

目　录

第一章　排列、组合与二项式定理 1
一、内容提要 1
二、习题解答 5
第二章　鸽笼原理与Ramsey定理 22
一、内容提要 22
二、习题解答 23
第三章　容斥原理 33
一、内容提要 33
二、习题解答 34
第四章　母函数 53
一、内容提要 53
二、习题解答 56
第五章　递归关系 72
一、内容提要 72
二、习题解答 76
第六章　Pólya定理 98
一、内容提要 98
二、习题解答 100
第七章　网络流 113
一、内容提要 113

二、习题解答......120
第八章　线性规划......146
一、内容提要......146
二、习题解答......154
第九章　动态规划......179
一、内容提要......179
二、习题解答......183
第十章　区组设计......196
一、内容提要......196
二、习题解答......203
参考文献......216

第一章　排列、组合与二项式定理

一、内容提要

加法规则　设 S 是有限集合，若 $S_i \subseteq S$（i=1，2，3，…，m），$S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$，且 $i \neq j$ 时，$S_i \cap S_j = \phi$，则有

$$|S| = \left|\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |S_i| \tag{1.1}$$

特别，当 m=2 时，有

$$|S| = |S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2|$$

乘法规则　若 $S_i\left(i = 1, 2, \cdots, m\right)$ 为有限集，且

$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m = \left\{\left(a_1, a_2, \cdots, a_m\right) \middle| a_i \in S_i,\ i = 1, 2, \cdots, m\right\}$，则有

$$|S| = |S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m| = \prod_{i=1}^{m} |S_i| \tag{1.2}$$

特别，当 m=2 时，有 $|S| = |S_1 \times S_2| = |S_1| \times |S_2|$

定义 1.1　设A={a_1，a_2，…，a_n}是具有n个元素的集合，r是正整数．从这n个不同的元素里取r个按照一定的次序排列起来（$r \leq n$），称为集合A的r–排列．其排列数记为P（n，r）．换言之，A的r–排列为A的r有序子集．

另外，为了处理问题的方便，我们定义

$$P(n,r) = \begin{cases} 1 & n \geq r = 0 \\ 0 & n < r \end{cases}$$

定理 1.1　对于正整数 n，r（$r \leq n$），有

$$P(n, r) = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{1.3}$$

推论 1　当 $n \geq r \geq 2$ 时，有

$$P(n, r) = nP(n-1, r-1) \tag{1.4}$$

推论 2　当 $n \geq r \geq 2$ 时，有

$$P(n, r) = r \cdot P(n-1, r-1) + P(n-1, r) \tag{1.5}$$

定义 1.2 从集合$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$的$n$个不同元素中取出$r$个元素按照某种顺序（如逆时针）排成一个圆圈，称这样的排列为圆排列（或称循环排列）.

定理 1.2 集合$A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$中的$r$个元素的圆排列的个数为

$$P(n, r)/r = n!/(r(n-r)!) \tag{1.6}$$

定义 1.3 从重集$B=\{k_1\cdot b_1, k_2\cdot b_2, \cdots, k_n\cdot b_n\}$中选取$r$个元素按照一定的顺序排列起来，称这种$r$–排列为重排列.

定理 1.3 重集 $B=\{\infty\cdot b_1, \infty\cdot b_2, \cdots, \infty\cdot b_n\}$ 的r–排列的个数为n^r.

定理 1.4 重集 $B=\{n_1\cdot b_1, n_2\cdot b_2, \cdots, n_k\cdot b_k\}$ 的全排列的个数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

式中 $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$

定义 1.4 设$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是具有$n$个元素的集合，$r$是非负整数．从这$n$个不同的元素里取$r$个不考虑次序组合起来（$r\le n$），称为集合$A$的$r$–组合．换句话说，$A$的$r$–组合是$A$是$r$–无序子集． 用$C(n,r)$或$\binom{n}{r}$表示集合$A$的$r$–组合的个数.

另外，为了使用方便，我们定义：

$$C(n, r)=\binom{n}{r}=\begin{cases}1 & n\ge r=0\\ 0 & n<r\end{cases}$$

定理 1.5 对于$r\le n$，有

$$C(n, r)=\binom{n}{r}=\frac{P(n, r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{1.7}$$

推论 1

$$C(n, r)=C(n, n-r) \tag{1.8}$$

推论 2 （Pascal 公式）

$$C(n, r)=C(n-1, r)+C(n-1, r-1) \tag{1.9}$$

推论 3

$$C(n-1, r-1)+C(n-2, r-1)+\cdots+C(r-1, r-1)=C(n, r) \tag{1.10}$$

定理 1.6 $B=\{\infty\cdot b_1, \infty\cdot b_2, \cdots, \infty\cdot b_n\}$ 的 r–组合数为

$$F(n, r)=\binom{n+r-1}{r} \tag{1.11}$$

定理 1.7 （二项式定理）当 n 是一个正整数时，对任何 x 和 y，有

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \tag{1.12}$$

推论 1 当 n 是正整数时，对任何 x，y 均有

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k y^{n-k}$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^{n-k} y^{k}$$

推论 2　当 n 是正整数时，对所有的 x 有

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k \tag{1.13}$$

推论 3　当 n 是正整数时，都有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \tag{1.14}$$

推论 4　当 n 是正整数时，都有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0 \tag{1.15}$$

定理 1.8 设 α 是一个任意实数，则对于满足 $|x/y|<1$ 的所有 x 和 y 有

$$(x+y)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k y^{\alpha-k} \tag{1.16}$$

式中
$$\binom{a}{k}=\begin{cases}\dfrac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!} & k>0\\ 1 & k=0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

推论 1　对于 $|z|<1$ 的任何 z，有

$$(1+z)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^k \tag{1.17}$$

推论 2　对于 $|z|<1$ 的任何 z，有

$$(1+z)^{-n}=\frac{1}{(1+z)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}z^k \tag{1.18}$$

推论 3　当 $|z|<1$ 时，有

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k \tag{1.19}$$

推论 4　当 $|z|<1$ 时，有

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k \tag{1.20}$$

推论 5　当 $|z|<1$ 时，有

$$\sqrt{1+z}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}z^k \tag{1.21}$$

推论 6　当$\left|-rz\right|<1$，即$\left|z\right|<1/\left|r\right|$时，有

$$(1-rz)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}r^k z^k \tag{1.22}$$

组合恒等式

恒等式 1　对于正整数 n 和 k，有

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \tag{1.23}$$

恒等式 2　对于正整数 n，有

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1} \tag{1.24}$$

恒等式 3　对于正整数 n，有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}=0 \tag{1.25}$$

恒等式 4　对于正整数 n，有

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2} \tag{1.26}$$

恒等式 5　对于正整数 n，有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}k^2=0 \tag{1.27}$$

恒等式 6　对于正整数 n，有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1} \tag{1.28}$$

恒等式 7　对于正整数 n，m 和 p，$p\le\min\{m，n\}$，有

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{m+n}{p} \tag{1.29}$$

恒等式 8　对于正整数 m，n 有

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{k}=\binom{m+n}{m} \tag{1.30}$$

恒等式 9　对于任何正整数 n，有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n} \tag{1.31}$$

恒等式 10　对于非负整数 p，q，n，有

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}=\binom{n}{p}\binom{n}{q}$$

恒等式 11　对于非负整数p，q，n，有

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+p+q-k}{p+q}=\binom{n+p}{p}\binom{n+q}{q} \tag{1.32}$$

恒等式 12　对于非负整数 n 和 k，有

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1} \tag{1.33}$$

恒等式 13　对于所有实数α 和非负整数k，有

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{\alpha+j}{j}=\binom{\alpha+k+1}{k} \tag{1.34}$$

证明恒等式常用的方法有：

1．数学归纳法．

2．利用二项式系数公式，特别是 Pascal 公式．

3．比较级数展开式中的系数（包括二项式定理和以后要讲的母函数法)．

4．积分微分法．

5．组合分析法．

还有其他的一些常用方法，如有限差分法、级数变换法、多项式的有限 Taylor 展开法等．这些方法本书未涉及，有兴趣的读者可参看 H.W.Gonld 所著的《组合恒等式》一书．

二、习题解答

1.1　求在 1000 和 9999 之间各位数字都不相同的奇数个数．

解：在 1000 和 9999 之间的数都是 4 个数字的有序排列．由于题设要求所求的数字是奇数，因此个位数字只有五种选择，即选 1，3，5，7，9．题设又要求各位数字都不相同，即千位、百位、十位和个位上的数字各不相同．另外要求所求数字大于 1000，则说明千位数字只能在 1，2，3，…，9 中选取．具体步骤如下：

① 先从 1，3，5，7，9 中选出一位作为个位数字，共有 5 种选法；

② 再从 1，2，…，9 中除去①中选得的数字后选一个数作为千位数字，共有 8 种选法；

③ 再从 0，1，2，…，9 中除去①、②中选得的数字后选一个数作为百位数字，共有 8 种选法；

④ 最后从 0，1，2，…，9 中除去①、②、③中选得的数字后选一个数作为十位数字，共有 7 种选法；

因为每选一个符合题设条件的四位数需要经历以上四步，所以由乘法规则知，各位数

字都不一样的奇数共有：

$$5\times8\times8\times7=2240\text{ 个}$$

1.2　求在 1000 和 9999 之间各位数字都不相同，而且由奇数构成的整数个数．

解：由奇数构成的 4 位数只能是由 1，3，5，7，9 这 5 个数字构成，由于这 5 个数字中没有包括数字 0，所以不用考虑 0 排在千位时的特殊情况．题设又要求各位数字都不相同，因此这是一个从 5 个不同元素中选 4 个的排列，可得

$$P（5，4）=\frac{5!}{(5-4)!}=120$$

1.3　洗一副扑克牌 52 张有多少种方法？

解：由于扑克牌每一张都不相同，洗一副扑克牌相当于问有 52 个空位，将 52 张扑克牌放入 52 个空位中的排法，所以此题是典型的全排列问题，由全排列公式可得洗一副扑克牌有 52！种方法．

1.4　10 个人坐在一排看戏有多少种就坐方式？如果其中有两人不愿坐在一起，又有多少种就坐方式？

解：这显然是一个 10 个人的全排列问题，故共有 10！种就坐方式．如果两个人坐在一起，则可假定把这两个人捆绑在一起，于是问题就变成 9 个人的全排列，共有 9！种就坐方式．而这两个人相捆绑的方式又有 2 种（甲在乙的左面或甲在乙的右面），故两人坐在一起的方式数共有 $2\times9!$，于是两人不坐在一起的方式共有 $10!-2\times9!$．

1.5　10 个人围圆桌而坐，其中两人不愿坐在一起，问有多少种就坐方式？

解：首先，这是一个圆排列问题，不考虑特殊情况，10 个人围圆桌就坐共有 $\frac{10!}{10}$ 种方式．当两人必须坐在一起时，可看作一个共同体参加圆排列，即此时为 9 个人参加圆排列，有 $\frac{9!}{9}$ 种方式，又由于两个人坐在一起的时候位置可以互换，所以两人坐在一起的方式数为 $2\times\frac{9!}{9}$，故两人不坐在一起的方式数为：

$$\frac{10!}{10}-2\times\frac{9!}{9}=9!-2\times8!$$

1.6　6 男 6 女围圆桌交替就坐有多少种就坐方式？

解：先将 6 个男的围圆桌而坐，其就坐方式为 $\frac{6!}{6}$ 种，然后加入一个女的有 6 种方式，再加第 2 个女的就有 5 种方式，加入第 3 个女的就有 4 种方式……加入第 6 个女的只有 1 种方式，故由乘法规则知，其就坐方式共有：

$$\frac{6!}{6}\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1=6!\times 5!$$

1.7　由 1，2，3，4，5 这五个数字能组成多少个没有重复数字，不能被 5 整除，且比 20 000 大的五位数？

解：

方法一：

① 先考虑这五个数字能组成的没有重复且比 20 000 大的五位数.因为要比 20 000 大，所以万位上只能由 2，3，4，5 这四个数字之一组成，即万位上的数字有 4 种选择方式，确定了万位后，可知，千位上有 4 种选择方式，百位上有 3 种选择方式，十位上有 2 种选择方式，个位上有 1 种选择方式，由乘法规则可得，共有 4×4×3×2×1=96（个）

② 在①中加入限制条件“能被 5 整除”，此时个位只能选 5，万位上的数字要大于 1，所以万位上有 3 种选择方式，千位上有 3 种选择方式，百位上有 2 种选择方式，十位上有 1 种选择方式，由乘法规则可得，共有 3×3×2×1=18（个）

③ 题设中是求不能被 5 整除的数，只需用①中所求的个数减去②中所求的个数，即

$$96-18=78\text{（个）}$$

方法二：

因为要组成的五位数既不能被 5 整除，且比 20 000 大，因此个位上只能取 1，2，3，4 这四个数字，万位上只能取 2，3，4，5 这四个数字，这样的五位数分为两种情况：

① 个位上取数字 1．此时个位上的数字只有 1 种选法，万位上可取 2，3，4，5 这四个数字，有 4 种选择方式，千位上有 3 种选择方式，百位上有 2 种选择方式，十位上有 1 种选择方式，由乘法规则可得，共有 4×3×2×1×1=24（个）.

② 个位上取 2，3，4 这三个数字之一．此时个位上的数字有 3 种选法，万位上可取 2，3，4 这三个数字中剩下的两个数字或者数字 5，有 3 种选择方式，千位上有 3 种选择方式，百位上有 2 种选择方式，十位上有 1 种选择方式，由乘法规则可得，共有

$$3\times 3\times 3\times 2\times 1=54\text{（个）}$$

故这样的 5 位数共有

$$24+54=78\text{（个）}$$

1.8　证明：

a．$\binom{n}{r}=\frac{n}{n-r}\binom{n-1}{r}$

证明：原式左端=$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n}{n-r}\cdot\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}=\frac{n}{n-r}\cdot\binom{n-1}{r}$=右端

b．$\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}=\binom{2n}{n-1}$

证明：原式左端=$\frac{n}{n-1}\binom{2n}{n}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n!}{n!n!}=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\binom{2n}{n-1}$=右端

c．$n\binom{n-1}{r}=(r+1)\binom{n}{r+1}$

证明：

原式左端=$n\binom{n-1}{r}=n\cdot\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}=\frac{n!}{r!(n-r-1)!}=(r+1)\cdot\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}$

$$=(r+1)\cdot\binom{n}{r+1}=\text{右端}$$

1.9　在 1～10 000 000 000 之间的 100 亿个数中，有多少个数含有数字 1？又有多少个数不含有数字 1？

解：先求不含有数字 1 的个数，在 0 和 9 999 999 999 之间的 100 亿个数中，不含有数字 1 的个数，实际上就是重集$\{\infty\cdot 0,\infty\cdot 2,\infty\cdot 3,\cdots,\infty\cdot 9\}$的 $10-$排列的个数，故有 9^{10} 个数不含有数字 1，于是在 1～10 000 000 000 之间的一百亿个数中有 $9^{10}-1$ 个数不含有数字 1，因此有（10^{10}−1）−（9^{10}−1）=10^{10}− 9^{10}个数含有数字 1．

注意：排除 0

1.10　在 1000～9999 之间的整数，有多少个整数仅包含数字 3 一次？有多少个整数不包含数字 3？又有多少个整数仅包含 3 个 7？

解：① 仅包含 3 一次，分两种情况．

a．千位为 3，由于仅包含 3 一次，百位、十位和个位可任取非 3 数字，故在重集 B=$\{\infty\cdot 0,\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\infty\cdot 4,\infty\cdot 5,\cdots,\infty\cdot 9\}$中，取 3 个数字的排列，其重排列数为$(10-1)^3$个．

b．千位非 3 且非 0，即在数字 1，2，4，5，6，7，8，9 中选取一个作为千位，其选法有$\binom{8}{1}$种，此时百位，十位和个位有且仅有一个是 3，这时符合题意的数有 $3\times(10-1)^2$，由乘法规则有

$$\binom{8}{1}\times 3\times(10-1)^2$$

由于 a 和 b 两种情况互不相容，故由加法规则有

$$9^3+8\times 9^2\times\binom{3}{1}=2673\text{（个）}$$

② 根据题设可知所求整数不包含数字 3，则千位只能在 1，2，4，5，6，7，8，9 中选取一个，共有 8 种方式，又因为所求整数各位允许数字重复，则百位、十位和个位可以分别在 0，1，2，4，5，6，7，8，9 中选取一个，由乘法规则得这样的整数共有

$$8\times 9^3=5832\text{（个）}$$

③ 分千位非 7（非 0）与千位是 7 两种情况，可得答案为

$$8+\binom{3}{2}\times(10-1)=35\ （个）$$

1.11　单词“MISSISSIPPI”中的字母有多少种不同的排列方法？如果两个 S 不相邻，又有多少种排列方法？

解：① 这可以看作是重集 $B=\{1\cdot M, 4\cdot S, 4\cdot I, 2\cdot P\}$ 的一个全排列，故不同的排列数为：

$$\frac{11!}{1!2!4!4!}=34650\ （种）$$

② 由于两个 S 不相邻，则先把 4 个 S 从重集 B 中去掉，再将剩余 7 个字母进行排列，这样的排列共有 $\frac{7!}{2!4!}$ 个，对于每个这样的排列有 8 个空位置，如：_M_I_I_I_P_P_I_

再把 4 个 S 嵌入 8 个空位置中，这样的嵌入共有 $\binom{8}{4}$ 种，由乘法规则可得符合题意的排列共有

$$\frac{7!}{2!4!}\binom{8}{4}=7350\ （种）$$

1.12　空间中有 30 个点，这 30 个点中无四个点共面，问它们能确定多少个三角形？能确定多少个四面体？

解：由题设可知这 30 个点中无四个点共面，则这 30 个点中也无三点共线．因为如果有三点共线了，再加上任意一点，四点就共面了，这显然与题设矛盾．既然无三点共线，说明任意三点都能组成三角形；无四点共面，说明任意四点都能组成四面体，所以三角形的个数为 C（30，3），四面体的个数为 C（30，4）．

1.13　求方程$X_1+X_2+\cdots+X_n=r$的正数解的个数．

解：

方法一：

由原教材（参考文献［1］，以后皆用原教材表示）第一章第三节例 8 知

$$X_1+X_2+\cdots+X_n=r \tag{1}$$

的非负整数解的个数为$\binom{n+r-1}{r}$，

在式（1）中，若令$Y_i=X_i+1$，i=1，2，…，n，则（1）变为：

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=n+r \tag{2}$$

则式（2）的正数解的个数等于（1）的非负整数解的个数，故（2）的正整数解的个数为：

$$\binom{n+r-1}{r}=\binom{n+r-1}{n-1}$$

设 $k=n+r$，则

$$\binom{n+r-1}{n-1}=\binom{k-1}{n-1}$$

即$y_1+y_2+\cdots+y_n=k$的正整数解的个数为$\binom{k-1}{n-1}$

故式（1）的正整数解的个数为$\binom{r-1}{n-1}$.

方法二：本问题相当于要把 r 个苹果分成 n 堆，要求每堆都不空，求不同的分法数目.

我们这样考虑：把 r 个苹果排成一排，它们之间有 r–1 个空隙，在其中选择 n–1 个并放入隔板，这样就有$\binom{r-1}{n-1}$个放法，即原方程有$\binom{r-1}{n-1}$个解.

1.14　求 1～10 000 中，有多少整数，它的数字之和等于 5？又有多少数字之和小于 5 的整数？

解：在 1～9999 中考虑，不是 4 位数的整数前面补足 0，例如 235 写成 0235，则问题就变为求：$x_1+x_2+x_3+x_4=5$ 的非负整数解的个数，故有

$$F（4，5）=\binom{4+5-1}{5}=56$$

对第二个问题，分为求：

$x_1+x_2+x_3+x_4=4$ 的非负整数解，其个数为F（4，4）=35

$x_1+x_2+x_3+x_4=3$ 的非负整数解，其个数为F（4，3）=20

$x_1+x_2+x_3+x_4=2$ 的非负整数解，其个数为F（4，2）=10

$x_1+x_2+x_3+x_4=1$ 的非负整数解，其个数为F（4，1）=4

将它们相加即得，

$$F（4，4）+F（4，3）+F（4，2）+F（4，1）=69$$

由于 10 000 不是 4 位数，但也满足数字之和小于 5。因此共有 70 个数字之和小于 5 的整数。

1.15　有多少种方法把字母 a，a，a，a，a，b，c，d，e 排列成无两 a 相邻？

解：若要两个 a 不相邻，必须将 4 个字母 b，c，d，e 放在 5 个 a 之间，相当于 5 个 a 排成一排，每两个相邻的 a 之间用一个方框隔开，即排成 $a\square a\square a\square a\square a$，再将 4 个字母 b，c，d，e 放入 4 个方框中的方法，这是 4 个元素的全排列问题，于是这样的放法共有 4！种.

1.16　从整数 1，2，⋯，1000 中选取三个数，使得它们的和是 4 的倍数，求这样的选法有多少种？

解：设集合 A={1，2，3，⋯，1000}，把这 1000 个数按模 4 的余数分成四个子集合，其中

$$A_i=\{x|x=i\ (\bmod 4)\}\ i=1，2，3，4$$

显然这 4 个集合各有 250 个数.

设在A中所取的三个数为a_1，a_2，a_3，那么这种选取是无序的，且满足$a_1+a_2+a_3=0$（mod4)，我们将选法分为五类：

① a_1，a_2，a_3选自同一集合A_4，这样的选法共有

$$N_1=C（250，3）$$

② a_1，a_2，a_3选自集合A_1，A_2，并且在A_1中选取 2 个，在A_2中选取 1 个，这样的选法共有

$$N_2= C（250，2）\times C（250，1）$$

③ a_1，a_2，a_3分别选自三个集合A_3，A_4，A_1各一个，这样的选法共有

$$N_3=[C（250，1）]^3$$

④ a_1，a_2，a_3分别选自A_2，A_4，在A_2中选 2 个，A_4中选一个，这样的选法共有

$$N_4=C（250，2）\times C（250，1）$$

⑤ a_1，a_2，a_3分别选自A_2，A_3，在A_2中选 1 个，在A_3中选 2 个，这样的选法共有

$$N_5=C（250，1）\times C（250，2）$$

由加法规则，满足题意的选法共有

$$N= N_1+N_2+N_3+N_4+N_5=C（250，3）+3\times C（250，2）\times C（250，1）+[C（250，1）]^3$$

1.17　用二项式定理展开$(2x-7)^7$

解：将 $X=2x$，$Y=-7$，$n=7$ 代入二项式定理（1.12）中即得.

1.18　在$(3X-2Y)^{18}$展开式中，X^5Y^{13}的系数是什么？X^8Y^9的系数是什么？

解：在二项式定理（1.12）式中，令$X=3x$，$Y=-2y$，$n=18$，$k=5$ 即得X^5Y^{13}的系数为 $-\binom{18}{5}3^5\times 2^{13}$

X^8Y^9的系数是 0（$\because 8+9\neq 18$ $\therefore$ 在$(3X-2Y)^{18}$展开式中根本没有 X^8Y^9 项，故 X^8Y^9 的系数是 0.）

1.19　用组合分析的方法证明恒等式$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

解：

方法一：

我们考虑一个由 a 和 b 组成的长度为 n 的字符串，字符串每位的取值为 a 或 b 两种情况．由乘法规则，这样的字符串共有$\overbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}^{n}=2^n$个.

另一方面，这样的字符串可以看成由a和b组成的一个n–排列，它有k（$k=0,1,2,\cdots,n$）个a，$n-k$ 个b组成，这样的排列个数就是重集$B_k=\{k\cdot a,(n-k)\cdot b\}$的 n–排列数，由定理

1.4 知，这样的排列个数为

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}\qquad k=0,1,2,\cdots,n$$

再由加法规则，这样的字符串共有$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

综合以上两种情况有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

方法二：

设集合$U=\{a_1$，$\cdots$，$a_n\}$有n个元素，则这个集合中的各个元素“选取”与“不选取”有两种状态，于是对于a_1有 2 种选法，对于a_2也有 2 种选法……对于a_n也有 2 种选法，由乘法规则，其总数为：$2\times2\times2\times\cdots\times2=2^n$.

而等式的左端说明这所有的状态可分解为从 n 个元素中分别取 0，1，$\cdots$，n 组合的总数为$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

综合以上两种情况有

$$\sum_{R=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

1.20　用组合分析方法证明$\frac{(2n)!}{2^n}$和$\frac{(3n)!}{2^n\times3^n}$都是整数.

证明：① 考虑 $2n$ 个数的全排列.

显然，其排列数为$(2n)!$.

另一方面，$2n$ 个数的全排列可按如下步骤完成：

在排列位置 1，2 上：从 $2n$ 个数中选 2 个数排列在位置 1，2 上，其排列法有

$$2\binom{2n}{2}\text{个}$$

在排列位置 3，4 上：在排列位置 1，2 上确定两个数后，再从剩下的 $2n-2$ 个数中选 2 个数排列在位置 3，4 上，其排列法有

$$2\binom{2(n-1)}{2}\text{个}$$

……

在排列位置 $2n-1$，$2n$ 上：在排列在位置 1，2，3，4，$\cdots$，$2n-2$ 上确定 $2n-2$ 个数后，再从剩下的 $2n-(2n-2)$ 个数中选 2 个数排列在位置 $2n-1$，$2n$ 上，其排列法有

$$2\binom{2n-(2n-2)}{2}=2\binom{2}{2}$$

由乘法规则得总的排列法有

$$2\binom{2n}{2}\times 2\binom{2(n-1)}{2}\times\cdots\times 2\binom{2}{2}$$

$$=2^n\times\binom{2n}{2}\times\binom{2(n-1)}{2}\times\cdots\times\binom{2}{2}$$

即

$$2^n\times\binom{2n}{2}\times\binom{2(n-1)}{2}\times\cdots\times\binom{2}{2}=(2n)!$$

$\therefore$

$$\frac{(2n)!}{2^n}=\binom{2n}{2}\times\binom{2(n-1)}{2}\times\cdots\times\binom{2}{2}$$

故$\dfrac{(2n)!}{2^n}$是整数.

② 同①一样的方法考虑$3n$个数的全排列．显然，其排列数为$(3n)!$；另一方面，$3n$个数的全排列可按如下步骤完成：

在位置1，2，3上：从$3n$个数中选3个数排列在位置1，2，3上，其排列法有

$$3!\binom{3n}{3}$$

在位置4，5，6上：在排列位置1，2，3上确定三个数后，再从剩下的$3n-3$个数中选3个数排列在位置4，5，6上，其排列法有

$$3!\binom{3(n-1)}{3}$$

……

在位置$3n-2$，$3n-1$，$3n$上：在排列位置1，2，3，…，$3n-3$上确定$3n-3$个数后，再从剩下的$3n-$（$3n-3$）个数中选3个数排列在位置$3n-2$，$3n-1$，$3n$上，其排列法有

$$3!\binom{3n-(3n-2)}{3}=3!\binom{3}{3}$$

由乘法规则得总的排列法有

$$3!\binom{3n}{3}\times 3!\binom{3(n-1)}{3}\times\ldots\times 3!\binom{3}{3}$$

$$=(3!)^n\times\binom{3n}{3}\times\binom{3(n-1)}{3}\times\ldots\times\binom{3}{3}$$

$$=2^n\times 3^n\times\binom{3n}{3}\times\binom{3(n-1)}{3}\times\dots\times\binom{3}{3}$$

即

$$2^n\times 3^n\times\binom{3n}{3}\times\binom{3(n-1)}{3}\times\dots\times\binom{3}{3}=(3n)!$$

∴ $$\frac{(3n)!}{2^n\times 3^n}=\binom{3n}{3}\times\binom{3(n-1)}{3}\times\dots\times\binom{3}{3}$$

故$\dfrac{(3n)!}{2^n\times 3^n}$是整数.

1.21　用组合分析的方法证明

$$\binom{n}{l}\binom{l}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{l-r}$$

证明：考虑从 n 个人中选 l 个人组成一个班，且这个班有 r 个班委．现用两种方法选取．

选法一：先从 n 个人中选取 l 个人组成一个班．再从 l 个人中选取 r 个人组成班委．由乘法规则有$\binom{n}{l}\binom{l}{r}$种方法.

选法二：先从 n 个人中选 r 个人作为班委，再在剩下的 $n-r$ 个人中选 $l-r$ 个人作为这一班的普通成员．由乘法规则有$\binom{n}{r}\binom{n-r}{l-r}$种方法.

容易知道这两种选取方法是一样的，故有

$$\binom{n}{l}\binom{l}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{l-r}$$

1.22　证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$$

证明：

方法一：

由二项式定理（1.13）式有

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

对上式两边从 0～2 积分有：

$$\int_0^2 (1+x)^n \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^2 x^k \mathrm{d}x$$

$$\left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_{x=0}^{2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_{x=0}^{2}$$

∴
$$\frac{3^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^{k+1}}{k+1}$$

方法二：

由（1.23）式有

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

∴
$$\binom{n}{k} = \frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

即

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

于是有

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\binom{n+1}{k+1}$$

下面计算$\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\binom{n+1}{k+1}$

由二项式定理（1.13）式有

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} x^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} x^k = 1+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} x^{k+1}$$

在上式中令 $x=2$ 得

$$1+\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\binom{n+1}{k+1} = 3^{n+1}$$

即
$$\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\binom{n+1}{k+1} = 3^{n+1}-1$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{(3^{n+1}-1)}{n+1}$$

故恒等式成立.

1.23　证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{m+k+1}\binom{n}{k}=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

证明：由二项式定理（1.13）式有

$$(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$

$$\therefore\qquad x^m(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{m+k}$$

对上式两边从 0 到 1 积分有

$$\text{右端}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{m+k+1}$$

$$\begin{aligned}\text{左端}&=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{(1-x)^n}{m+1}\mathrm{d}x^{m+1}\\&=\frac{(1-x)^n}{m+1}x^{m+1}\Big|_{x=0}^{1}-\int_0^1\frac{x^{m+1}}{m+1}\mathrm{d}(1-x)^n\\&=\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x\\&=\cdots\cdots\\&=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{m+k+1}\binom{n}{k}=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

1.24　证明恒等式

a．$\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}=\binom{n+1}{m}$

b．$\displaystyle\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k}=\binom{n}{m}2^{n-m}$

c．$\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^m\binom{n-1}{m}$

证明：a）右端$=\dbinom{n+1}{m}=\dbinom{n}{m}+\dbinom{n}{m-1}$　　（由（1.9）式）

$=\dbinom{n}{m}+\dbinom{n-1}{m-1}+\dbinom{n-1}{m-2}$　　（由（1.9）式）

$$=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-2}{m-2}+\binom{n-2}{m-3}$$ （由（1.9）式）

$$=\cdots\cdots$$ （反复应用（1.9）式）

$$=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\ldots+\binom{n-m+1}{m-m+1}+\binom{n-m+1}{m-m}$$

$$=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\ldots+\binom{n-(m-1)}{m-(m-1)}+\binom{n-m}{m-m}+\binom{n-m}{m-m-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}+\binom{n-m}{-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}$$ （ $\because$ $\binom{n-m}{-1}=0$ ）

$=$左端

b）$\because \binom{k}{m}\binom{n}{k}=\dfrac{k!}{m!(k-m)!}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-m-(k-m))!}$$

$$=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

$$\therefore \sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k}=\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}=\binom{n}{m}\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{k-m}$$

$$=\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-m}{k}$$

$$=\binom{n}{m}2^{n-m}$$ （由（1.14）式）

故原恒等式成立.

c）由二项式定理（1.13）式有

$$(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}x^k+\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$$

上式中，令 $x=1$ 有

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}$$

上式右端$=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]$ （由（1.9）式）

$$=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k-1}$$

$$=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=m}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n-1}{k}$$

$$=(-1)^{n+1}\binom{n-1}{n}+\sum_{k=m+1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=m+1}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n-1}{k}+(-1)^{m}\binom{n-1}{m}$$

$$=(-1)^{m}\binom{n-1}{m}+(-1)^{n+1}\binom{n-1}{n}$$

$$=(-1)^{m}\binom{n-1}{m}$$

$\therefore$
$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\binom{n}{k}=(-1)^{m}\binom{n-1}{m}$$

1.25　证明恒等式

a．$\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^{k}$

b．$\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=(-1)^{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^{k}$

证明：a）

原式左端$\displaystyle=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}$

$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{(n+k)!}{m!((n+k-m)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!(m-k)!}\cdot\frac{(n+k)!}{(n+k-m)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{(n+k)!}{k!n!}\cdot\frac{n!}{(m-k)!(n-(m-k))!}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}\binom{n}{m-k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n}\binom{n}{m-k}$$ （由（1.8）式）

$$=\sum_{j=m}^{0}\binom{n+m-j}{n}\binom{n}{j}$$ （上式中，令 $j=m-k$ 即得）

$$=\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}\binom{n+m-j}{n}$$

原式右端$\displaystyle=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^{k}$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m}{k}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{k}{j}$$ （由（1.14）式）

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{n}{k}\binom{k}{j}=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$$ （由本章习题 21 的结论）

$$=\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m}{k}\binom{n-j}{k-j}=\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m}{k}\binom{n-j}{n-k}=\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n-j}{n-k}$$

$$=\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{n}{j}\binom{m+n-j}{n}$$ （由（1.29）式）

$$=\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}\binom{n+m-j}{n}+\sum_{j=m+1}^{\infty}\binom{n}{j}\binom{n+m-j}{n}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}\binom{n+m-j}{n}$$

∴
$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k$$

b）由式（1.13）有

$$\left(1+\frac{2t}{1-t}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{2t}{1-t}\right)^k$$

将上式两边同乘以$\frac{1}{1-t}$，得：

$$\frac{1}{1-t}\left(1+\frac{2t}{1-t}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}2^k\cdot t^k(1-t)^{-(k+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}2^k\cdot t^k\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{k+j}{j}(-t)^j$$ （由式（1.18））

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{k}2^k\binom{k+j}{j}t^{k+j}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}\binom{n}{k}2^k\binom{m}{m-k}t^m$$ （上式中令 $k+j=m$）

$$=\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\binom{m}{k}2^k t^m$$

$$=\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k t^m$$ （注意：当 $k>m$ 时，$\binom{m}{k}=0$）

即有：

$$\frac{1}{1-t}\left(1+\frac{2t}{1-t}\right)^n=\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k t^m \qquad \text{(A)}$$

又由式（1.18）有：

$$\left(1-\frac{2t}{1+t}\right)^{-(n+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\binom{n+k}{k}\left(\frac{-2t}{1+t}\right)^k$$

将上式两边同乘以$\frac{1}{1+t}$，得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+t}\left(1-\frac{2t}{1+t}\right)^{-(n+1)}&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\binom{n+k}{k}(-2)^k t^k(1+t)^{-(k+1)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\binom{n+k}{k}(-2)^k t^k\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{k+j}{j}t^j\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\binom{n+k}{k}(-2)^k\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{k+j}{j}t^{k+j}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k}{k}(-2)^k(-1)^{m-k}\binom{m}{m-k}t^m\\&=\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}(-2)^k(-1)^m\binom{m}{k}t^m\\&=\sum_{m=k}^{\infty}(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k t^m\end{aligned}$$

（$\because$ 当 $k>m$ 时，$\binom{m}{k}=0$）

即有

$$\frac{1}{1-t}\left(1-\frac{2t}{1+t}\right)^{-(n+1)}=\sum_{m=k}^{\infty}(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k t^m \qquad \text{(B)}$$

又因

$$\frac{1}{1-t}\left(1+\frac{2t}{1-t}\right)^n=\frac{(1+t)^n}{(1-t)^{n+1}}=\frac{1}{1+t}\left(1-\frac{2t}{1+t}\right)^{-(n+1)}$$

上式表明（A）式和（B）式的左端是相当的，因此（A）式和（B）式右端也应是相当的，故有下式成立：

$$\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k t^m=\sum_{m=k}^{\infty}(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k t^m$$

于是t^m的系数也应相等，即下面的恒等式成立：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k=(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k$$

再由上题（25.a）的结果知：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k=(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k$$

因此有

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k$$

1.26　如图 1-1 所示是一张城市平面图，图中的直线表示街道，直线的交点表示街道的交叉路口，试证明从交叉路口 $S(0,0)$ 到交叉路口 $T(m,n)$ 共有 $\binom{m+n}{m}$ 条不同的路径可走.

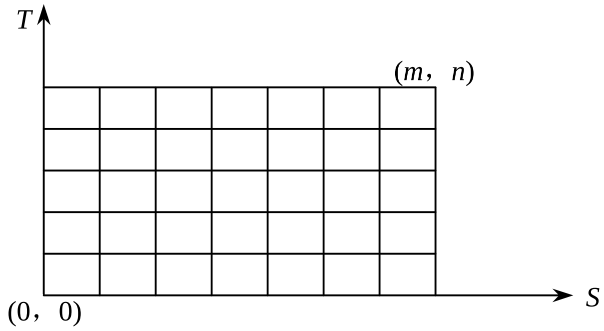


图　1-1

证明：因为从 S 到 T 只能向东、向北方向走，若向东走一个路段就用一个 E 表示，向北走一个路段就用 N 表示，这样一来，从 S 选到 T 的一条路径是对应于由 E、N 组成的一个排列，这个排列有 m 个 E 和 n 个 N，于是由 E、N 组成的一个排列是重集 $B=\{m\cdot E, n.N\}$ 的一个全排列，其排列数为：

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}=\binom{m+n}{n}$$

故从交叉路口 $S(0,0)$ 到交叉路口 $T(m,n)$ 共有 $\binom{m+n}{m}$ 条不同的路径可走.

证毕.

1.27　证明：对所有实数 r 和整数 k，有

$$\binom{-r}{k}=(-1)^k\binom{r+k-1}{k}$$

证明：由定义（1.6）知，当 $k\le 0$ 时，恒等式显然成立.

当 $k>0$ 时，

$$\binom{-r}{k}=\frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)}{k!}$$

$$=\frac{(-1)^k r(r+1)\cdots(r+k-1)}{k!}$$

$$=\frac{(-1)^k(r+k-1)(r+k-2)\cdots r}{k!}$$

$$=(-1)^k\binom{r+k-1}{k}$$

故恒等式成立.

第二章 鸽笼原理与Ramsey定理

一、内容提要

定理2.1 如果把 $n+1$ 个物体放到 n 个盒子中去，则至少有一个盒子中放有两个或更多的物体.

定理 2.2 设q_i是正整数 $(i=1,2,\cdots,n)$，$q \geq q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$，如果把$q$个物体放入$n$个盒子中去，则存在一个$i$，使得第$i$个盒子中至少有$q_i$个物体.

推论 1 如果把 $n(r-1)+1$ 个物体放入 n 个盒子中，则至少存在一个盒子放有不少于 r 个物体.

推论 2 对于正整数 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)}{n} > r-1$$

则至少存在一个 i，使得 $m_i \geq r$.

定理 2.3 在人数为 6 的一群人中，一定有三个人彼此相识，或者彼此不相识.

定理 2.4 在人数为 10 的一群人中，一定有三个人彼此不相识或者有四个人彼此相识.

定理 2.5 在人数为 10 的一群人中，一定有三个人彼此相识或者四个人彼此不相识.

定理 2.6 在人数为 20 的一群人中，一定有四个人彼此相识或者有四个人彼此不相识.

定义 2.1 设a，b为正整数，令N（a，b）是保证有a个人彼此相识或者有b个人彼此不相识所需要的最少人数，则称N（a，b）为Ramsey数.

定理 2.7

$$N(a,b)=N(b,a) \qquad (2.1)$$

$$N(a,2)=a \qquad (2.2)$$

定理 2.8 当 $a,b \geq 2$ 时，$N(a,b)$ 是一个有限数，并且有

$$N(a,b) \leq N(a-1,b)+N(a,b-1) \qquad (2.3)$$

定理 2.9 当 $N(a-1,b)$ 和 $N(a,b-1)$ 都是偶数时，则有

$$N(a,b) \leq N(a-1,b)+N(a,b-1)-1 \qquad (2.4)$$

定理 2.1

$$N(3,3)=6 \qquad (2.5)$$

$$N(3,4)=N(4,3)=9 \qquad (2.6)$$

$$N(3,5)=N(5,3)=14 \tag{2.7}$$

定义 2.2　如果把一个完全n角形不是用两种颜色对其边着色，而是用r种颜色c_1，c_2，…，c_r对其边任意着色．设N（a_1，a_2，…，a_r）是保证出现下列情形之一的最小正整数：

用c_1种颜色着色的一个完全a_1角形

或用c_2种颜色着色的一个完全a_2角形

……

或用c_r颜色着色的一个完全a_r角形

则称数N（a_1，a_2，…，a_r）为Ramsey数．

定理 2.11　有大于 1 的整数a_1,a_2和a_3，数$N(a_1,a_2,a_3)$是存在的．

定理 2.12　任意的正整数r和a_1，a_2，…，$a_r\geq 2$，Ramsey数N（a_1，a_2，…，a_r）是存在的．

定义 2.3　对于有n个元素的一个集合，把这个集合中的r个元素的所有子集分成m个类，即c_1，c_2，…，c_m类，设N（a_1，a_2，…，a_m；r）是保证出现下列情形之一的最小正整数：

存在a_1个元素，它的所有r元子集属于c_1类

或者a_2个元素，它的所有r元子集属于c_2类

或者　……

或者存在a_m个元素，它的所有r元子集属于c_m类

则称数N（a_1，a_2，…，a_m；r）为Ramsey数

定理 2.13　对于任何正整数r和$a_1,a_2,\cdots,a_m\geq r$，Ramsey数$N(a_1,a_2,\cdots,a_m;r)$存在．

注意：当r=1 时，定理 2.13 就是鸽笼原理的一般形式——定理 2.2，由此可见定理 2.13 是鸽笼原理的进一步推广．

二、习题解答

2.1　在某中学A班有 50 名学生，其中年龄最小的是 15 岁，最大的是 18 岁．证明这个班中至少有两个学生是同年同月生的．

证明：

方法一：

50>49=4×（13–1）+1

由鸽笼原理推论 1 知：至少有一个盒子中放有 13 个物体，即至少有 13 个人同年生．

又因为 13>=12（2–1）+1，故至少有一个盒子中放有 2 个物体，即在此 13 个同年出生

的学生中至少有 2 个人是同月生的.

故这个班中至少有两个学生是同年同月生的.

方法二：

根据题意，15 岁～18 岁共 4 个年龄段，即 48 个月．而

$$50>49=48\times(2-1)+1$$

故由鸽笼原理推论 1 知：至少有一个盒子中放有 2 个物体，即至少有 2 个人同年同月生.

故这个班中至少有两个学生是同年同月生的.

2.2　某一制造铁盘的工厂，由于设备和技术的原因只能将生产盘子的重量控制在 a 克到 $(a+0.1)$ 克之间. 现需要制成重量相差不超过 0.005 克的两铁盘来配制一架天平，问该工厂至少要生产多少铁盘才能保证得到一对符合要求的铁盘.

解：将铁盘按重量分类，所有 a 克到 $(a+0.005)$ 克的分为一类，（$a+0.005$）克到（$a+0.01$）克的分为一类，（$a+0.01$）克到（$a+0.015$）克的又为一类，……，最后，（$a+0.095$）克到（$a+0.1$）克为一类，共计 20 类视为 20 个鸽笼，由鸽笼原理知，若该工厂生产 21 个铁盘，那么就有两个铁盘属于同一类，它们之间的重量差将不超过 0.005 克.

故该工厂至少要生产 21 个铁盘才能得到一对符合要求的铁盘.

2.3　在边长为 1 的正三角形内任意放置 5 个点，则其中至少有两个点的距离≤1/2.

证明：将边长为 1 的正三角形分成边长为 1/2 的 4 个小正三角形，如图 2-1 所示，将 5 个点放入 4 个小正三角形中，由鸽笼原理知，至少有一个小正三角形中放有 2 个点，而这两点的距离≤1/2.

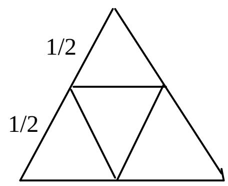


图　2-1

2.4　在 3×4 的长方形内任意放置 7 个点，则其中至少有两点的距离 $\leq\sqrt{5}$.

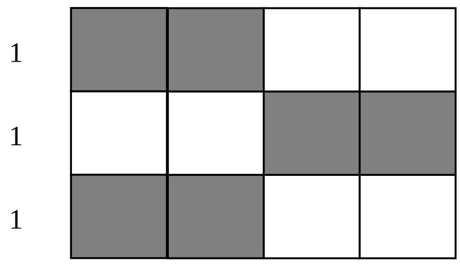


图　2-2

证明：将 3×4 的长方形分成 6 个 1×2 的小矩形，如图 2-2 所示，每个小矩形内的最长距离为两对角点之间的距离，即 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$．根据鸽笼原理，把 7 个点放到 6 个小矩形中，至少有两个点落入同一个小矩形中，则它们之间的距离 $\le\sqrt{5}$．

故至少有两点的距离 $\le\sqrt{5}$．

2.5　在如图 2-3 所示中，每个方格着红色或蓝色，证明至少存在两列有相同的着色.

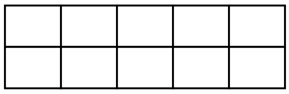


图　2-3

证明：用两种颜色按列着色，根据乘法规则，每列着色的方式只可能有 $2\times2=4$ 种（视为 4 个鸽笼），而图中有 5 列方格（视为 5 个鸽子）. 根据鸽笼原理知，至少有两列着色方式相同.

2.6　任给 5 个整数，则必能从中选出 3 个，使得它们的和能被 3 整除.

证明：设 5 个数为 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 又设 a_i 被 3 除后所得的余数为 $b_i\left(i=1,2,3,4,5\right)$，显然，$0\le b_i\le2$，将 0，1，2 看为三个盒子，$b_1$，$b_2$，$b_3$，$b_4$，$b_5$ 看为五个物体，于是下面分为三种情况来讨论：

（1）若两个盒子是空的；

（2）若一个盒子是空的；

（3）三个盒子都不空.

对于（1）：b_1，b_2，b_3，b_4，b_5 放于同一盒子中，即这 5 个余数是相同的，任选 3 个，它们所对应的 a_i 的和必能被 3 整除.

对于（2）：b_1，b_2，b_3，b_4，b_5 放于另两个盒子中，而 5≥2×（3–1）+1，根据鸽笼原理推论 1，必有一个盒子中有三个物体，即 b_1，b_2，b_3，b_4，b_5 五个物体中必有三个放入同一盒子，选这三个对应的 a_i，其和必能被 3 整除.

对于（3）：每个盒子中选一个，将其对应的 a_i 相加，其和也必然能被 3 整除.

综上所述，5 个整数中必能从中选出 3 个，使得它们的和能被 3 整除.

2.7　一个学生打算用 37 天总共 60 学时自学一本书，他计划每天至少自学 1 学时，证明：无论他怎样安排自学时间表，必然存在相继的若干天，在这些天内其自学总时数恰好为 13 学时（假定每天自学学时数为整数).

证明：设 a_1 是第一天自学的时数，a_2 是第一、二天自学的时数的和，a_j 是第一、第二、……第 j 天自学时数的和，j=1，2，…，37.

于是，序列 a_1，a_2，…，a_{37} 是严格递增序列（每天至少 1 学时），而且，$a_1\ge1, a_{37}=60$．

于是序列 a_1+13，a_2+13，…，$a_{37}+13$ 也是严格递增的序列，且 $a_{37}+13=73$．

因此 74 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_{37}$，a_1+13，a_2+13，…，$a_{37}+13$ 都在[1，73]之间，由鸽笼

原理知，这 74 个数中必有两个是相等的，由于 $a_1, a_2, \cdots, a_{37}$ 中任何两个数都不相等，故 $a_1+13, \cdots, a_{37}+13$ 中任何两个数也是不相等的，因此，一定存在两个数 i，j 使得 $a_i = a_j + 13$，即 $a_i - a_j$=13.

因此，在第 $j+1, j+2, \cdots, i$ 这些天中，这个学生自学总时数恰好为 13.

2.8　已知 n 个正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，证明：在这 n 个数中总是可以选择两个数，使得这两个数的和或差能被 n 整除.

证明：

方法一：

每个正整数被 n 除所得的余数必是 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ 中的一个，n 个正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 被 n 除所得的 n 个余数中如果有两个相同，则相对应的两个正整数相减能被 n 整除. 否则，n 个余数分别为 $0, 1, 2, \cdots, n-1$，此时余数为 i 与 $n-i$ 的相对应的两个正整数之和能被 n 整除.

方法二：

设这 n 个正整数满足不等式

$$0 < a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$$

若上式中有一个等号成立，则本题结论显然成立，故可进一步假设

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

现用反证法证明：如若不然，则对任意的 i，j（$1 \le i < j \le n$），$a_j - a_i$ 和 $a_j + a_i$ 都不能被 n 整除，令

$$b_i = a_n - a_i (i = 1, 2, \cdots, n-1) \qquad b_n = a_n + a_1$$

由反证法假设知 $b_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都不能被 n 整除，则设它被 n 整除的余数分别为 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，显然有 $1 \le c_i \le n-1\ (i = 1, 2, \cdots, n)$.

于是，把 1，2，⋯，n–1 看为 n–1 个鸽笼，把 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 看为 n 个鸽子，由鸽笼原理，至少存在两个正整数 c_i, c_j（$1 \le i < j \le n$），使得

$$c_i = c_j$$

当 j=n 时，上式即为 $(a_n - a_i) - k_i n = (a_n + a_1) - k_n n$（其中 k_i，k_n 为整数）

所以 $a_1 + a_i = (k_n - k_i)n$　这与假设矛盾

当 $1 \le i < j \le n-1$ 时，同样有 $(a_n - a_i) - k_i n = (a_n - a_j) - k_j n$（其中 k_i，k_j 为整数）

所以 $a_j - a_i = (k_j - k_i)n$　这与假设矛盾

综合上述两种情况，本题得证.

2.9　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 1，2，⋯，n 的一个排列，证明：如果 n 是奇数，则乘积 $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ 是一个偶数.

证明：

方法一：

因为 n 是奇数，故 $1,2,\cdots,n$ 中共有 $\frac{n+1}{2}$ 个奇数，于是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，$1,2,\cdots,n$ 中共有 $2\times\frac{n+1}{2}=(n+1)$ 个奇数，把它们放入 n 个盒子中，必有两个在同一盒子中，其差为偶数，故本题结论成立.

方法二：

因为 n 是奇数，故 $1,2,\cdots,n$ 中共有 $\frac{n+1}{2}$ 个奇数，$\frac{n-1}{2}$ 个偶数，即奇数的个数比偶数的个数多 1．如果 (a_1-1)，(a_2-2)，$\cdots$，(a_n-n) 中全为“奇数–偶数”或者“偶数–奇数”的形式，则 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，$1,2,\cdots,n$ 中奇数个数和偶数个数应该相等，当然 $1,2,\cdots,n$ 中奇数个数和偶数个数也应该相等，这与 n 是奇数矛盾．故 (a_1-1)，(a_2-2)，$\cdots$，(a_n-n) 中必有“奇数－奇数”或者“偶数－偶数”的形式，即 $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ 是一个偶数.

2.10　证明：在任意 52 个整数中，必存在两个数，其和或差能被 100 整除.

证明：　设 52 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{52}$ 被 100 除的余数分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_{52}$，而任意一整数被 100 除可能的余数为 0，1，2，…，99，共 100 个，它可分为 51 个类：{0}，{1，99}，{2，98}，…，{49，51}，{50}．将 51 个类看为鸽笼，52 个余数看为鸽子，则 52 个鸽子放入 51 个鸽笼中，由鸽笼原理知，至少有两个鸽子属于同一类，例如 r_i,r_j，于是 $r_i=r_j$ 或 $r_i+r_j=100$，这就是说 a_i-a_j 可被 100 整除，或 a_i+a_j 可被 100 整除.

2.11　证明：N（4，4）$\le$ 18

证明：由定理 2.8，显然有 N（4，4）$\le N$（3，4）+N（4，3）=9+9=18.

2.12　证明：

$$\begin{aligned}N(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le\ & N(a_1-1,a_2,\cdots,a_n)\\ &+N(a_1,a_2-1,\cdots,a_n)\\ &\cdots\cdots\\ &+N(a_1,a_2,\cdots,a_n-1)\end{aligned}$$

证明：记 $N_i=N(a_1,a_2,\cdots,a_i-1,\cdots,a_n)$，$i=1,2,\cdots,n$，记 $X=\sum_{i=1}^{n}N_i$．考虑 X 个顶点的完全图，用 n 种颜色 C_i（$i=1,2,\cdots,n$）对完全图的边染色．在 X 个点中任取一点 P，由 P 连出 $X-1$ 条边．则有

$$\begin{aligned}X-1&=N_1+N_2+\cdots+N_n-1\\ &\ge N_1+N_2+\cdots+N_n-(n-1)\\ &=N_1+N_2+\cdots+N_n-n+1\end{aligned}$$

现 C_1，C_2，…，C_n 共 n 个鸽笼，则由鸽笼原理知，至少存在一个 i $(1\le i\le n)$，使得这 $X-1$

条边中染成C_i色的边数至少是N_i条.

我们考虑其中染成C_i色的N_i条边．这N_i条边连接到另外N_i个顶点．而$N_i=N$（a_1，a_2，…，a_{i-1}，a_i-1，a_{i+1}，…，a_n），所以这N_i个顶点之间的连线

或者有一个C_1色的纯a_1角形；

或者有一个C_2色的纯a_2角形；

……

或者有一个C_{i-1}色的纯a_{i-1}角形；

或者有一个C_i色的纯a_i-1 角形（而点P和这a_i-1 个顶点所连的边都是C_i色的，从而这a_i个顶点组成一个纯a_i角形，即存在一个C_i色的纯a_i角形）；

或者有一个C_{i+1}色的纯a_{i+1}角形；

……

或者有一个C_n色的纯a_n角形；

而$N(a_1,a_2,...,a_n)$是保证出现以上情形之一的最小正整数，故有

$$N\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\le N\left(a_1-1,a_2,\cdots,a_n\right)+N\left(a_1,a_2-1,\cdots,a_n\right)+\cdots+N\left(a_1,a_2,\cdots,a_n-1\right)$$

综上所述，原命题得证.

2.13　证明：如果$N\left(a,b-1\right)$和$N\left(a-1,b\right)$都是偶数，则

$$N\left(a,b\right)<N\left(a-1,b\right)+N\left(a,b-1\right).$$

证明： 显然，要证上述的不等式，只需证明下面的不等式$N(a,b)\le N(a-1,b)+N(a,b-1)-1$成立即可．下面证明此不等式成立.

令$X=N\left(a-1,b\right)+N\left(a,b-1\right)-1$，由于$N\left(a,b-1\right)$和$N\left(a-1,b\right)$都是偶数，因此$X$为奇数．现在不妨假设有$X$个人.

我们首先断言这X个人不可能每个人认识的人数都为$N\left(a-1,b\right)-1$. 现用反证法来证明．假设这X个人中每个人认识的人数都为$N\left(a-1,b\right)-1$，则所有认识人数之和$Y=X\cdot(N(a-1,b)-1)$为奇数，但事实上每一个相识关系都被计算了 2 次，所以Y应该是偶数，此矛盾说明了这X个人不可能每个认识的人数都为$N\left(a-1,b\right)-1$.

因此在这X个人中，下面两种情形必有一种出现.

① 存在一个人P，他认识的人数小于$N\left(a-1,b\right)-1$.

那么P不认识的人数至少为

$$\begin{aligned}&X-(N(a-1,b)-1)\\&=(N(a-1,b)+N(a,b-1)-1)-(N(a-1,b)-1)\\&=N(a,b-1).\end{aligned}$$

这表明在$N(a,b-1)$个人中，或者有a个人相互认识，或者有 b–1 个人互不相识．如果有a个人相互认识，则不等式成立．如果有$b-1$个人相互不认识，又他们与P都不相识，

加上 P，则有 b 个人相互不认识，原不等式也成立.

故此种情形下命题的结论成立.

② 存在一个人 P，他认识的人数大于或等于 $N(a-1,b)$.

这表明在 $N(a-1,b)$ 个人中，或者有 $a-1$ 个人相互认识，或者有 b 个人互不相识．若有 a–1 个人互相认识，又他们与 P 都相识，因此加上 P，就有 a 个人相互认识，则不等式成立．若有 b 个人互不相识，则不等式成立.

故此种情形下命题的结论成立.

综上所述两种情况，原命题结论成立.

2.14　证明：如果将完全七角形的边着红色或蓝色，则至少有 3 个纯三角形.

证明：首先证明如下命题：

将完全六角形的边着红色或蓝色，至少会得到两个纯三角形.

假设完全六角形的 6 个顶点为V_1，V_2，V_3，V_4，V_5，V_6．对完全 6 角形用红、蓝二色进行着色，根据定理 2.3 知至少有一个同色的纯三角形，不妨设可得一个红色边的纯三角形（蓝色边的纯三角形可作同样讨论），其红色三角形顶点为V_1，V_2，V_3（如图 2-4 所示，图中，虚线代表红色，实线代表蓝色）下面分两种情况进行讨论：

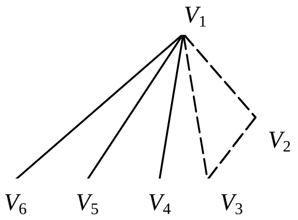


图　2-4

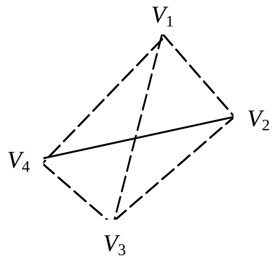


图　2-5

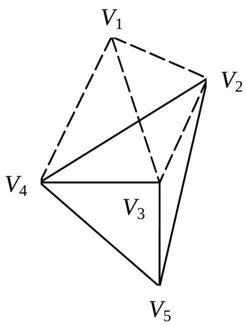


图　2-6

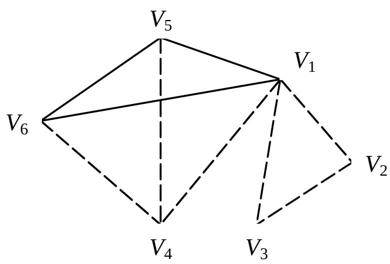


图　2-7

（1）若V_1V_4，V_1V_5，V_1V_6三边为蓝色，如图 2-4 所示．若V_4，V_5，V_6三点之间有一蓝色边，不妨设为V_5，V_6，则由V_1，V_5，V_6三点所成的三角形为蓝色三角形，否则，V_4，V_5，V_6. 三点所成的三角形为红色三角形，命题得证.

（2）若V_1V_4，V_1V_5，V_1V_6三边中有一边为红色边，不妨设V_1V_4为红色边．于是，又

分为以下两种情况进行讨论：

① 若V_2V_4，V_3V_4，中有一边为红色边，不妨设V_3V_4为红色边，则由V_1，V_3，V_4三点所成的三角形为红色三角形，如图 2-5 所示．命题得证．

② 若V_2V_4，V_3V_4均为蓝色边，则对于点V_4相关联的边又进行如下的讨论：

a．若V_4V_5，V_4V_6中有一边为蓝色，不妨设V_4V_5为蓝色边，如图 2-6 所示．此时 ，若V_2V_5，V_3V_5均为红色，则由V_2，V_3，V_5三点所成的三角形为红色三角形，否则，由V_2，V_4，V_5三点所成的三角形或由V_3，VV_4，V_5三点所成的三角形为蓝色三角形．命题得证．

b．若V_4V_5，V_4V_6均为红色边，如图 2-7 所示．此时，若由V_1，V_5，V_6三点所成的三角形有一条边为红色边，不妨设V_1V_5为红色边，则由V_1，V_4，V_5三点所成的三角形为红色三角形，否则 ，该三角形为蓝色三角形．命题也得证．

综上所述，命题得证．

再证本题的结论如下：

对于完全七角形，我们先看其中的 6 个顶点，由命题的结论知，由这 6 个点组成的完全六角形中，必存在两个纯三角形，然后去掉某个纯三角形的一个顶点，再把第 7 个顶点加入，在新的完全六角形中又可找到两个纯三角形．显然这两个纯三角形中至少有一个是新的．综上所述，至少有 3 个纯三角形．

2.15　证明：如果将一个完全 17 角形的边用红，蓝，白三种颜色任意着色，则一定存在一个同色的三角形．

证明：在完全图K_{17}中任选一个顶点，例如V_1，以V_1为端点的边共有 16 条．

现在用红，蓝，白三种颜色对这 16 条边着色，由鸽笼原理（定理 2.2 推论 1）知，至少有 6 条边着同一种颜色（因为 16=3×（6–1）+1），比如着红色，而这 6 条边中每条边的另一个端点可构成完全图K_6，若其中有一边着红色，则得到一个红色三角形，否则，K_6的边着另两种颜色，则由定理 2.3 知：必存在一个蓝三角形或白三角形．故一定存在一个同色的三角形．

2.16　证明：如果将完全 $2n$ 角形的边着红色或蓝色，则纯三角形的数量至少是 $2\binom{n}{3}$．

证明：首先，完全 $2n$ 角形中共有$\binom{2n}{3}$个三角形

设r_i为第i个点V_i（i=1，2，⋯，$2n$）所关联的$2n-1$条边中的红色边数，则与点V_i有关的非纯三角形的个数为

$$r_i(2n-1-r_i)$$

对于i=1，2，⋯，$2n$，在完全 $2n$ 角形中，其非纯三角形总的个数（不考虑重复）为

$$\sum_{i=1}^{2n} r_i(2n-1-r_i)$$

又由于用两种颜色着色时，任何一个非纯三角形都有且仅有两个顶点分别与两条不同色的边相关联，故每一个非纯三角形都包含两个与不同色边相关联的顶点，因此，每一个非纯三角形在对诸顶点计算时重复计算了两次，故在完全 $2n$ 角形中，其非纯三角形总的个数应该为

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} r_i(2n-1-r_i)$$

故在完全 $2n$ 角形中，其纯三角形总的个数为

$$\binom{2n}{3}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} r_i(2n-1-r_i)$$

由于 $r_i(2n-1-r_i)$ 在 $r_i=n$ 时取得最大值，所以

$$\begin{aligned}\binom{2n}{3} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} r_i(2n-1-r_i) &\geq \binom{2n}{3}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} n(2n-1-n)\\ &=\binom{2n}{3}-n^2(n-1)\\ &=2\binom{n}{3}\end{aligned}$$

故纯三角形的数量至少是 $2\binom{n}{3}$.

注意：此题还可以用归纳法证明.

2.17　在平面上的 m 个点（无三点共线）中，若任意四点都是凸四边形的四个顶点，那么这 m 个点必是一凸 m 边形的顶点.

证明：

证法一：

设用 $m(m-1)/2$ 条边连接 m 点所得完全图中最大的凸 n 边形是 $V_1, V_2, \cdots, V_n$. 我们对每一边 V_iV_{i+1} 延长其两邻边 $V_{i-1}V_i$ 和 $V_{i+1}V_{i+2}$（注，$V_i=V_n$ 时，$V_{i+1}=V_1, V_{i+2}=V_2$），可得以边 V_iV_{i+1}，$V_{i-1}V_i$，$V_{i+1}V_{i+2}$ 为界，在边 V_iV_{i+1} 外侧的区域. 例如 $n=5$ 时各边对应的外侧区域如图中 2-8 阴影部分所示.

若有点落在 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 中或落在它所有外侧区域之外（如图 2-8 所示中的非阴影部分），如图 2-8 中的 V，V'，则必有四点构成凹四边形，与题设矛盾. 若有点落在阴影部分，如图 2-8 所示中的 V''，则我们有凸 n+1 边形 $V_1, V_2, \cdots, V_n\ V''$，与 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 的最大性相矛盾. 因此，m 个点全落在 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 的边界上，而 m 个点中无三点共线，故 m 个点为一凸 m 边形的顶点，即这 m 个点必是一凸 m 边形的顶点.

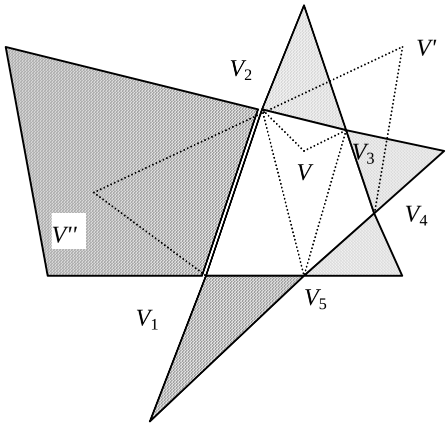


图　2-8

证法二：

我们现在引用“平面上有限个点必有一个凸闭包”这样一个结论来证明.

对此 m 个点，两两连线，共 $\frac{m(m-1)}{2}$ 条边. 这样将得到一个凸闭包，设其有 k 个顶点 $V_1,V_2,\cdots,V_k$. 若 $k=m$ 则命题成立，否则 $k<m$，则至少有一个点 V 不在凸闭包上. 那么，V 必包含于 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 所成的 $\binom{k}{3}$ 个三角形的某一个中. 如下图 2-9 所示，V，V_1,V_2,V_3 四个点不是某凸四边形的顶点，与题设矛盾，从而 $k=m$ 必成立，命题得证.

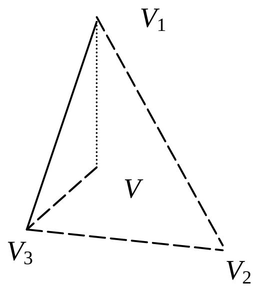


图　2-9

第三章　容 斥 原 理

一、内容提要

在本章中，令A_i（i=1，2，…，m）$\subseteq S$，且A_i是S中具有性质p_i的元素所组成的子集合，则$\bigcap_{i=1}^{m} A_i$是S中同时具有性质p_1，p_2，…，p_m的元素子集合，$\bigcap_{i=1}^{m} \overline{A_i}$是$S$中既不具有性质$p_1$，又不具有性质$p_2$，…，更不具有性质$p_m$的元素所组成的子集合．于是我们有下面的容斥原理．

定理 3.1　S中不具有性质p_1，p_2，…，p_m的元素个数为：

$$\begin{aligned}\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}\right| = |S| - \sum_{i=1}^{m}|A_i| + \sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j| \\ - \sum_{i\neq j\neq k}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \cdots + (-1)^m |A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|\end{aligned} \tag{3.5}$$

在式（3.5）中，第二个和式取遍集合{（i，j｜i，j=1，2，…，m；$i\neq j$），第三个和式取遍集合{（i，j，k）｜i，j，k=1，2，…，m；$i\neq j\neq k$}……

推论　在集合S中至少具有性质 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 中的一个性质的元素个数是

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m| = \sum_{i=1}^{m}|A_i| - \sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j| + \sum_{i\neq j\neq k}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right| \\ +\cdots+(-1)^{m+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|\end{aligned} \tag{3.6}$$

定理 3.2　当$n\geq 1$时，有

$$D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right) \tag{3.7}$$

定理 3.3

$$D_n = (n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}) \tag{3.8}$$

定理 3.4　对于$n\geq 1$，有

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\cdot 1! \tag{3.9}$$

定理 3.5　当$n\geq 2$时，有

$$Q_n = D_n + D_{n-1} \tag{3.10}$$

定义 3.1 给定棋盘C，令$r_0(C)=1$，n为C的格子数，称

$$R(C)=\sum_{k=0}^{n} r_k(C)x^k$$

为棋盘 C 的棋子多项式.

定理 3.6 给定棋盘C，指定C中某格A．令C_i为C中删去格A所在行与列所剩的棋盘，C_e为C中删去格A所剩的棋盘，则

$$R(C)=xR(C_i)+R(C_e) \tag{3.11}$$

定义 3.2 设C_1和C_2是两个棋盘，若C_1的所有格都不与C_2的所有格同行同列，则称两个棋盘是独立的.

定理 3.7 若棋盘C可分解为两个独立的棋盘C_1和C_2，则

$$R(C)=R(C_1)R(C_2) \tag{3.12}$$

定理 3.8 n元有禁位的排列数为

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\cdots\pm r_n \tag{3.13}$$

其中r_i为将i个棋子放入禁区棋盘的方式数，$i=1,2,\cdots,n$.

二、习题解答

3.1 从 1～10000 的整数中，不能被 3，4 或 5 中任何一个整除的整数的个数.

解：设集合S为 1～10000 的整数构成的集合；A_1为在S中能被 3 整除的整数的集合；A_2为在S中能被 4 整除的整数的集合；A_3为在S中能被 5 整除的整数的集合．则$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$为在$S$中不能被 3，4 或 5 任何一个整除的整数的集合.

由容斥原理（(3.5) 式）有：

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|S|-\sum_{i=1}^{3}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|-|A_1\cap A_2\cap A_3| \tag{3.5}$$

其中

$$|S|=10000$$

$$|A_1|=\left\lfloor\frac{10000}{3}\right\rfloor=3333$$

$$|A_2|=\left\lfloor\frac{10000}{4}\right\rfloor=2500$$

$$|A_3|=\left\lfloor \frac{10000}{5} \right\rfloor = 2000$$

$$|A_1 \cap A_2|=\left\lfloor \frac{10000}{3\times 4} \right\rfloor = 833$$

$$|A_1 \cap A_3|=\left\lfloor \frac{10000}{3\times 5} \right\rfloor = 666$$

$$|A_2 \cap A_3|=\left\lfloor \frac{10000}{4\times 5} \right\rfloor = 500$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=\left\lfloor \frac{10000}{3\times 4\times 5} \right\rfloor = 166$$

将以上数值代入（3.5）式即得

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|=10000-（3333+2500+2000）+（833+666+500）-166=4000$$

故从 1～10000 的整数中，不能被 3，4 或 5 中任何一个整除的整数的个数为 4000.

3.2　求 1～1000 中既非完全平方又非完全立方的整数个数.

解：设 $S=\{1，2，\cdots，1000\}$；A_1表示在 1～1000 中完全平方数的集合，则$\overline{A_1}$表示在 1～1000 中不是完全平方数的集合；A_2表示在 1～1000 中完全立方数的集合，则$\overline{A_2}$表示在 1～1000 中不是完全立方数的集合.

故$\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$表示在 1～1000 中既非完全平方又非完全立方的整数的集合，由容斥原理（（3.5）式）知：

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| \qquad (3.5)$$

其中

$$|S|=1000$$

$$|A_1|=\left\lfloor \sqrt{1000} \right\rfloor = 31$$

$$|A_2|=\left\lfloor \sqrt[3]{1000} \right\rfloor = 10$$

$A_1 \cap A_2$表示在 1～1000 中既是完全平方又是完全立方的数的集合，故

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \sqrt[6]{1000} \right\rfloor = 3$$

将以上数值代入（3.5）式得

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right|=1000-（31+10）+3=962$$

故在 1～1000 中既非完全平方又非完全立方的整数个数为 962.

3.3　某校有 120 名学生参加数学竞赛，竞赛试题共有甲，乙，丙三题．竞赛结果为：12 名学生三题全对；20 名学生只做对了甲题和乙题；16 名学生做对了甲题和丙题；28 名

学生做对了乙题和丙题；48 名学生做对了甲题；56 名学生做对了乙题；16 名学生三题都做错了．试求出做对了丙题的学生人数．

解：设S为参加竞赛的学生的集合；A_1为在S中做对了甲题的学生的集合；A_2为在S中做对了乙题的学生的集合；A_3为在S中做对了丙题的学生的集合，则$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$就是做错了三题的学生的集合，由容斥原理（(3.5）式）有，

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|S|-\sum_{i=1}^{3}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|-|A_1\cap A_2\cap A_3| \qquad (3.5)$$

而 $|S|=120$，$|A_1|=48$，$|A_2|=56$

由题意知，只做对了甲题和乙题的学生数为 20，故做对了甲题和乙题的学生数应为只做对了这两题的学生数和三题全做对的学生数之和，故

$$|A_1\cap A_2|=20+12=32,\quad |A_1\cap A_3|=16,\quad |A_2\cap A_3|=28$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=12$$

将以上各式代入（3.5）式得

$$16=120-(48+56+|A_3|)+(32+16+28)-12$$

所以$|A_3|=64$．

故做对了丙题的人数为 64．

3.4　在有 10 个字母 a，a，b，b，c，c，d，d，e，e 的全排列中，求相同字母不相邻的排列个数．

解：设S为这 10 个字母的全排列的集合；

A_1表示在S中两个a相邻的全排列的集合；A_2表示在S中两个b相邻的全排列的集合；

A_3表示在S中两个c相邻的全排列的集合；A_4表示在S中两个d相邻的全排列的集合；

A_5表示在S中两个e相邻的全排列的集合，则$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}$就是相同字母不相邻的排列所组成的集合，由容斥原理（(3.5）式）有：

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}\right|=|S|-\sum_{i=1}^{5}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|-\cdots-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5| \qquad (3.5)$$

由定理 1.4 易得：

$$|S|=\frac{10!}{2!2!2!2!2!}$$

$$|A_i|=\frac{9!}{1!2!2!2!2!}\ (i=1,2,\cdots,5)$$

$$|A_i\cap A_j|=\frac{8!}{1!1!2!2!2!}\ (i=1,2,\cdots,5;\ j=1,2,\cdots,5;\ i\neq j)$$

$$|A_i\cap A_j\cap A_k|=\frac{7!}{1!1!1!2!2!}\ (i=1,2,\cdots,5;\ j=1,2,\cdots,5;\ k=1,2,\cdots,5;\ i\neq j\neq k)$$

$$\left|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l\right| = \frac{6!}{1!1!1!1!2!}$$

$$(i=1,2,\cdots,5;\ j=1,2,\cdots,5;\ k=1,2,\cdots,5;\ l=1,2,\cdots,5; i \neq j \neq k \neq l)$$

$$\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5\right| = \frac{5!}{1!1!1!1!1!}$$

将以上数值代入（3.5）式得

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}\right|$$
$$= \frac{10!}{2!2!2!2!2!} - \binom{5}{1}\frac{9!}{2!2!2!2!} + \binom{5}{2}\frac{8!}{2!2!2!} - \binom{5}{3}\frac{7!}{2!2!} + \binom{5}{4}\frac{6!}{2!} - \binom{5}{5}5!$$
$$=113400-5\times22680+10\times5040-10\times1260+5\times360-120$$
$$=39480$$

故在 10 个字母 a，a，b，b，c，c，d，d，e，e 的全排列中，相同字母不相邻的排列个数为 39480．

3.5　求重集 $B=\{3\cdot a, 4\cdot b, 2\cdot c\}$ 的排列数，在这些排列中要求所有相同字母不能相邻出现（例如，*abbbbcaca* 是不允许的，但 *abbbacacb* 是允许的）．

解：令 S 为重集B的全排列所组成的集合，则由定理 1.4 知

$$|S| = \frac{9!}{3!4!2!} = 1260$$

令 A_1 代表在 S 中 3 个 a 相邻的排列组成的集合，A_2 代表在 S 中 4 个 b 相邻的排列组成的集合，A_3 代表在 S 中 2 个 c 相邻的排列组成的集合，则 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ 为满足条件的排列集合．由容斥原理（(3.5) 式）有：

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = |S| - \sum_{i=1}^{3}|A_i| + \sum_{i \neq j}\left|A_i \cap A_j\right| - \left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right| \qquad (3.5)$$

由定理 1.4 可得

$$|A_1| = \frac{7!}{4!2!} = 105，\ |A_2| = \frac{6!}{3!2!} = 60，\ |A_3| = \frac{8!}{4!3!} = 280$$

$$|A_1 \cap A_2| = 4!/2! = 12，\ |A_1 \cap A_3| = 6!/4! = 30$$

$$|A_2 \cap A_3| = 5!/3! = 20，\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3! = 6$$

将以上数值代入（3.5）式得

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = 1260-105-60-280+12+30+20-6 = 871$$

故所求全排列个数为 871 个．

3.6　求长为 5 的二进制数的个数，其中要求每个 1 都同另一个 1 相邻．

解：设S为长为 5 的二进制数的集合，性质P_i表示长为 5 的二进制数的第 i 个数字是 1 且与其相邻的数字是 0，A_i 表示在S中具有性质P_i的二进制数的集合（i=1，2，3，4，5），

则$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}$为在$S$中每个 1 都同另一个 1 相邻的集合，由容斥原理（(3.5）式）得

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}\right|=|S|-\sum_{i=1}^{5}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|+\cdots-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5| \quad (3.5)$$

显然有 $$|S|=2^5$$

又由于A_1表示字长为 5 的二进制数的第 1 个数字是 1，第 2 个数字是 0，第 3、4、5 个数字分别是 x（x 表示数字 0 或 1，下同）的集合，

即A_1中的元具有如下形式：10xxx

因此有 $$|A_1|=2^3$$

同理有

$$|A_2|=2^2, |A_3|=2^2, |A_4|=2^2, |A_5|=2^3$$

又由于$A_1\cap A_2$表示字长为 5 的二进制数的第 1 个数字是 1，同时第 2 个数字也是 1 且第 3 个数字是 0，第 4、5 个数字分别是 x 的集合，即$A_1\cap A_2$中的元具有如下形式：110xx，这不符合题意，故有

$$|A_1\cap A_2|=0$$

又由于$A_1\cap A_3$表示字长为 5 的二进制数的第 1 个数字是 1，第 3 个数字也是 1 且第 2 个数字是 0，第 4 个数字也是 0，第 5 个数字是 x，即在$A_1\cap A_2$中的元具有如下形式：1010x，故有

$$|A_1\cap A_3|=2$$

同理有

$$|A_1\cap A_4|=1, |A_1\cap A_5|=2,\quad |A_2\cap A_3|=0, |A_2\cap A_4|=1, |A_2\cap A_5|=1$$
$$|A_3\cap A_4|=0, |A_3\cap A_5|=2,\quad |A_4\cap A_5|=0$$

而 $|A_i\cap A_j\cap A_k|$ $(i=1,2,\cdots,5;\ j=1,2,\cdots,5;\ k=1,2,\cdots,5;\ i\neq j\neq k)$ 中只有$|A_1\cap A_3\cap A_5|=1$，其余均为 0；

同理，

$$|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l|=0\ (i=1,2,\cdots,5;\ j=1,2,\cdots,5;\ k=1,2,\cdots,5;\ l=1,2,\cdots,5;\ i\neq j\neq k\neq l)$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|=0$$

将以上数值代入（3.5）式得到：

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}\right|=2^5-(2^3+2^2+2^2+2^2+2^3)+9-1+0-0=12$$

故在长为 5 的二进制数中，每个 1 都同另一个 1 相邻的二进制个数为 12 个.

3.7　在由 26 个字母 a，b，c，…，z 组成的全排列中，求不包含字符串 john，paul 和 smite 的全排列个数.

解：设S为 26 个字母的全排列的集合；A_1表示在S中包含字符串john的全排列集合；A_2表示在S中包含字符串paul的全排列集合；A_3表示在S中包含字符串smite的全排列集合，则$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$就是在$S$中不包含字符串john，paul和smite的全排列的集合，由容斥原理（(3.5)式）得：

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|S|-\sum_{i=1}^{3}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|-|A_1\cap A_2\cap A_3| \qquad (3.5)$$

其中，
$$|S|=26!；\ |A_1|=23!；\ |A_2|=23!；\ |A_3|=22!$$
$$|A_1\cap A_2|=20!；\ |A_1\cap A_3|=19!；\ |A_2\cap A_3|=19!$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=16!$$

将以上数值代入（3.5）式得

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=26!-2\cdot 23!-22!+20!+2\cdot 19!-16!$$

故在由 26 个字母 a，b，c，…，z 组成的全排列中，不包含字符串 john，paul 和 smite 的全排列个数为 $26!-2\cdot 23!-22!+20!+2\cdot 19!-16!$

3.8　在所有的 n 位数中，包含数字 3，8，9 但不包含数字 0，4 的数有多少？

解：除去 0，4，则在 1，2，3，5，6，7，8，9 这 8 个数字组成的n位数中，

令S表示由这 8 个数字组成的所有n位数的集合．则$|S|=8^n$，并令：

P_1表示这样的性质：一个n位数不包含 3；

P_2表示这样的性质：一个n位数不包含 8；

P_3表示这样的性质：一个n位数不包含 9；

又令A_i表示在S中具有性质P_i的元素构成的集合（i=1，2，3）.

则$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$表示在 S 中包含 3，又包含 8，又包含 9 的所有 n 位数的集合.

由容斥原理（(3.5)式）得

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|S|-\sum_{i=1}^{3}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|-|A_1\cap A_2\cap A_3| \qquad (3.5)$$

而

$$|A_1|=7^n,|A_2|=7^n,|A_3|=7^n$$
$$|A_1\cap A_2|=6^n,|A_1\cap A_3|=6^n,|A_2\cap A_3|=6^n$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=5^n,$$

代入（3.5）式得

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right| = 8^n - 3\cdot 7^n + 3\cdot 6^n - 5^n$$

故所求的 n 位数有 $8^n - 3\times 7^n + 3\times 6^n - 5^n$ 个．

注意：此题可用母函数的方法来求解（见原教材第四章§4.3 节例 9）．

3.9　一个体育团共 25 人，其中 14 人会打足球，12 人会打乒乓球，6 人既会打乒乓球又会打足球，5 人既会打篮球又会打足球，还有两人对这三种球都会打，而 6 个会打篮球的人都会打另一种球（指这三种球的一种）．求不会打球的人数（指这三种球）．

解：设 S 为这 25 个人组成的集合，F代表在S中会打足球的人组成的集合，B代表在S中会打篮球的人组成的集合，P代表在S中会打乒乓球的人组成的集合，则 $\overline{B}\cap\overline{F}\cap\overline{P}$ 就是在S中不会打球的人组成的集合，由容斥原理（(3.5) 式）有

$$\left|\overline{B}\cap\overline{F}\cap\overline{P}\right| = |S| - |B| - |F| - |P| + |B\cap F| + |B\cap P| + |F\cap P| - |B\cap F\cap P| \qquad (3.5)$$

而

$$|S| = 25, |F| = 14, |P| = 12, |B| = 6\ , |P\cap F| = 6, |B\cap F| = 5, |P\cap F\cap B| = 2$$

又 6 个会打篮球的人中有 5 个会打足球，则依题意另一个必会打乒乓球，又有两个人会三样，所以，那 5 个既会打篮球又会打足球的人中有两个会打乒乓球，故有

$$|B\cap P| = 6 - 5 + 2 = 3$$

将以上各式之值代入（3.5）式得

$$\begin{aligned}\left|\overline{B}\cap\overline{F}\cap\overline{P}\right| &= |S| - |B| - |F| - |P| + |B\cap F| + |B\cap P| + |F\cap P| - |B\cap F\cap P| \\ &= 25 - 6 - 14 - 12 + 5 + 3 + 6 - 2 \\ &= 5\end{aligned}$$

故不会打球的人数为 5 人．

3.10　求重集 $B = \{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$ 的 10–组合数．

解：构造集合$B' = \{\infty\cdot a, \infty\cdot b, \infty\cdot c\}$．令集合$B'$ 的所有 10–组合构成的集合为S．由第一章的重复组合公式（1.11）有

$$|S| = \mathrm{F}(3, 10) = \binom{3+10-1}{10} = 66$$

令p_1表示在S中的元素至少含有 4 个a这一性质，令p_2表示在S中的元素至少含有 5 个b这一性质，令p_3表示在S中的元素至少含有 6 个c这一性质，并令A_i（i=1，2，3）表示在S中具有性质p_i（i=1，2，3）的元素所构成的集合，于是B的 10–组合数就是在S中不具有性质p_1，p_2，p_3的元素个数．由容斥原理（(3.5) 式）有：

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| = |S| - \sum_{i=1}^{3}|A_i| + \sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j| - |A_1\cap A_2\cap A_3| \qquad (3.5)$$

由于已经求得$|S|$=66，下面分别计算（3.5）式右端其他的项．

由于在A_1中的每一个 10–组合至少含有 4 个a，故将每一个这样的组合去掉 4 个a就得到集合B' 的一个 6–组合．反之，如果取B' 的一个 6–组合并加 4 个a进去，就得到了A_1的一个 10–组合．于是A_1的 10–组合数就等于B' 的 6–组合数．故有

$$|A_1|=\mathrm{F}(3,6)=\binom{3+6-1}{6}=28$$

同样的分析可得

$$|A_2|=\mathrm{F}(3,5)=\binom{3+5-1}{5}=21$$

$$|A_3|=\mathrm{F}(3,4)=\binom{3+4-1}{4}=15$$

用类似的分析方法可分别求得

$$|A_1\cap A_2|=\mathrm{F}(3,1)=\binom{3+1-1}{1}=3$$

$$|A_1\cap A_3|=\mathrm{F}(3,0)=\binom{3+0-1}{0}=1$$

$$|A_2\cap A_3|=0\text{（因为 }5+6=11>10\text{）}$$

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}=0\text{（同上）}$$

将以上数值代入（3.5）式得到：

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|&=66-(28+21+15)+(3+1+0)-0\\&=6\end{aligned}$$

故所求的 10–组合数为 6．

注意：此题可用母函数的方法来求解（见第四章）．

3.11　求重集$B=\{\infty\cdot a,3\cdot b,5\cdot c,7\cdot d\}$的 10–组合数．

解：构造集合$B'=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,\infty\cdot c,\infty\cdot d\}$．令集合$B'$ 的所有 10–组合构成的集合为S．由第一章的重复组合公式（1.11）有

$$|S|=F(4,10)=\binom{4+10-1}{10}=286$$

令p_1表示在S中的元素至少含有∞个a这一性质，令p_2表示在S中的元素至少含有 4 个b这一性质，令p_3表示在S中的元素至少含有 6 个c这一性质，令p_4表示在S中的元素至少含有 8 个d这一性质，并令A_i（i=1，2，3，4）表示在S中具有性质p_i（i=1，2，3，4）的元素所构成的集合，于是B的 10–组合数就是在S中不具有性质p_1，p_2，p_3和p_4的元素个数．由容斥原理有

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|$$

$$=|S|-\sum_{i=1}^{4}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|-\sum_{i\neq j\neq k}|A_i\cap A_j\cap A_k|+|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| \qquad (3.5)$$

由于已经求得$|S|$=286，下面分别计算（3.5）式右端其他的项.

由于在A_1中的每一个 10–组合至少含有∞个a，故

$$|A_1|=0$$

由于A_2中的每一个 10–组合至少含有 4 个b，故将每一个这样的组合去掉 4 个b就得到集合B' 的一个 6–组合．反之，如果取B' 的一个 6–组合并加 4 个b进去，就得到了A_2的一个 10–组合．于是A_2的 10–组合数就等于B' 的 6–组合数．故有

$$|A_2|=F（4，6）=\binom{4+6-1}{6}=84$$

同样的分析可得

$$|A_3|=F（4，4）=\binom{4+4-1}{4}=35$$

$$|A_4|=\mathrm{F}（4，2）=\binom{4+2-1}{2}=10$$

用类似的分析方法可分别求得

$|A_1\cap A_i|$=0（因为∞>10）（i=2，3，4）

$$|A_2\cap A_3|=\mathrm{F}（4，0）=\binom{4+0-1}{0}=1$$

$|A_2\cap A_4|$=0（因为 4+8=12>10）

$|A_3\cap A_4|$=0（同上）

$|A_1\cap A_i\cap A_j|$=0（因为∞>10）（i=2，3，4；j=2，3，4；且$i\neq j$）

$|A_2\cap A_3\cap A_4|$=0（因为 4+6+8=18>10）

$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$=0（因为$\infty$>10）

将以上数值代入（3.5）式得到

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|=286-（0+84+35+10）+（0+0+0+1+0+0）-（0+0+0+0）+0$$

$$=158$$

故重集 B 的 10 组合数为 158.

3.12　求方程$x_1+x_2+x_3=14$的不超过 8 的正整数解的个数.

解：令$y_i=x_i-1$，$i=1,2,3$，则原方程解的个数等于求$y_1+y_2+y_3=11$的不超过 7 的非负整数解的个数.

由原教材第一章§1.3 节例 8 易知此解的个数与重集 $B=\{7\cdot a, 7\cdot b, 7\cdot c\}$ 的 11–组合数相同．

构造集合 $B'=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,\infty\cdot c\}$．令集合 B' 的所有 11–组合构成的集合为 S．由第一章的重复组合公式（1.11）有

$$|S|=F(3，11)=\binom{3+11-1}{11}=78$$

令p_1表示在S中的元素至少含有 8 个a这一性质，令p_2表示在S中的元素至少含有 8 个b这一性质，令p_3表示在S中的元素至少含有 8 个c这一性质，并令A_i（i=1，2，3）表示在S中具有性质p_i（i=1，2，3）的元素所构成的集合，于是B的 11–组合数就是在S中不具有性质p_1，p_2，p_3的元素个数．由容斥原理（(3.5) 式）有

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right|=|S|-\sum_{i=1}^{3}|A_i|+\sum\left|A_i\cap A_j\right|-\left|A_1\cap A_2\cap A_3\right| \qquad (3.5)$$

由于已经求得$|S|$=78，下面分别计算（3.5）式右端其他的项．

由于在A_1中的每一个 11–组合至少含有 8 个a，故将每一个这样的组合去掉 8 个a就得到集合B' 的一个 3–组合．反之，如果取B' 的一个 3–组合并加 8 个a进去，就得到了A_1的一个 11–组合．于是A_1的 11–组合数就等于B' 的 3–组合数．故有

$$|A_1|=\mathrm{F}(3，3)=\binom{3+3-1}{3}=10$$

同样的分析可得

$$|A_2|=\mathrm{F}(3，3)=\binom{3+3-1}{3}=10$$

$$|A_3|=\mathrm{F}(3，3)=\binom{3+3-1}{3}=10$$

用类似的分析方法可分别求得

$|A_1\cap A_2|$=0（因为 8+8=16>11）

$|A_1\cap A_3|$=0（同上）

$|A_2\cap A_3|$=0（同上）

$|A_1\cap A_2\cap A_3|$=0（同上）

将以上数值代入（3.5）式得到

$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right|$=78–（10+10+10）+（0+0+0）–0=48

故方程 $x_1+x_2+x_3=14$ 的不超过 8 的正整数解的个数有 48 个．

3.13　求由数字 1，2，…，8 所组成的全排列中，偶数均不在其自然位置上的全排列个数．

解：设 S 表示 $\{1,2,\cdots,8\}$ 的所有全排列组成的集合；

A_1表示在S中 2 在其自然位置上的全排列的集合；

A_2表示在S中 4 在其自然位置上的全排列的集合；

A_3表示在S中 6 在其自然位置的全排列的集合；

A_4表示在S中 8 在其自然位置上的全排列的集合.

则 $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}$ 表示在 S 中偶数均不在自然位置上的全排列所组成的集合，故由容斥原理（(3.5）式）有

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\right|=|S|-\sum_{i=1}^{4}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|-\sum_{i\neq j\neq k}|A_i\cap A_j\cap A_k|+|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| \quad (3.5)$$

而 $$|S|=8!,\ |A_i|=7!,\ |A_i|=7!(i=1,2,3,4)$$

而 $A_1\cap A_2$ 表示 2 和 4 均在自然位置上的全排列的集合，

故 $$|A_1\cap A_2|=6!$$

同理 $$|A_i\cap A_j|=6!,\ (i,\ j=1,2,3,4;\ i\neq j)$$

类似地有 $$|A_i\cap A_j\cap A_k|=5!\ (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ i\neq j\neq k)$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=4!$$

将以上数值代入（3.5）式得

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\right|=8!-\binom{4}{1}7!+\binom{4}{2}6!-\binom{4}{3}5!+\binom{4}{4}4!=24024$$

故由数字 1，2，…，8 所组成的全排列中，偶数均不在其自然位置上的全排列个数为 24024 个.

注意：本题可用禁区棋盘来求解

3.14　求由数字 1，2，…，8 所组成的全排列中，恰有 4 个数字在其自然位置上的全排列个数.

解：4 个数在其自然位置共有$\binom{8}{4}$种方式，对某一种方式，均有 4 个数字不在其自然位置，这正好是一个错排，其方式数为D_4（见定理 3.2），由乘法规则，恰有 4 个数字在其自然位置上的全排列数为

$$\binom{8}{4}D_4=630$$

3.15　在有 9 个字母 a，a，a，b，b，b，c，c，c 的全排列中，求相同字母不相邻的排列个数.

解：我们把 9 个字母的排列位置从左到右编号为 1，2，…，9．
设p_1表示排列位置 1 和 2 上排的字母相同这一性质；
p_2表示排列位置 2 和 3 上排的字母相同这一性质；
……
p_8表示排列位置 8 和 9 上排的字母相同这一性质．
并设S为这 9 个字母的全排列的集合，A_i为具有性质p_i的排列所组成的集合，$i=1,2,\cdots,8$，则$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_8}$就是相同字母不相邻的排列所组成的集合，于是，由容斥原理（(3.5）式）有

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_8}\right|=|S|-\sum_{i=1}^{8}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j| \\ -\sum_{i\neq j\neq k}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^8|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_8| \qquad (3.5)$$

下面，我们计算（3.5）式右端各项．
由定理 1.4 有

$$|S|=\frac{9!}{3!3!3!}=1680$$

由于A_1表示排列位置 1 和 2 上字母相同的排列所组成的集合，而从重集$\{3a,3b,3c\}$中选两个相同的字母有三种方式，或选aa，或选bb，或选cc．对于每一种方式（如选aa，选bb或cc可作同样分析），还剩下 7 个字母（$abbbccc$）作全排列共有$\frac{7!}{3!3!1!}$种排法，对于每一种排法都排在排列位置 1 和 2 的后面，因此，由乘法规则可得

$$|A_1|=3\frac{7!}{3!3!1!}$$

又由于A_2表示排列位置 2 和 3 上字母相同的排列所组成的集合，由上面的分析知，将两个相同的字母（如选aa）放在排列位置 2 和 3 上，再将由 7 个字母（$abbbccc$）所作全排列中的一个排列的第一个字母放在排列位置 1 上，第 2，3，…，6 个字母按顺序分别放在排列位置第 4，5，6，7，8，9 上，因此，由乘法规则可得

$$|A_2|=3\frac{7!}{3!3!1!}$$

同样的分析可得

$$|A_i|=3\frac{7!}{3!3!1!}\quad（i=3，4，\cdots，8）$$

故有

$$\sum_{i=1}^{8}|A_i|=8\times3\times\frac{7!}{3!3!1!}=3360$$

用上面同样的分析方法可以计算$\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|$之值如下：

由于 $A_1 \cap A_2$ 表示在排列位置 1 和 2 上字母相同（如选 *aa*，*bb*，*cc* 均可，这里选 *aa*）的排列，同时也表示在排列位置 2 和 3 上字母相同的全排列所组成的集合，这表明 $A_1 \cap A_2$ 在排列位置 1、2、3 均排相同的字母 a，在其他位置上再排重集 $\{3b, 3c\}$ 的一个排列所成的全排列的集合，而重集 $\{3b, 3c\}$ 的排列个数共有

$$\frac{6!}{3!3!}$$

于是，由乘法规则可得

$$\left|A_1 \cap A_2\right| = 3\frac{6!}{3!3!}$$

然后分析 $A_i \cap A_j$ 中 i，j 不相邻的情况，以 $A_1 \cap A_3$ 为例：由于 $A_1 \cap A_3$ 表示在排列位置 1，2 上字母相同，排列位置 3，4 上字母相同（如选 *aa*，*bb*，*cc* 任意 2 种进行排列均可，故 *P*（3，2）=6 种排列方式。这里选 *aa*，*bb*）的排列，这在其他位置上再排重集{1*a*，1*b*，3*c*}的一个排列所成的全排列的集合，而重集{1*a*，1*b*，3*c*}的排列个数共有

$$\frac{5!}{3!}$$

于是，由乘法规则可得

$$\left|A_1 \cap A_3\right| = 6 \times \frac{5!}{3!}$$

由于 $\sum_{i \neq j}^{8}\left|A_i \cap A_j\right| \ (j > i+1;\ i = 1, 3, \cdots, 6)$ 中对于每一个 i，j 有 $7-i$ 个位置，故满足 $A_i \cap A_j$ 中 i，j 不相邻的个数有 $6+5+4+\cdots+1=21$；

故

$$\sum_{i \neq j}^{8}\left|A_i \cap A_j\right| = (1+2+\cdots+6) \times 6 \times \frac{5!}{3!} = 21 \times 6 \times \frac{5!}{3!} \quad (j \neq i+1;\ i = 1, 3, \cdots, 6)$$

综合上述两种情况有：

$$\sum_{i \neq j}^{8}\left|A_i \cap A_j\right| = 7 \times 3 \times \frac{6!}{3!3!} + 21 \times 6 \times \frac{5!}{3!} = 420 + 2520 = 2940$$

用上面类似的分析方法可得

$$\sum_{i \neq j \neq k}^{8}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| = 30 \times (3 \times 2 \times \frac{4!}{3!}) + 20 \times（3! \times 3!）= 1440$$

$$\sum_{i \neq j \neq k \neq l}^{8}\left|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l\right| = 10 \times (3 \times 2 \times \frac{3!}{3!}) + 30 \times (3! \times 2!) = 420$$

$$\sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq m}^{8}\left|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m\right| = 12 \times (3! \times 1!) = 72$$

$$\sum_{i\neq j\neq k\neq l\neq m\neq n}^{8} \left|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l\cap A_m\cap A_n\right| = 1\times(3!\times 0!) = 6$$

$$\sum_{i\neq j\neq k\neq l\neq m\neq n\neq p}^{8} \left|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l\cap A_m\cap A_n\cap A_p\right| = 0$$

$$\sum_{i\neq j\neq k\neq l\neq m\neq n\neq p\neq q}^{8} \left|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l\cap A_m\cap A_n\cap A_p\cap A_q\right| = 0$$

将以上各式代入（3.5）式右端得

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_8}\right| = 1680-3360+2940-1440+420-72+6=174$$

故在有 9 个字母 a，a，a，b，b，b，c，c，c 的全排列中，相同字母不相邻的排列个数为 174.

3.16　证明：D_n是偶数当且仅当n是奇数.

证明：原命题等价于：D_{2k-1}为偶数，D_{2k}为奇数，（$k=1,2,3,\cdots$）现用数学归纳法证明.

显然，当$k=1$时，$D_1=0$，$D_2=1$故命题成立.

设$k=n$时命题成立，即，D_{2n-1}为偶数，D_{2n}为奇数.

则当$k=n+1$时，由定理 3.3（(3.8）式）有

$D_{2(n+1)-1}=D_{2n+1}=(2n+1-1)(D_{2n}+D_{2n-1})=2n(D_{2n}+D_{2n-1})$为偶数.

$D_{2(n+1)}=D_{2n+2}=(2n+2-1)(D_{2n+1}+D_{2n})$为奇数.

故由数学归纳法原理知，命题得证.

3.17　证明：当$n\geq 2$时

$$Q_n=D_n+D_{n-1}$$

证明：由定理 3.4（(3.9）式）有

$$Q_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)!=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(n-1)!\frac{n-k}{k!}$$

$$=(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{n-k}{k!}$$

而又由定理 3.2（(3.7）式）有

$$D_n=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}，\quad D_{n-1}=(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{k!}，\text{故}$$

$$D_n+D_{n-1}=(n-1)!\left[n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n}{k!}\right]+(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{k!}$$

$$=(n-1)!\left[n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n}{k!}\right]+(n-1)!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}$$

$$=(n-1)!\left[n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}(n-k)\right]$$

$$=(n-1)!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n-k}{k!}=(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{n-k}{k!}=Q_n$$

即 $Q_n=D_n+D_{n-1}$.

3.18 来自 n 个国家的 $5n$ 个人站在一排．每个国家 5 个人．证明：使得每一个人都挨着他的一个同胞而站的排列个数为

$$(120)^n\left[(2n)!-\binom{n}{1}(2n-1)!+\binom{n}{2}(2n-2)!-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}n!\right]$$

证明：依题意满足题设要求的排列中，任一国家的 5 个人要么 5 个人相邻排在一起，要么其中 2 个人相邻，另外 3 个人相邻排在一起．我们分两步来进行排列：

第一步：把每个国家的 5 个人分成一个 2 人组和一个 3 人组，这样共得 $2n$ 个组．因为我们考虑的是排列问题，所以各组内的人是有序的，则显然有 $(5!)^n=120^n$ 种分组方法．

第二步：对一个固定的分组，设 x_i 为第 i 个国家的 2 人组，y_i 为第 i 个国家的 3 人组．注意到 x_iy_i 与 y_ix_i 相邻都是第 i 个国家 5 个人相邻的情形．只能计算一个，否则将产生重复．例如（123）（45）=（12）（345）．

我们称 y_ix_i 为反序相邻 $(i=1,2,\cdots,n)$．设 A_i 为这 $2n$ 个组的全排列中含 y_ix_i 反序相邻的排列组成的集合 $(i=1,2,\cdots,n)$．则

$$|A_i|=(2n-1)!\ i=1,2,\cdots,n .$$

$$|A_i\cap A_j|=(2n-2)!\ 1\le i<j\le n .$$

$$\cdots\cdots$$

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=(2n-k)!\ k=1,2,\cdots,n$$

设 S 为这 $2n$ 个组的所有全排列所组成的集合．那么对于这个固定的分组，满足要求的排列数为：

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|=(2n)!-\binom{n}{1}(2n-1)!+\binom{n}{2}(2n-2)!-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}n!$$

由乘法规则知本问题总的排列数为

$$(120)^n\cdot\left[(2n)!-\binom{n}{1}(2n-1)!+\binom{n}{2}(2n-2)!-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}n!\right]$$

3.19 a．证明：从集合 $S=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中选取 k 个数，且无相邻两数，则不同的选取方法数为 $\binom{n-k+1}{k}$．

证明：设 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 是从集合 $S=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中选取满足要求的 k 个数．因为这

是组合问题，不妨设它们是按从小到大的顺序排列的，即

$$1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < a_k \le n\ {}_2$$

由于无相邻两数，则显然有

$$1 \le a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < \cdots < a_k - (k-1) \le n - (k-1)$$

因此$\{a_1, a_2 - 1, \cdots, a_k - k + 1\}$是$S' = \{1, 2, 3, \cdots, n - k + 1\}$的一个$k$子集．

易见有一种$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$的取法便有一种$\{a_1, a_2 - 1, \cdots, a_k - k + 1\}$的取法．而这两种取法有一一对应关系，从而这两个组合计数问题是等价的．这样一来，从集合$S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$中选取$k$个数且无相邻两数的组合数和从集合$S' = \{1, 2, 3, \cdots, n - k + 1\}$中选取$k$个数的组合数是相同的．故不同的选取方法数为$\binom{n-k+1}{k}$，证毕．

3.19　b．证明在一个凸n边形中，以其顶点为顶点，对角线为边（不含原多边形的边）的k边形个数是$\frac{n}{k}\binom{n-k+1}{k-1}$．

证明：任选一点A，去掉左右两个邻点，在剩下的$n-3$个点中按顺序编号为 1，2，$\cdots$，n–3（显然 1 和 n–3 两点不相邻）．从这$n-3$个点中选出 k–1 个不相邻的点（再加点A）组成k边形，由上题 3.19a 的结论，其选法数为

$$\binom{(n-3)-(k-1)+1}{k-1} = \binom{n-k+1}{k-1}$$

由于凸n边形有n个顶点，由乘法规则得到共有$n\binom{n-k+1}{k-1}$个满足要求的k边形．又注意到k边形有k个顶点，所以同一个k边形必在$n\binom{n-k+1}{k-1}$中被计算了k次，因此满足要求的k边形有$\frac{n}{k}\binom{n-k+1}{k}$个，证毕．

注意本题也可以等价描述为：在集合$S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$中，既无相邻两数，同时也不含有 1 和$n$的$k$元子集的个数为$\frac{n}{k}\binom{n-k+1}{k}$．

3.20　在一个宴会上，有$n(n \ge 3)$对夫妇围圆桌就坐，在男女交替、夫妻不相邻的条件下，有多少种就坐方式．

解：我们先让n位女士围圆桌间隔就坐，由（1.6）式知其就坐方式有（n–1）！种．对每一种就坐方式，把她们按顺时针方向编号为$1, 2, 3, \cdots, n$，再让丈夫们就坐．

下面，我们计算男士符合题意的所有就坐方式．

设S为所有男士就座方式的集合，则显然有$|S|$=n!，

令：

R_1表示丈夫 1 坐在妻子 1 右边这一性质，L_1表示丈夫 1 坐在妻子 1 左边这一性质；

R_2表示丈夫 2 坐在妻子 2 右边这一性质，L_2表示丈夫 2 坐在妻子 2 左边这一性质；

……

R_n表示丈夫n坐在妻子n右边这一性质，L_n表示丈夫n坐在妻子n左边这一性质.

注意，以上这些性质不是相互独立的，例如，显然有L_2出现时，R_2就不能出现，同时R_3也不能出现……

并令：

A_i是具有性质R_i的元素所组成的集合（i=1，2，…，n）；

A_{n+i}是具有性质L_i的元素所组成的集合（i=1，2，…，n）

则$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_{2n}$就是男士符合题意的所有就坐方式的集合，由容斥原理（(3.5）式）有

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_{2n}}\right|=|S|-\sum_{i=1}^{2n}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j| \\ -\sum_{i\neq j\neq k}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^{2n}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{2n}| \tag{3.5}$$

下面，分别计算上式右端各项.

由于以上这些集合（或性质）不是相互独立的，我们可按如下方式计算：

现把以上 2n 个集合看成 2n 个点，并将它们按顺序A_1，A_{n+1}，A_2，A_{n+2}，…，A_n，A_{2n}分别编号为 1，2，3，4，…，2n–1，2n，并按顺时针排成一个圆（这时，2n 与 1 相邻，即A_{2n}与A_1相邻）. 由于男女交替、夫妻不相邻，由此可知，任何两个相邻的集合（或性质）是不能同时出现的，否则，要么妻子和丈夫坐在一起，要么两个男士坐在一起. 于是由上题（3.19b）的结论可知（本题中用连线连接相邻的两点，就得到一个凸 2n 边形）：在集合 S=$\{1,2,\cdots,n,\cdots,2n\}$中，既无相邻两数，同时也不含有 1 和 2$n$ 的k元子集（即仅具有k种性质出现）的个数为

$$\frac{2n}{k}\binom{2n-k-1}{k-1}=\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

当k=1 时，即仅考虑具有一种性质时，也即仅有一位男士座位固定，其他n–1 个男士可以随便就坐，则有（n–1）! 种坐法，由乘法规则有

$$\sum_{i=1}^{2n}|A_i|=\frac{2n}{2n-1}\binom{2n-1}{1}\ (n-1)!$$

同理有

$$\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|=\frac{2n}{2n-2}\binom{2n-2}{2}\ (n-2)!$$

……

一般有

$$\sum_{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_k}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|=\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$（$n-k$）!（k=1，2，…，$2n$）

注意：显然，在上式中，当k=n+1，n+2，…，2n时，有

$$\sum_{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_k}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|=0$$

而且，从几何意义上讲，当 k=n+1，n+2，…，2n 时，$\sum_{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_k}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|$也应为 0，因为，当至少有 n+1 个集合相交时，或者有两个男士坐在一起，或者一个男士同时坐两个位置，这是不可能的．例如 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1}$ 就表明这个集合中的一种可能坐法是丈夫 1 既坐在妻子 1 的右边，又坐在妻子 1 的左边，这是不可能的，或者这个集合中一种坐法是丈夫 1 坐在妻子 1 的左边，丈夫 2 坐在妻子 2 的右边，这表明两个女士坐在一起，这又不符合题意．

将以上各式代入（3.5）式右端即得男士符合题意的所有就坐方式为

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_{2n}}\right|=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$（n–k）!

又由于女士开始时就坐方式为$(n-1)!$种，由乘法原规则，其总的符合题意的就坐方式为

$$(n-1)!\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_{2n}}\right|==(n-1)!\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$（种）

注意：此 题 还 可 用 禁区棋盘多项式方法求解．

3.21　在一个班上有 n 名学生，临时将这 n 个学生任意编号为$1,2,3,\cdots,n$．当教师上课按原来的点名册点名时，如果编号为 i 的学生正好是第 i 个喊到时，就称为一次巧遇．

a．求至少有一次巧遇的概率．

b．求恰有 m 次巧遇的概率．

解：事实上，此问题与原教材第三章§3.3 中的错排问题相同，于是有

$e^{-1}\approx D_n/n!$，这表明，当n充分大时，$D_n/n!$近似等于e^{-1}．而$D_n/n!$是｛1，2，…，n｝的错排个数与它的全排列个数之比．它表明我们随机地选择｛1，2，…，n｝的一个全排列，它的一个错排的概率近似等于e^{-1}，于是有

a．至少有一次巧遇的概率为

$$1-D_n/n!\approx 1-e^{-1}$$

b．设有 m 个学生保持原有编号，则从｛1，2，…，n｝中取 m 个数共有$\binom{n}{m}$种方式，

其余还剩 $n–m$ 个数不在原来位置上，这相当 $n–m$ 个数的错排，其错排数为 D_{n-m}，由乘法规则有

$$\binom{n}{m}D_{n-m}\approx\frac{n!}{m!}e^{-1}$$

所以恰有 m，此巧遇的概率为：

$$\binom{n}{m}D_{n-m}/\mathrm{n}!\approx\frac{e^{-1}}{m!}$$

3.22　有张、王、刘、李四位教师和数学、物理、化学、英语四门课程．已知张和李都不能教数学和英语，王不能教化学，刘不能教物理和化学．若要为每人安排一门他能教的课程，且一门课程只能被一人教，试问有多少种不同的安排方案？

解：这是一个四元有禁位排列问题，其对应的有禁区棋盘为如图 3-1 所示．

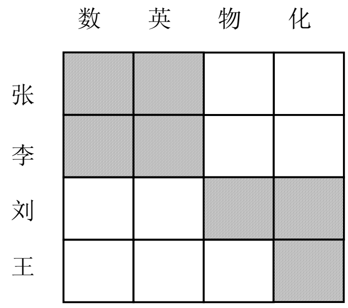


图　3-1

设禁区棋盘为 C（图中阴影部分），利用（3.11）式可求得

$$R(C)=1+7x+15x^2+10x^3+2x^4$$

即 $r_1=7, r_2=15, r_3=10, r_4=2$．由定理 3.8 可得所求排列数（安排方案）为

4！–7×3！+15×2！–10×1！+2=4（种）

注意：用观察法看棋盘的特点也可以分析出仅有 4 种方案．

第四章　母　函　数

一、内容提要

定义 4.1　给定一个无穷序列 $(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$（简记为 $\{a_n\}$），称函数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i \tag{4.1}$$

为序列 $(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$ 的普通母函数.

定义 4.2　给定无穷序列 $(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$，称函数

$$f_e(x)=a_0+a_1\frac{x^1}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+a_n\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!} \tag{4.2}$$

为序列 $(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$ 的指数母函数.

定理 4.1　设 $f(x)$，$f_e(x)$ 分别是序列 $(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$ 的普通母函数和指数母函数，则

$$f(x)=\int_0^{\infty}e^{-s}f_e(sx)\mathrm{d}s$$

定义 4.3　设 $A(x)$，$B(x)$ 和 $C(x)$ 分别是序列 $(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$，$(b_0, b_1, \cdots, b_r, \cdots)$ 和 $(c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdots)$ 的普通母函数，则有 $C(x)=A(x)+B(x)$ 当且仅当对所有的 i，都有 $c_i=a_i+b_i$（$i=0,1,2,\cdots,r,\cdots$）.

定义 4.4　设 $A(x)$，$B(x)$ 和 $C(x)$ 分别是序列 $(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$，$(b_0, b_1, \cdots, b_r, \cdots)$ 和 $(c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdots)$ 的普通母函数，则有

$C(x)=A(x)B(x)$ 当且仅当对所有的 i，都有 $c_i=\sum_{k=0}^{i}a_kb_{i-k}$（$i=0,1,2,\cdots,r,\cdots$）

定义 4.5　设 $A(x)$，$B(x)$ 和 $C(x)$ 分别是序列 $(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$，$(b_0, b_1, \cdots, b_r, \cdots)$ 和 $(c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdots)$ 的指数母函数，则有

$C(x)=A(x)+B(x)$ 当且仅当对所有的 i，都有 $c_i=a_i+b_i$（$i=0,1,2,\cdots,r,\cdots$）

定义 4.6　设 $A(x)$，$B(x)$ 和 $C(x)$ 分别是序列 $(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$，$(b_0, b_1, \cdots, b_r, \cdots)$ 和 $(c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdots)$ 的指数母函数，则有

$C(x)=A(x)B(x)$ 当且仅当对所有的 i，都有

$$c_i=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}a_k b_{i-k}\qquad (i=0,1,2,\cdots,r,\cdots)$$

注意：在本章中，必须对下面的多项式作正确解释和理解：

① 多项式

$$(1+x)(1+x)\cdots(1+x)=(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$$

表示从n个不同的物体中选取r个物体的组合，其方法数为（1+x）^{n}的幂级数展开式中x^r的系数$\binom{n}{r}$.

多项式中的因子（1+x）象征性表示在组合中某一物体可以不选取，或者只选取一次.

② 多项式

$$（1+x+x^2+\cdots）^n=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r$$

表示从n个不同的物体中允许重复地选取r个物体，其方法数为（1+x+x^2+⋯）^{n}的幂级数展开式中x^r的系数$\binom{n+r-1}{r}$=F（n，r）.

多项式中因子（1+x+x^2+x^3+⋯）象征性地表示在组合中某一物体可以不选，或者选一次，或者选两次，或者选三次……

③ 多项式

$$（1+x）^n=\sum_{r=0}^{n}p(n,r)\frac{x^r}{r!}$$

表示从n个不同的物体中选取r个物体的排列，其方法数为（1+x）^{n}的幂级数展开式中$\dfrac{x^r}{r!}$的系数p（n，r）.

多项式中的因子（1+x）=（1+x^1/1！）象征性地表示某一物体在排列中可以不选取，或者选取一次.

④ 多项式

$$（1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots）^n=\sum_{r=0}^{\infty}n^r\frac{x^r}{r!}$$

表示从n个不同的物体中允许重复地选取r个物体的排列，其方法数为（$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^r}{r!}+\cdots$）^{n}的幂级数展开式中$\dfrac{x^r}{r!}$的系数$n^r$.

多项式中的因子（$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^r}{r!}+\cdots$）象征性地表示某一物体在排列中可以不选，

或选取一次，或选取两次，…，或选取 r 次……

定理 4.2　设a，b，c，… 是大于 0 的正整数，则

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\cdots}$$

的级数展开式中的x^n的系数等于把正整数n拆分成a，b，c，… 的和的方法数$P(n)$.

定义 4.7

1．用 $P_k(n)$ 表示 n 拆分成 1，2，…，k 的允许重复的方法数.

2．用 $P_o(n)$ 表示 n 拆分成奇整数的方法数.

3．用 $P_d(n)$ 表示 n 拆分成不同整数的方法数.

4．用 $P_t(n)$ 表示 n 拆分成 2 的不同幂（即 1，2，4，8，…）的方法数.

推论 1　$\{P_3(n)\}$ 的普通母函数是 $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$

推论 2　$\{P_k(n)\}$ 的普通母函数是 $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}$

推论 3　$P(n)$ 的普通母函数是 $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$

推论 4　$\{P_o(n)\}$ 的普通母函数是 $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots}$

定理 4.3　设a，b，c，… 都是大于 0 的正整数，则

$$(1+x^a)(1+x^b)(1+x^c)\cdots$$

的级数展开式中x^n项的系数就是把n拆成a，b，c，… 的和，且a，b，c，… 最多只出现一次的方法数.

推论 1　$\{P_d(n)\}$ 的普通母函数是

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots$$

推论 2　$\{P_t(n)\}$ 的普通母函数是

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$$

定理 4.4　（Euler）对于正整数n都有

$$P_o(n)=P_d(n)$$

定理 4.5　（Sylvester）对正整数n，有

$$P_t(n)=1$$

定理 4.6　对于任何正整数n，有

$$P(n)<e^{3\sqrt{n}}$$

定理 4.7　正整数n拆分成m项的和的方式数等于n拆分成最大数为m的方式数.

定理 4.8 正整数n拆分成最多不超过m个项的和的方式数等于n拆分成最大的数不超过m的方式数.

二、习题解答

4.1　求下列序列的普通母函数.

a．$(1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots)$

解：设序列$(1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots)$的普通母函数为$f$（$x$），则由定义（4.1）有：

$$\begin{aligned} f(x) &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-x)^i \\ &= \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

b．$\left(\binom{c}{0},-\binom{c}{1},\binom{c}{2},\cdots,(-1)^n\binom{c}{n},\cdots\right)$（$c$ 是实数）

解：设序列$\left(\binom{c}{0},-\binom{c}{1},\binom{c}{2},\cdots,(-1)^n\binom{c}{n},\cdots\right)$的普通母函数为$f$（$x$），则由定义（4.1）有：

$$\begin{aligned} f(x) &= \binom{c}{0}-\binom{c}{1}x+\binom{c}{2}x^2+\cdots+(-1)^n\binom{c}{n}x^n+\cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{c}{i}x^i \\ &= (1-x)^c \end{aligned}$$

c．（$c^0,c^1,c^2,\cdots,c^n,\cdots$)（$c$ 是实数）

解：设序列$(c^0,c^1,c^2,\cdots,c^n,\cdots)$的普通母函数为$f$（$x$），则由定义（4.1）有：

$$\begin{aligned} f(x) &= c^0+cx+\cdots+c^n x^n \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}c^i x^i \\ &= \frac{1}{1-cx} \end{aligned}$$

d．$\left(\frac{1}{0!},\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\cdots,(-1)^n,\cdots\right)$

解：设序列$\left(\frac{1}{0!},\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\cdots,(-1)^n,\cdots\right)$的普通母函数为$f$（$x$），则由定义（4.1）有：

$$f(x)=\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{x^i}{i!}$$
$$=e^{-x}$$

e．（$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$），其中 $a_n=\binom{n}{2}$

解：设序列（$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$）的普通母函数为$f$（$x$），则由定义（4.1）有：

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\quad(\text{其中}a_i=\binom{i}{2})$$
$$=\frac{x^2}{(1-x)^3}$$

4.2　求下列序列的指数母函数

a．$(1!,2!,3!,\cdots,n!,\cdots)$

解：设序列$(1!,2!,3!,\cdots,n!,\cdots)$的指数母函数为 $f_e(x)$，则由定义（4.2）有：

$$f_e(x)=1!+2!\frac{1}{1!}x+3!\frac{1}{2!}x^2+\cdots+(n+1)!\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)!\frac{x^i}{i!}$$
$$=\frac{1}{(1-x)^2}$$

b．$(0!,1!,2!,3!,\cdots,n!,\cdots)$

解：设序列$(0!,1!,2!,3!,\cdots,n!,\cdots)$的指数母函数为 $f_e(x)$，则由定义（4.2）有：

$$f_e(x)=0+1!\frac{x}{1!}+2!\frac{x}{2!}+\cdots++n!\frac{x}{n!}+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$$
$$=\frac{1}{1-x}$$

c．（$c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots$），其中（$c_0=1,c_n=c(c-1)\cdots(c-n+1),n=1,2,3,\cdots$）

解：设序列（$c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots$）的指数母函数为 $f_e(x)$，则由定义（4.2）有：

$$f_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c(c-1)\cdots(c-n+1)}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{c}{n}x^n$$

$$=(1+x)^c$$

d.　$(1,2,2^2\cdot 2!,2^3,3!,\cdots,n!,\cdots)$

解：设序列$(c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots)$的指数母函数为$f_e(x)$，则由定义（4.2）有：

$$f_e(x)=2^0+2^1\cdot 1!\frac{x}{1!}+2^2\cdot 2!\frac{x^2}{2!}+\cdots+2^n\cdot n!\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}2^i x^i$$

$$=\frac{1}{1-2x}$$

4.3　若$A(x),B(x)$分别是序列$(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$，$(b_0,b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots)$的普通母函数，证明：

a．若$b_n=ka_n,k$为常数，则$B(x)=kA(x)$

b．若$b_n=\begin{cases}0, & n<m\\ a_{n-m}, & n\ge m\end{cases}$，则$B(x)=x^mA(x)$

c．若$b_n=a_{n+m}$，则$B(x)=\dfrac{A(x)-\sum_{n=0}^{m-1}a_n x^n}{x^m}$

d．若$b_n=na_n$，则$B(x)=xA'(x)$

证明：

a．$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}ka_n x^n=k\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=kA(x)$

b．$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{m-1}b_n x^n+\sum_{n=m}^{\infty}b_n x^n=0+\sum_{n=m}^{\infty}a_{n-m}x^n=x^m\sum_{n=m}^{\infty}a_{n-m}x^{n-m}$

$$=x^m\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=x^mA(x)$$

c．$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+m}x^n=\frac{1}{x^m}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+m}x^{n+m}$

$$=\frac{1}{x^m}\sum_{n=m}^{\infty}a_n x^n=\frac{1}{x^m}\left(\sum_{n=0}^{m-1}a_n x^n+\sum_{n=m}^{\infty}a_n x^n-\sum_{n=0}^{m-1}a_n x^n\right)$$

$$=\frac{1}{x^m}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n-\sum_{n=0}^{m-1}a_n x^n\right)$$

$$=\frac{A(x)-\sum_{n=0}^{m-1}a_n x^n}{x^m}$$

d．$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^n$

而 $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ ，故 $A'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}$

所以， $xA'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^n$

所以， $B(x)=xA'(x)$

4.4　已知序列 $(1,b,b^2,\cdots,b^n,\cdots)$ 的普通母函数是 $\dfrac{1}{1-bx}$ ，求以 $\dfrac{b^k x^k}{(1-bx)^{k+1}}$ 为普通母函数的序列.

解：$\because\ \dfrac{1}{1-bx}=\sum_{n=0}^{\infty}b^n x^n$

将上式两边对 x 微分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-bx}\right)=\frac{b}{(1-bx)^2}=\sum_{n-1}^{\infty}nb^n x^{n-1}$$

再将上式对 x 微分得，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{1-bx}\right)=\frac{2b^2}{(1-bx)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\,b^n x^{n-2}$$

同理有

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left(\frac{1}{1-bx}\right)=\frac{3\cdot 2b^3}{(1-bx)^4}=\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)\,b^n x^{n-3}$$

$$\cdots\ \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{1-bx}\right)=\frac{k!2b^k}{(1-bx)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\,b^n x^{n-k}$$

$$\Rightarrow \frac{b^k}{(1-bx)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}b^n x^{n-k}$$

上式两边同乘以 x^k 得：

$$\frac{b^k x^k}{(1-bx)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}b^n x^n$$

由定义 4.1 知，所求的序列为 $\left\{\binom{n}{k}b^n\right\}$， $n=0,1,\cdots,\infty$.

4.5　有无穷多个字母 A，B 和 C. 求从中选出 n 个字母但必须包含偶数个 A 的方式数.

解：设从中选出 n 个字母但必须包含偶数个A的方式数为 a_n ，则序列{ a_n }的普通母函数为

$$f(x)=(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)^2$$

$$=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^3}\cdot\frac{1}{(1+x)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^3}+\frac{\frac{1}{4}}{(1-x)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{1-x}+\frac{\frac{1}{8}}{1+x}$$

下面，我们利用（1.22）式：

$$(1-(-rz))^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}r^k z^k$$

将以上各和式展开成 x 的幂级数，然后合并同类项即得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}\binom{n+2}{2}+\frac{1}{4}(n+1)+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}(-1)^n)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{(n+1)(n+3)}{4}+\frac{1+(-1)^n}{8})\ x^n$$

故 x^n 的系数

$$a_n=\frac{(n+1)(n+3)}{4}+\frac{1+(-1)^n}{8}$$

为所求的方式数.

4.6　求重集 $B=\{\infty\cdot a,3\cdot b,5\cdot c,7\cdot d,\}$ 的 10–组合数.

解：设重集B的n–组合数为a_n，则序列$\{a_n\}$的普通母函数为

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$$

$$\times(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)$$

$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x}\cdot\frac{1-x^6}{1-x}\cdot\frac{1-x^8}{1-x}$$

$$=(1-x^4-x^6-x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14}-x^{18})\ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k}{3}x^k$$

所以

$$a_{10}=\binom{3+10}{3}-\binom{3+6}{3}-\binom{3+4}{3}-\binom{3+2}{3}+\binom{3+0}{3}$$

$$=286-84-35-10+1=158$$

故重集 B 的 10–组合数为 158.

注意：此题也可用容斥原理求解.

4.7　求从 n 个不同的物体中允许重复的取 r 个物体，但每个物体出现奇数次的方式数.

解：设每个物体出现奇数次的方式数为 a_r，则序列 $\{a_n\}$ 的普通母函数为：

$$f(x)=(x+x^3+x^5+\cdots)^n$$
$$=x^n\ (1+x^2+x^4+\cdots)^n$$
$$=\frac{x^n}{(1-x^2)^n}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^{2k+n}\ \text{（由（1.22）式）}$$
$$=\sum_{r=n}^{\infty}\binom{n+\frac{r-n}{2}-1}{\frac{r-n}{2}}x^r\ \text{（在上式中，令 }2k+n=r\text{ 即得）}$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}F\left(n,\frac{r-n}{2}\right)x^r$$

$\therefore$ $$a_r=F(n,\frac{r-n}{2})$$

故所求的方式数 $a_r=F(n,\dfrac{r-n}{2})$.

4.8　求从 n 个不同的物体中允许重复的取 r 个物体，但每个物体至少出现 3 次的方式数.

解：设从 n 个不同的物体中允许重复的取 r 个物体且每个物体至少出现 3 次的方式数为 a_r，则序列 $\{a_r\}$ 普通母函数为：

$$f(x)=(x^3+x^4+x^5+\cdots)^n$$
$$=x^{3n}\ (1+x+x^2+\cdots)^n$$
$$=x^{3n}\ (1-x)^{-n}$$
$$=x^{3n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k \qquad \text{（由（1.22）式）}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^{k+3n}$$
$$=\sum_{k=3n}^{\infty}\binom{n+(k-3n)-1}{k-3n}x^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+(k-3n)-1}{k-3n}x^k \qquad \text{（注意：}\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{n+(k-3n)-1}{k-3n}x^k=0\text{）}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}F(n,k-3n)\ x^k$$

$\therefore\ a_r=F(n,k-3n)$.

故所求的方式数 $a_r=F(n,k-3n)$.

4.9　设重集 $B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\infty\cdot b_3,\infty\cdot b_4,\infty\cdot b_5,\infty\cdot b_6\}$，并设 a_r 是 B 满足以下条件的 r–组合数，求序列 $(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$ 的普通母函数.

a．每个b_i出现 3 的倍数次（i=1，2，3，4，5，6）.

b．b_1，b_2至多出现 1 次，b_3，b_4至少出现 2 次，b_5，b_6最多出现 4 次.

c．b_1出现偶数次，b_6出现奇数次，b_3出现 3 的倍数次，b_4出现 5 的倍数次.

d．每个b_i（i　1，2，3，4，5，6）至多出现 8 次.

解:

a．序列$(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$的普通母函数为

$$f(x)=(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)^6$$

$$=\frac{1}{(1-x^3)^6}$$

b．序列$(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$的普通母函数为

$$f(x)=(1+x)^2(x^2+x^3+x^4+\cdots)^2(1+x+x^2+x^3+x^4)^2$$

$$=(1+x)^2\frac{x^4}{(1-x)^2}\frac{(1-x^5)^2}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{x^4(1-x^5)^2(1+x)^2}{(1-x)^4}$$

c．序列$(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$的普通母函数为

$$f(x)=(1+x^2+x^4+\cdots)(x+x^3+x^5+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)$$

$$\times(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2$$

$$=\frac{1}{1-x^2}\frac{x}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{x}{(1+x)^2(1-x^3)(1-x^5)(1-x)^4}$$

d．序列$(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$的普通母函数为

$$f（x）=（1+x+x^2+x^3+\cdots+x^8）^6$$

4.10　有两颗骰子，每个骰子六个面上刻有 1，2，3，4，5，6 个点．问掷骰子后，点数之和为r，两颗骰子的点数有多少种搭配方式？

解：每个骰子是不同的，但讨论点数之和的时候不考虑顺序，故该问题是组合问题．设有满足条件的搭配方式有a_r种，则其普通母函数为

$$f(x)=(x+x^2+\cdots+x^6)^2$$

其中x^r的系数a_r即为所求的搭配方式数.

4.11　设有重量分别为 1 克、2 克、3 克、5 克和 7 克的砝码（砝码的数量不限）去称重量为r克的物体的方式数为a_r，求序列$(a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots)$的普通母函数.

解： 这个问题实际上是求重集$B=\{\infty\cdot1, \infty\cdot2, \infty\cdot3, \infty\cdot5, \infty\cdot7\}$的$r$–组合数，其序列$(a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots)$普通母函数为：

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)$$
$$\times(1+x^5+x^{10}+\cdots)(1+x^7+x^{14}+\cdots)$$
$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)}$$

重量体现在指数上

4.12　求用一分、二分、三分、四分的邮票（邮票允许重复）贴出不同数值的方式数.

解：设用一分、二分、三分、四分的邮票贴出不同数值的方式数为a_r，则序列($a_1,a_2,\cdots,a_r,\cdots$)的普通母函数为：

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)$$
$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

将上式展开成x的幂级数后，x^r的系数就是所求的方式数a_r.

4.13　对$1\times n$棋盘的每个正方形都用四种颜色红、橙、黄、绿之一着色，若着红色和绿色的正方形的数量都是偶数，求不同的着色方案数.

解：若用A、B、C和D分别表示红、橙、黄和绿四种颜色，则该问题实际上是求重集$B=\{\infty\cdot A,\infty\cdot B,\infty\cdot C,\infty\cdot D\}$的$n$–排列数．其中要求$A$和$D$出现偶数次.

设a_n为所求的着色方案数，定义a_0=1，于是序列($a_0,a_1,a_2,\cdots,a_r,\cdots$)的指数母函数为

$$f_e(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)^2(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^2$$
$$=\frac{1}{2^2}(e^x+e^{-x})^2e^{2x}$$
$$=\frac{1}{2^2}(e^{2x}+2+e^{-2x})e^{2x}$$
$$=\frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^nx^n}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n!}+1)$$
$$=\frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{\infty}(4^n+2^{n+1})\frac{x^n}{n!}+1)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n+2^{n+1}}{4}\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{4}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4^n+2^{n+1}}{4})\frac{x^n}{n!}$$

所以，

$$a_n=\begin{cases}4^n+2^{n+1}, & n\ge 1\\ 1, & n=0\end{cases}$$

4.14　求由数字 2，3，4，5，6，7 组成的r位数中，3 和 5 都出现偶数次，2 和 4 至少出现一次的r位数的个数.

解: 这是一个排列问题. 设满足条件的 r 位数的个数为 a_r，则序列($a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots$) 对应的指数母函数为：

$$
\begin{aligned}
f_e(x) &= (1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)^2(x+\frac{x^2}{2!}+\ldots)^2(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)^2 \\
&= \frac{1}{2^2}(e^x+e^{-x})^2(e^x-1)^2e^{2x} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{r=1}^{\infty}(6^r-2\cdot5^r+3\cdot4^r-4\cdot3^r+3\cdot2^r-2)\frac{x^r}{r!}+1
\end{aligned}
$$

所以，

$$
a_r = \begin{cases} 0 & ,r=0 \\ \frac{1}{4}(6^r-2\cdot5^r+3\cdot4^r-4\cdot3^r+3\cdot2^r-2), & r>0 \end{cases}
$$

4.15　设 a_r 表示重集 $B=\{4\cdot A, 1\cdot B, 2\cdot C, 1\cdot D, 2\cdot E,\}$ 的 r–排列的个数，求序列($a_0, a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots$) 的指数母函数.

解：由定义 4.2 可得序列($a_0, a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots$) 的指数母函数为

$$
f_e(x) = (1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!})(1+x)(1+x+\frac{x^2}{2!})(1+x)(1+x+\frac{x^2}{2!})
$$

4.16　求在重集 $B=\{\infty\cdot1, \infty\cdot2, \infty\cdot3\}$ 中，0 出现偶数次的长为 r 的字的个数.

解: 这是排列问题. 设满足题设要求的长为r的字的个数为 a_r，则($a_0, a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots$) 的指母函数为

$$
\begin{aligned}
f_e(x) &= (1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^3 \\
&= \frac{e^x+e^{-x}}{2}e^{3x} \\
&= \frac{1}{2}(e^{4x}+e^{2x}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(4^k+2^k)\frac{x^k}{k!}
\end{aligned}
$$

所以， $a_r = \frac{1}{2}(4^r+2^r)$

故在重集 $B=\{\infty\cdot1, \infty\cdot2, \infty\cdot3\}$ 中，0 出现偶数次的长为 r 的字的个数为 $\frac{1}{2}(4^r+2^r)$.

4.17　证明定理 4.3 和定理 4.8，即

a．**定理** 4.3 设a，b，c，⋯都是大于 0 的正整数，则（$1+x^a$）（$1+x^b$）（$1+x^c$）⋯的级数展开式中x^n的系数就是把n拆分为a，b，c，⋯的和，且a，b，c，⋯最多只出现一次的方法数．

b．**定理** 4.8 整数n拆分成最多不超过m个项的和的方式数等于n拆分成最大的数不超过m的方式数．

证明：

a．由定理 4.2 知，$\dfrac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\cdots}$的级数展开式中的$x^n$系数等于把正整数$n$拆分成$a$，$b$，$c$，⋯的和的方法数$P$（$n$），即$\dfrac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\cdots}$是序列{$P$（$n$）}的普通母函数，而

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\cdots}=(1+x^a+x^{2a}+\cdots)\ (1+x^b+x^{2b}+\cdots)\ (1+x^c+x^{2c}+\cdots)$$

在上式中，由于a，b，c，⋯最多只出现一次，故当$i\geq 2$时，x^{ia}，x^{ib}，x^{ic}都等于 0，因此有

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\cdots}=（1+x^a）（1+x^b）（1+x^c）\cdots$$

上式表明（$1+x^a$）（$1+x^b$）（$1+x^c$）⋯的级数展开式中x^n的系数就是把n拆分为a，b，c，⋯的和，且a，b，c，⋯最多只出现一次的方法数．本定理证毕．

b．设正整数n拆分成最多不超过m个项的和的一个拆分对应一个 Ferrers，如图 4-1 所示（图中，n=24=6+6+5+4+3，共 5 项，最大数为 6），则它的共轭图如图 4-2 所示（图中，n=24=5+5+5+4+3+2，共 6 项，最大数为 5）表示另一个拆分，容易看出这个拆分每一项都不大于m．反知亦然．故正整数n拆分成最多不超过m项的和的方式和n拆分成最大数不超过m的方式是一一对应的，因此整数n拆分成最多不超过m项的和的方式数等于n拆分成最大数不超过m的方式数．定理证毕．

```
• • • • • •
• • • • • •
• • • • •
• • • •
• • •
```

图 4-1

```
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • •
• • •
• •
```

图 4-2

4.18　证明：把整数n拆分成m个不同的部分的个数，等于把整数$n-m(m+1)/2$拆分成最多m个部分的个数$\left(n>m(m+1)/2\right)$．

证明：不妨设$n=a_1+a_2+\cdots+a_m$，且满足$a_1>a_2>\cdots>a_m\geq 1$，则有

$$n-(1+2+\cdots+m)=(a_1-m)+(a_2-(m-1))+\cdots+(a_m-1)$$

即

$$n-\ m(m-1)\ /2=(a_1-m)+(a_2-(m-1))+\cdots+(a_m-1)$$

显然有 $a_1-m\geq a_2-(m-1)\geq\cdots\geq a_m-1\geq 0$

又因为 $n>\dfrac{m(m+1)}{2}$，故上式各项不全为 0，且最多有 m 个部分不为 0.

由上可知，整数 n 拆分成 m 个不同部分的个数，等于把整数 $n-m(m+1)/2$ 拆分成最多 m 个部分的个数.

4.19　用母函数方法证明下列恒等式：

a．原教材第一章中 § 1.5 节的恒等式 7.

b．$\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{n-i}{k-i}=\begin{cases}0 & k=n+1\\ \binom{n+1}{k} & 0\leq k\leq n\end{cases}$

c．$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-2k}{n}\binom{n}{k}=2^n$

证明：

a．由原教材第四章 § 4.1 节例 1 知，序列 $\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}\right)$ 的普通母函数为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$$

序列 $\left(\binom{m}{0},\binom{m}{1},\binom{m}{2},\cdots,\binom{m}{m}\right)$ 的普通母函数为

$$g(x)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k=(1+x)^m$$

根据普通母函数乘法的定义 4.4 有

$(1+x)^{m+n}$ 是序列 $\left\{\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}\right\}$ 的普通母函数

即有

$$(1+x)^{m+n}=\sum_{p=0}^{m+n}\ \left(\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}\right)\ x^p$$

又由二项式定理（1.13）式有

$$(1+x)^{m+n}=\sum_{p=0}^{m+n}\binom{m+n}{p}x^p$$

故有

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{m+n}{p}$$

b．由普通母函数的定义以及式（1.4.2）知，序列$\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}\right)$的普通母函数为（1+$x$）^{n}，即

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{k}x^k+\cdots+\binom{n}{k}x^n$$

于是，我们分别得到下列各式

$$(1+x)^{n-1}=\binom{n-1}{0}x+\binom{n-1}{1}x^2+\cdots+\binom{n-1}{k-1}x^k+\cdots+\binom{n-1}{n-1}x^n$$

$$x^2(1+x)^{n-2}=\binom{n-2}{0}x^2+\cdots+\binom{n-2}{k-2}x^k+\cdots+\binom{n-2}{n-2}x^n$$

$$\vdots$$

$$x^k(1+x)^{n-k}=\binom{n-k}{0}x^k+\cdots+\binom{n-k}{n-k}x^n$$

将以上各式两端分别相加，则其右端和式中x^k的系数正好是$\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i}{k-i}$，而其左端的和为

$$f(x)=(1+x)^n+x(1+x)^{n-1}+x^2(1+x)^{n-2}+\cdots+x^k(1+x)^{n-k}$$

$$=x^n\left[\left(\frac{1+x}{x}\right)^n+\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}+\cdots+\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k}\right]$$

令$g(x)=f(x)+x^n\left[\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k-1}+\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k-2}+\cdots+\left(\frac{1+x}{x}\right)^{0}\right]$

则有

$$g(x)=x^n\left[\left(\frac{1+x}{x}\right)^n+\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}+\cdots+\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k}+\right.$$

$$\left.\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k-1}+\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k-2}+\cdots+\left(\frac{1+x}{x}\right)^{0}\right]$$

$$=x^n\left[\frac{1-(\frac{1+x}{x})^{n+1}}{1-\frac{1+x}{x}}\right]$$

=（1+x）$^{n+1}-x^{n+1}$

由于，在 g（x）中 x^k 的系数也就是在 f（x）中 x^k 的系数，于是，在 g（x）的展开式中，x^k 的系数为

$$\begin{cases}\dbinom{n+1}{k} & 0\le k\le n \\ 0 & k=n+1\end{cases}$$

故有

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i}{k-i}=\begin{cases}\dbinom{n+1}{k} & 0\le k\le n \\ 0 & k=n+1\end{cases}$$

c.由二项式定理 1.7（(1.12）式）知

$$\left[(1+x)^2-1\right]^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(1+x)^{2(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left[\sum_{i=0}^{2(n-k)}\binom{2n-2k}{i}x^i\right]$$

注意，上式中，令 X=–1，Y=（1+x）^{2}，然后再代入（1.12）式，再利用式（1.13）即得上式.

显然，上式右边 x^n 的系数为 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}$.

而上式左边为

$$(1+2x+x^2-1)^n=(2x+x^2)^n=x^n(2+x)^n=x^n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\cdot 2^{n-i}$$

容易看出，上式中，x^n 的系数为 2^n（因为在 $x^n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^{n-i}\cdot x^i$ 中，x^n 的系数只有 i=0 时才能得到，即为 $\binom{n}{0}\cdot 2^{n-0}=2^n$）

故有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-2k}{n}\binom{n}{k}=2^n$$

4.20　设 n，k 都是非负整数，计算下列诸和的值

a．$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{q}$，其中 n 是偶数时，$q=n$；n 是奇数时，$q=n-1$

b．$\binom{2n}{0}-\binom{2n-1}{1}+\binom{2n-2}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$

c．$\binom{n}{0}\binom{n}{k}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}-\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}$

d．$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\cdots+2^n\binom{n}{n}$

解：

a．$\because\ (1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$

$$(1-x)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}x^n$$

所以

$$\frac{(1+x)^n+(1-x)^n}{2}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{q}x^q$$

其中 $q=\begin{cases} n, & n\text{为偶数}\\ n-1, & n\text{为奇数}\end{cases}$

所以

$$\frac{(1+x)^n+(1-x)^n}{2}\Big|_{x=1}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{q}=\begin{cases}2^{n-1}，& \text{当}n>0\\ 1\ ，& \text{当}n=0\end{cases}$$

b.由普通母函数的定义以及式（1.4.2）知，序列$\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}\right)$的普通母函数为（1+$x$）^{n}，即 $(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n$．于是，我们分别得到下列各式

$$x^{2n}(1-x)^{2n}=\binom{2n}{0}x^{2n}-\binom{2n}{1}x^{2n+1}+\binom{2n}{2}x^{2n+2}-\cdots+\binom{2n}{2n}x^{4n}$$

$$x^{2n-1}(1-x)^{2n-1}=\binom{2n-1}{0}x^{2n-1}-\binom{2n-1}{1}x^{2n}+\binom{2n-1}{2}x^{2n+1}-\cdots-\binom{2n-1}{2n-1}x^{4n-2}$$

$$x^{2n-2}(1-x)^{2n-2}=\binom{2n-2}{0}x^{2n-2}-\binom{2n-2}{1}x^{2n-1}+\binom{2n-2}{2}x^{2n}-\cdots+\binom{2n-2}{2n-2}x^{4n-4}$$

$$\vdots$$

$$x^n(1-x)^n=\binom{n}{0}x^n-\binom{n}{1}x^{n+1}+\binom{n}{2}x^{n+2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{2n}$$

将以上各式两端分别相加，则其右端和式中 x^{2n} 的系数正好是我们所求的和式 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}$，而其右端的和为

$$A(x)=x^{2n}(1-x)^{2n}+x^{2n-1}(1-x)^{2n-1}+x^{2n-2}(1-x)^{2n-2}+\cdots+x^n(1-x)^n$$

如果我们能求出 A（x）展开式中 x^{2n} 的系数 a_{2n}，则 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}=a_{2n}$．下面，我们求 a_{2n}．

因为在 $A(x)$ 的后面加上次数低于 x^{2n} 的项不影响我们所要求的和，故令 $B(x)$ 为

$$\begin{aligned}
B(x)&=A(x)+x^{n-1}(1-x)^{n-1}+x^{n-2}(1-x)^{n-2}+\cdots+x^0(1-x)^0\\
&=\frac{1-\left[x(1-x)\right]^{2n+1}}{1-x(1-x)}=\frac{1-\left[x(1-x)\right]^{2n+1}}{1-x+x^2}\cdot\frac{1+x}{1+x}\\
&=\{1-\left[x(1-x)\right]^{2n+1}\}\cdot\frac{1+x}{1+x^3}\\
&=\{1-\left[x(1-x)\right]^{2n+1}\}\cdot(1+x)(1-x^3+x^6-x^9+\cdots+(-1)^k x^{3k}+\cdots)
\end{aligned}$$

于是，由上式知，B（x）（或 A（x））中的 x^{2n} 的系数 $a_{2n}=\begin{cases}1, & 2n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\\ -1, & 2n\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)\\ 0, & 2n\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)\end{cases}$

故有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}=\begin{cases}1, & 2n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\\ -1, & 2n\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)\\ 0, & 2n\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)\end{cases}$$

c．$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!}\\
&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{n!}{(n-k)!(k-i)!i!}\\
&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{k!}{(k-i)!i!}\\
&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{k}\binom{k}{i}=\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\\
&=\binom{n}{k}(1-x)^k\Big|_{x=1}\\
&=\begin{cases}1, k=0\\ 0, k>0\end{cases}
\end{aligned}$$

d. $\because$ $(1+2x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}2x+\binom{n}{2}(2x)^2+\cdots+\binom{n}{n}(2x)^n$

令 $x=1$，有

$$3^n=\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\cdots+2^n\binom{n}{n}$$

即有

$$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\cdots+2^n\binom{n}{n}=3^n$$

第五章　递 归 关 系

一、内容提要

定义 5.1　设 $(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$ 是一个序列，把该序列中的 a_r 和它前面的几个 $a_i(0 \le i < r)$ 关联起来的方程称作一个递归关系.

1. 常系数线性齐次递归关系的解法

由下面的定理 5.3 和定理 5.5 易知常系数线性齐次递归关系的求解方法.

定义 5.2　序列 $(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$ 中相邻的 k+1 项之间的关系

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_k a_{n-k} \quad (n \ge k) \tag{5.12}$$

称作序列 $(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$ 的 k 阶常系数线性齐次递归关系．其中 $b_i(i=1, 2, \cdots, k)$ 是常数，且 $b_k \ne 0$.

定义 5.3　与式（5.12）相关联的方程

$$x^k - b_1 x^{k-1} - b_2 x^{k-2} - \cdots - b_k = 0 \tag{5.13}$$

称作递归关系式（5.12）的特征方程．方程式（5.13）的根称作递归关系式（5.12）的特征根.

定理 5.1　若 $q \ne 0$, $a_n = q^n$ 是递归关系式（5.12）的解，当且仅当 q 是特征方程（5.13）的根.

定义 5.4　求递归关系式（5.12）满足如下条件的解：

$$a_0 = h_0, a_1 = h_1, \cdots, a_{k-1} = h_{k-1} \tag{5.14}$$

则称式（5.14）为递归关系式（5.12）的初值条件.

定理 5.2　若 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 是递归关系式（5.12）的特征根，$c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是任意常数，则

$$a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_k q_k^n \tag{5.15}$$

是递归关系式（5.12）的解.

定义 5.5　若 a_n 是递归关系式（5.12）的任意一个解，都存在一组适当的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$，使得 a_n 可以表示为式（5.15）的形式，则称式（5.15）是递归关系式（5.12）

的通解.

定理 5.3　若 q_1, q_2, …, q_k 是递归关系式（5.12）的互不相同的特征根，则

$$a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_k q_k^n$$

是递归关系式（5.12）的通解.

定理 5.4　若递归关系式（5.12）的特征方程式（5.13）

$$x^k - b_1 x^{k-1} - b_2 x^{k-2} - \cdots - b_k = 0$$

有一个 m 重根 q，则 q^n，nq^n，…，$nm^{-1}q^n$ 都是递归关系式（5.12）的解.

定理 5.5　设 q_1，q_2，…，q_t 分别是特征方程式（5.13）的相异的 m_1，m_2，…，m_t 重根，且

$$\sum_{i=1}^{t} m_i = k$$

则

$$a_n = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} n^{j-1} q_i^n \tag{5.17}$$

是递归关系式（5.12）的通解.

定义 5.6　序列 $(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots)$ 中相邻的 $k+1$ 项之间的关系

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_k a_{n-k} + f(n) \tag{5.18}$$

称作序列 $(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots)$ 的 k 阶常系数线性非齐次递归关系. 其中 $b_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 是常数，且 $b_k \neq 0$，$f(n) \neq 0$，$n \geq k$.

定义 5.7　在式（5.18）中，若 $f(n)=0$，则称

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_k a_{n-k} \tag{5.19}$$

为由式（5.18）导出的常系数线性齐次递归关系.

定理 5.6　若 $\overline{a_n}$ 是（5.18）的一个特解，而 $a_n^* = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i q_i^n$（或 $\sum\limits_{i=1}^{t}\sum\limits_{j=1}^{m_i} c_{ij} n^{j-1} q_i^n$ ）是由式（5.18）导出的齐次线性递归关系式（5.19）的通解，则

$$a_n = \overline{a_n} + a_n^*$$

是常系数线性非齐次递归关系式（5.18）的通解.

2. 常系数线性非齐次递归关系的解法

由定理 5.6 知，若要求一个常系数线性非齐次递归关系式（5.18）的通解，必须先求出这个递归关系所导出的常系数线性齐次递归关系式（5.19）的通解，然后再求这个递归关系（5.18）的一个特解，将其相加即可. 然而，求一个非齐次线性递归关系的特解，通常

没有系统的方法，但当函数 f（n）是某些特殊形式时，才有一些规范的求法．下面讨论几种情形：

（1）当 $f(n)$ 是 n 的 k 次多项式时，又可分为如下两种情形：

a．如果 1 不是常系数线性非齐次递归（5.18）所导出的常系数线性齐次递归关系式（5.19）的特征根，可设常系数线性递归关系式（5.18）的特解形式为

$$\overline{a_n} = A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \cdots + A_k \tag{5.20}$$

式中 A_0，A_1，…，A_k 为待定常数．

b．如果 1 是常系数线性非齐次递归关系式（5.18）所导出的常系数线性齐次递归关系式（5.19）的 m 重特征根时 $(m \geq 1)$，可设特解的形式为

$$\overline{a_n} = (A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \cdots + A_k n^m) \tag{5.21}$$

式中 A_0，A_1，…，A_k 为待定常数．

（2）当 $f(n)$ 是 β^n 的形式时，又可分为如下两种情形：

如果 β 不是常系数线性非齐次递归（5.18）所导出的常系数线性齐次递归关系式（5.19）的特征根，可设特解的形式为

$$\overline{a_n} = A \cdot \beta^n \tag{5.22}$$

式中 A 为待定常数．

c．如果 β 是常系数线性非齐次递归关系式（5.18）所导出的常系数线性齐次递归关系式（5.19）的 k 重特征根时 $(k \geq 1)$，可设特解的形式为

$$\overline{a_n} = (A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \cdots + A_k)\ \beta^n \tag{5.23}$$

3. *迭代法与归纳法求解递归关系*

迭代法　反复应用递归关系式进行迭代而得到解的方法．

归纳法　先用初值条件求出前几项，并观察其规律，由猜想得到一般公式后，再用归纳法证明猜想得到的公式是正确的方法．

4. *用母函数法求解递归关系的方法*

这个方法的主要思想和步骤是：

① 用 f（x）表示序列（a_0，a_1，…，a_n，…）的普通母函数，即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{5.29}$$

② 利用递归关系 a_n 的表达式与式（5.29）之间的关系，将式（5.29）化为关于 f（x）的方程（多数情况是将递归关系 a_n 的表达式代入式（5.29）的右端），即

$$g（f（x））=0 \tag{5.30}$$

③ 由式（5.30）解出 $f（x）$.

④ 将$f（x）$的表达式展开成幂级数，即可求得a_n的初等表达式.

⑤ Stirling 数所满足的递归关系.

定义 5.8　令$[x]_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$，若

$$[x]_n = \sum_{k=0}^{n} S_1(n，k)x^k \tag{5.32}$$

则称$S_1(n，k)$为第一类Stirling数. 也就是说，$S_1(n，k)$就是多项式$[x]_n$中的x^k的系数. 显然，当$n<k$时，$S_1(n，k)=0$.

定理 5.7　第一类 Stirling 数满足如下递归关系：

$$\begin{cases} S_1(n+1，k) = S_1(n，k-1) - nS_1(n，k) & (n \ge 0，k > 0) \\ S_1(0，0) = 1, S_1(n，0) = 0 & (n > 0) \end{cases} \tag{5.33}$$

定义 5.9　若

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_2(n，k)[x]_k \tag{5.34}$$

则称$S_2(n,k)$为第二类 Stirling 数．显然，当 $n<k$ 时，$S_2(n，k)=0$.

定理 5.8　第二类 Stirling 数满足递归关系：

$$\begin{cases} S_2(n+1，k) = S_2(n，k-1) + kS_2(n，k) & (n \ge 0，k > 0) \\ S_2(0，0) = 1，S_2(n，0) = 0 & (n > 0) \end{cases} \tag{5.35}$$

定理 5.9　第二类 Stirling 数$S_2(n，k)$就是 n 个元素的集合划分成 k 个不相交的非空子集的方式数目.

定理 5.10　第二类 Stirling 数$S_2(n，k)$具有下列性质：

1．$S_2(n，n)=1$

　$S_2(n，k)=0$（$n<k$ 或 $k=0<n$）

2．$S_2(n，2)=2^{n-1}-1$

3．$S_2(n，n-1)=\binom{n}{2}$

定义 5.10　若

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S_2(n，k) \tag{5.36}$$

则称B_n为Bell数．显然，$B_0=1$.

定理 5.11　Bell数B_n满足如下的递归关系：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

二、习题解答

5.1　对 1×n棋盘的每个正方形用红或蓝两种颜色之一着色．设a_n表示没有任何两个着红色的正方形是相邻的着色的方式数．求a_n所满足的递归关系并解之．

解：设a_n表示 1×n棋盘中无任何两个着红色的方格是相邻的着色方式数，则对第一个方格有两种着色方式：

（1）对第一格着蓝色，则在其余的n–1 个方格中无任何两个着红色的方格是相邻的着色方式数为a_{n-1}．

（2）对第一格着红色，在第二格只能着蓝色，则在剩下的n–2 个方格中无任何两个着红色的方格是相邻的着色方式数为a_{n-2}．

显然有a_1=2，a_2=3，由加法规则得递归关系式为：

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3) \\ a_1 = 2，a_2 = 3 \end{cases}$$

这是一个 2 阶常系数线性齐次递归关系式，其特征方程为

$$x^2 - x - 1 = 0$$

∴
$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}，\quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

由定理 5.3 知其通解为 $a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$

由初值条件 $a_1 = 2$， $a_2 = 3$ 可得

$$\begin{cases} c_1 \times \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 2 \\ c_1 \times (\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + c_2 \times (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = 3 \end{cases}$$

解以上方程组得 $c_1 = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}$， $c_2 = \dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}$

故有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}] \end{aligned}$$

5.2　如果用a_n表示没有两个 0 相邻的n位三元序列（即由 0，1，2 组成的序列）的个数．求a_n所满足的递归关系并解之．

解：对 n 位三元序列的第一位数有三种选择方式：

（1）第一位选 1，则在剩下的n–1 位数中无两个 0 相邻的个数为a_{n-1}；

（2）第一位选 2，则在剩下的$n-1$ 位数中无两个 0 相邻的个数为a_{n-1}；

（3）第一位选 0，则在第二位又有两种选择方式：

① 第二位选 1，则在剩下的$n-2$ 位数中无两个 0 相邻的个数为a_{n-2}；

② 第二位选 2，则在剩下的$n-2$ 位数中无两个 0 相邻的个数为a_{n-2}．显然，有

$$a_1=3，a_2=8$$

∴由加法规则得a_n所满足的递归关系为：

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n \geq 3) \\ a_1 = 3, a_2 = 8 \end{cases}$$

其特征方程为

$$x^2-2x-2=0$$

∴特征根为

$$x_1=1+\sqrt{3}，x_2=1-\sqrt{3}$$

由定理 5.3 知其通解为

$$a_n=c_1（1+\sqrt{3}）^n+c_2（1-\sqrt{3}）^n$$

由初始条件有

$$\begin{cases} c_1(1+\sqrt{3}) + c_2(1-\sqrt{3}) = 3 \\ c_1(1+\sqrt{3})^2 + c_2(1-\sqrt{3})^2 = 8 \end{cases}$$

解 以 上 方程组得　$c_1 = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}$，$c_2 = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{6}$

∴　$a_n = \dfrac{1}{6}\left[\left(3+2\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(3-2\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right]$

5.3　有一个楼梯共有 n 阶，一个人要从这个楼梯上去，他每一步跨上一阶或两阶，问此人有多少种方式走过该楼梯？

解：设此人有F_n种方式走过这个楼梯，则此人走过这个楼梯的方式可分为两种情况：

（1）第一步跨一阶，剩余$n-1$ 阶，于是走过这$n-1$ 阶的方式数为F_{n-1}.

（2）第一步跨二阶，剩余$n-2$ 阶，于是走过这$n-2$ 阶的方式数为F_{n-2}.

显 然 有 $F_1=1$， $F_2=2$.

∴由加法规则得F_n所满足的递归关系为

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3) \\ F_1 = 1, F_2 = 2 \end{cases}$$

这是一个 2 阶常系数线性齐次递归关系式，可以用常系数线性齐次递归关系的解法得到它的解（见原教材第五章§5.2 节的例 1)，这里用母 函 数 法 求 解 .

设 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n x^n$ 是序列（F_1，F_2，…，F_n，…）的普通母函数，并将上式代入F（x）中，有

$$
\begin{aligned}
F(x) &= F_1x+F_2x^2+\sum_{n=3}^{\infty}(F_{n-1}+F_{n-2})x^n \\
&= x+2x^2+x\sum_{n=3}^{\infty}F_{n-1}x^{n-1}+x^2\sum_{n=3}^{\infty}F_{n-2}x^{n-2} \\
&= x+2x^2+x(\sum_{n=1}^{\infty}F_n x^n-F_1x)+x^2\sum_{n=1}^{\infty}F_n x^n \\
&= x+2x^2+xF(x)-x^2+x^2\cdot F(x)
\end{aligned}
$$

得到

$$F(x)=(x+x^2)/(1-x-x^2)=[1/(1-x-x^2)]-1$$

∵$1-x-x^2=0$ 有 2 个根：

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

故令

$$F(x)=(\frac{A}{1-x_1x}+\frac{B}{1-x_2x})-1$$

由待定系数法得到：

$$A=\frac{x_1}{\sqrt{5}}，B=\frac{-x_2}{\sqrt{5}}$$

所以

$$
\begin{aligned}
F(x) &= (\frac{x_1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}x_1^n x^n-\frac{x_2}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}x_2^n x^n)-1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x_1^{n+1}}{\sqrt{5}}-\frac{x_2^{n+1}}{\sqrt{5}})x^n-1
\end{aligned}
$$

故有

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{n+1}-x_2^{n+1})$$

所以代入x_1，x_2可以得到：

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}}\quad(n\geq 1)$$

故此人有 $\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}}$ 种方式走过该楼梯.

5.4　某人有 n 元钱，她每天要去菜市场买一次菜，每次买菜的品种很单调，或者买

一元钱的蔬菜，或者买两元钱的猪肉，或者买两元钱的鱼．问，她有多少种不同的方式花完这 n 元钱?

解：设花完这n元钱的方式有a_n种，则第一次花钱可分为下面几种情况：

（1）若第一次买一元钱的菜，则花完剩下的$n-1$ 元钱就有a_{n-1}种方式；

（2）若第一次买二元钱的肉，则花完剩下的$n-2$ 元钱就有a_{n-2}种方式；

（3）若第一次买二元钱的鱼，则花完剩下的$n-2$ 元钱就有a_{n-2}种方式．

显然有 $a_1=1$，$a_2=3$

由加法规则，得递归关系如下：

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} (n \geq 3) \\ a_1 = 1 \text{ , } a_2 = 3 \end{cases}$$

其特征方程为：

$$x^2 - x - 2 = 0$$

特征根

$$x_1 = -1, \ x_2 = 2$$

通解

$$a_n = c_1(-1)^n + c_2 2^n$$

由初始条件得

$$\begin{cases} c_1 \times (-1) + c_2 \times 2 = 1 \\ c_1 \times (-1)^2 + c_2 \times 2^2 = 3 \end{cases}$$

解得

$$c_1 = \frac{1}{3}, \ c_2 = \frac{2}{3}$$

故该递归关系的解为

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + 2^n \times \frac{2}{3}$$

故她有$\frac{1}{3}(-1)^n + 2^n \times \frac{2}{3}$种不同的方式花完这 n 元钱.

5.5　求解下列递归关系

a．$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} \qquad (n \geq 1) \\ a_0 = 3 \end{cases}$

解：这里用迭代法求解易得：

$$a_n = 3a_{n-1} = 3^2 a_{n-2} = 3^3 a_{n-3} = \cdots = 3^n a_0 = 3^{n+1}$$

b. $\begin{cases} a_n = 4a_{n-2} & (n \geq 2) \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$

解：若 n 是奇数，令 n=2k+1

∴ $$a_n = a_{2k+1} = 4 \cdot a_{2k-1} = 4^2 \cdot a_{2k-3} = \cdots = 4^i \cdot a_{2k-(2i-1)} = \cdots = 4^i \cdot a_1$$

由 $2k-(2i-1)=1$ 得

$$i = k \text{ 且 } k = \frac{n-1}{2}$$

故

$$a_n = 4^{\frac{n-1}{2}} \times a_1 = 2^{n-1}$$

若 n 是偶数，令 n=2k

∴ $$a_n = a_{2k} = 4 \cdot a_{2k-2} = 4^2 \cdot a_{2k-4} = \cdots = 4^i \cdot a_{2k-(2i)} = \cdots = 4^i \cdot a_0$$

由 $2k-2i=0$ 得

$$i = k$$

故有

$$a_n = 4^{\frac{n}{2}} \cdot a_0 = 0$$

∴ $a_n = \begin{cases} 0 \quad , & n\text{为偶数} \\ 2^{n-1} \quad , & n\text{为奇数} \end{cases}$

c. $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} & (n \geq 2) \\ a_0 = 1，a_1 = 4 \end{cases}$

解：特征方程为

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

所以特征根

$$x_1 = x_2 = 2$$

∴通解

$$a_n = (c_1 + c_2 n)2^n$$

由初始条件

$$\begin{cases} (c_1 + c_2 \times 0) \times 1 = 1 \\ (c_1 + c_2) \times 2^1 = 4 \end{cases}$$

解出

$$c_1 = 1,\ c_2 = 1$$

故 $a_n = (1+n)2^n$.

d. $\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 16a_{n-2} - 20a_{n-3} & (n \geq 3) \\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1 \end{cases}$

解：特征方程为

$$q^3 + q^2 - 16q + 20 = 0$$

特征根

$$q_1 = q_2 = 2,\ q_3 = -5$$

∴通解

$$a_n = (c_1 + c_2 n)2^n + c_3(-5)^n$$

将初始条件代入得

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ (c_1 + c_2) \times 2 - 5c_3 = 1 \\ (c_1 + 2c_2) \times 4 + 25c_3 = -1 \end{cases}$$

解出

$$c_1 = \frac{5}{49},\ c_2 = \frac{7}{49} = \frac{1}{7},\ c_3 = -\frac{5}{49}$$

故
$$a_n = (\frac{5}{49} + \frac{1}{7}n) \times 2^n - \frac{5}{49} \times (-5)^n$$

e. $\begin{cases} a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n & (n \geq 2) \\ a_0 = 2,\ a_1 = 7 \end{cases}$

解：特征方程为

$$q^2 - 7q + 12 = 0$$

特征根

$$q_1 = 3,\ q_2 = 4$$

∴通解

$$a_n = c_1 3^n + c_2 4^n$$

由初始条件得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 3c_1 + 4c_2 = 7 \end{cases}$$

解出

$$c_1 = c_2 = 1$$

所以 $a_n = 3^n + 4^n$.

f. $\begin{cases} a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3} & (n \geq 3) \\ a_0 = 1，a_1 = 0，a_2 = 0 \end{cases}$

解：特征方程为

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

特征根

$$x_1=1，x_2=1，x_3=-2$$

∴通解

$$a_n = (c_1 + c_2 n)1^n + c_3(-2)^n$$

由初始条件，有

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 - 2c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \end{cases}$$

解出

$$c_1 = \frac{8}{9}，c_2 = -\frac{6}{9}，c_3 = \frac{1}{9}$$

故 $a_n = \frac{8}{9} - \frac{6}{9}n + \frac{1}{9}(-2)^n$.

5.6　求解下列递归关系

a. $\begin{cases} a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 3 & (n \geq 2) \\ a_0 = 0，a_1 = 1 \end{cases}$

解：这是一个常系数线性非齐次递归关系式，其导出的齐次递归关系为：

$$a_n^* = -6a_{n-1}^* - 9a_{n-2}^*$$

∴其特征方程为

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

解得

$$q_1 = q_2 = -3$$

由定理 5.3 知，所导出的齐次线性递归关系的通解为

$$a_n^* = \left(c_1 + c_2 n\right) \cdot \left(-3\right)^n$$

由于 f（n）=3，且 1 不是递归关系式的特征根，故设特解为

$$\overline{a_n} = A$$

将 $\overline{a}_n = A$ 代入递归关系得

$$A=-6A-9A+3$$

∴ $$A=\frac{3}{16}$$

由定理 5.6 知，递归关系式的通解为 $a_n=\overline{a}+a^*=\frac{3}{16}+\left(c_1+c_2n\right)(-3)^n$

将初值条件代入上式并解得

$$\begin{cases}c_1=-\frac{3}{16}\\ c_2=-\frac{1}{12}\end{cases}$$

故 $$a_n=\frac{3}{16}+\left(-\frac{3}{16}-\frac{1}{12}n\right)(-3)^n$$

b．$\begin{cases}a_n=-5a_{n-1}-6a_{n-2}+3n^2 \quad (n\geq 2)\\ a_0=0\text{，}a_1=1\end{cases}$

解：这也是一个常系数线性非齐次递归关系式，其导出的齐次递归关系的特征方程为

$$x^2+5x+6=0$$

∴特征根为

$$x_1=-2\text{，}x_2=-3$$

由定理 5.3 知，所导出的齐次线性递归关系的通解为 $a_n^*=c_1(-2)^n+c_2(-3)^n$

由于 f（n）$=3n^2$，且 1 不是递归关系式的特征根，故设特解为

$$\overline{a_n}=A_0n^2+A_1n+A_2$$

将上式代入递归关系式解得

$$A_0=\frac{1}{4}\text{，}A_1=\frac{17}{24}\text{，}A_2=\frac{115}{288}$$

∴通解

$$a_n=a_n^*+\overline{a_n}=c_1(-2)^n+c_2(-3)^n+\frac{1}{4}n^2+\frac{17}{24}n+\frac{115}{288}$$

由初始条件有

$$\begin{cases}c_1+c_2+\frac{115}{288}=0\\ -2c_1-3c_2+\frac{1}{4}+\frac{17}{24}+\frac{115}{288}=1\end{cases}$$

解得

$$c_1=\frac{-14}{9},\ c_2=\frac{37}{32}$$

故递归关系的解为：

$$a_n=a_n^*+\overline{a_n}=\frac{-14}{9}(-2)^n+\frac{37}{32}(-3)^n+\frac{1}{4}n^2+\frac{17}{24}n+\frac{115}{288}$$

c．$\begin{cases}a_n=7a_{n-1}-10a_{n-2}+3^n \quad (n\geq 2)\\ a_0=0,a_1=1\end{cases}$

解：对应齐次递归关系的特征方程为

$$x^2-7x+10=0$$

其特征根

$$x_1=5，x_2=2$$

∴ $$a_n^*=5^n c_1+2^n c_2$$

又 f（n）$=3^n$，且 3 不是递归关系式的特征根，故设特解为 $\overline{a}_n=A\times 3^n$，将 $\overline{a}_n=A\times 3^n$ 代入原递归关系得

$$A\times 3^n=7A\times 3^{n-1}-10A\times 3^{n-2}+3^n$$

解得

$$A=-\frac{9}{2}$$

∴通解为

$$a_n=a_n^*+\overline{a}_n=5^n c_1+2^n c_2-\frac{9}{2}3^n$$

由初始条件有

$$\begin{cases}c_1+c_2-\dfrac{9}{2}=0\\ 5c_1+2c_2-\dfrac{9}{2}\times 3=1\end{cases}$$

解出

$$c_1=11/6，c_2=8/3$$

故原递归关系的解为：

$$a_n=\frac{11}{6}5^n+\frac{8}{3}2^n-\frac{9}{2}3^n$$

d．$\begin{cases}a_n=-5a_{n-1}-6a_{n-2}+42\times 4^n \quad (n\geq 2)\\ a_0=0，a_1=1\end{cases}$

解：对应齐次递归关系的特征方程为

$$x^2+5x+6=0$$

解得

$$x_1=-2，x_2=-3$$

齐次递归关系的通解为：

$$a_n^* = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n$$

又 f（n）$=42\times 4^n$，且 4 不是递归关系式的特征根，故设特解为

$$\overline{a_n} = A\times 4^n，$$

将 $\overline{a_n} = A\times 4^n$ 代入递归关系得

$$A4^n+5A4^{n-1}+6A4^{n-2}=42\times 4^n$$

解得

$$A=16$$

故通解为

$$a_n=a^*+\overline{a}_n = c_1（-2）^n+c_2（-3）^n+16\times 4^n$$

由初始条件有

$$\begin{cases} c_1+c_2+16=0 \\ -2c_1-3c_2+64=1 \end{cases}$$

解得

$$c_1=-111，c_2=95$$

所以有

$$a_n=-111\times（-2）^n+95\times（-3）^n+16\times 4^n$$

e．$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1}-6a_{n-2}+3\times 2^n \quad (n\geq 2) \\ a_0=0, a_1=1 \end{cases}$

解：对应齐次递归关系的特征方程为

$$x^2-5x+6=0$$

解得

$$x_1=2，x_2=3$$

故齐次递归关系的通解为：

$$a_n^* = c_1 2^n + c_2 3^n$$

又 f（n）$=3\times 2^n$，且 2 是递归关系式的 1 重特征根，故设特解为

$$\overline{a}_n = (A_n+B)2^n$$

代入递归关系求得

$$A=-6$$

从而通解为

$$a_n=a^*+\overline{a}_n=c_1 2^n+c_2 3^n-6n\times 2^n$$

由初始条件有

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ 2c_1+3c_2-12=1 \end{cases}$$

解得

$$c_1=-13,\ c_2=13$$

所以有

$$a_n=-13\times 2^n+13\times 3^n-6n\times 2^n$$

5.7　证明§5.1 节中的 Fibonacci 数的性质式（5.6），（5.7），（5.8），（5.9）.

证明：

（1）
$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2}-1 \qquad (5.6)$$

∵
$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1}+F_n = F_n+F_{n-1}+F_n \\ &= F_n+F_{n-1}+F_{n-2}+\cdots+F_1+F_0+F_1 \end{aligned}$$

∴
$$F_n+F_{n-1}+F_{n-2}+\cdots+F_0=\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2}-F_1=F_{n+2}-1$$

（2）
$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}-1 \qquad (5.7)$$

∵
$$\begin{aligned} F_{2n} &= F_{2n-1}+F_{2n-2} \\ &= F_{2n-1}+F_{2n-3}+F_{2n-4} \\ &= F_{2n-1}+F_{2n-3}+F_{2n-5}+\cdots+F_1+F_0 \end{aligned}$$

∴
$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}-1$$

（3）
$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n\cdot F_{n+1} \qquad (5.8)$$

∵
$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$$

∴
$$\begin{aligned} F_n\cdot F_{n+1} &= F_n(F_n+F_{n-1})=F_n^2+F_n\cdot F_{n-1} \\ &= F_n^2+F_{n-1}^2+\cdots+F_1^2+F_1\cdot F_0 \\ &= F_n^2+F_{n-1}^2+\cdots+F_1^2+F_0^2 \end{aligned}$$

故
$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n\cdot F_{n+1}$$

（4）
$$F_{n+1}\cdot F_{n-1}-F_n^2=(-1)^{n+1} \qquad (5.9)$$

∵　　$$F_n=((1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1})/(2^{n+1}\cdot\sqrt{5})$$

∴　$F_{n+1}\cdot F_{n-1}-F_n^2$

$$=\{[(1+\sqrt{5})^{n+2}-(1-\sqrt{5})^{n+2}]/(2^{n+2}\cdot\sqrt{5})\}\{[(1+\sqrt{5})^{n}-(1-\sqrt{5})^{n}]/(2^{n}\cdot\sqrt{5})\}$$

$$-\{[(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}]/(2^{n+1}\cdot\sqrt{5})\}^2$$

$$=\frac{1}{5\times 2^{2n+2}}[(1+\sqrt{5})^{n+2}-(1-\sqrt{5})^{n+2}][(1+\sqrt{5})^{n}-(1-\sqrt{5})^{n}]$$

$$-\frac{1}{5\times 2^{2n+2}}[(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}]^2$$

$$=(-1)^{n+1}.$$

5.8　用迭代法或归纳法求解下列递归关系：

a．$\begin{cases}a_n=(n+2)a_{n-1}\quad(n\ge 1)\\ a_0=2\end{cases}$

解：用归纳法求解．

先用初值条件a_0=2 求出前几项，并观察其规律．

$$a_1=(1+2)a_0=2\times3=(1+2)!$$

$$a_2=(2+2)a_1=2\times3\times4=(2+2)!$$

$$a_3=(3+2)a_2=2\times3\times4\times5=(3+2)!$$

由上面所得到的值，我们可以猜想递归关系式的解的一般公式为

$$a_n=(n+2)!$$

为了证实上述猜想$a_n=(n+2)!$确实是递归关系式的解，我们用归纳法证之．

由上面计算前几项的值，显然，对于 n=1，2，3 时，结论是成立的．

设 $n=k$ 时，结论成立．即有

$$a_k=(k+2)!$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$a_{k+1}=(k+1+2)a_k$$

$$=(k+1+2)(k+2)!$$

$$=(k+1+2)!$$

可见，当 $n=k+1$ 时，结论也是成立的．

b．$\begin{cases}a_n=ca_{n-1}+b\\ a_0=b\end{cases}$（$b$，$c$ 为常数）

解：用迭代法求解．

反复应用递归关系式进行迭代，有

$$a_n=ca_{n-1}+b=c(ca_{n-2}+b)+b$$

$$=c^2+cb+b$$

$$=c^3 a_{n-3}+c^2 b+cb+b$$

$$\cdots\cdots$$

$$=c^n a_0+c^{n-1}b+\cdots+cb+b$$

$$=b（c^n+c^{n-1}+\cdots+c^1+c^0）$$

$$=\begin{cases}\dfrac{b(c^{n+1}-1)}{(c-1)} & c\neq 1\\(n+1)b & c=1\end{cases}$$

故 $$a_n=\begin{cases}\dfrac{b(c^{n+1}-1)}{(c-1)} & c\neq 1\\(n+1)b & \mathrm{c}=1\end{cases}$$

c. $\begin{cases}a_n=a_{n-1}-n+3 \quad (n\geq 1)\\a_0=2\end{cases}$

解：用 迭代法求解.

$$a_n=a_{n-1}-n+3$$

$$=（a_{n-2}-(n-1)+3)-n+3$$

$$=a_{n-2}-2n+3+4$$

$$=a_{n-3}-3n+3+4+5$$

$$=a_{n-4}-4n+3+4+5+6$$

$$\cdots\cdots$$

$$=a_1-(n-1)n+3+4+5+\cdots+(n+1)$$

$$=a_0-n^2+3+4+\cdots+(n+1)+(n+2)$$

$$=（-n^2+5n+4）/2$$

$\therefore$ $$a_n=（-n^2+5n+4）/2$$

5.9　用母函数法求解下列递归关系：

a. $\begin{cases}a_n=a_{n-1}+n \quad (n\geq 1)\\a_0=1\end{cases}$

解：设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 为序列$\{a_n\}$的普通母函数，则

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n-1}+n\right)\cdot x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\cdot x^n+\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n$$

$$=1+x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n+\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot x^n$$

$$=1+x\cdot f(x)+\frac{x}{(1-x)^2}$$

∴
$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{(1-x)^3}$$

∵
$$(1-x)^{-3}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k$$

∴
$$f(x)=(x^2-x+1)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k$$

∴
$$a_n=\binom{n}{2}-\binom{n+1}{2}+\binom{n+2}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$$

b. $\begin{cases} a_n=a_{n-1}+\dfrac{n(n+1)}{2} & (n\ge 1) \\ a_0=0 \end{cases}$

解：设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 为$\{a_0，a_1，\cdots，a_n，\cdots\}$的普通母函数，则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{n-1}+\frac{1}{2}n(n+1)\right]x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$$

$$=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\cdot f(x)+\frac{x}{(1-x)^3}$$

∴
$$f(x)=\frac{\dfrac{x}{(1-x)^3}}{1-x}=\frac{x}{(1-x)^4}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{4+n-1}{3}\cdot x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{4+n-1}{3}\cdot x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+2}{3}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{3}\cdot x^n$$

∴
$$a_n=\binom{n+2}{3}=\frac{1}{6}(n^3+3n^2+2n)$$

c. $\begin{cases} a_n=a_{n-1}+2^{n-1} & (n\ge 1) \\ a_0=0 \end{cases}$

解：设f（x）$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 为$\{a_0，a_1，\cdots，a_n，\cdots\}$的普通母函数，则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1}+2^{n-1})x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^n$$

$$=x\cdot f(x)+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n-\frac{1}{2}$$

$$=x\cdot f(x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{2}$$

∴ $$f(x)=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-x}=\frac{x}{(1-2x)(1-x)}=\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

∴ $$a_n=2^n-1$$

d. $\begin{cases}a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2} & (n\geq 2)\\ a_0=1\ ,\ a_1=-2\end{cases}$

解：设f（x）$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 为$\{a_0，a_1，\cdots，a_n，\cdots\}$的普通母函数，则

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$=1-2x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=1-2x+\sum_{n=2}^{\infty}(5a_{n-1}-6a_{n-2})\cdot x^n$$

$$=1-2x+5\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n-6\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n=1-2x+5x\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n-6x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$=1-2x+5x\big(f(x)-1\big)-6x^2\cdot f(x)$$

∴ $$f(x)=\frac{1-7x}{1-5x+6x^2}=\frac{1-7x}{(2x-1)(3x-1)}$$

$$=-\frac{5}{2x-1}+\frac{4}{3x-1}=\frac{5}{1-2x}-\frac{4}{1-3x}$$

$$=5\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n-4\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(5\cdot 2^n-4\cdot 3^n\right)x^n$$

∴ $$a_n=5\cdot 2^n-4\cdot 3^n\text{（}n=0，1，2，\cdots\text{）}$$

5.10 设a_n表示一个凸n边形被它的对角线划分成互不重叠的区域个数．其中假定没有三条对角线在该n边形内相交于一点．

（1）证明：当 n 大于等于 3 时，有

$$a_n=a_{n-1}+(n-1)(n-2)(n-3)/6+n-2$$

证明：如图 5-1 所示，在凸n边形中，选任意相邻两边为边的三角形设为ABC，设相邻边为AB、AC，暂不考虑顶点A，其剩余的$n-1$ 个顶点的所成的凸多边形，被它的对角线划分成互不重叠的区域个数为a_{n-1}．

另外，由点 A 引出的对角线有 $n-3$ 条，分三角形 ABC 为 $n-2$ 个区域．下面考虑：由点 A 引出的对角线对 $n-1$ 条边（去掉边 AB、AC，加入边 BC）的凸多边形划分所增加的区域数．

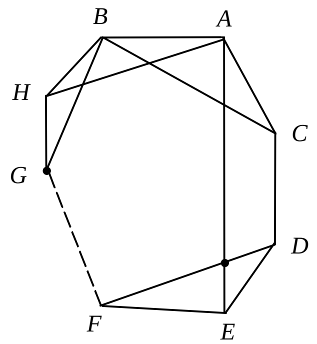


图　5-1

在 n–1 个顶点（不包含顶点 A）中任取三个点，不妨设为 D，E，F，其中必有一个顶点（设为 E）使得对角线 AE 把 D 和 F 分在两边．所以对角线 DF 必定与 AE 相交．由题意，这个交点不会有其他对角线通过，这说明每新增一个交点必与 n–1 个顶点中的三个顶点相对应，故新增的交点数为$\binom{n-1}{3}$个．

另一方面，从 A 引出的每一条对角线上的交点正好与这条对角线在凸 n–1 边形内截成的线段数相同，而每一线段恰好把凸 n–1 边形内某一区域分为 2 个，故新增区域数为$\binom{n-1}{3}$个．于是，由加法规则知，有

$$a_n = a_{n-1} + \binom{n-1}{3} + n-2 = a_{n-1} + (n-1)(n-2)(n-3)/6 + n-2 \quad (n \geq 3)$$

（2）设$a_0=a_1=a_2=0$，求出序列（a_0，a_1，a_2，…，a_n，…）的普通母函数，从而求出a_n的表达式．

解：设$\{a_n\}$的普通母函数为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

则有

$$-xf(x) = -x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \tag{2}$$

（1）、（2）式相加得

$$\begin{aligned}(1-x)f(x) &= \sum_{n=3}^{\infty}(a_n - a_{n-1})x^n \\ &= \sum_{n=3}^{\infty}\left(\binom{n-1}{3} + n-2\right)x^n \quad \text{（由（1）题结论）}\end{aligned}$$

故

$$f（x）=\frac{1}{1-x}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\binom{n-1}{3}+n-2\right)x^n$$

$$=（\binom{3}{3}x^4+\binom{4}{3}x^5+\cdots+\binom{n-1}{3}x^n+\cdots）（1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots）$$

$$+（x^3+2x^4+3x^5+\cdots+nx^{n+2}+\cdots）（1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots）$$

由（1.23）式有

$$\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\binom{2}{k}+\cdots+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k+1}$$

取 k=3 展 开 f（x） 可 得 x^n 的 系 数 为

$$a_n=（（n–2）+（n–3）\cdots+1）+\left(\binom{n-1}{3}+\binom{n-2}{3}+\cdots+\binom{3}{3}\right)$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\binom{n}{4}$$

5.11　在一圆周上任取n个不相同的点，过每两点作一条弦．假设这些弦中没有三条在圆内相交于一点，令a_n表示这些弦将圆分成的区域数．证明

$$a_n=\binom{n}{4}+\binom{n}{2}+1$$

证明：利用上题（2）求解．

假如把圆周上每相邻两点连接起来，可得一个凸 n 边形和 n 块弓形的区域．由 5.10 题（2）得，凸 n 边形中的区域数是

$$b_n=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\binom{n}{4}$$

所以有

$$a_n=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\binom{n}{4}+n$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}+\binom{n}{4}+1$$

$$=\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+1$$

5.12　（1）证明：设边长为整数且最大的边长为l的不全等的三角形的个数是a_l，则有

$$a_l=\begin{cases}(l+1)^2/4 & l\text{是奇数}\\(l+1)^2/4 & l\text{是偶数}\end{cases}$$

证明：令三角形的边长分别为 a，b，c，并且 $a\ge b\ge c$.

① 当 l 是偶数时，即令 $l=2n$，则所求的三角形中 $a=l=2n$，b 的取值只可能是 $2n$，$2n-1$，…，$n+1$.

如果 $b=2n$，则 c 可以为 $2n$，$2n-1$，…，2，1，共有 $2n$ 种不全等的三角形；

如果 $b=2n-1$，则 c 可以为 $2n-1$，$2n-2$，…，2，共有 $2n-2$ 种不全等的三角形；

……

如果 $b=n+2$，则 c 可以为 $n+2$，$n+1$，n，$n-1$，共 4 种不全等的三角形；

如果 $b=n+1$，则 c 可以为 $n+1$，n，共两种不全等的三角形；

故最大边长为 $l=2n$ 的不全等的三角形总共有

$$2n+(2n-2)+(2n-4)+\cdots+4+2=n(n+1)$$
$$=\frac{l(l+2)}{4}$$

② 当 l 是奇数时，即令 $l=2n+1$，则所求的三角形中 $a=l=2n+1$，b 的取值只可能是 $2n+1$，$2n$，…，$n+1$.

如果 $b=2n+1$，则 c 可以为 $2n+1$，$2n$，…，2，1，共 $2n+1$ 种不全等的三角形；

如果 $b=2n$，则 c 可以为 $2n$，$2n-1$，…，2，共 $2n-1$ 种不全等的三角形；

……

如果 $b=n+2$，则 c 可以为 $n+2$，$n+1$，n，共 3 种不全等的三角形；

如果 $b=n+1$，则 c 可以为 $n+1$，共 1 种不全等的三角形；

故最大边长为 $l=2n+1$ 的不全等的三角形总共有

$$(2n+1)+(2n-1)+(2n-3)+\cdots+3+1=(2n+2)^2/4$$
$$=\frac{(l+1)^2}{4}$$

故
$$a_l=\begin{cases}(l+1)^2/4 & l\text{是奇数}\\ (l+2)l/4 & l\text{是偶数}\end{cases}$$

（2）设 a_n 表示每一边长都不超过 $2n$ 的三角形的个数，b_n 表示每一边长都不超过 $2n+1$ 的三角形的个数，求 a_n 和 b_n 的表达式.

解：a_n 就是最大边长分别为 1，2，…，$2n-1$，$2n$ 的不全等的三角形的个数，则由（1）得

$$a_n=\frac{(1+1)^2}{4}+\frac{(2+2)\times 2}{4}+\frac{(3+1)^2}{4}+\frac{(4+2)^2\times 4}{4}\cdots+\frac{(2n-1+1)^2}{4}+\frac{(2n+2)\times 2n}{4}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1+1)^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k+2)\times 2k}{4}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

即

$$a_n=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

类似地，b_n就是最大边长分别为 1，2，…，$2n-1$，$2n$，$2n+1$ 的不全等的三角形的个数，而最大边长分别为 1，2，…，$2n-1$，$2n$的不全等的三角形的个数已求得为a_n，故

$$b_n=a_n+\frac{(2n+1+1)^2}{4}$$
$$=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}+\frac{(2n+1+1)^2}{4}$$
$$=\frac{(n+1)(4n^2+11n+6)}{6}$$

即

$$b_n=\frac{(n+1)(4n^2+11n+6)}{6}$$

5.13　证明第二类Stirling数S_2（n，k）具有性质：

（1）S_2（n，2）$=2^{n-1}-1$

证明：

方法一：

因为 $S_2(n+1,\ k)=S_2(n,\ k-1)+kS_2(n,\ k)$，所以

$$S_2(n,\ 2)=S_2(n-1,\ 1)+2S_2(n-1,\ 2)=1+2+2^2S_2(n-2,\ 2)$$
$$=1+2+2^2S_2(n-3,\ 1)+2^3S_2(n-3,\ 2)$$
$$=1+2+2^2+2^3S_2(n-4,\ 1)+2^4S_2(n-4,\ 2)$$
$$\cdots\cdots$$
$$=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-2}$$
$$=\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=2^{n-1}-1$$

方法二：

S_2（n，2）表示n只不同的球放入 2 个相同的盒子，盒子不空的方式数．这等价于将除某个球a_1外的$n-1$ 只球任意放入 2 个盒子，再将a_1加入某个盒子（盒子不空）的方式数．$n-1$ 只不同的球放入 2 个盒子，有 2^{n-1}种放法，其中有一种盒子空，故盒子不空有 $2^{n-1}-1$ 种．

（2）S_2（n，n–1）$=\binom{n}{2}$

证明：S_2（n，n–1）表示n个不同的球放入n–1 个相同的盒子、盒子不空的方式数，它等价于首先从n个球中取出 2 个球出来放入某个盒子中，有$\binom{n}{2}$种取法，然后把剩下的n–2 个球放入n–2 个盒子中，每个盒子中放一个球，有 1 种放法，于是由乘法原理得

$$S_2(n，n-1)=\binom{n}{2}$$

5.14　利用 Stirling 数证明：

$$\sum_{x=1}^{m}x^n=\sum_{k=0}^{n}k!S_2(n，k)\binom{m+1}{k+1}$$

证明：n个球放入x个有标记的盒子且允许空盒的方法数是x^n.

n个球放入k个无标记盒子且不允许空盒的方法数是S_2（n，k），x个有标记盒子中选出k个的排列数是$\binom{x}{k}k!$，所以n个球恰好放入从x个有标记的盒子中选出的k个盒子中（选出的k个盒子不允许空盒，剩余的x–k个盒子即为空盒）的方法数是S_2（n，k）$\binom{x}{k}k!$．让k遍历 1～x，并累加不同的方法数，即得总的方法数x^n．所以有

$$x^n=\sum_{k=1}^{x}k!S_2(n，k)\binom{x}{k}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{x=1}^{m}x^n&=\sum_{x=1}^{m}\sum_{k=1}^{x}k!S_2(n，k)\binom{x}{k}\\
&=\sum_{x=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}k!S_2(n，k)\binom{x}{k}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{x=1}^{m}k!S_2(n，k)\binom{x}{k}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}(k!S_2(n，k))\sum_{x=1}^{m}\binom{x}{k}\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}k!S_2(n，k)\binom{m+1}{k+1}\ \text{（由式（1.33））}\\
&=\sum_{k=1}^{n}k!S_2(n，k)\binom{m+1}{k+1}\ （\because 当\ k>n\ 时，S_2(n，k)=0）\\
&=\sum_{k=0}^{n}k!S_2(n，k)\binom{m+1}{k+1}
\end{aligned}$$

故结论成立.

5.15　求下列和式之值：

（1）$1^3+2^3+\cdots+100^3$

解：由 5.14 题得

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{100}x^3&=\sum_{k=0}^{3}k!S_2(3,k)\binom{100+1}{k+1}\\&=\binom{101}{2}+2!S_2(3,2)\binom{101}{3}+3!S_2(3,3)\binom{101}{4}\\&=\binom{101}{2}+6\times\binom{101}{3}+6\times\binom{101}{4}\end{aligned}$$

（2）$1^4+2^4+\cdots+100^4$

解：由 5.14 题得

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{100}x^4&=\sum_{k=0}^{4}k!S_2(4,k)\binom{100+1}{k+1}\\&=\binom{101}{2}+2!S_2(4,2)\binom{101}{3}+3!S_2(4,3)\binom{101}{4}+4!S_2(4,4)\binom{101}{5}\\&=\binom{101}{2}+14\times\binom{101}{3}+36\times\binom{101}{4}+24\times\binom{101}{5}\end{aligned}$$

5.16　证明 § 5.6 节中的定理 5.11.

证明：设这n+1 个元素的集合为$\{a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}\}$．因为$B_{n+1}$是$n$+1 个元素的集合划分为不相交的非空子集的方式数，对于任一划分，a_1总是出现在某一子集中．不妨设这个子集有k个元素（k=1，2，⋯，n+1），则在此子集中的另外k–1 个元素将从n个元素a_2，a_3，⋯，a_{n+1}中去选取，其选取方式共有$\binom{n}{n-1}$种．对于每一种选取方式，对剩下的n+1–k个元素的集合再划分为不相交的非空子集的方式数为B_{n-k+1}．由乘法规则有

$$\binom{n}{k-1}B_{n-k+1}$$

对于 k=1，2，⋯，n+1，又由加法规则有

$$\begin{aligned}B_{n+1}&=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{n-1}B_{n-k+1}\\&=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{n-k+1}B_{n-k+1}\\&=\binom{n}{n}B_n+\binom{n}{n-1}B_{n-1}+\binom{n}{n-2}B_{n-2}+\cdots+\binom{n}{0}B_0\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

第六章　Pólya定理

一、内容提要

定义 6.1　给定非空集合G及G上的二元运算，若满足以下四个条件：

1．封闭性，即$\forall$ a, $b\in G$，有$a\circ b\in G$；

2．结合律成立，即$\forall$ a, b, $c\in G$，有$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$；

3．存在幺元e，即存在$e\in G$，使对$\forall$ $a\in G$，都有$e\circ a=a\circ e=a$；

4．G中每个元都存在逆元，即$\forall$ $a\in G$，$\exists$ $b\in G$，有$a\circ b=b\circ a=e$；

（元素b称为a的逆元，记为a^{-1}，即$b=a^{-1}$）.

则称G关于运算$\circ$作成一个群，或称$\langle G,\circ\rangle$是一个群，也简称G是一个群.

群$\langle G,\circ\rangle$中的运算$\circ$也称为乘法，a，$b\in G$，$a\circ b$可简记为ab；若G为有限集，则称G为有限群，$|G|$称为有限群G的阶；若运算满足交换律，即任意的a，$b\in G$，有$ab=ba$，则称G为交换群或Abel群.

定理 6.1　设G是一个群，e为其幺元

1．$e^{-1}=e$.

2．G中幺元唯一，每个元的逆元唯一.

3．G中消去律成立，即对$\forall$ a, b, $c\in G$，若$ab=ac$或$ba=ca$，则必有$b=c$.

4．$\forall$ a, $b\in G$，有$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

定义 6.2　设G是一个群，e为其幺元，对$a\in G$，n为正整数，定义

1．$a^{\circ}=e$

2．$a^{n}=a^{n-1}a$

3．$a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^{n}$

定理 6.2　设G是一个群，$a\in G$，对任意的整数m，n有

$$a^{m}a^{n}=a^{m+n}，\left(a^{m}\right)^{n}=a^{mn}$$

定义 6.3　设$\langle G,\circ\rangle$是一个群，H是G的非空子集，对G中同一运算$\circ$，若$\langle H,\circ\rangle$也是一个群，则称$\langle H,\circ\rangle$是$\langle G,\circ\rangle$的子群.

定理 6.3　设G是一个群，H是G的非空子集，则H是G的子群，当且仅当

1．对 $\forall\ a,\ b\in H$，有 $ab\in H$；

2．对 $\forall\ a\in H$，有 $a^{-1}\in H$．

定理 6.4 设G为一个有限群，$H\subseteq G$，$H\neq\phi$，若对任意的$a,\ b\in H$ 有 $ab\in H$，则H是G的子群．

定义 6.4 有限集合A上的一个双射（一一对应）σ 称为A上的一个置换．

定理 6.5 设S_n为n元集合A上所有置换构成的集合，则有：

1．$|S_n|=n!$．

2．对 $\forall\ \sigma,\ \tau,\ \alpha\in S_n$，有$(\sigma\tau)\alpha=\sigma(\tau\alpha)$．

3．$I\sigma=\sigma I=\sigma$ 对 $\forall\ \sigma\in S_n$ 均成立．

4．$\forall\ \sigma\in S_n$，有$\sigma^{-1}\sigma=\sigma\sigma^{-1}=I$．

定理 6.6 设S_n为n元集合A上所有置换构成的集合，对置换的乘法•，〈S_n，□〉构成一个阶$n!$的群，称为n次对称群．

定义 6.5 设σ 是A上的一个置换，若存在A中k个元素a_1，a_2，…，a_k，使$\sigma(a_1)=a_2$，$\sigma(a_2)=a_3$，…，$\sigma(a_{k-1})=a_k$，$\sigma(a_1)=a_1$且对A中其余元x，均有$\sigma(x)=x$，则称σ 为一个长为k的循环，简称k–循环或循环，记为$(a_1a_2\cdots a_k)$．

定理 6.7 任一置换可分解为若干不相交的循环的乘积．

定义 6.6 长为 2 的循环称为对换．

定理 6.8 任意的循环均可表示为一些对换的乘积．

推论 6.1 任一置换均可表示为一些对换的乘积．

定义 6.7 分解为对换的个数为偶（奇）数个的置换称为偶（奇）置换．

定理 6.9 设A_n为n元集A上的全体偶置换构成的集合，$n>1$，则对置换的乘法A_n构成一个$\frac{n!}{2}$阶的S_n的子群，称为n次交代群．

定理 6.10 对n次对称群S_n

$$\left|\left[(1)^{c_1}(2)^{c_2}\cdots(n)^{c_n}\right]\right|=\frac{n!}{c_1!c_2!\cdots c_n!\,1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}}$$

定义 6.8 一些有序对构成的集合称为一个关系．设R是一个关系，若对$\forall\ \langle a,\ b\rangle\in R$ 均有 a，$b\in A$，则称R为集合A上的一个关系．

定义 6.9 设R是集合A上的一个关系．

1．若对 $\forall\ x\in A$有$\langle x,\ x\rangle\in R$，则称 R 具有自反性．

2．若对 $\forall\ x,\ y\in A$，当$\langle x,\ y\rangle\in R$ 时必有$\langle y,\ x\rangle\in R$，则称 R 具有对称性．

3．若对 $\forall\ x,\ y,\ z\in A$，当$\langle x,\ y\rangle$，$\langle y,\ z\rangle\in R$时，必有$\langle x,\ z\rangle\in R$，则称 R 具有传递性．

4．A 上同时具有自反性、对称性和传递性的关系称为 A 上的等价关系．

定义 6.10 设R是集合A上的等价关系，$a\in A$，称

$$[a]=\{x \mid x\in A \text{ 且 } \langle a, x\rangle\in R\}$$

为 a 关于 R 的等价类，简称含 a 的等价类，a 称为代表元.

定理 6.11 设R是集合A上的等价关系，对$\forall\ a, b\in A$，有

1. $[a]\neq\phi$；
2. $a\in[b]\Leftrightarrow[a]=[b]$；$a\notin[b]\Leftrightarrow[a]\cap[b]=\phi$；
3. $\bigcup\limits_{x\in A}[x]=A$.

定理 6.12 由置换群G诱导的M上的关系R是M上的等价关系.

定理 6.13 设G是M上的置换群，$a\in M$，则G_a为G的子群，称为a的稳定子群.

定理 6.14 设G是M上的置换群，对$\forall\ a\in M$，$|G|=|[a]|\cdot|G_a|$.

定理 6.15 （Burnside引理）设G是集合M上的置换群，t为G诱导的M上的等价类的个数，则

$$t=\frac{1}{|G|}\sum_{\tau\in G}c_1(\tau)$$

其中$c_1(\tau)$为置换 τ 中 1–循环的个数.

定理 6.16 设N是n个对象的集合，$G=\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k\}$是$N$上的置换群，用$m$种颜色对$n$个对象着色，则本质上不同的着色方案数为

$$t=\frac{1}{|G|}\left[m^{c(\sigma_1)}+m^{c(\sigma_2)}+\cdots+m^{c(\sigma_k)}\right]$$

其中$c(\sigma_i)$为置换σ_i中所含的不相交的循环的个数.

二、习题解答

6.1 判断下列集合关于指定的运算是否构成群，若是，指出幺元和每个元的逆元．其中 Z 为整数集合.

a.集合 Z，①关于数的减法；②关于数的乘法；③对运算$\circ$：a，$b\in Z$，$a\circ b=5$.

b.奇数集合 O，关于数的加法.

c.给定$a>0$ 且$a\neq 1$，集合$A=\{a^n \mid n\in Z\}$，关于数的乘法.

d.$G=\{a+b\sqrt{2} \mid a，b\in Z\}$，①关于数的加法；②关于数的乘法.

e.$G=\{-1，0，1\}$，①关于数的加法；②关于数的乘法.

解：a．集合Z：

① 不是．因为不满足结合律.

② 不是．因为 2 不存在逆元.

③ 不是：因为不存在幺元.

b．不是．因为封闭性不成立.

c．是：$a^{\circ}=1$是幺元，$\left(a^{n}\right)^{-1}=a^{-n}$　$(-n\in Z)$

d．①是：0 是幺元，$\left(a+b\sqrt{2}\right)^{-1}=-a-b\sqrt{2}$.

②不是．因为 2（2=2+0$\cdot\sqrt{2}$）不存在逆元.

e．①不是．因为 1+1=2$\notin G$.

②不是．因为 0 无逆元.

6.2　设 Z 为整数集，定义 Z 中运算$\circ$为：a$\circ$b=a+b−1，证明〈Z，$\circ$〉是一个群.

证明：①$\forall$ a，$b\in Z$ ，$a\circ b=a+b-1\in Z$ ，显然满足封闭性；

②$\forall$ a，b，$c\in Z$ ，$(a\circ b)\circ c=(a+b-1)\circ c$

$$=(a+b-1+c-1)=(a+b+c-1-1)0$$
$$=a\circ(b\circ c)$$

故满足结合律；

③$\forall$ $a\in Z$ ，$\exists$ $e=1$，使得$a\circ e=e\circ a=(a+e-1)=(a+1-1)=a$.

故存在幺元；

④$\forall$ $a\in Z$ ，$\exists$ $b=-a+2\in Z$ ，使得$a\circ b=b\circ a=(a-a+2-1)=1=e$

即 $a^{-1}=-a+2$.

故每个元都存在逆元；

由定义 6.1 知，〈 $Z,\circ$ 〉是一个群.

6.3　设〈G，$\circ$〉是一个群，$a\in G$，对任意的整数m，n，证明$a^{m}a^{n}=a^{m+n}$及（a^{m}）$^{n}=a^{mn}$.

证明：

情况 1：m，n中存在一个为 0，不妨设n=0．此时，

$$a^{m}\circ a^{0}=a^{m}\circ e=a^{m}=a^{m+0} ,$$

其中 e 为幺元

$$\left(a^{m}\right)^{0}=e=a^{m\times 0}$$

情况 2：m，n均为正整数．此时

$$a^{m}\circ a^{n}\overset{\text{结合律}}{=\!=\!=\!=}\overbrace{(a\circ a\circ\cdots\circ a)}^{m\text{个}}\circ\overbrace{a\circ\cdots\circ a}^{n\text{个}}=\overbrace{a\circ a\circ\cdots\circ a}^{(m+n)\text{个}}=a^{m+n}$$

$$\left(a^{m}\right)^{n}=a^{m}\circ a^{m}\circ\cdots\circ a^{m}=a^{mn}$$

情况 3：m，n都不为 0，且存在负整数，如m<0．此时 $a^{m}=\left(a^{-1}\right)^{-m}$，所以情况 3 可以化为情况 2.

故结论成立.

6.4 设G是一个Abel群，证明对任意的a，$b\in G$，及任意的正整数n，有（ab）^{n}=a^nb^n.

证明：对n用数学归纳法.

当 n=1 时，$(ab)^1 = ab = a^1b^1$.

设 n=k，（$k\geq 1$）时，有$(ab)^k = a^k b^k$

对 n=k+1，有：

$$(ab)^{k+1} = (ab)^k (ab) = \left(a^k b^k\right)(ab)$$
$$= a^k \left(b^k a\right) b = a^k \left(ab^k\right) b = \left(a^k a\right)\left(b^k b\right) = a^{k+1} b^{k+1}$$

故对$\forall\ n \in Z^+$有$(ab)^n = a^n b^n$.

6.5 给定正整数 m，令 H=｛mk｜$k\in Z$｝，证明〈H，+〉是整数加群〈Z，+〉的子群.

证明：显然H是Z的子集.

因为$0 = m\times 0 \in H$ ，所以

$$H \neq \phi$$

对$\forall\ mk_1\ , mk_2 \in H \quad (k_1\ , k_2 \in Z)$，有：

$$(mk_1 + mk_2) = m(k_1 + k_2) \in H$$

又对$\forall\ mk \in H \quad (k \in Z)$，有：

$$(mk)^{-1} = -(mk) = m(-k) \in H$$

所以，$\langle H\ ,+\ \rangle$是$\langle Z\ ,+\ \rangle$的子群.

6.6 设 H 与 K 均为 G 的子群，证明 $H\cap K$ 也是 G 的子群．$H\cup K$ 是否是 G 的子群？为什么？

证明：设e是G的幺元，因H，K均为G的子集，故$e \in H$， $e \in$，从而$e \in H \bigcap K$，

这表明$H \bigcap K \neq \phi$，而$H \bigcap K \subseteq G$是显然的.

对$\forall\ a\ , b \in H \bigcap K$，有$a\ , b \in H$ 且$a\ , b \in K$

因为 H，K 是子群，故$ab \in H$ 且$ab \in K$，即$ab \in H \bigcap K$.

又对$\forall\ x \in H \bigcap K$，有$x \in H$ 且$x \in K$

因为 H，K 是子群，故$x^{-1} \in H$ 且$x^{-1} \in K$，即$x^{-1} \in H \bigcap K$.

综上，$H \bigcap K$ 是 G 的子群.

$H \bigcup K$ 不一定是 G 的子群．如取 H=K，则$H \bigcup K$ =H 是 G 的子群，而取$H = \left\{\ 2k\ \middle|\ k \in Z \right\}$，$k = \left\{\ 3k\ \middle|\ k \in Z \right\}$，则 H,K 分别为整数加群$\langle Z\ ,+\ \rangle$的子群，但$H \bigcup K$不是$\langle Z\ ,+\ \rangle$的子群.

6.7 设置换 $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$， $\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

a．将 σ 与 τ 分解为不相交的循环之积.

b．判断 σ 与 τ 的奇偶性.

c．计算 $\sigma\ \tau$，$\tau\ \sigma$ 和 $\tau\ \sigma\ \tau^{-1}$.

解：

a．$\sigma=(1\ \ 3\ \ 5\ \ 2\ \ 6)(4)(7)$

$\tau=(1\ \ 7)(2\ \ 6)(3\ \ 5\ \ 4)$

b．$\sigma=(1\ \ 6)(1\ \ 2)(1\ \ 5)(1\ \ 3)(1\ \ 4)(4\ \ 1)(1\ \ 7)(7\ \ 1)$ 是偶置换

$\tau=(1\ \ 7)(2\ \ 6)(3\ \ 4)(3\ \ 5)$ 是偶置换

c．$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&1&2&5&4&6&3\end{pmatrix}$

$=(1\ \ 7\ \ 3\ \ 2)(4\ \ 5)(6)$

$\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&2&4&3&6&7&1\end{pmatrix}$

$=(1\ 5\ 6\ 7)(3\ \ 4)(2)$

$$\tau\sigma\tau^{-1}=\tau\sigma\circ\tau^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&2&4&3&6&7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&6&4&5&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&7&3&6&4&2&5\end{pmatrix}$$

$$=(1)(3)(2\ \ 7\ \ 5\ \ 4\ \ 6)$$

6.8　求三次对称群S_3的所有子群.

解：

$$I=(1)(2)(3)=(1)$$

$$a_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1\ \ 2)(3)$$

$$a_2=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&1&2\end{pmatrix}=(1\ \ 3)(2)$$

$$a_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(1)(2\ \ 3)$$

$$a_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\ \ 2\ \ 3)$$

$$a_5=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}=(1\ \ 3\ \ 2)$$

任意子群都不是空的，所有子群：

$H_0=\{I\}$，$H_1=S_3$，$H_2=\{I,(1\ \ 2)\}$，$H_3=\{I,(1\ \ 3)\}$，$H_4=\{I,(2\ \ 3)\}$，

$H_5=\{I\ ,(1\quad 2\quad 3)\ ,(1\quad 3\quad 2)\}$

6.9　下列集合 G 是否是 M=｛1，2，3，4，5｝上的置换群？若是，求其循环指标多项式.

a．G=｛（1），（15），（24），（15）（24）｝

b．G=｛（1），（1234），（13）（24），（1432）｝

c．G=｛（1），（12），（23），（13）｝

解：

a．是：格式 $(1)^5$的 1 个，$(1)^3(2)^1$的 2 个，$(1)^1(2)^2$的 1 个．其循环指标多项式为

$$P\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}=\frac{1}{4}\left(x_1^5+2x_1^3x_2+x_1x_2^2\right)$$

b．是：格式 $(1)^5$的 1 个，$(1)^1(4)^1$的 2 个，$(1)^1(2)^2$的 1 个．其循环指标多项式为

$$P\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}=\frac{1}{4}\left(x_1^5+2x_1x_4+x_1x_2^2\right)$$

c．不是．因为

$$(1\quad 2)(2\quad 3)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&4&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 3)\notin G\text{，不具有封闭性.}$$

下列各题的计数方案均指本质上不同的方案.

6.10　用三种颜色给一个正四面体的各面着色，求不同的着色方案数.

解：给正四面体着色，即 $N=\{1,2,3,4\}$ 四个面为着色对象，如图 6-1 所示.

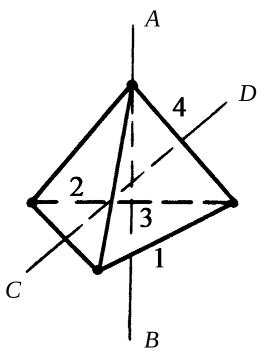


图　6-1

（1）不动．对应的置换 $I=(1)(2)(3)(4)$，格式为 $(1)^4$.

（2）以顶点及相对的底面三角形中心的连线（如图 6-1 所示的 AB）为轴旋转±120º. 因有四条轴可选，对应 8 个格式相同的置换，其中一个为

（1）（234），格式为（1）^{1}（3）^{1}

（3）绕两条不相交的棱的中点的连线（如图 6-1 所示的CD）旋转$180°$，对应的置换为（12）（34），格式为（2）^{2}，这样的轴有 3 条，则有 3 个格式相同的置换．

所以

$$t=\frac{1}{12}\left(3^4+8\times3^2+3*3^2\right)=15$$

故有 15 种不同的着色方案．

6.11　用两种颜色给一个正方体的八个顶点着色，求其不同的着色方案数．

解：如图 6-2 所示，顶点集合 $N=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 上的置换有：

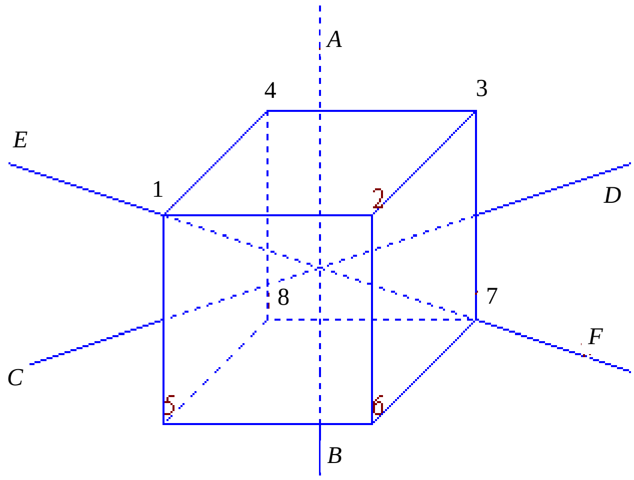


图　6-2

（1）不动，$I=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$，格式为（1）^{8}

（2）绕对立面的中心的连线为轴（如图中的 AB）逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$，$\frac{2\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$，对应的置换为（1 4 3 2）（6 5 8 7），（1 3）（2 4）（5 7）（6 8），（1 2 3 4）（5 6 7 8），格式分别为（4）^{2}，（2）^{4}，（4）^{2}，这样的轴为 3 条，共计 9 个置换．

（3）绕正方体的对角线（如：EF）旋转$\pm120°$，对应的置换为（1）（7）（4 2 5）（3 6 8）和（1）（7）（2 4 5）（6 3 8），格式为（1）^{2}（3）^{2}，这样的对角线有 4 条，共计 8 个置换．

（4）绕平行且不同面的两条棱的中点的连线为轴（如 CD）旋转$180°$，（1 5）（2 8）（3 7）（4 6），格式为$(2)^4$，同类置换为 6 个

∴共$|G|=24$个置换

$$t=\frac{1}{24}\left(2^8+3\times2^4+6\times2^2+8\times2^4+6\times2^4\right)=23$$

故共有 23 个不同的着色方案．

6.12　一个圆等分为 6 个相同的扇形，分别涂以三种颜色，求其不同的着色方案数．

解：如图 6-3 所示，扇形集合 $N=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的置换G为：

（1）不动，对应的置换为（1）（2）⋯（6），$I=$（1）（2）（3）（4）（5）（6），格式为（1）^{6}．

（2）绕圆心 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$，π，$\frac{4\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{3}$，对应的置换分别为（1 2 3 4 5 6），（1 3 5）（2 4 6），（1 4）（2 5）（3 6），（1 5 3）（2 4 6），（1 6 5 4 3 2），共计 5 个，其中格式为（6）^{1}的有两个，格式为（3）^{2}的有两个，格式为（2）^{3}的有一个．

（3）沿直径AB翻转，(1　2)(3　6)(4　5)，格式为（2）^{3}，同类的置换共 3 个．

（4）沿直径HK翻转，(2)(5)(1　3)(4　6)，格式为（1）^{2}（2）^{2}，同类的置换共 3 个．

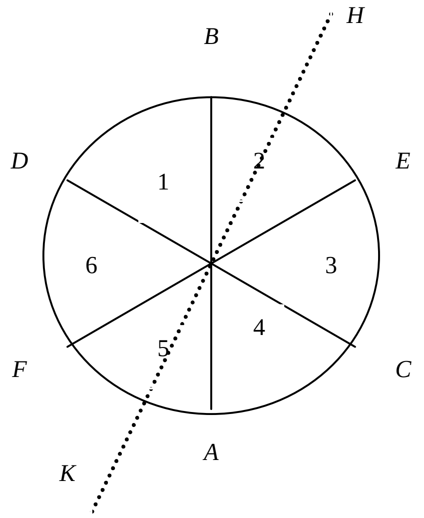


图　6-3

共 12 个置换构成扇形集上的置换群，由 Pólya 定理得：

$$t=\frac{1}{12}\left(3^6+2\times3^1+2\times3^2+3^3+3\times3^3+3\times3^4\right)=92$$

故共有 92 个不同的着色方案．

6.13　用红、黄、绿三色的珠子作成一个具有 5 颗珠子的项链，求其不同的项链数．已知红珠有 3 颗；黄、绿珠子每种都有 6 颗．

解：用红、黄、绿三色的珠子作成一个具有 5 颗珠子的项链，即用红、黄、绿三种颜色给五颗珠子作色，如图 6-4 所示标记 5 颗珠子为 $N=\{1,2,3,4,5\}$，其上的置换有：

（1）不动，$I=$（1）(2)（3）(4)（5），格式为（1）^{5}．

（2）绕圆心 O 逆时针旋转 $\frac{2\pi}{5}$，$\frac{4\pi}{5}$，$\frac{6\pi}{5}$，$\frac{8\pi}{5}$，其中旋转 $\frac{2\pi}{5}$ 对应的置换为（1　2　3　4　5），类似的置换共 4 个，格式均为（5）^{1}．

（3）沿 1O半径进行翻转，对应的置换为（1）(2 5)(3 4)，格式（1）^{1}（2）^{2}，类似的置换共 5 个.

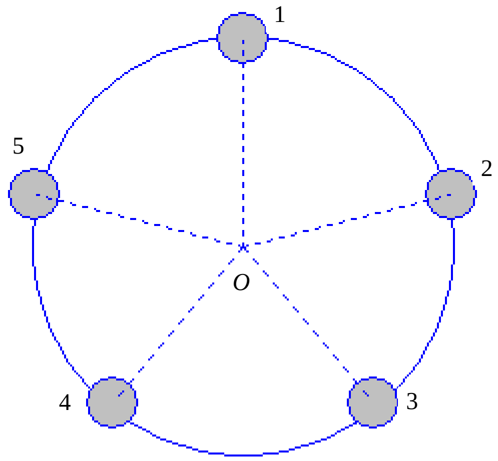


图 6-4

∴循环指标多项式为

$$P(x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4\ ,\ x_5)=\frac{1}{10}\left(x_1^5+4x_5+5x_1x_2^2\right)$$

故

$$P(3,3,3,3,3)=\frac{1}{10}\left(3^5+4\times3+5\times3\times3^2\right)=39$$

因为只有 3 颗红珠子，则要在 39 种着色方案中除去全红的一种以及四红的两种.

故共有 36 个不同的着色方案.

6.14 用两颗红珠、一颗黄珠和一颗绿珠能做成多少种具有四颗珠子的项链？

解：如图 6-5 所示，用红（r），黄（y），绿（b）三种颜色为 4 颗珠子着色，珠子集合 $N=\{1,2,3,4\}$上的置换群：

（1）不动，$I=$（1）(2)(3)(4)，格式为（1）^{4}.

（2）绕圆心O旋转$\pm\frac{\pi}{2}$，对应的置换为（1 2 3 4)，（1 4 3 2)，格式均为（4）^{1}.

（3）绕圆心O旋转π，对应的置换为（1 3)(2 4)，格式为（2）^{2}.

（4）沿直径 13，24 翻转，对应的置换分别为（1）(3)(2 4)，(2)(4)(1 3)，格式均为（1）^{2}（2）^{1}.

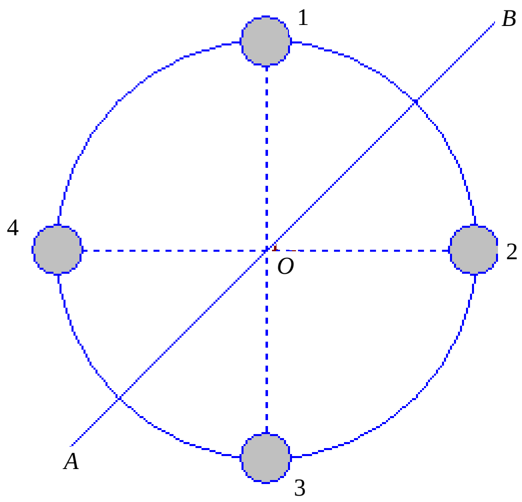


图　6-5

（5）沿AB轴翻转，对应的置换为（1　2）(3　4)，格式为（2)^2，类似的置换共 2 个．共计 8 个置换构成的置换群，其循环指标多项式：

$$P(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=\frac{1}{8}\left(x_1^4+2x_4+x_2^2+2x_1^2x_2+2x_2^2\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(x_1^4+3x_2^2+2x_1^2x_2+2x_4\right)$$

分别用 $x_i=r^i+y^i+b^i$ 代入得

$$P(r+y+b,\ r^2+y^2+b^2,\ r^3+y^3+b^3,\ r^4+y^4+b^4)$$
$$=\frac{1}{8}\left[\ (r+y+b)^4+3\left(r^2+y^2+b^2\right)^2+2(r+y+b)^2\left(r^2+y^2+b^2\right)+2\left(r^4+y^4+b^4\right)\ \right]$$

展开后，r^2yb 的系数即为所求，它只能在$(r+y+b)^4$ 和 $2(r+y+b)^2\left(r^2+y^2+b^2\right)$ 中取得．

在$(r+y+b)^4$ 中 r^2yb 的系数为 $C_4^2\cdot 2=12$；在 $2(r+y+b)^2\left(r^2+y^2+b^2\right)$ 中 r^2yb 的系数为 2×2=4.

∴ r^2yb 的系数为 2.

故有 2 个不同的项链.

6.15　一张卡片被等分成 4×2 个小方格，将其中 4 个小方格的正中打孔，问有多少种打孔方案？经旋转或翻转能重合的方案算一种.

解：本题相当于使用黑、白两种颜色去着色 4×2 的小方格，其中黑色有 4 个．将小卡片分成的 4×2 个小方格分别标记，则小方格的集合 $N=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，如图 6-6 所示其置换群为：

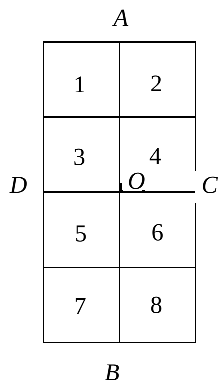


图　6-6

（1）不动的置换 $I=$（1）（2）（3）（4）（5）（6）（7）（8），格式为（1）^{8}.

（2）绕中心点O旋转π，对应的置换为（1　8）（2　7）（3　6）（4　5），格式为（2）^{4}.

（3）沿AB翻转，对应的置换为（1　2）（3　4）（5　6）（7　8），格式为（2）^{4}.

（4）沿CD翻转，对应的置换为（1　7）（2　8）（3　5）（4　6），格式为（2）^{4}.

共 4 个置换，其循环指标多项式：

$$P(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8)=\frac{1}{4}\left[x_1^8+3x_2^4\right]$$

用 $x_k=b^k+w^k$ 代入得：

$$P(b+w,\ b^2+w^2,\ b^3+w^3,\cdots,\ b^8+w^8)$$
$$=\frac{1}{4}\left[\left(b+w\right)^8+3\left(b^2+w^2\right)^4\right]$$

令 b=1，则 w^4 项的系数即为所求.

$$P(1+w,1+w^2,1+w^3,\cdots,1+w^8)$$
$$=\frac{1}{4}\left[\left(1+w\right)^8+3\left(1+w^2\right)^4\right]$$

其 w^4 的系数为

$$\frac{1}{4}\left[C_8^4+3C_4^2\right]=\frac{1}{4}\left[70+18\right]=22$$

故有 22 种打孔方案.

6.16　一张卡片被等分为 1×6 个小方格，在其中某些小方格中任意引一条对角线，问有多少种方式？经旋转能重合的方式算一种.

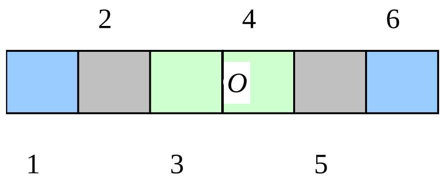
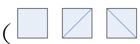


图　6-7

解一（Burnside引理）：如图 6-7 所示每个小方格引对角线的方式有 3 种（），故 6 个小方格引对角线的方法共有 3^6=729 种，令M=$\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{729}\}$．一次引对角线绕中心点旋转 180°能重合算一种，则建立由这类变换而引出的M中的元的置换如下：

（1）不动的置换 I，即

$$I=(x_1)(x_2)(x_3)\cdots(x_{729})，有 c_1(I)=729$$

（2）绕中点转 180°，记为σ．因当且仅当位置为（1 和 6），（2 和 5），（3 和 4）引对角线的方式相同时，x_i转 180°才是自身，所以有

$$c_1(\sigma)=3^3=27$$

令 $G=\{I, \sigma\}$显然 G 是群，且$|G|$=2．由 Burnside 引理．G 导出的等价类个数

$$t=\frac{1}{2}(729+27)=378$$

故共有 378 种不同的方式．

解二（Pólya定理）：该题相当于用三种不同的颜色对 1×6 个小方格着色，求不同的着色方案数．令M为 6 个小方格构成的集合，使 1×6 小方格重合的旋转而导出的M上的置换群G中含 2 个置换，其中格式为$(1)^6$的一个（不动的置换），格式为$(2)^3$的 1 个（绕中心O旋转π），如图 6-7 所示．从而G的循环指标多项式为：

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=\frac{1}{2}\left(x_1^6+x_2^3\right)$$

$$\therefore P(3,3,3,3,3,3,3)=\frac{1}{2}\left(3^6+3^3\right)=378$$

故共有 378 种不同的方式．

6.17　在一个正方体的 6 个面的每一面上任意引一条对角线，有多少种不同的方案？

解：该题相当于用两种不同的颜色对正方体的 6 个面着色，求不同的着色方案数．令M为正方体的 6 个面构成的集合．使正方体重合的旋转而导出的M上的置换群G中含 24 个置换，其中格式为$(1)^6$的一个，格式为$(1)^2(4)^1$的 6 个，格式为$(1)^2(2)^2$的 3 个，格式为$(2)^3$的 6 个，格式为$(3)^2$的 8 个（见原教材第六章§6.4 节的例题 4）．从而G的循环指标多项式为：

$$P(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6)=\frac{1}{24}\left(x_1^6+6x_1^2x_4+6x_2^3+3x_1^2x_2^2+8x_3^2\right)$$

$$\therefore P(2,2,2,2,2,2)=\frac{1}{24}\left(2^6+6\cdot 2^2\cdot 2+6\cdot 2^3+3\cdot 2^2\cdot 2^2+8\cdot 2^2\right)=10$$

故共有 10 个不同的方案.

6.18　用黑、白两色对一个正方体的 6 个面着色，记a_n为恰有n个面着黑色的方案数，n=0，1，2，3，4，5，6，试建立｛a_n｝的普通母函数，并求a_3.

解：由上题知，使正方体重合的旋转而导出的M上的置换群G的循环指标多项式为：

$$P(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6)=\frac{1}{24}\left(x_1^6+6x_1^2x_4+6x_2^3+3x_1^2x_2^2+8x_3^2\right)$$

令黑色为b，白色为w，此时令w=1，则a_n的普通母函数为：

$$P(1+b,1+b^2,+b^3,1+b^4,1+b^5,1+b^6)$$

$$=\frac{1}{24}\left((1+b)^6+6(1+b)^2(1+b^4)+6(1+b^2)^3+3(1+b)^2(1+b^2)^2+8(1+b^3)^2\right)$$

$$a_3=\frac{1}{24}(\binom{6}{3}+3\times 2\times 2+8\times 2)=2$$

6.19　在一个正四面体的每个面上任意引一条高，有多少方案？

解：由于每个面可以引三条不同的高，该题相当于用三种不同的颜色对正四面体的每个面着色，求不同的着色方案数．由第 6.10 题得，正四面体旋转所得置换群G的循环指标多项式为：

$$P(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=\frac{1}{12}\left(x_1^4+8x_1x_3+3x_2^2\right)$$

$$\therefore\quad P(3,3,3,3)=\frac{1}{12}\left(3^4+8\cdot 3\cdot 3+3\cdot 3^2\right)=15$$

故共有 15 个不同的方案.

6.20　用 7 种颜色给一个正六边形的六个顶点着色，求其中出现在顶点上的颜色数至少为 4 的着色方案数.

解：如图 6-8 所示，正六边形的六个顶点为 $N=\{1,2,3,4,5,6\}$，其上的置换有：

（1）不动，I =（1）（2）（3）（4）（5）（6），格式为（1）^{6}.

（2）绕中心点 O 逆时针旋转$\frac{\pi}{3}$，对应的置换为（1）（2）（3）（4）（5）（6），格式为（6）^{1}，同类的置换还有绕中心点O逆时针旋转$\frac{5\pi}{3}$，共 2 个.

（3）绕中心点O逆时针旋转$\frac{2\pi}{3}$，对应的置换为（1 3 5）（2 4 6），格式为（3）^{2}，同类的置换还有绕中心点O逆时针旋转$\frac{4\pi}{3}$，共 2 个.

（4）绕中心点O逆时针旋转π，对应的置换为（1 4）（2 5）（3 6），格式为（2）^{3}.

（5）绕AB轴翻转：对应的置换为（1　2）（3　6）（4　5），格式为（2）^{3}，这样的轴有 3 条，则同类置换有 3 个.

（6）绕对角线 14 翻转：对应的置换为（1）（4）（2　6）（3　5），格式为（1）^{2}（2）^{2}，这样的轴有 3 条，则同类置换有 3 个.

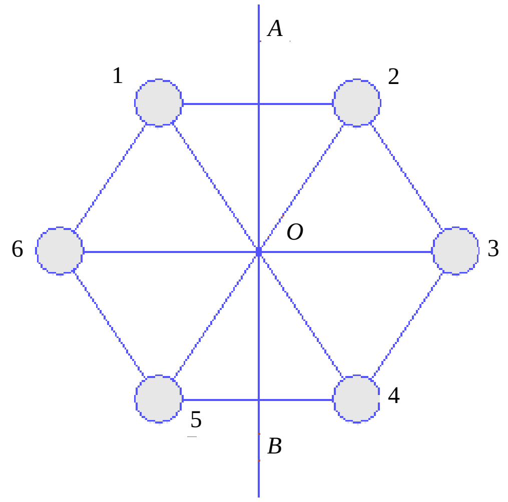


图　6-8

共计 12 个置换构成的置换群 G，其循环指标多项式为：

$$P\{x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,\ x_6\}=\frac{1}{12}\left(x_1^6+2x_6+2x_3^2+x_2^3+3x_2^3+3x_1^2x_2^2\right)$$

将 $x_i=b_1^i+b_2^i+b_3^i+b_4^i+b_5^i+b_6^i+b_7^i$ 代入

$$P(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7,\ \cdots,\ b_1^{\ 6}+b_2^{\ 6}+b_3^{\ 6}+b_4^{\ 6}+b_5^{\ 6}+b_6^{\ 6}+b_7^{\ 6})$$
$$=\frac{1}{12}\left[\left(\sum_{i=1}^{7}b_i\right)^6+2\sum_{i=1}^{7}b_i^6+2\left(\sum_{i=1}^{7}b_i^3\right)^2+4\left(\sum_{i=1}^{7}b_i^2\right)^3+3\left(\sum_{i=1}^{7}b_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{7}b_i^2\right)^2\right]$$

则至少有 4 个不同的 b_i 同时出现的项有：$\left(\sum_{i=1}^{7}b_i\right)^6$，$3\left(\sum_{i=1}^{7}b_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{7}b_i^2\right)^2$，它们的系数分别为 $\binom{6}{3}\times7\times6\times5\times4+\frac{1}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\times7\times6\times5\times4+\binom{6}{2}\times7\times6\times5\times4\times3+7\times6\times5\times4\times3\times2=97440$，$3\times4\times\binom{7}{2}\binom{5}{2}$=2520.

故出现在顶点上的颜色数至少为 4 的着色方案数为 $\frac{1}{12}(97440+2520)=8330$.

第七章　网　络　流

一、内容提要

在日常生活中，人们常见的公路网、铁路网、通信网、天然煤气管道网等都有一个共同的特点，这就是在网络上都有物资，人或信息等某种量在从一个地方流向其他的地方时，我们称这样的量为网络上的流．在这一章，我们将以运输网络为例，介绍网络上的流与最大流以及流的最小费用等问题，从而使读者对网络流理论及其重要的应用有一个大致的了解．

（一）基本概念

定义 7.1　一个连通的且无环的有向图 G（V，E），如果满足下列条件：

1．有且仅有一个入度为 0 的顶点 s．这个顶点 s 称为发点或源．

2．有且仅有一个出度为 0 的顶点 t．这个顶点 t 称为收点或汇．

3．每条边上都带有一个非负数的权，称做边的容量．记边（i，j）的容量为 c（i，j），则称图 G（V，E）为运输网络，简称为网络．

定义 7.2　在网络 G=（V，E）中，如每条边（i，j）都对应一个非负实数 f（$\underline{i}$，j），且它满足条件：

1．f（$\underline{i}$，j）$\le c$（$\underline{i}$，j），如果不存在边（$\underline{i}$，j），则 f（$\underline{i}$，j）=0．

2．对所有中间点 j，恒有

$$\sum_{i\in V} f(i,j)=\sum_{k\in V} f(j,k)$$

则称 f（$\underline{i}$，j）为边（$\underline{i}$，j）的流量，f 称为网络 G 的流函数，简称流 f.

定义 7.3　在网络 G 中，（$\underline{i}$，j）$\in E$，如果 f（$\underline{i}$，j）=c（$\underline{i}$，j），则称边（$\underline{i}$，j）是饱和的．如果 f（$\underline{i}$，j）<c（$\underline{i}$，j），则称边（$\underline{i}$，j）是非饱和的．

定义 7.4　在网络 G 中，发点 s 流出的总量 $\sum_{j\in v} f(s,j)$ 称为流 f 的值，记为 f_v，即

$$f_v=\sum_{j\in v} f(s,j)$$

定义 7.5　在网络 G 中，使流 f 的值 f_v 达到最大的流称为最大流．

定义 7.6　设 G=（V，E）是一个运输网络，如果

$$V = S \cup \overline{S}\ ，\ S \cap \overline{S} = \Phi$$

且发点 $s \in S$，收点 $t \in \overline{S}$，则从 S 中的顶点指向 $\overline{S}$ 中的顶点的所有边构成的集合称作网络 G 的一个割，记作 $(S, \overline{S})$.

定义 7.7　在一个割 $(S, \overline{S})$ 中，所有边的容量之和称为割 $(S, \overline{S})$ 的容量，用 $c(S, \overline{S})$ 表示，即

$$c(S, \overline{S}) = \sum_{\substack{i \in s \\ j \in \overline{s}}} c(i, j)$$

定理 7.1　在一给定的运输网络 G=（V，E）中，任一流的值 f_V 不超过该网络的任一割的容量，即

$$\max f_V \le \min c(S, \overline{S})$$

推论　在一个运输网络中，从发点流出的总量等于收点流进的总量，即

$$\sum_{i \in V} f(s, i) = \sum_{j \in V} f(j, t)$$

定义 7.8　在网络 G=（V，E）中，如果顶点序列 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 满足以下条件：

1．$s_0 = s, s_n = t, s_i \in V, i = 0, 1, \cdots, n$

2．$(s_j, s_{j+1}) \in E$ 或 $(s_{j+1}, s_j) \in E, j = 0, 1, \cdots, n-1$

则称序列 $(s_1, s_2 \cdots s_n)$ 为 G 中从顶点 s 到顶点 t 的一条通路．若 $(s_j, s_{j+1}) \in E$ 时，称它为前向边；反之，若 $(s_{i+1}, s_i) \in E$ 时，称它为后向边．

定义 7.9　在网络 G 中，从 s 到 t 的通路上，若对所有的前向边 (i,j) 都有 $f(i, j) < c(i, j)$，对于所有的后向边（i，j），恒有 f（i，j）>0，则称这条通路为从 s 到 t 的关于 f 的可增扩路．

注意：在网络中 f 可增扩路的存在是有意义的，因为这意味着 f 不是最大流．

定理 7.2　在任一运输网络中，最大流的值等于最小割的容量，即 $\max f_v = \min c(s, \bar{s})$.

推论　在一个运输网络中，若所有边的容量都是整数，则必存在整数最大流（即每边的流量都取整数值）．

最大流最小割定理有如下的推广：

1．具有无向边的网络：将具有无向边的网络按照下面的方法变成有向边的网络．①将原网络中的无向边（i，j）用两条方向相反的有向边（i，j）和（j，i）代替．②无向边上的容量 c（i，j）分别赋于两个有向边（i，j）和（j，i），使这两个边有相同的容量．

2．多发点多收点的网络：对于多个发点 s_1，s_2，…，s_m 和多个收点 t_1，t_2，…，t_m 的网络可按照下面的方法变成只有一个发点和一个收点的网络：①在网络 G' 中增加两个新的顶点 s 和 t．②从顶点 s 到顶点 s_1，s_2，…，s_m 分别作边（s，s_1），（s，s_2），…，（s，s_m），

并赋给这些边的容量为∞．③从顶点t_1，t_2，…，t_m到顶点t分别作边（t_1，t)，(t_2，t)，…，（t_n，t)，并赋给这些边的容量为∞．④令s为G的发点，t为G的收点．

3．顶点具有容量的网络：对顶点具有容量的网络，可以按照下面的方法将其变为仅有边容量的网络，①将顶点i分成两个顶点i' 和i''．②从顶点i' 向顶点i''作一条边（i'，i'')，且令c（i'，i''）$=c$（i)．③将原来所有的边（h，i）都改为（h，i'')，(i，j）改为（i''，j)，其中，h，$j\in V$.

4．动态流问题：在一个网络上，从顶点 i 出发的流经过边（i，j）到达顶点 j 所需时间，这种把流的时间同时考虑的问题叫做动态流问题．对于这个问题只需将原网络变成一个时间扩张网络（方法见原教材第七章 § 7.5 节)，再求时间扩张网络的最大流即可．

定义 7.10　对网络中的每条边（i，j)，都有两个非负数 c（i，j）和 b（i，j）存在，且 b（i，j）$\le c$（i，j)．如果不等式 b（i，j）$\le f$（i，j）$\le c$（i，j）对网络中的所有边都成立，则称流 f 为该网络的可行流．

在一个已知的运输网络中，有两个问题需要解决：

1．该网络的可行流是否存在?

2．如果存在可行流，又如何求出该网络的最大可行流．下面的两个定理回答了这两个问题．

定理 7.3　在一已知的运输网络中，对任一可行流 f 和任一割 $(S,\overline{S})$，均有

$$b(S,\overline{S})-c(\overline{S},S)\le f_v\le c(S,\overline{S})-b(\overline{S},S)$$

式中

$$c(\overline{S},S)=\sum_{\substack{i\in s\\ j\in \bar{s}}}c(i,j),c(S,\overline{S})=\sum_{\substack{i\in s\\ j\in \bar{s}}}c(j,i)$$

$$b(S,\overline{S})=\sum_{\substack{i\in s\\ j\in \bar{s}}}b(i,j),b(\overline{S},S)=\sum_{\substack{i\in s\\ j\in \bar{s}}}b(j,i)$$

定理 7.3　仅为可行流存在的必要条件，因为，

任意割 $(S_1,\overline{S_1}),(S_2,\overline{S_2})$，有

$$b(S_1,\overline{S_1})-c(\overline{S_1},S_1)\le f_v\le c(S_1,\overline{S_1})-b(\overline{S_1},S_1)$$
$$b(\mathrm{S}_2,\overline{\mathrm{S}_2})-c(\overline{S_2},S_2)\le f_v\le c(S_2,\overline{S_2})-b(\overline{S_2},S_2)$$

于是，不等式

$$b(S_1,\overline{S_1})-c(\overline{S_1},S_1)>c(S_2,\overline{S_2})-b(\overline{S_2},S_2)$$
$$b(S_2,\overline{S_2})-c(\overline{S_2},S_2)>c(S_1,\overline{S_1})-b(\overline{S_1},S_1)$$

意味着网络中不存在可行流．

定理 7.4　在一个运输网络中，如果它的所有边上的流既有上界又有下界，则对该网络

的一切割 $(S,\overline{S})$，均有 $\max f_v=\min\{c(S,\overline{S})-b(\overline{S},S)\}$

（二）基本方法

1．求运输网络中最大流的方法——标号法

（1）基本思想

令

$$\delta_{ij}=\begin{cases}c(i,j)-f(i,j) & 当(i,j)为前向边\\ f(i,j) & 当(i,j)为后向边\end{cases}$$

$$\delta=\min\{\delta_{ij}\}$$

则在这条可增扩路上每条前向边的流都可以增加一个量 δ，而相应的后向边的流可减少 δ，这样一来就可使得网络的流量获得增加，同时可以使每边的流量不超过它的容量，而且保持为正，也不影响其他的边的流量．

因此，用标号法寻求运输网络中最大流的基本思想是寻找可增扩路，使网络的流量得到增加，直到最大为止．即首先给出一个初始流，这样的流是存在的，例如零流．如果存在关于它的可增扩路，那么调整该通路上每条边的流量，就可以得到新的流．对于新的流，如果仍存在可增扩路，则用同样的方法使流的值增大，继续这个过程，直到网络中不存在关于新得到流的可增扩路为止，则该流就是所求的最大流．

（2）标号方法分为两个过程：

① 标号过程：通过标号过程寻找一条可增扩路．

② 增流过程：沿着可增扩路增加网络的流量．

这两个过程的步骤分述如下：

① 标号过程

A．给发点标号为（s^+，∞）．

B．若顶点 x 已经标号，则对 x 的所有未标号的邻接顶点 y 按以下规则标号：

a．若 $(x,y)\in E$，且 $f(x,y)<c(x,y)$，令 $\delta_y=\min\{c(x,y)-f(x,y),\delta_x\}$，则给顶点 y 标号为 (x^+,δ_y)，若 $f(x,y)=c(x,y)$，则不给顶点 y 标号．

b．若 $(y,x)\in E$，且 $f(y,x)>0$，令 $\delta_y=\min\{f(y,x),\delta_x\}$，则给顶点 y 标号为 (x^-,δ_y)；若 $f(y,x)=0$，则不给顶点 y 标号．

C．不断重复步骤 B．直到收点 t 被标号，或不再有顶点可以标号为止．当 t 被标号时，表明存在一条从 s 到 t 的可增扩路，则转向增流过程 B．如若 t 点不能被标号，且不存在其他可以标号的顶点时，表明不存在从 s 到 t 的可增扩通路，算法结束，此时即获得最大流．

② 增流过程

A．令 $u=t$．

B．若 u 的标号为 (v^+,δ_u)，则

$$f(v,u) \leftarrow f(v,u)+\delta_u$$

若 u 的标号为 (v^-,δ_u)，则 $f(u,v) \leftarrow f(u,v)-\delta_u$

C．若 v=s，把全部标号去掉，并回到标号过程 A．否则，令 u=v，并回到增流过程 B．

2．求最大可行流的标号法

基本上同求最大流的标号法，不同的只是将标号法的标号过程中的第二步作如下修改：

若顶点 x 已标号，则对 x 的所有未标号的邻接点 y 按以下规则标号：

a. 若 $f(x,y)<c(x,y)$，令 $\partial_y=\min\{c(x,y)-f(x,y),\partial_x\}$，则给顶点 y 标号为 (x^+,∂_y)，若 $f(x,y)=c(x,y)$，则 y 不标号；

b. 若 $f(x,y)>c(x,y)$，令 $\partial_y=\min\{f(y,x)-b(y,x),\partial_x\}$，则给顶点 y 标号为 (x^-,∂_y)，若 $f(y,x)=b(y,x)$，则 y 不标号．

而对标号过程中的其他部分和增流过程②不作修改．

3．初始可行流的构造方法

对已给定的运输网络 G=（V，E），其边上的流有上界和下界，对于这样的网络，要求其上的最大可行流：首先必须求出该网络的初始可行流，然后再用求最大可行流的标号法来求该网络上的最大可行流．然而，要求出网络 $\overline{G}(V,E)$ 的初始可行流，必须先构造一个对应于网络 G 的一个新网络 $\hat{G}=(\hat{V},\hat{E})$．这个新网络的所有边上的流只有上界（即为已经讨论过的网络）；然后再求新网络 $\hat{G}$ 的最大流，从而构造出网络的初始可行流．

构造新网络 $\hat{G}=(\hat{V},\hat{E})$ 的方法：

（1）除网络 $\hat{G}$ 包含 G 的所有顶点外，还加上两个顶点 $\hat{S}$ 和 $\hat{t}$，它们分别是 $\hat{G}$ 的发点和收点．

（2）网络 $\hat{G}$ 包含 G 的所有边，且 $\hat{c}(i,j)$=c（i，j）–b（i，j）（$\hat{c}(i,j)$ 表示 $\hat{G}$ 中边（i，j）的容量）．

（3）对应于 G 中的每一条边（i，j），用一条具有容量 $\hat{c}(\hat{s},j)=b(i,j)$ 的边把发点 $\hat{S}$ 连接到顶点 j，且用一条具有容量 $\hat{c}(i,\hat{t})=b(i,j)$ 的边把顶点 i 连接到收点 $\hat{t}$．

（4）G 的发点 s 和收点 t 用一条具有容量 c（t，s）=∞的边相连接．

用上述方法构造出的新网络 $\hat{G}$ 与网络 G 之间的流的关系由定理 7.5 给出．

定理 7.5　在网络 G 中，可行流存在的充分必要条件是，存在 $\hat{G}$ 的最大流 $\hat{f}$，使得与顶点 $\hat{t}$ 连接的所有边都是饱和的．

注意：$\hat{G}$ 的最大流 $\hat{f}$ 构造如下：

$$\hat{f}(i,j)=f(i,j)-b(i,j)$$

$$\hat{f}(i,\hat{t})=c(i,\hat{t})$$

$$\hat{f}(\hat{s},j)=\hat{c}(\hat{s},j)$$

$$\hat{f}(t,s)=f_v$$

如果 $\hat{G}$ 的最大流 $\hat{f}$ 满足定理 7.5 的充分条件，则网络 G 的初始可行流为

$$f(i,j)=\hat{f}(i,j)+b(i,j)$$

4．求运输网络 G 的最大可行流的方法

由 $\hat{G}$ 的构造方法以及定理 7.5 我们就可以得到求一个所有边都具有上界和下界的运输网络的最大可行流的方法．其主要步骤如下：

（1）构造运输网络 G 的对应网络 $\hat{G}$．

（2）用§7.4 节的标号法求 $\hat{G}$ 的最大流 $\hat{f}$．

（3）求得 $\hat{G}$ 的最大流后，检查连接到 $\hat{t}$ 的所有边是否都饱和，若有一条边不饱和，则网络 G 不存在可行流，计算到此为止，若所有的边都是饱和的，则进行下面的步骤．

（4）令 $f(i,j)=\hat{f}(i,j)+b(i,j)$ 为网络 G 的初始可行流．

（5）利用§7.6 节修改后的标号法（最大可行流的标号法）求 G 的最大可行流．

5．最短通路问题

（1）问题的提法

对于一个赋权（长度）网络G=（V，E），用l（i，j）表示边（i，j）的权（长度），$l(\mu(s_1,s_n))=\sum\limits_{(i,j)\in(s_1,s_n)} l(i,j)$ 表示通路μ（s_1，s_n）的权（长度），则称min{l[μ（s_1，s_n）]}为从顶点s_1到顶点s_n的最短通路．如果把权看作运输网络中边（i，j）的费用，则最短通路问题就是最小费用问题．

在网络G=（V，E）中，设V=｛s_1，s_2，…，s_n｝，Γ_i ｛j | i，j∈V，（i，j）∈E｝

Γ_i^{-1} =｛j | i，j∈V，（j，i）∈E｝，则对 i∈V，定义 π*（i）的值为

$$\pi*(i)=\begin{cases}\min\{l(\mu(s_1,i))\},\ i\in V\\ 0,\ i=s_1\end{cases}$$

对于 V 中的每一个顶点 i，用 π（i）标记它，且 π（i）具有如下性质：

$$\pi(i)=\begin{cases}\pi*(i),i\in S\\ \min\limits_{k\in S\cap\Gamma_i^{-1}}\{\pi(k)+l(k,i)\},i\in\overline{S}\end{cases}$$

（2）算法（Moore−Dijkstra）

① 开始

令=｛s_1，s_2，…，s_n｝，π（s_1）=0

$$\pi(i)=\begin{cases}l(s_1,i),i\in\Gamma_{s_1}\\ \infty,i\notin\Gamma_{s_1}\end{cases}$$

② 选择 $j \in \overline{S}$，使得 $\pi(j)=\min\limits_{i\in\overline{S}}\pi(i)$，让

$$\overline{S} \leftarrow \overline{S} - \{j\}$$

如果$|\overline{S}|=0$，则算法结束，否则进行第 3 步.

③ 对于所有的$i \in \Gamma_j \cap \overline{S}$，让

$$\pi(i) \leftarrow \min\{\pi(i), \pi(j)+l(j,i)\}$$

再回到第②步.

6．最小费用流问题

（1）问题的提法

在运输网络 G=（V，E）中，设 d（i，j）是定义在 E 上的非负函数，它表示通过边（i，j）单位流的费用．c（i，j）为边（i，j）的容量．所谓最小费用流问题就是要从发点到收点怎样以最小费用输送一已知量为f_v的总流量.

最小费用流问题可以用数学形式描述为：

$$\min \sum_{\substack{\text{所有}\\(i,\ j)}} \mathrm{d}(i,\ j) f(i,\ j)$$

其中，对所有的边（i，j），f（i，j）必须满足下述条件：

$$\sum f(i,j)-\sum f(j,i)=\begin{cases} f_v & i=s \\ 0 & i\neq s,t \\ -f_v & i=t \end{cases}$$

$$0=f(i,j)\le c(i,j)$$

（2）算法

最小费用流算法是由 Busacker 和 Gowan 在 1961 年提出的. 该法实际上是一种迭代法，它是以每条边上的流为零流开始的．其主要步骤为：

① 求出从发点到收点的最小费用通路 μ（s，t）.

② 对该通路 μ（s，t）分配最大可能的流量 $\overline{f}=\min\limits_{(i,\ j)\in\mu(s,\ t)}\{c(i,j)\}$

并让通路上的所有边的容量相应减少 $\overline{f}$．对于通路上的饱和边，其单位流费用相应改为∞.

③ 作该通路 μ（s，t）上所有边（i，j）的反向边（j，i）．令 c（j，i）$=\overline{f}$，d（0，i）$=-d$（i，j）.

④ 在这样构成的新网络中，重复上述步骤①，②，③，直到从发点到收点的全部流量等于f_v为止（或者再也找不到从s到t的最小费用通路）.

二、习题解答

7.1　求图 7-19 中运输网路的最大流．

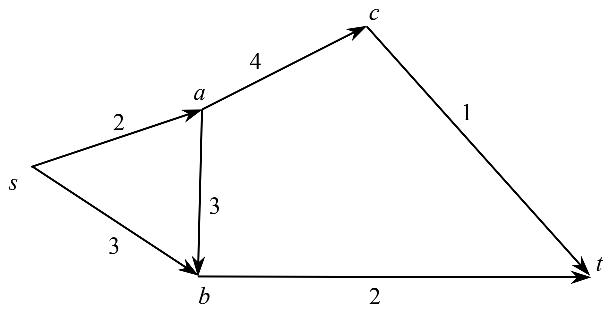


图　7-19

解：（1）将图 7-19 所示的运输网络标号得到图 7-19（a）（图中粗线表示可增扩路）．

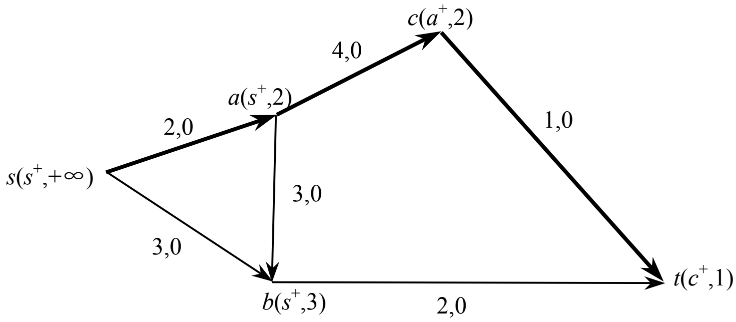


图　7-19（a）

（2）在图 7-19（a）中，沿可增扩路（s，a，c，t）的每条边增加流是δ_t=1，并去掉全部标号，得一新网络（如图 7-19（b）所示）．

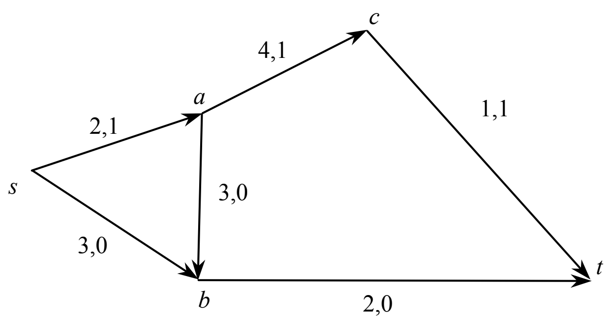


图　7-19（b）

（3）对图 7-19（b）所示的新网络继续标号，得到图 7-19（c）（图中粗线表示可增扩路）．

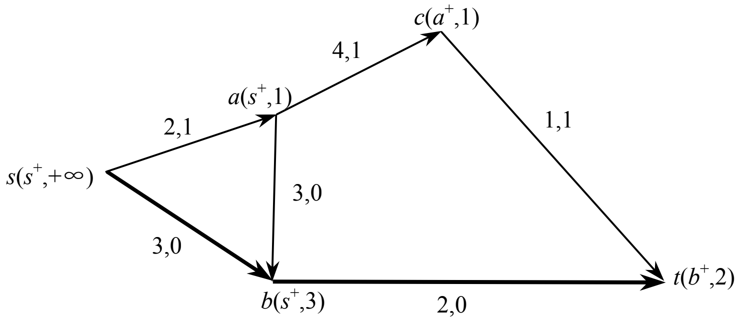


图 7-19（c）

（4）在图 7-19（c）中，沿可增扩路（s，b，t）的每条边增加流δ_t=2，再去掉全部标号，得一新网络（如图 7-19（d）所示）.

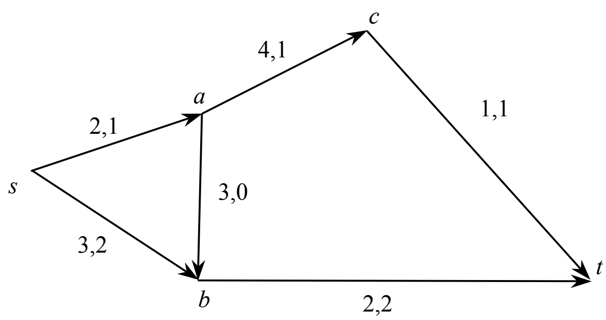


图 7-19（d）

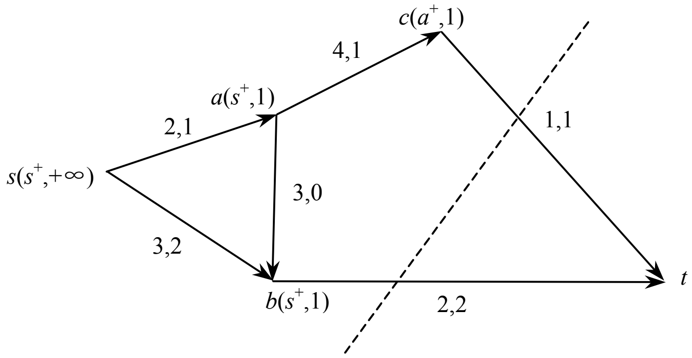


图 7-19（e）

（5）对图 7-19（d）所示的新网络继续标号，得到图 7-19（e），由该图可见，t 点不能被标号，且不存在其他可以标号的顶点，这表明，不再存在从 s 到 t 的可增扩路，算法结束．故可得最大流为 3.

7.2　求图 7-20 中运输网络的最大流．

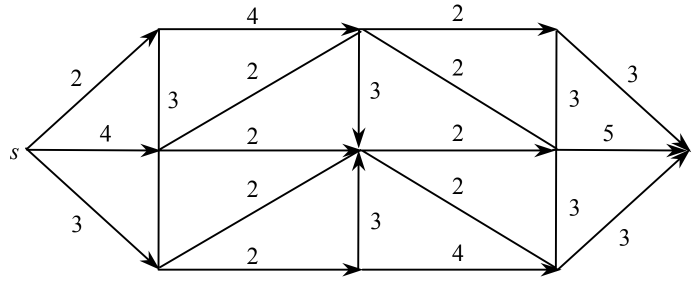


图　7-20

解：首先将图 7-20 所示的运输网络中的无向边按 7.5 节中的方法变成有向边，得一新网络，并对新网络标号得到图 7-20（a）（图中粗线表示可增扩路）．

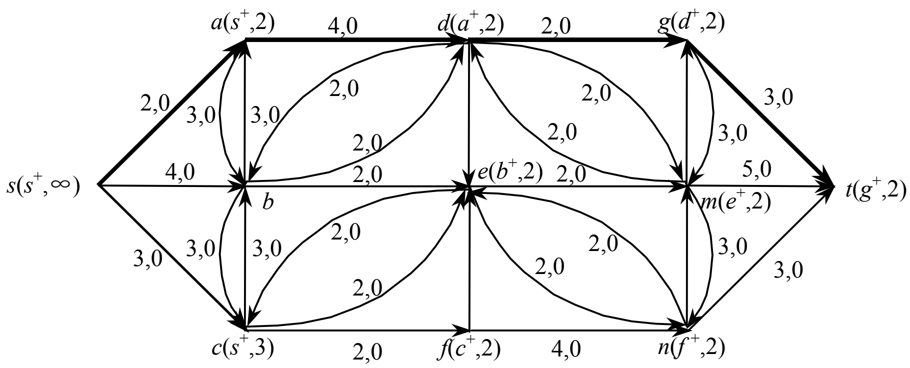


图　7-20（a）

在图 7-20（a）中，沿可增扩路（s，a，d，q，t）的每条边增加流量δ_t=2，并去掉全部标号得一新网络，然后对新网络继续标号得到图 7-20（b）（图中粗线表示可增扩路）．

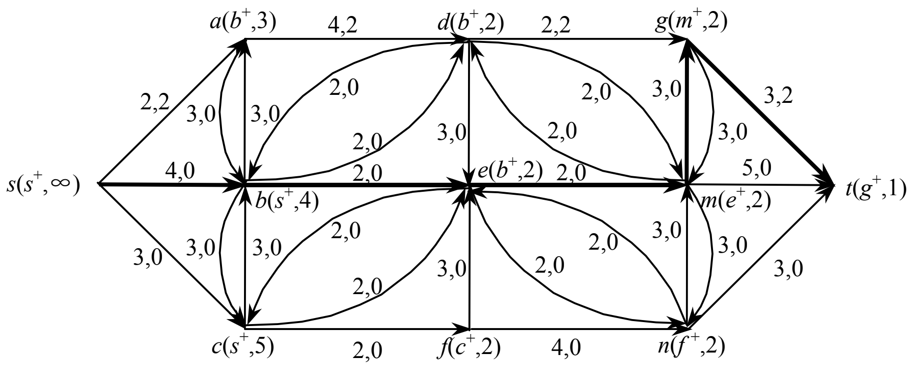


图　7-20（b）

在图 7-20（b）中，又沿可增扩路（s，b，e，m，g，t）的每条边增加流量 δt=1，…，如此反复，可分别得到图 7-20（c），（d），（e），（f），（g），（h）.（图中粗线表示可增扩路）.

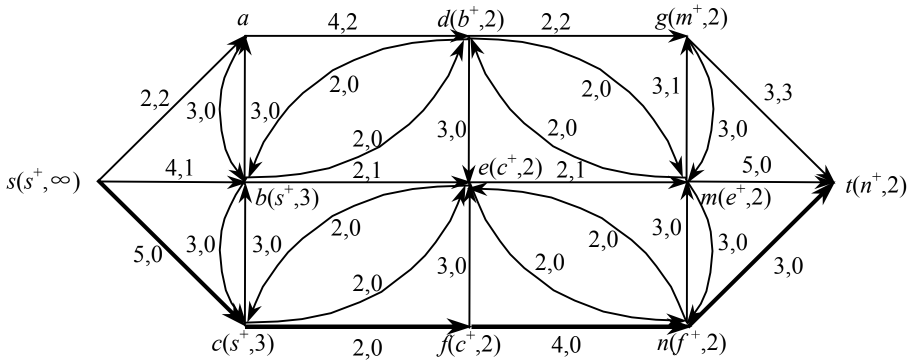


图 7-20（c）

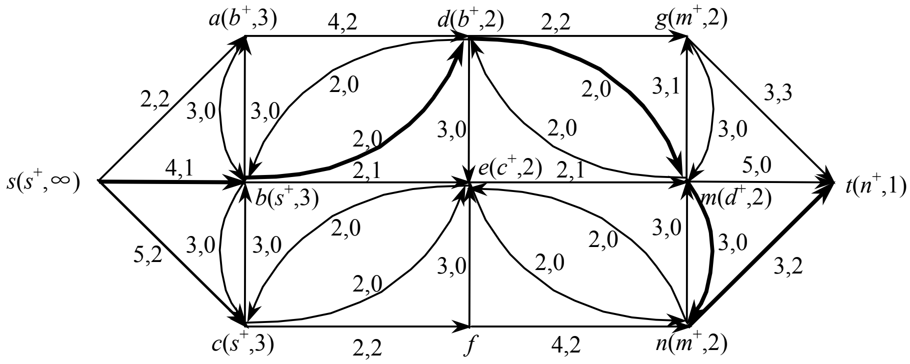


图 7-20（d）

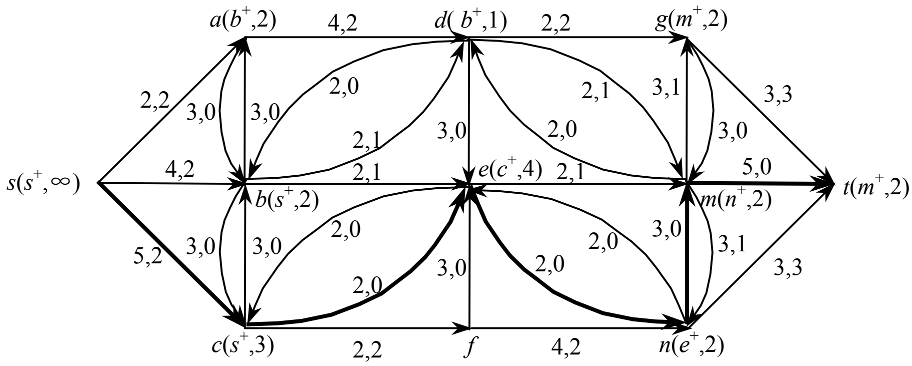


图 7-20（e）

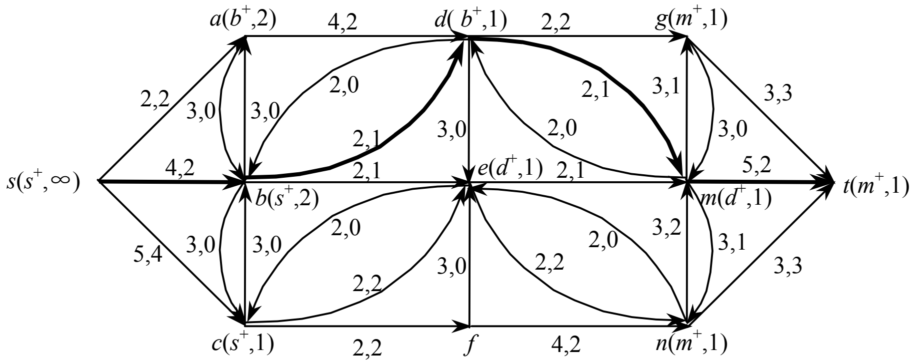


图　7-20（f）

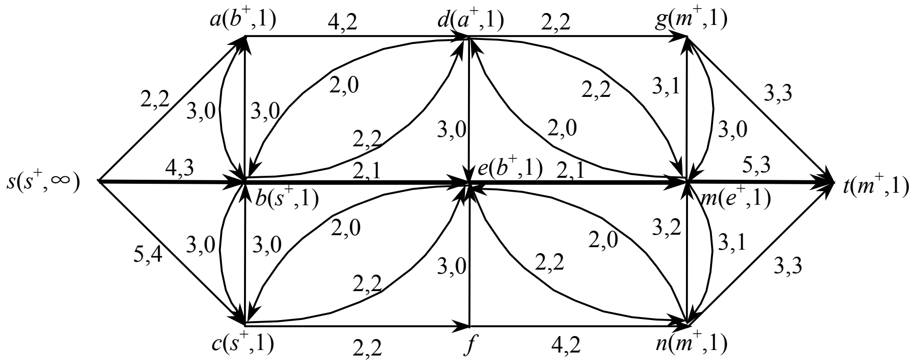


图　7-20（g）

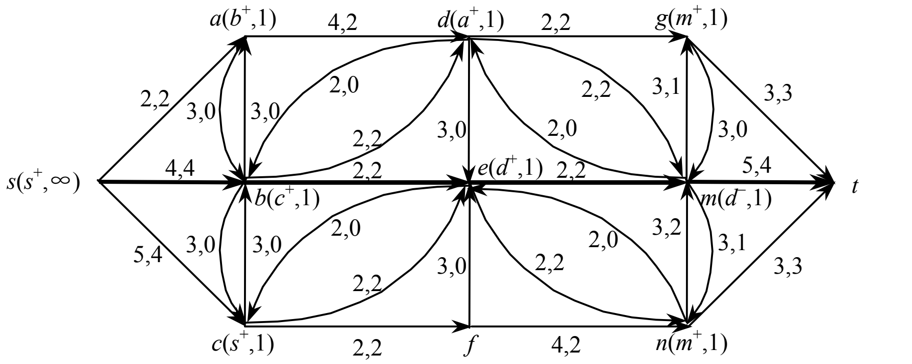


图　7-20（h）

在图 7-20（h）中，t 点不能被标号，且不存在其他可以标号的顶点，这表明，不存在从 s 到 t 的可增扩路，算法结束，故可得最大流为 10.

7.3　求图 7-21 中运输网络的最大流.

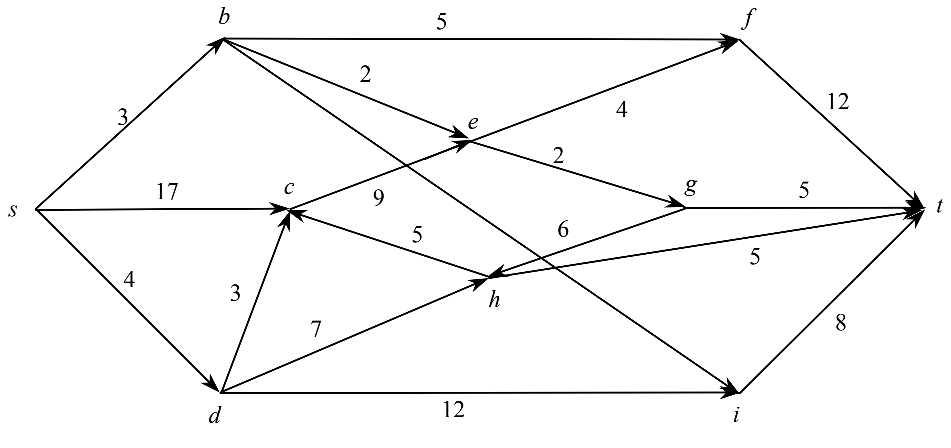


图　7-21

解：对图 7-21 所示的网络，标号法的全部过程如下面的图所示（图中粗线为可增扩路）.

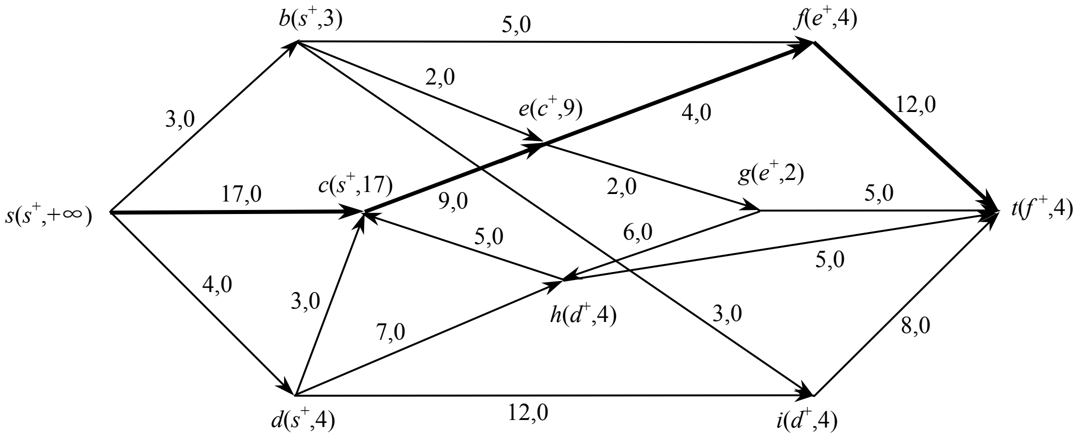


图　7-21（a）

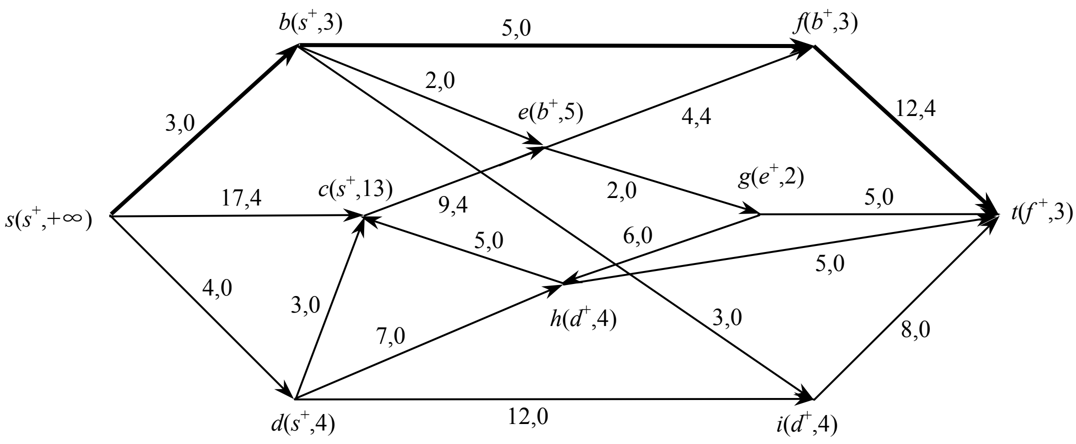


图　7-21（b）

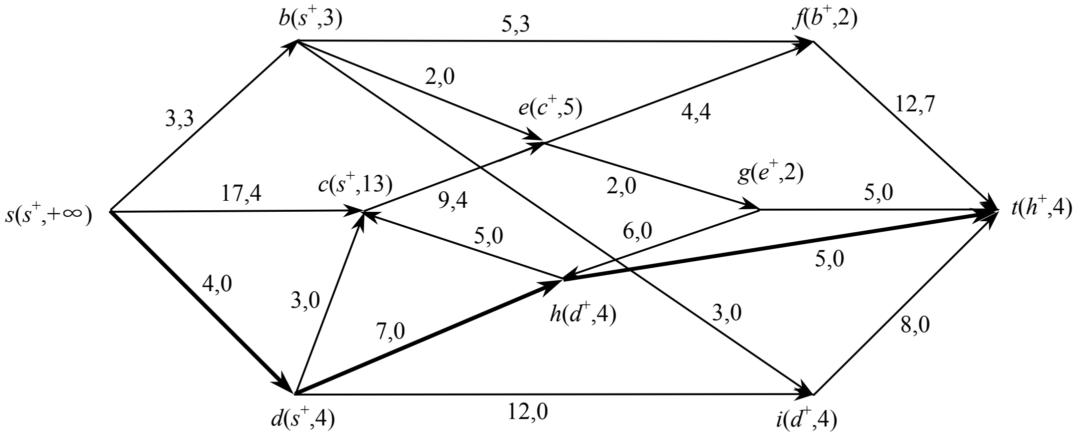


图 7-21（c）

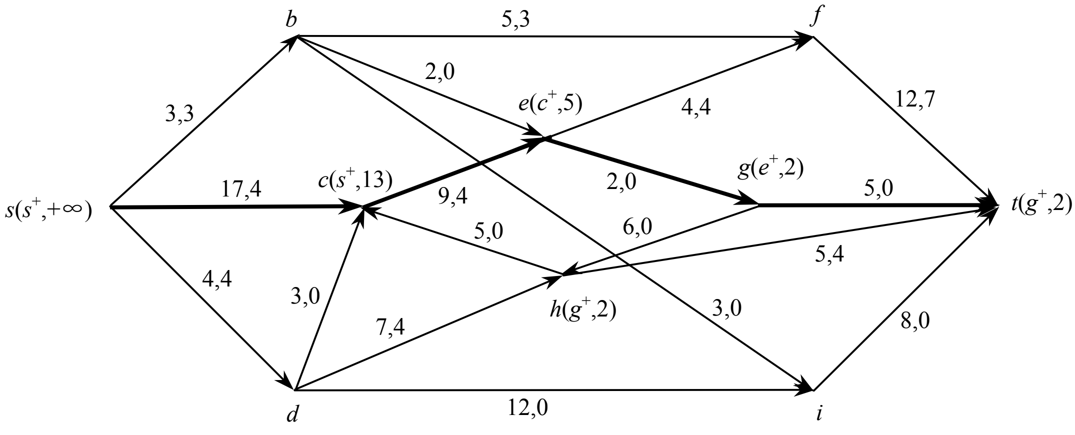


图 7-21（d）

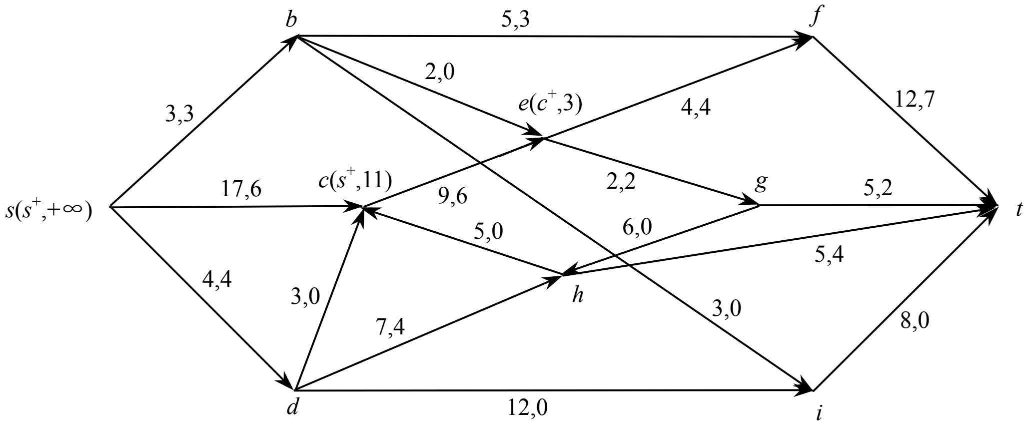


图 7-21（e）

由最后的一个图可见，t 不能被标号，且不存在其他可以标号的顶点，即从 s 到 t 不再存在可扩增路，算法结束，故可得到最大流为 13.

7.4　求图 7-22 中运输网络的最大流.

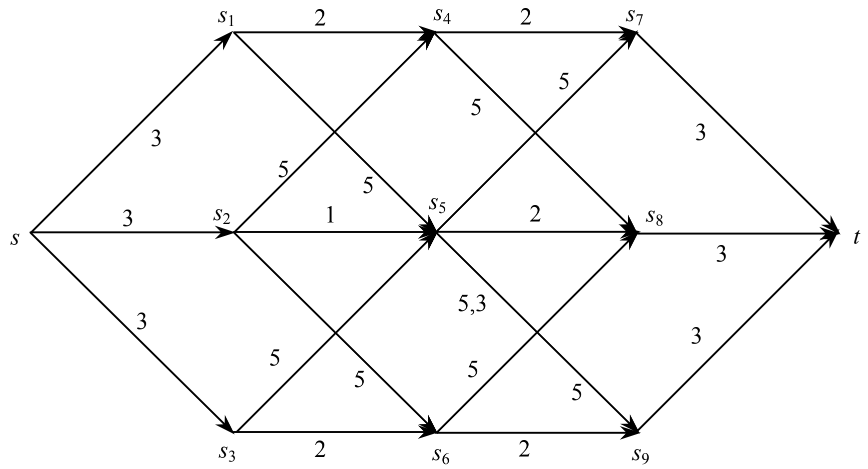


图　7-22

解：对图 7-22 所示的网络，标号法的全部过程如下面的图所示（图中粗线为可增扩路）.

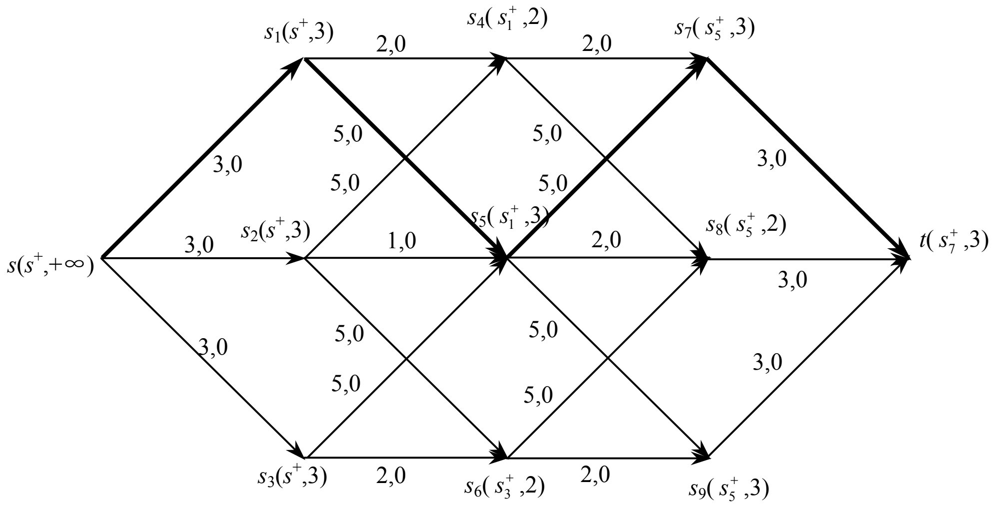


图　7-22（a）

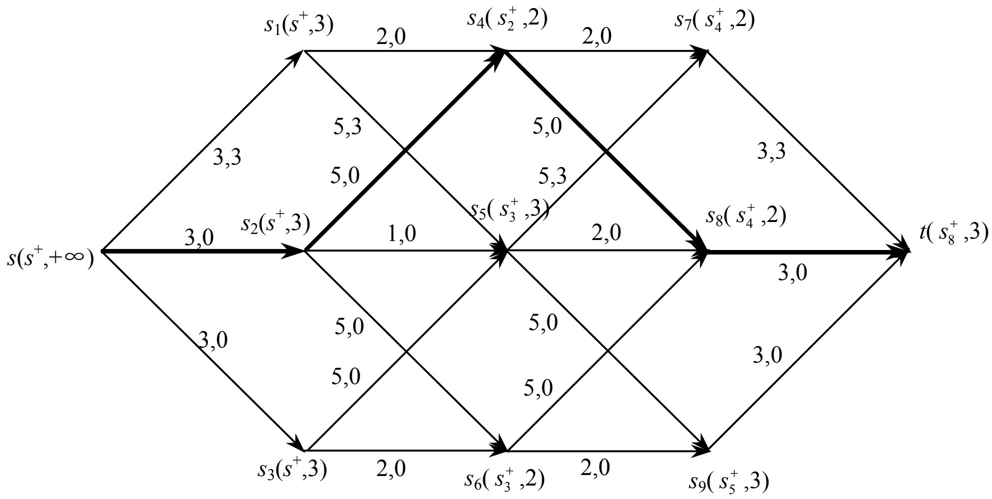


图 7-22（b）

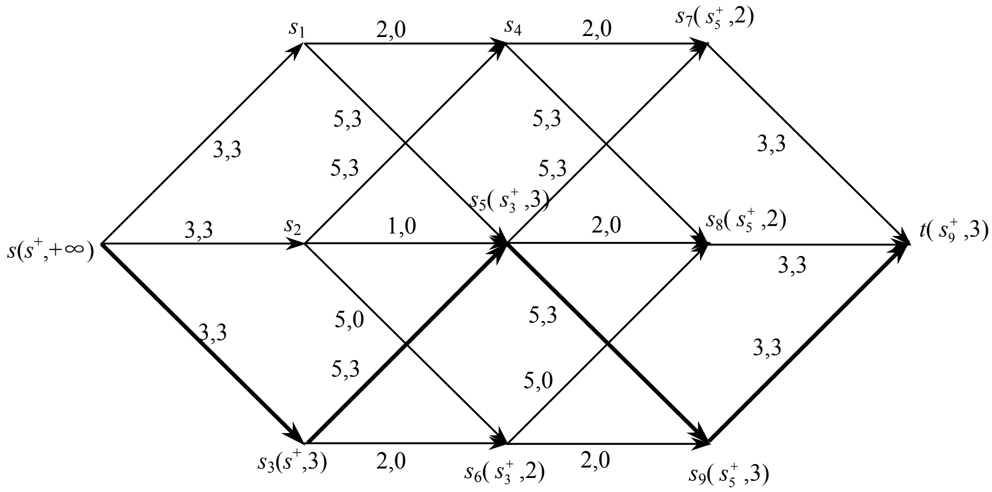


图 7-22（c）

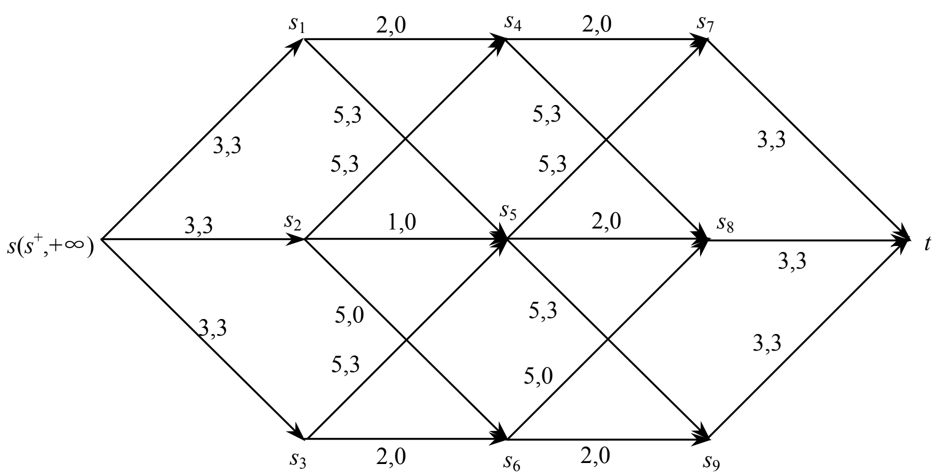


图 7-22（d）

由最后一个图可见，t 不能被标号，且不存在其他可以标号的顶点，这表明不存在从 s 到 t 可增扩路，算法结束，故可得到最大流为 9.

7.5　由两个城市s_1和s_2生产的电视机，经过图 7-23 的网络运到三个城市t_1，t_2和t_3出售. 试确定从城市s_1和s_2到城市t_1，t_2和t_3和所能运送的最大总量.

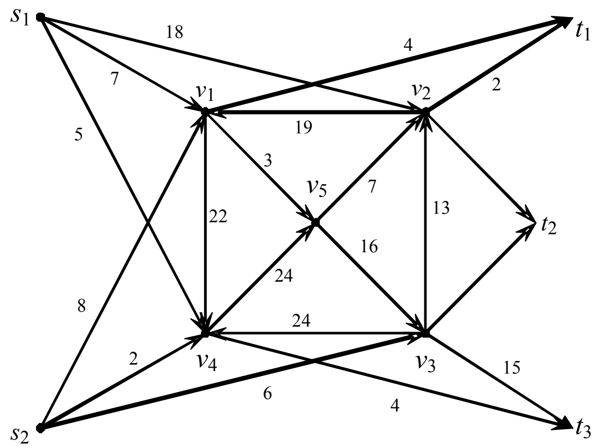


图　7-23

解：这是一个多发点多收点的运输网络，用§7-5 节的方法将图 7-23 所示的运输网络化成只有一个发点和一个收点的网络，如图 7-23（a）所示.

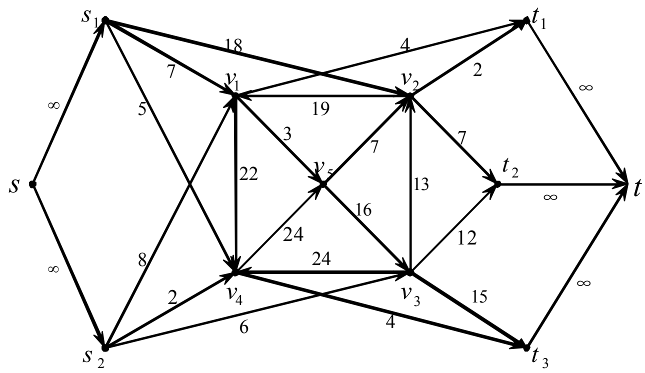


图　7-23（a）

对图 7-23（a）所示的新网络用标号法求其最大流标号法的全部过程如下面的图 7-23（b）、7-23（c）、7-23（d）、7-23（e）、7-23（f）、7-23（g）、7-23（h）、7-23（i）、7-23（j）、7-23（k）所示（图中粗线为可增扩路，且可增扩路以外的顶点标号过程略去）.

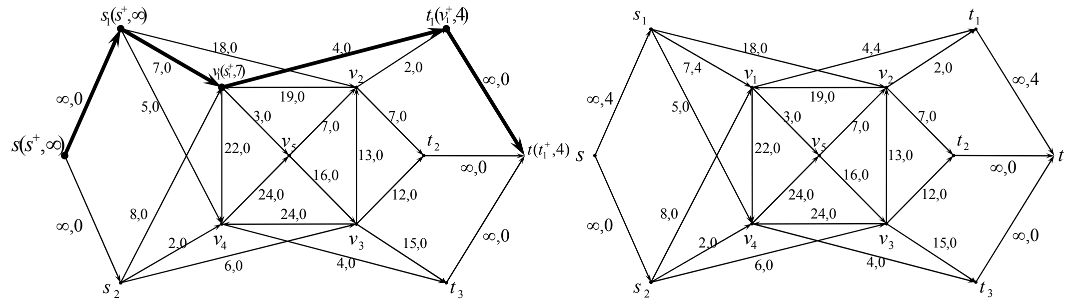


图 7-23（b）

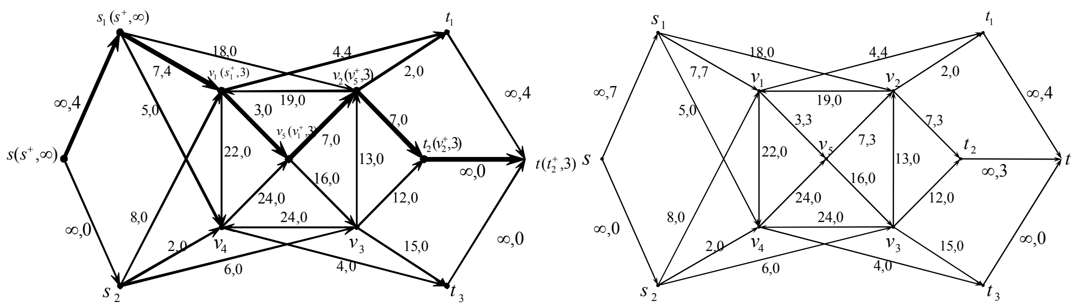


图 7-23（c）

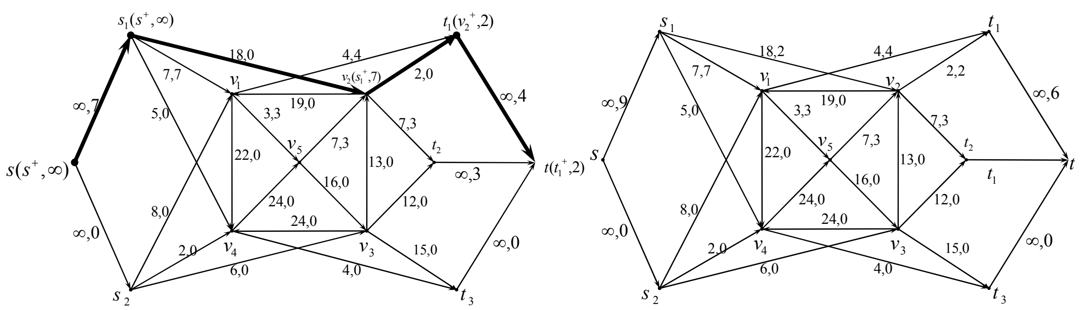


图 7-23（d）

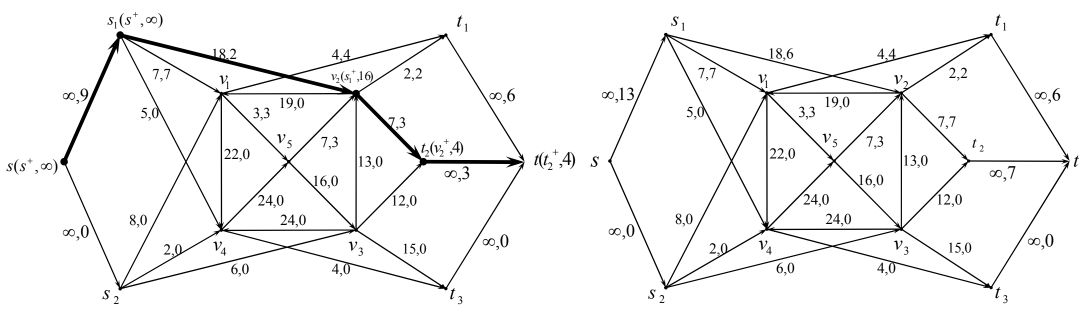


图 7-23（e）

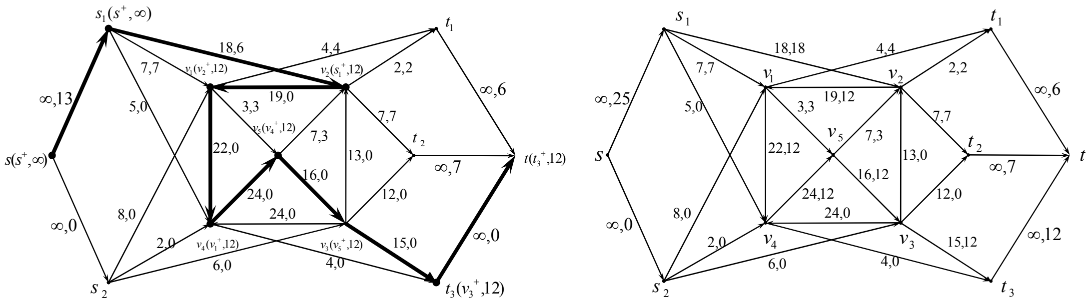


图 7-23（f）

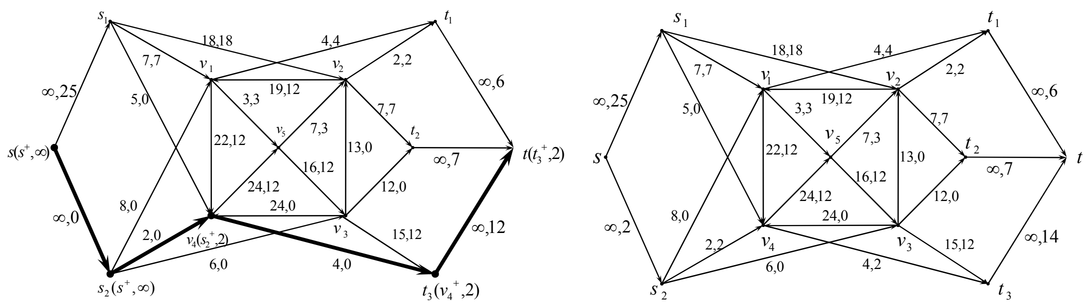


图 7-23（g）

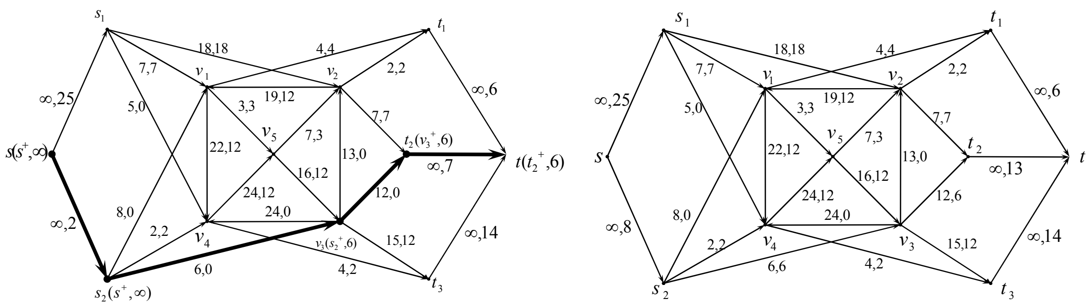


图 7-23（h）

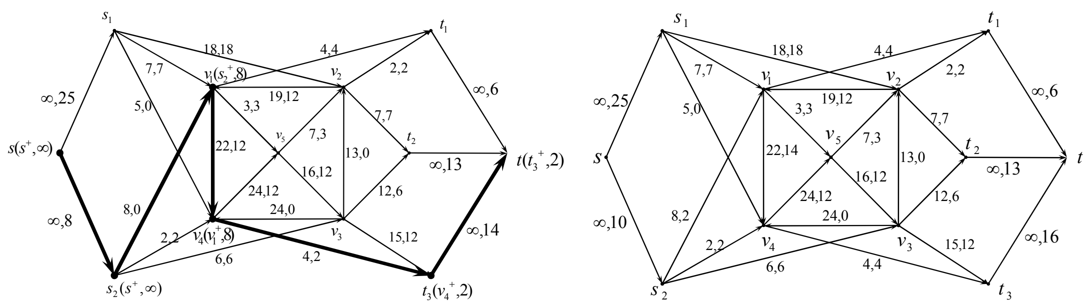


图 7-23（i）

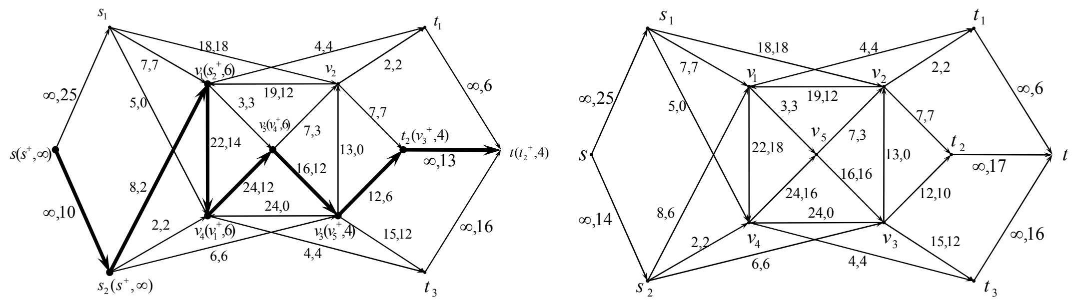


图　7-23（j）

对图 7-23（j）的新网络继续标号过程得到 7-23（k）．由该图可见，t 点不能被标号且不存在其他可以标号的顶点，这表明不存在从 s 到 t 的可增扩路，计算结束．因此，可得图 7-23 网络的最大流为 39．图 7-23（l）给出了图 7-23 网络最大流中各条边的流量．

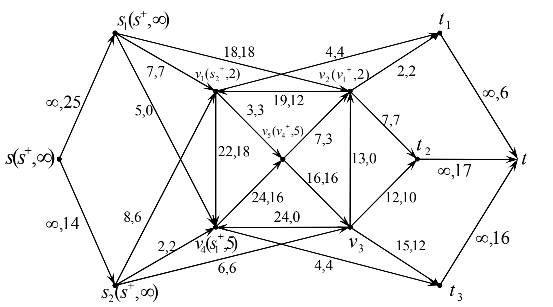


图　7-23（k）

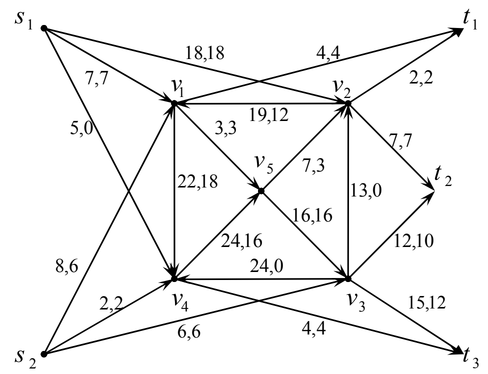


图　7-23（l）

7.6　用下面的方法证明在图 7-24 的运输网络中，无可行流存在．

（1）求两个割$\left(S_1, \overline{S_1}\right)$和$\left(S_2, \overline{S_2}\right)$，使得 $\beta\left(S_2, \overline{S_2}\right)-\alpha\left(S_2, \overline{S_2}\right)>\alpha\left(S_1, \overline{S_1}\right)-\beta\left(S_1, \overline{S_1}\right)$

（2）构造$\overline{G}$ 且求$\overline{G}$ 中的一个最大流．

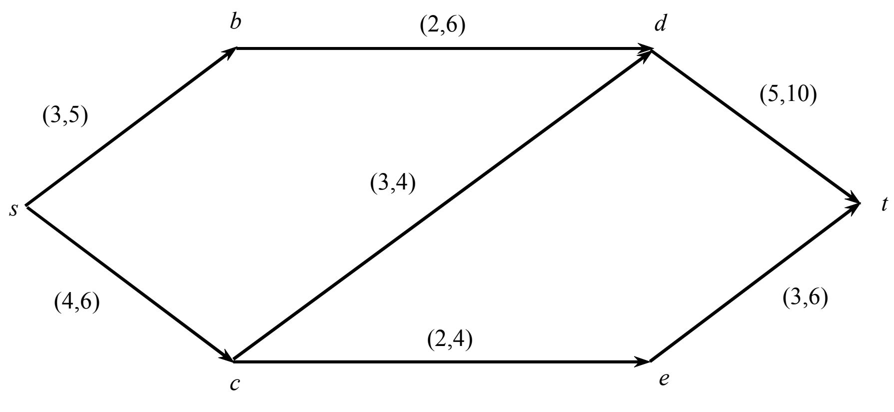
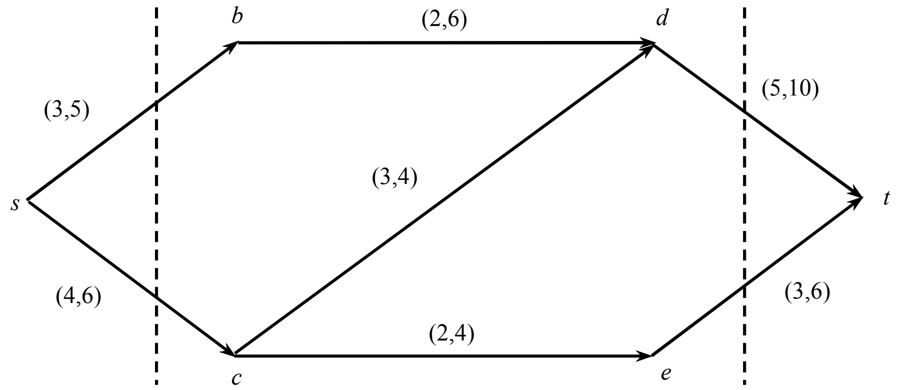


图　7-24

（1）证明：图中存在如下两个割$\left(S_1,\overline{S_1}\right)$和$\left(S_2,\overline{S_2}\right)$



$$S_1=\{s\}，\ \overline{S_1}=\{b,\ c,\ d,\ e,\ t\}$$

$\therefore C=\left(S_1,\overline{S_1}\right)-b\left(\overline{S_1},S_1\right)=5+6-0=11$

$$S_2=\{s,\ b,\ c,\ d,\ e\}，\ \overline{S_2}=\{t\}$$

$\therefore b\left(S_2,\overline{S_2}\right)-C\left(\overline{S_2},\ S_2\right)=9+3-0=12$

$\therefore$存在$b\left(S_2,\overline{S_2}\right)-C\left(\overline{S_2},\ S_2\right)>C\left(S_1,\overline{S_1}\right)-b\left(\overline{S_1},S_1\right)$，由定理 7.3 知该网络不存在可行流.

（2）首先根据原教材第七章§7.7 节的方法构造新网络$\overline{G}$，如图 7-24（a）.

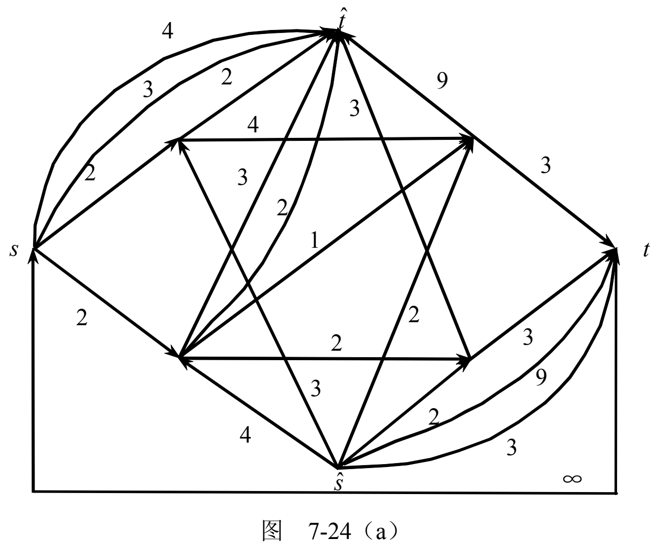


图　7-24（a）

将图 7-24（a）化为下图 7-24（b）

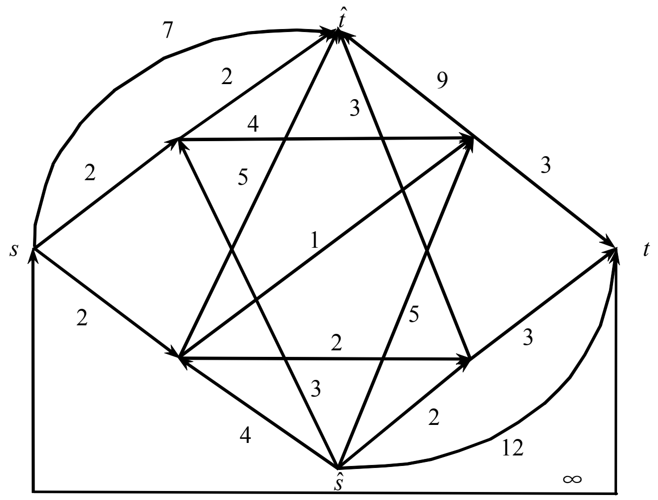


图 7-24（b）

其次，用标号法求新网络$\overline{G}$（图 7-24（b））的最大流，如图 7-24（c）所示.

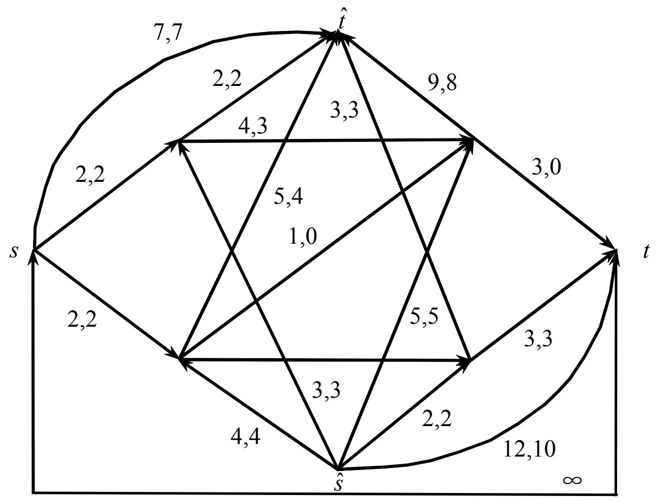


图 7-24（c）

由图 7-24（c）可见，与$\widehat{t}$相连的所有边并不是都饱和的，故由定理 7.5，原网络无可行流存在.

7.7 在图 7-25 中，求从 s 到 t 的一个最大可行流.

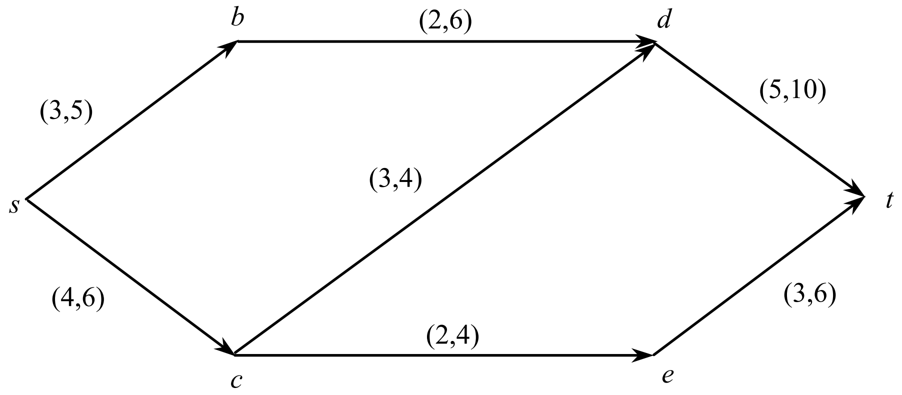


图　7-25

解：（1）首先根据原教材第七章§7.7 节的方法构造图 7-25 所示的运输网络的新网络 $\tilde{G}$，如图 7-25（a），并将图 7-25（a）简化为图 7-25（b）.

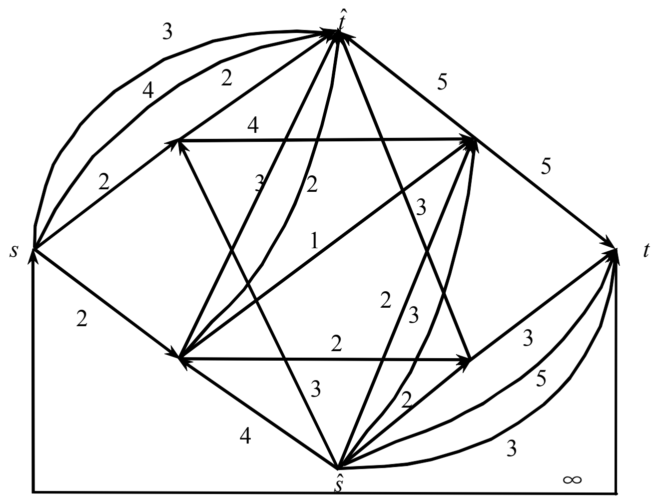


图　7-25（a）

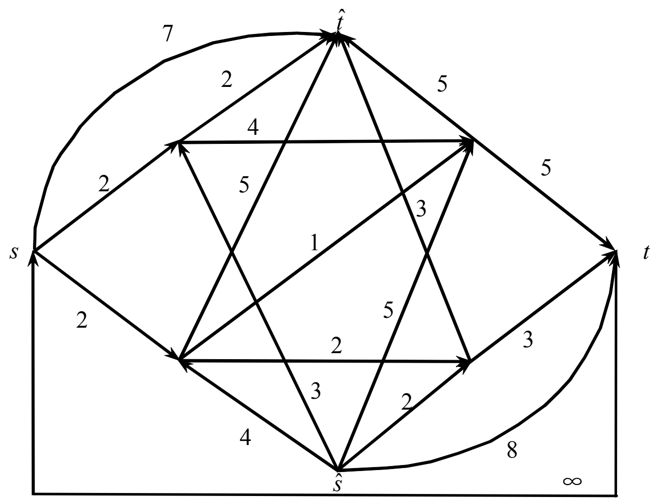


图　7-25（b）

（2）用标号法求新网络$\widetilde{G}$（图 7-25（b））的最大流，如图 7-25（c）所示.

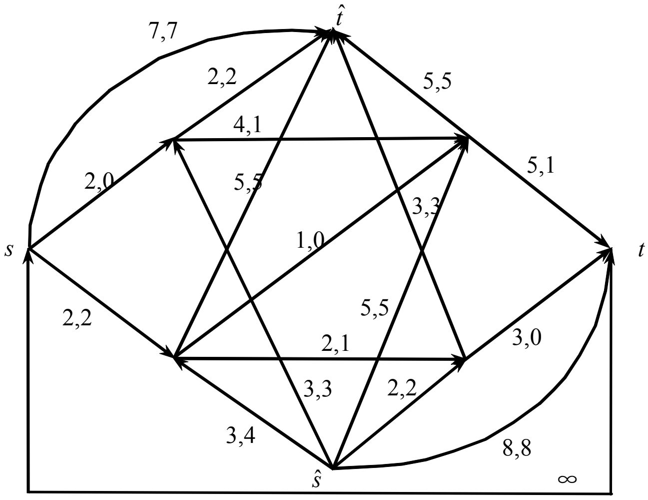


图　7-25（c）

（3）在图 7-25（c）中，经检查，连接到$\hat{t}$的所有边都是饱和的，由定理 7.5 知，原网络存在可行流.

（4）令$f(i,\ j)=b(i,\ j)+\tilde{f}(i,\ j)$为网络 G 的初始可行流，如图 7-25（d）所示.

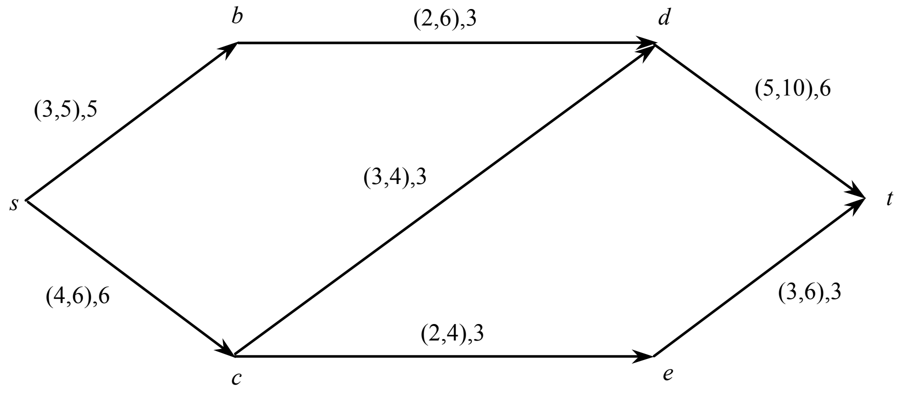


图 7-25（d）

（5）用原教材第七章 § 7.6 节修改后的标号法，求出图 7-25（d）的最大可行流，如图 7-25（e），7-25（f）所示.

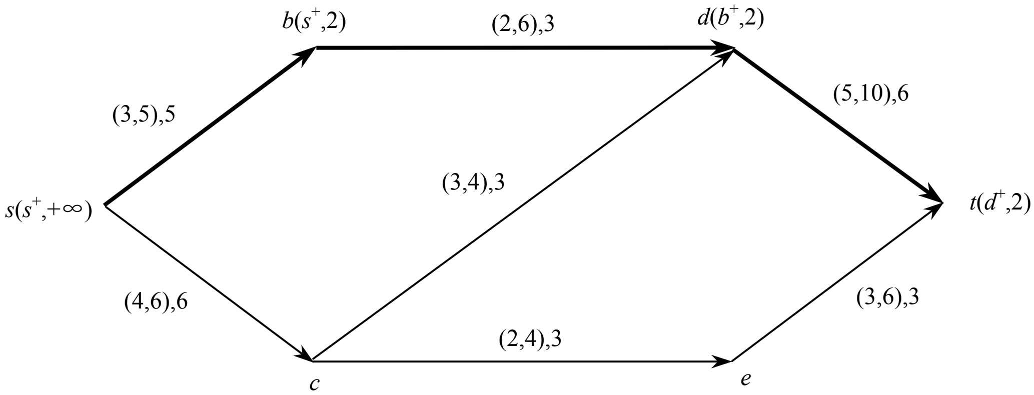


图　7-25（e）

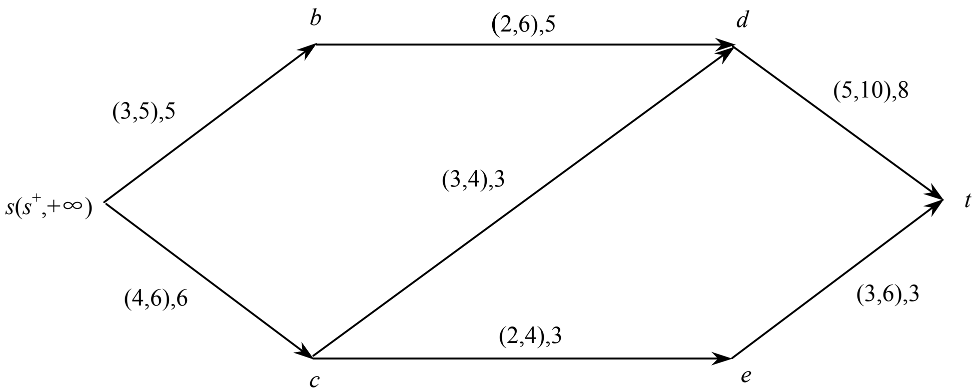


图　7-25（f）

由图 7-25（f）可见，t 不能被标号，也不存在其他可以标号的顶点，这表明，不再存在从 s 到 t 的可增扩路，算法结束，故可得最大流为 11，这个最大流就是图 7-25 的最大可行流.

7.8　在图 7-26 中，求从顶点 s 到 t 的最短通路.

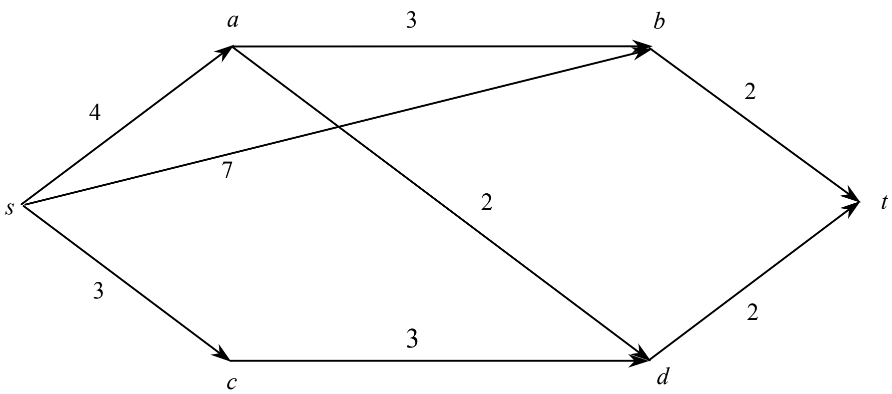


图　7-26

解：根据原教材第七章§7.8 节最短通路的 Moore-Dijkstra 算法，其过程为

（1）$\overline{S}=\{a,\ b,\ c,\ d,\ t\}$，$\pi(S)=0$，$\pi(a)=4$，$\pi(b)=7$，$\pi(c)=3$，$\pi(d)=\infty$，$\pi(t)=\infty$

（2）$j=c$，$\overline{S}=\{a,\ b,\ d,\ t\}$

（3）$\Gamma_j\cap\overline{S}=\{d\}$，$\pi(d)=\min(\infty,\ 3+3)=6$

（2）$j=a$，$\overline{S}=\{b,\ d,\ t\}$

（3）$\Gamma_j\cap\overline{S}=\{b,\ d\}$，$\pi(b)=\min(7,\ 4+3)=7$，$\pi(d)=\min(6,\ 6)=6$

（2）$j=d$，$\overline{S}=\{b,\ t\}$

（3）$\Gamma_j\cap\overline{S}=\{t\}$，$\pi(t)=\min(\infty,\ 6+2)=8$

（2）$j=b$，$\overline{S}=\{t\}$

（3）$\Gamma_j\cap\overline{S}=\{t\}$，$\pi(t)=\min(8,\ 7+2)=8$

（2）$j=t$，$\overline{S}=\{\phi\}$，$\left|\overline{S}\right|=0$，算法结束

此时，从顶点 s 到 t 的最短通路长度为 8，其最短通路为（s，c，d，t），最短通路的生长树如图 7-26（a）：

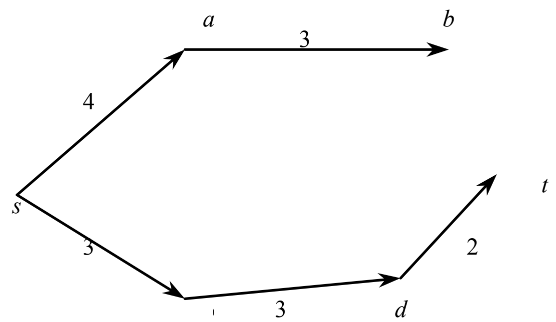


图 7-26（a）

7.9 在图 7-27 中，求从 s 到 t 的最小费用通路（图中边上的数表示费用）.

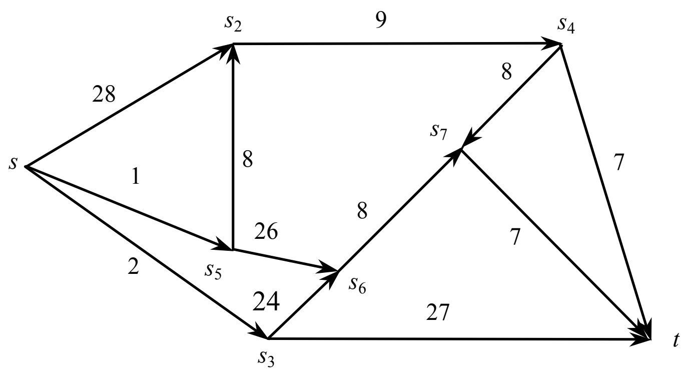


图 7-27

解：本问题实际上是最短通路问题，其 Moore-Dijkstra 算法过程为：

（1）$\overline{S}=\{S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5,\ S_6,\ S_7,\ t\}$，$\pi(S)=0$，$\pi(S_2)=28$，$\pi(S_3)=2$，$\pi(S_5)=1$，$\pi(S_4)=\pi(S_6)=\pi(S_7)=\pi(t)=\infty$

（2）$j=S_5$，$\overline{S}=\{S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_6,\ S_7,\ t\}$

（3）$\mathit{\Gamma}_j\cap\overline{S}=\{S_2,S_6\}$，$\pi(S_2)=\min\{28\ ,9\}=9$，$\pi(S_6)=\min\{\infty\ ,27\}=27$

（2）$j=S_3$，$\overline{S}=\{S_2,\ S_4,\ S_6,\ S_7,\ t\}$

（3）$\mathit{\Gamma}_j\cap\overline{S}=\{S_6,t\}$，$\pi(S_6)=\min\{27\ ,2+24\}=26$，$\pi(t)=\min\{\infty\ ,2+27\}=29$

（2）$j=S_2$，$\overline{S}=\{S_4,\ S_6,\ S_7,\ t\}$

（3）$\mathit{\Gamma}_j\cap\overline{S}=\{S_4\}$，$\pi(S_4)=\min\{\infty\ ,9+9\}=18$

（2）$j=S_4$，$\overline{S}=\{S_6,\ S_7,\ t\}$

（3）$\mathit{\Gamma}_j\cap\overline{S}=\{S_7,t\}$，$\pi(S_7)=\min\{\infty\ ,18+8\}=26$，$\pi(t)=\min\{29\ ,18+7\}=25$

（2）$j=t$，$\overline{S}=\{S_6,\ S_7\}$

（3）$\mathit{\Gamma}_j\cap\overline{S}=\{\phi\}$

（2）$j=S_6$，$\overline{S}=\{S_7\}$

（3）$\mathit{\Gamma}_j\cap\overline{S}=\{S_7\}$，$\pi(S_7)=\min\{26\ ,26+8\}=26$

（2）$j=S_7$，$\overline{S}=\phi$，$\left|\overline{S}\right|=0$，算法结束.

因此，从顶点s到t的最小费用为$\pi(t)=25$，其最小费用通路为（s，s_5，s_2，s_4，t），而且由Moore-Dijkstra算法，我们还得到了从顶点s到其他各顶点的最小费用分别为$\pi(s_3)=2$，$\pi(s_2)=9$，$\pi(s_3)=2$，$\pi(s_4)=18$，$\pi(t)=25$，$\pi(s_7)=26$，$\pi(s_6)=26$，从s到其他各顶点的最小费用的生长树如下图 7-27（a）所示.

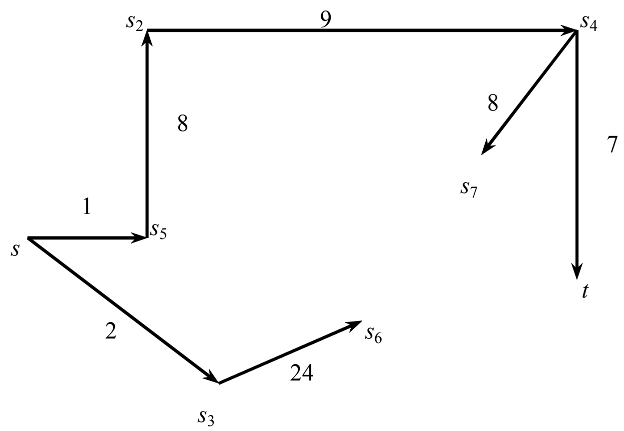


图　7-27（a）

7.10　求图 7-28 所示网络的最小费用流，设 $f_v=2$．

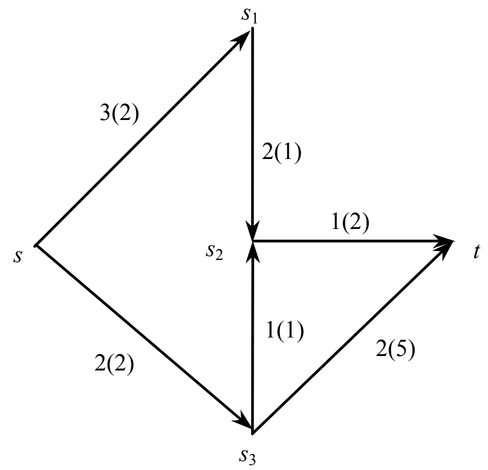


图　7-28

解： $f_v=2$

（1）在图 7-28 中，用原教材第七章§7.9 节中的方法，求出从s到t的最小费用通路$\mu(s,\ t)$为（s，s_3，s_2，t），单位流费用和为：

$$d(s,\ s_3)+d(s_3,\ s_2)+d(s_2,\ t)=2+1+2=5$$

（2）被分配在$\mu(s,\ t)$上最大可能流量$\tilde{f}$为该通路所有边的最小容量，即

$$\tilde{f}=\min\{C(s,\ s_3),\ C(s_3,\ s_2),\ C(s_2,\ t)\}=\min\{2\ ,\ 2\ ,\ 1\}=1$$

让$\mu(s,\ t)$上所有边的容量相应减少$\tilde{f}$，即

$$C(s,\ s_3)\leftarrow C(s,\ s_3)-\tilde{f}=2-1=1$$

$$C(s_3,\ s_2)\leftarrow C(s_3,\ s_2)-\tilde{f}=1-1=0$$

$$C(s_2,\ t)\leftarrow C(s_2,\ t)-\tilde{f}=1-1=0$$

将具有容量的边（含饱和边），其单位流费用相应改为∞，即

$$d(s_3,\ s_2)=\infty\ d(s_2,\ t)=\infty$$

（3）作通路$\mu(s,\ t)$上所有边（i，j）的反向边$(j,\ i)$，这些反向边的容量和单位流费用分别为

$$C(s_3,\ s)=\tilde{f}=1\ d(s_3,\ s)=-2$$

$$C(s_2,\ s_3)=\tilde{f}=1\ d(s_2,\ s_3)=-1$$

$$C(t,\ s_2)=\tilde{f}=1\ d(t,\ s_2)=-2$$

经过这样的调整，得到一个新的网络，如图 7-28（a）所示，流的分配情况的数字写在方括号内．对新的网络图 7-28（a），重复以上过程如下：

（1）在图 7-28（a）中，求出最小费用通路为（s，s_1，s_2，s_3，t），单位流费用和为

$$d(s,\ s_1)+d(s_1,\ s_2)+d(s_2,\ s_3)+d(s_3,\ t)=2+1-1+5=7$$

（2）$\tilde{f}=\min\{C(s,\ s_1),\ C(s_1,\ s_2),\ C(s_2,\ s_3), C(s_3,\ t)\}=\min\{3,2\ ,1,2\}=1$

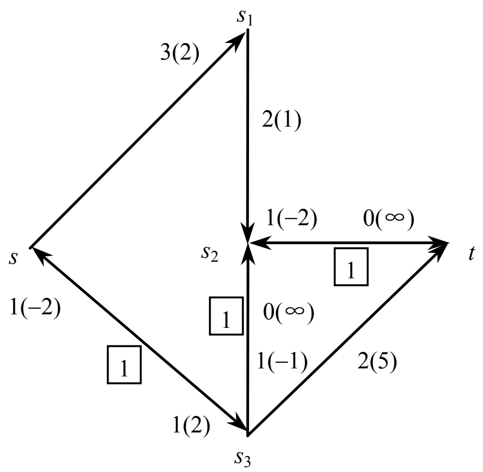


图　7-28（a）

注意，这时被分配在（s_2，s_3）上的流量 1 正好与分配在（s_3，s_2）上的流量 1 相互抵消，从而使边（s_3，s_2）恢复到原有的容量与单位流费用.

$$C(s,\ s_1)\leftarrow C(s,\ s_1)-\tilde{f}=3-1=2$$

$$C(s_1,\ s_2)\leftarrow C(s_1,\ s_2)-\tilde{f}=2-1=1$$

$$C(s_2,\ s_3)\leftarrow C(s_2,\ s_3)-\tilde{f}=1-1=0$$

$$C(s_3,\ t)\leftarrow C(s_3,\ s_t)-\tilde{f}=2-1=1\ d(s_2,\ s_3)=\infty$$

（3）$C(s_1,\ s)=\tilde{f}=1$，$d(s_1,\ s)=-2$

$C(s_2,\ s_1)=\tilde{f}=1$，$d(s_2,\ s_1)=-1$

$C(s_3,\ s_2)=0+\tilde{f}=1$，$d(s_3,s_2)=1$

$C(t,\ s_3)=\tilde{f}=1$，$d(t\ ,\ s_3)=-5$

经过这样的调整，又得到一个新的网络，如图 7-28（b）所示．流的分配情况的数字写在方括号内．

在图 7-28（b）中，由于从发点 s 到收点 t 的全部流量表示 f_v（=2），算法结束．这时相应的最小费用为 1×5+1×7=12．

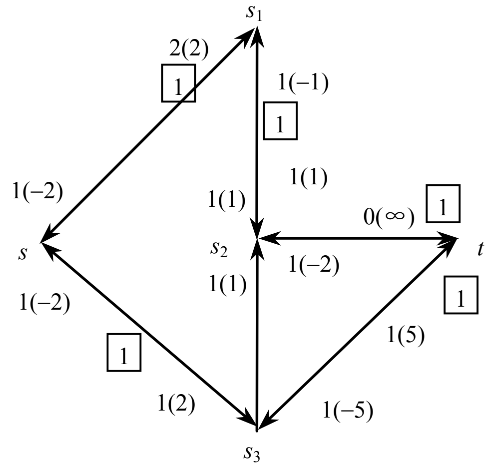


图 7-28（b）

7.11　求图 7-29 所示网络的最小费用最大流.

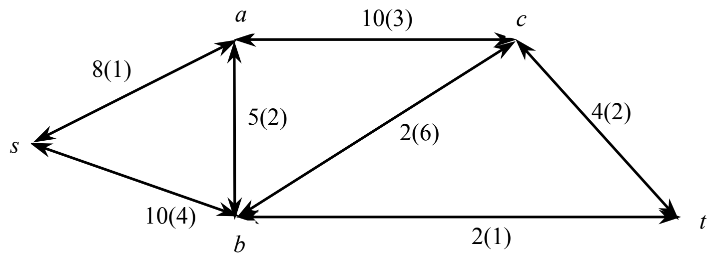


图 7-29

解：（1）在图 7-29 中，用 7.9 节中的 Moore-Dijkstra 算法，求出从 s 到 t 的最小费用通路 $\mu(s,\ t)$ 为（s，a，b，t），单位流费用和为：

$$d(s,\ a)+d(a,\ b)+d(b,\ t)=1+2+1=4$$

（2）被分配在 $\mu(s,\ t)$ 上的最大可能流量 $\tilde{f}$ 为该通路所有边的最小容量，即 $\tilde{f}=\min\{C(s,\ a),\ C(a,\ b),\ C(b,\ t)\}=\min\{8,5,7\}=5$.

让 $\mu(s,\ t)$ 上所有边的容量相应减少 $\tilde{f}$ ，即

$$C(s,\ a)\leftarrow C(s,\ a)-\tilde{f}=8-5=3$$

$$C(a,\ b)\leftarrow C(a,\ b)-\tilde{f}=5-5=0\ d(a,\ b)=\infty$$

$$C(b,\ t)\leftarrow C(b,\ t)-\tilde{f}=7-5=2$$

（3）作该通路 $\mu(s,\ t)$ 上所有边（i，j）的反向边 $(j,\ i)$、，这些反向边的容量和单位流费用分别为：

$$C(a,\ s)=5\ d(a,\ s)=-1$$

$$C(b,\ a)=5\ d(b,\ a)=-2$$

$$C(t,\ b)=5\ d(t,\ b)=-1$$

经过这样的调整，得到一个新的网络，如图 7-29（a）所示，流的分配情况的数字写在方括号内.

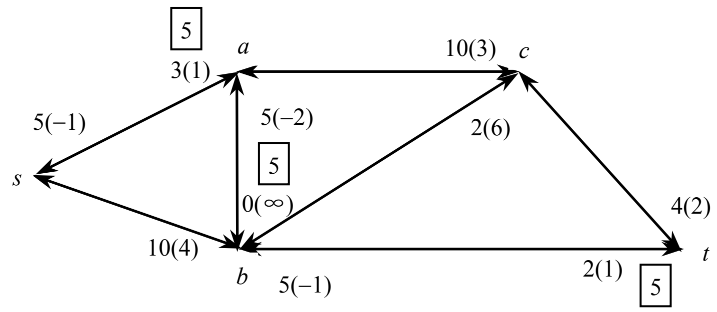


图 7-29（a）

对新的网络图 7-29（a），重复以上过程：

（1）在图 7-29（a）中，求出最小费用通路为（s，b，t），单位流费用和为：

$$d(s,\ b)+d(b,\ t)=4+1=5$$

（2）$\tilde{f}=\min\{C(s,\ b),\ C(b,\ t)\}=2$

$C(s,\ b)\leftarrow C(s,\ b)-\tilde{f}=10-2=8$

$C(b,\ t)\leftarrow C(b,\ t)-\tilde{f}=2-2=0\ d(b,\ t)=\infty$

（3）$C(b,\ s)=\tilde{f}=2\ d(b,\ s)=-4$

$C(t,\ b)=\tilde{f}=2=2\ d(t,\ b)=-1$

对图 7-29（a）进行以上调整，以得到一个新的网络，如图 7-29（b）所示.

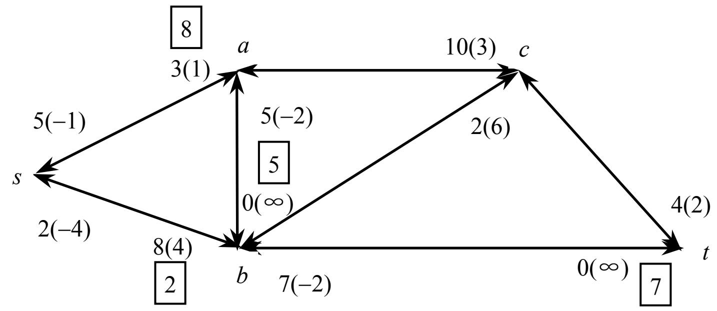


图 7-29（b）

在图 7-29（b）中，继续重复以上步骤.

（1）求出最小费用通路为（s，a，c，t），单位流费用和为：

$$d(s,\ a)+d(a,\ c)+d(c,\ t)=1+3+2=6$$

（2）$\tilde{f}=\min\{C(s,\ a),\ C(a,\ c),\ C(c,\ t)\}=\min\{3,10,4\}=3$

$C(s,\ a)\leftarrow C(s,\ a)-\tilde{f}=3-3=0\ d(s,\ a)=\infty$

$C(a,\ c)\leftarrow C(a,\ c)-\tilde{f}=10-3=7$

$C(c,\ t)\leftarrow C(c,\ t)-\tilde{f}=4-3=1$

（3）$C(a,\ s)=\tilde{f}=3\ d(a,\ s)=-1$

$C(c,\ a)=\tilde{f}=3\ d(c,\ a)=-3$

$C(t,\ c)=\tilde{f}=3\ d(t,\ c)=-2$

对图 7-29（b）进行以上调整，以得到一个新的网络，如图 7-29（c）所示.

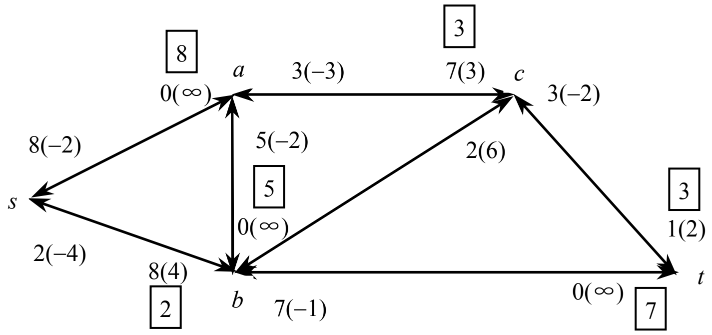


图 7-29（c）

在图 7-29（c）中，继续重复以上步骤.

（1）求出最小费用通路为（s，b，a，c，t），单位流费用和为：

$$d(s,\ b)+d(b,\ a)+d(a,c)+d(c,\ t)=4-2+3+2=7$$

（2）$\tilde{f}=\min\{8\ ,\ 2\ ,\ 1\}=1$

$C(s,\ b)\leftarrow C(s,\ b)-\tilde{f}=8-1=7$

$C(b,\ a)\leftarrow C(b,\ a)-\tilde{f}=5-1=4$

$C(a,\ c)\leftarrow C(a,\ c)-\tilde{f}=7-1=6\ d(c,\ t)=\infty$

（3）$C(b,\ s)=\tilde{f}=1\ d(b,\ s)=-4$

$C(c,\ b)=\tilde{f}=1\ d(a,\ b)=2$

$C(t,\ c)=\tilde{f}=1\ d(t,\ c)=-2-2=-4$

对图 7-29（c）进行以上调整，又得到一个新的网络，如图 7-29（d）所示.

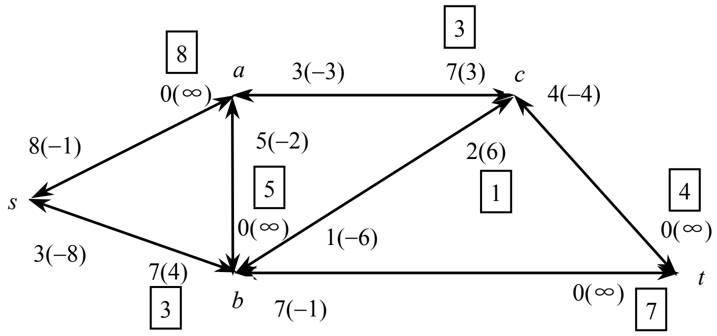


图　7-29（d）

在图 7-29（d）中，再也找不到从 s 到 t 的最小费用通路，算法结束．此时从 s 到 t 的最大流为 11，相应的最小费用为：5×4+2×5+3×6+1×7=55．

第八章　线 性 规 划

一、内容提要

线性规划是最简单，应用最广泛的一种数学规划方法，也是使用最早的一种优化方法．从数学上说，线性规划问题可以归结为一类条件极值问题，用微积分方法来解决一般是无能为力的．

线性规划的发展与计算方法的改进有关，1947 年美国数学家 G.B.Dantzig 提出求解一般线性规划问题的方法——单纯形法之后，这门学科才在理论上趋向成熟，并在应用方面取得了很大的成功．

（一）线性规划问题的数学模型

线性规划问题的数学模型是描述实际问题的抽象的数学形式，它反映了客观事物数量间的本质规律．线性规划问题的数学模型为：求线性函数

$$y=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_rx_r \tag{8.1}$$

满足如下约束条件

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r\le（或=，\ge）b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r\le（或=，\ge）b_2\\
&\cdots\cdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mr}x_r\le（或=，\ge）b_m
\end{aligned} \tag{8.1'}$$

$$x_i\ge 0，i=1，2，\cdots，r$$

的极大值或极小值．

其中，a_{ij}，b_i，c_j（i=1，2，…，m；j=1，2，…，r）是常数，x_i是未知变量．

这个数学模型可简写为

$$\max（\min）\quad y=\sum c_ix_i \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad &\sum_{i=1}^{r}a_{1i}x_i\le（=，\ge）b_1\\
&\sum_{i=1}^{r}a_{2i}x_i\le（=，\ge）b_2\\
&\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{8.2'}$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_{mi}x_i \leq （=，\geq）b_m$$

$$x_i \geq 0，i=1，2，\cdots，r$$

定义 8.1 称上述数学模型所描述的问题为线性规划问题．称（8.1）为线性规划问题的目标函数．式（8.1′）（或式（8.2′））为线性规划问题的约束条件，其中的条件$x_i \geq 0$，i=1，2，…，r称为非负条件．所谓把目标函数优化是指求式（8.1）在满足式（8.1′）条件下的极大值或极小值．

注意：在线性规划问题中的许多实际问题是各式各样的，但它们的数学模型却具有相同的形式，即所有的目标函数都是线性函数，所有的约束条件都是一组线性不等式（或等式），都是在满足约束条件下求目标函数的极大值或极小值．

（二）线性规划问题的标准形式

由以上线性规划问题的数学模型（式（8.2）和式（8.2′））可知，线性规划问题的约束条件可以有不同的形式，它可以是小于或等于形式的不等式，也可以是等式．目标函数也可以是求极大值和极小值的两种类型．b_i也可以是非负数，也可以是负数．这种形式的多样性给讨论问题带来了诸多的不便．甚至，在实际中，并非每个变量都有非负约束．因此，为了讨论与计算上的方便，我们规定线性规划问题的标准形式为

$$\max \quad y=\sum c_i x_i \tag{8.3}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} &\sum a_{1i}x_i = b_1 \\ &\sum a_{2i}x_i = b_2 \\ &\cdots\cdots \\ &\sum a_{mi}x_i = b_m \quad x_i \geq 0，i=1，2，\cdots，n \end{aligned} \tag{8.3′}$$

式中 $b_i \geq 0$，（i=1，2，…，m）

由于不同形式的线性规划问题都能化成标准形式式（8.3），式（8.3′）．因此，只要会求解标准形式的线性规划问题，那么也就会求解一般的线性规划问题了．

一般形式的线性规划问题化成标准形式的线性规则问题的方法如下：

1．将不等式约束化为等式约束

其方法为：如果第 k 个不等式为

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kr}x_r \leq b_k$$

则在上式中加入一个变量$x_{r+k} \geq 0$，使上式变为

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kr}x_r+x_{r+k}=b_k$$

称所加入的变量 x_{r+k} 为松弛变量．

如果第 i 个不等式为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ir}x_r \geq b_i$$

则在上式中减去一个松弛变量 $x_{r+i} \geq 0$，使其变为等式

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ir}x_r-x_{r+i}=b_i$$

这样就和标准形式的约束方程等号一致了.

注意：在目标函数中，这些松弛变量的系数都为 0.

2．将目标函数求极小值化成求极大值.

如果线性规划问题是求目标函数

$$y=\sum c_i x_i$$

的极小值，可将其变为求极大值，其方法是将目标函数乘以（–1），而约束条件不变．即化为求目标函数

$$y'=-y=-\sum c_i x_i$$

的极大值．这就同标准形式的目标函数极大值一致了.

3．将约束条件的右端 b_i 化成非负数.

如果约束条件

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ir}x_r=b_i$$

的右端 $b_i<0$，则将上式两端同乘以（–1）得

$$-a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-\cdots-a_{ir}x_r=-b_i>0$$

这就与标准形式的约束右端非负一致了.

4．在实际中，常存在某变量x_j的约束为$-\infty<x_j<0$，在这种情况下，可作如下变换．令

$$x_j=x'_j-x''_j\ (x'_j \geq 0,\ x''_j \geq 0)$$

即用非负数的变量x'_j，x''_j代替变量x_j，这就与标准形式变量非负约束一致了.

这样，就可以根据上面的方法把线性规划问题式（8.2），式（8.2′）写成如下的标准形式，

$$\max\quad y=\sum c_i x_i \tag{8.4}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad &\sum a_{1i}x_i \pm x_{r+1}=b_1\\ &\sum a_{2i}x_i \pm x_{r+2}=b_2\\ &\cdots\cdots\\ &\sum a_{mi}x_i \pm x_{r+m}=b_m\\ &x_i \geq 0,\ x_{r+j} \geq 0\ (i=1,2,\cdots,r;\ j=1,2,\cdots,m)\end{aligned} \tag{8.4′}$$

式中 $b_i \geq 0\ (i=1,2,\cdots,m)$

（三）线性规划问题的几何意义

定义 8.2 满足约束条件式（8.1′）的变量x_1，x_2，…，x_r的值称为线性规划问题的可行解．使目标函数式（8.1）取极大值或极小值的可行解称作最优可行解.

定义 8.3　所有可行解的集合称作线性规划问题的可行解域．

由图解法可知，具有两个变量的线性规划问题的解可能有以下四种情况：

1．有唯一的最优可行解．这个唯一的最优可行解一定是可行解域的一个顶点．

2．有最优可行解，但不唯一．此时最优可行解一定是可行解域的一条边界上的所有点．

3．有可行解，但没有最优可行解．此时在可行解域上，目标函数的值趋向无穷．

4．无可行解．此时可行解域为空集．

注意：对于具有多个变量的线性规划问题的解同样有以上四种情况，其原理是一样的．

定义 8.4　所谓凸多边形是指没有一个内角超过 180°的多边形．或者说，一个多边形是凸的，如果联接这个多边形中任意两个点的线段上的所有点仍在这个多边形中．

定义 8.5　所谓凸多边形的角点 x 是指，它在凸多边形中且不在凸多边形中任何两点（除 x 点外）的线段上．

定义 8.6　所谓一个凸多面体是指，如果联接这个多面体中任意两个点的线段上的所有点仍在这个多面体中．

在 r 维空间中，一个点可以用这个点的 r 个坐标来表示，且形如

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ir}x_r=b_i$$

的线性方程代表一个超平面（一个超平面是高维空间中的一个平面）．一个超平面将这个 r 维空间分成两个半空间，一个半空间中的坐标满足如下的线性不等式：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ir}x_r>b_i$$

而另一个半空间中的点的坐标满足线性不等式：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ir}x_r<b_i$$

而超平面上的点的坐标满足方程

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ir}x_r=b_i$$

因此，对一个有 r 个变元和 m 个线性约束条件的线性规划问题，可行解域是 r 维空间中的一个凸多面体，它由对应于线性约束条件的 m 个超平面和对应于非负条件的 r 个超平面所围成：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_V+\cdots+a_{2r}x_r=b_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mr}x_r=b_m$$

$$x_i\geq 0，i=1，2，\cdots，r$$

同样可得到，如果一个线性规划问题有最优可行解，则在该多面体的某一角点处一定能找到最优可行解．这样一来，在凸多面体中的无限多个点中求最优可行解的问题，就可

以简化为在凸多面体的有限个角点上寻求最优可行解了.

（四）线性规划问题的基本定理

定义 8.7 在式（8.4），式（8.4′）中，如果一个可行解的 $r+m$ 个坐标中的 r 个坐标都是 0，则称该可行解为基本可行解．如果 $r+m$ 个坐标中有多于 r 个为 0 的坐标，则称这个基本可行解为退化的基本可行解．使目标函数达到最优的基本可行解称为最优基本可行解．在基本可行解中取非 0 的值的变量称作基本变量．其他变量称作非基本变量．显然一个基本可行解对应于可行解域的一个角点.

定理 8.1 如果线性规划问题式（8.4），式（8.4′）有可行解，则一定存在基本可行解.

定理 8.2 如果线性规划问题式（8.4），式（8.4′）有最优可行解，则一定存在最优基本可行解.

（五）线性规划问题的单纯形方法

用单纯形法求解线性规划问题的方法和步骤如下：

1．把线性规划问题的一般形式化成标准形式.

2．任选一初始基本可行解（见原教材第八章§8.8 节）.

3．用这个基本可行解中的非基本变量表示出基本变量和目标函数.

4．根据目标函数表达式中非基本变量的系数符号，选择一个有负系数的非基本变量来变成基本变量，增加这个非基本变量的值，直到基本变量之一变成零.

5．重复第 3、4 步，直到目标函数的表达式中非基本变量的系数全为正为止.

（六）线性规划问题的表格法

线性规划问题的表格法实际上就是单纯形法，它只是用一张表格来代替单纯形法中的线性规划的表达式，从而能有条不紊地实现单纯形法．它的主要优点是，它可以利用计算机解决具有很多约束条件的线性规划问题，因此，表格法最适于数字计算.

用表格法求解线性规划问题的方法和步骤如下：

1．设（x_1，x_2，…，x_m，x_{m+1}，x_{m+2}，…，x_{r+m}）是一基本可行解，其中x_1，x_2，…，x_m是基本变量，x_{m+1}，x_{m+2}，…，x_{r+m}是非基本变量.

2．把约束条件和目标函数改写（即用非基本变量表示基本变量和目标函数）为如下形式：

$$\begin{gathered}
x_1+v_{1,\,m+1}x_{m+1}+v_{1,\,m+2}x_{m+2}+\cdots+v_{1,\,m+j}x_{m+j}+\cdots+v_{1,\,r+m}x_{r+m}=w_1\\
x_2+v_{2,\,m+1}x_{m+1}+v_{2,\,m+2}x_{m+2}+\cdots+v_{2,\,m+j}x_{m+j}+\cdots+v_{2,\,r+m}x_{r+m}=w_2\\
\cdots\cdots\\
x_k+v_{k,\,m+1}x_{m+1}+v_{k,\,m+2}x_{m+2}+\cdots+v_{k,\,m+j}x_{m+j}+\cdots+v_{k,\,r+m}x_{r+m}=w_k\\
\cdots\cdots\\
x_m+v_{m,\,m+1}x_{m+1}+v_{m,\,m+2}x_{m+2}+\cdots+v_{m,\,m+j}x_{m+j}+\cdots+v_{m,\,r+m}x_{r+m}=w_m\\
y+v_{0,\,m+1}x_{m+1}+v_{0,\,m+2}x_{m+2}+\cdots+v_{0,\,m+j}x_{m+j}+\cdots+v_{0,\,r+m}x_{r+m}=w_0
\end{gathered}$$

其对应的表格如表 8-1 所示.

表 8-1

	v_{m+1}	v_{m+2}	$\cdots$	v_{m+j}	$\cdots$	v_{r+m}	
x_1	$v_{1,m+1}$	$v_{1,m+2}$	$\cdots$	$v_{1,m+j}$	$\cdots$	$v_{1,r+m}$	w_1
x_2	$v_{2,m+1}$	$v_{2,m+2}$	$\cdots$	$v_{2,m+j}$	$\cdots$	$v_{2,r+m}$	w_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	w_3
x_k	$v_{k,m+1}$	$v_{k,m+2}$	$\cdots$	$v_{k,m+j}$	$\cdots$	$v_{k,r+m}$	w_4
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	w_5
x_m	$v_{m,m+1}$	$v_{m,m+2}$	$\cdots$	$v_{m,m+j}$	$\cdots$	$v_{m,r+m}$	w_6
	$v_{0,m+1}$	$v_{0,m+2}$	$\cdots$	$v_{0,m+j}$	$\cdots$	$v_{0,r+m}$	w_0

3．新表格的计算

在表 8-1 中，为了决定当一个非基本变量x_{m+j}的值从 0 增加到尽可能大的一个正值时，基本变量x_1，x_2，…，x_m中的哪一个会变成非基本变量，就要计算比值$w_1/v_{1,m+j}$，$w_2/v_{2,m+j}$，…，$w_m/v_{m,m+j}$．假定比值$w_k/v_{k,m+j}$是全部正值的最小者．于是，当增加x_{m+j}的值而使它成为一个基本变量的时候，x_k就变成了一个非基本变量．（这时，称系数$v_{k,m+j}$为枢纽，包含枢纽的行为枢行，包含枢纽的列为枢列）．

这样，我们就可以交换x_i与x_{m+j}的位置而得到一个新的基本可行解（x_1，…，x_{k-1}，x_{m+j}，x_{k+1}，…，x_m，x_{m1}，…，x_{m+j-1}，…，x_k，x_{m+j+1}，…，x_{r+m}），其中，x_1，x_2，…，x_{k-1}，x_{m+j}，x_{k+1}，…，x_m是基本变量，x_{m+1}，…，x_{m+j-1}，…，x_k，x_{m+j+1}，…，x_{r+m}是非基本变量．再由这一新的基本可行解将表 8-1 按以下规则构成（计算）一个新的表格：

（1）把枢纽换为它的倒数．

（2）把枢行的所有元都除以枢纽．

（3）把枢列的所有元都除以枢纽且反号．

（4）对表中其他元$v_{p,m+q}$（$p\neq k$，$q\neq j$）换为$v_{p,m+q}-\left(v_{p,m+j}\dfrac{v_{k,m+q}}{v_{k,m+j}}\right)$，而$w_p$（$p\neq k$）换为 $w_p-\left(v_{p,m+j}\dfrac{w_k}{v_{k,m+j}}\right)$

4．如果新表格的最后一行非基本变量的系数全为正，即可得到线性规划问题的解，否则，重复第 3、4 步，直到所得的表格的最后一行非基本变量的系数全为正为止．

注意：在许多实际问题中，用表格法求解线性规划问题时经常会遇到以下三种特殊情况．

（1）问题有无穷多个最优解．

若在最后的表格中，如果最后一行非基本变量的所有的系数都非负，但至少有一个是 0，则该问题有无穷多个最优解．

（2）目标函数值无界的解（无最优解）．

若在最后的表格中，如果有一非基本变量所对应的列的元全为负时，目标函数的值就是无界的．也就是说该问题无最优解．

（3）不存在可行解．

若在最后的表格中，如果最后一行非基本变量的所有的系数都为正，目标函数的值小于零时，原问题不存在可行解．

（七）初始基本可行解的求法

常用方法：

1．对于标准线性规划问题，如果能从约束方程组的系数矩阵中观察到 m 个相互独立的单位列向量，（经过重新安排次序）便可得到一个基本可行解．

$$(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$

（只需用这m个单位列向量分别所对应的x_j作为基本变量，其他的变量作为非基本变量即可）

2．对于线性规划问题中所有的约束条件（除约束条件$x_i \geq 0$ 外）都是“≤”形式的不等式，只需令松弛变量为基本变量，其他的变量作为非基本变量即可得到一个基本可行解．

3．人工变量法：在 1，2 两种情况下可以说初始基本可行解是明显的．但是，在其他情况下的约束条件，其基本可行解并不是明显的，要求出一个初始可行解并非易事．在这种情况下，常用人工变量法求其基本可行解．通常用的大 M 法和二阶段法就是人工变量法．由于大 M 法在计算机上实现时，选取过大的 M 会使计算产生困难．因此，人们常用二阶段法．

二阶段法：二阶段法是将线性规划问题分成两个阶段进行：

第一阶段：通过引入人工变量的和的负数代替原来问题的目标函数而构造一个新的线性规划问题．再用新问题判断原来问题是否有可行解．如果没有可行解，当然也就无基本可行解，计算结束．如果有可行解，就用它来求出原来问题的一个基本可行解．于是转向第二阶段．

第二阶段：把第一阶段的基本可行解作为原来问题的初始基本可行解．然后，开始使用单纯形法或者判断原问题没有最优解，或者求得一个最优基本可行解．

（八）线性规划问题的对偶问题

定义 8.8　设有线性规划问题

$$\max \quad y=\sum_{i=1}^{r} c_i x_i$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{r} a_{1i} x_i \leq b_1$$

$$
\begin{aligned}
&\cdots\cdots &(8.32)\\
&\sum_{i=1}^{r} a_{mi}x_i \le b_m\\
&x_i \ge 0, i=1,2,\cdots,r
\end{aligned}
$$

与

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i\\
\text{s.t} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{i1}y_i \ge c_1\\
& \sum_{i=1}^{m} a_{i2}y_i \ge c_2\\
& \cdots\cdots \qquad (8.33)\\
& \sum_{i=1}^{m} a_{ir}y_i \ge c_r\\
& y_i \ge 0, i=1,2,\cdots,m
\end{aligned}
$$

则称线性规划式（8.33）为线性规划式（8.32）的对偶问题，并称线性规划式（8.32）为本原问题.

定理 8.3　线性规划问题的对偶问题是本原问题.

定理 8.4　设式（8.32）与（8.33）是一对互为对偶的线性规划问题，并且 $x_1', x_2', \cdots, x_r'$ 和 $y_1', y_2', \cdots, y_m'$ 分别是式（8.32）与（8.33）的可行解，则恒有

$$\sum_{j=1}^{r} c_j x_j' \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i'$$

定理 8.5　如果 $x_1', x_2', \cdots, x'_r$ 和 $y_1', y_2', \cdots, y_m'$ 分别是本原问题式（8.32）和对偶问题式（8.33）的可行解，且有

$$\sum_{i=1}^{r} c_i x_i' = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i'$$

则 $x_1', x_2', \cdots, x_r'$ 是本原问题式（8.32）的最优可行解，

$y_1', y_2', \cdots, y_m'$ 是对偶问题式（8.33）的最优可行解.

定理 8.6　如果本原问题式（8.32）与对偶问题式（8.33）之一有最优可行解，则另一个也有最优可行解，且它们的目标函数值相等.

定理 8.6 表明了本原问题（对偶问题）最优可行解存在性，也保证了对偶问题（本原问题）的最优可行解的存在. 由这一定理可得到如下的推论，该推论表明了怎样从本原问题的最优单纯形表得到对偶问题的最优可行解.

推论　在本原问题的最优单纯形表中，目标函数的松弛变量的系数就是对偶问题的最优基本可行解.

由定理 8.6 与推论可知，用单纯形法求一个本原问题和它的对偶问题的最优可行解，可以先直接求出这个本原问题的最优可行解，从而得到对偶问题的最优可行解；也可以先求出对偶问题的最优可行解，从而得到本原问题的最优可行解．

二、习题解答

8.1　用图解法解下列线性规划问题：

a．max　$y=2x_1+5x_2$

s.t.　$x_1 \le 4$

$x_2 \le 3$

$x_1+2x_2 \le 8$

$x_i \ge 0$，$i=1$，2

解：由约束条件，可以在x_1x_2平面上画出图 8-1 所示．其阴影部分就是满足问题的所有约束条件的可行解域．于是把目标函数$y=2x_1+5x_2$最优化的问题就变成在可行解域中选一个点，使 $2x_1+5x_2$在其上的值达到最大．

在x_1x_2平面上作平行直线族 $2x_1+5x_2=k$，（k为参数），如图 8-2 所示．在同可行解域相交的族的所有直线之中，有一条直线其k值最大，这条直线同可行解域的公共部分就是这个问题的最优可行解．

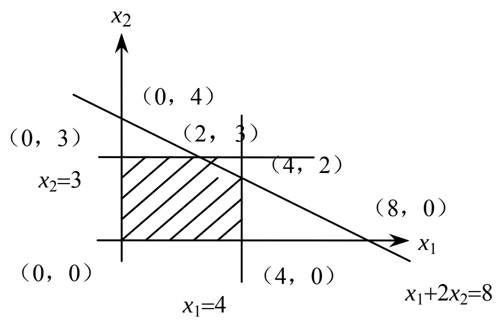


图　8-1

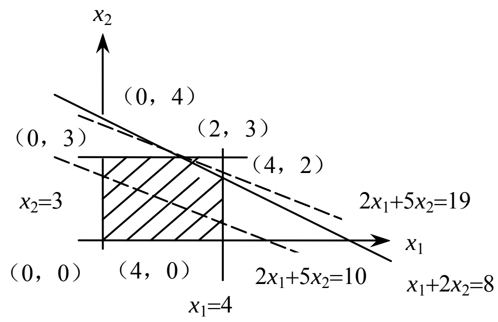


图　8-2

如图 8-2 中，直线 $2x_1+5x_2=19$ 是可行解域在顶点（2，3）处的切线，于是目标函数y只能在可行解域的顶点$x_1=2$，$x_2=3$ 处取极大值 19．

b．max　$y=5x_1+2x_2$

s.t.　$-x_1+x_2 \le 5$

$10x_1+x_2 \le 10$

$x_i \ge 0$，$i=1$，2

解：由约束条件，可以在x_1x_2平面上画出图 8-3．其阴影部分就是满足问题的所有约束条件的可行解域．于是把目标函数$y=5x_1+2x_2$最优化的问题就变成在可行解域中选一个点，

使 $5x_1+2x_2$在其上的值达到最大．

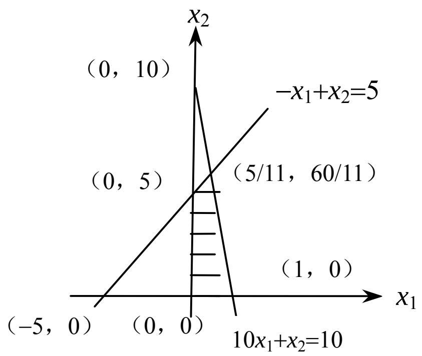


图　8-3

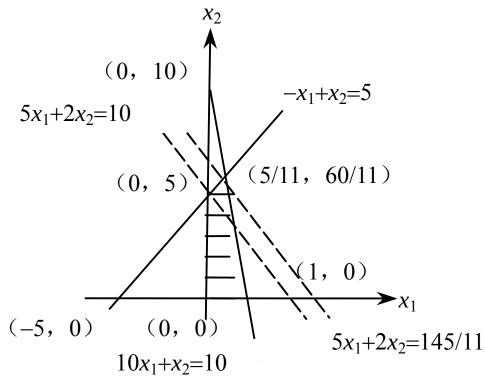


图　8-4

在x_1x_2平面上作平行直线族 $5x_1+2x_2=k$，（k为参数），如图 8-4 所示．在同可行解域相交的族的所有直线之中，有一条直线其k值最大，这条直线同可行解域的公共部分就是这个问题的最优可行解．如图 8-4 中，直线 $5x_1+2x_2=145/11$ 是可行解域在顶点（5/11，60/11）处的切线，于是目标函数y只能在可行解域的顶点$x_1=5/11$，$x_2=60/11$ 处取极大值 145/11．

c．

$$
\begin{aligned}
\max\quad & y=2x_1+2x_2 \\
\text{s.t.}\quad & -x_1+x_2\le 1 \\
& x_1+x_2\le 3 \\
& x_i\ge 0,\ i=1,\ 2
\end{aligned}
$$

解：由约束条件，可以在x_1x_2平面上画出图 8-5．其阴影部分就是满足问题的所有约束条件的可行解域．于是把目标函数$y=2x_1+2x_2$最优化的问题就变成在可行解域中选一个点，使 $2x_1+2x_2$在其上的值达到最大．

在x_1x_2平面上作平行直线族 $2x_1+2x_2=k$，（k为参数），如图 8-6 所示．在所有的平行直线中，直线 $2x_1+2x_2=6$ 与可行解域的边界AB相重且其k值最大．

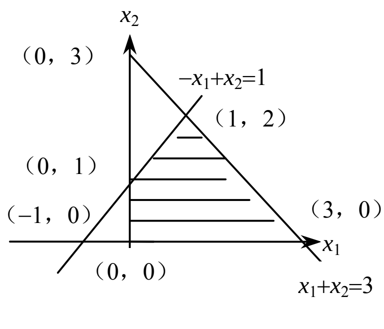


图　8-5

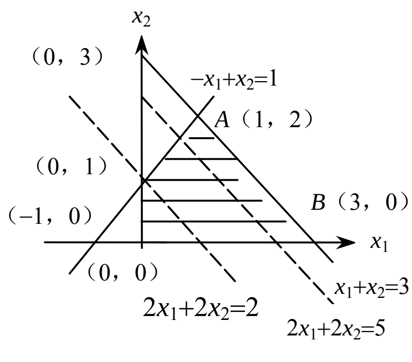


图　8-6

由此可见，可行解域的边界 AB 上所有点都是最优可行解．其极大值为 $y=6$．

8.2　将下列线性规划问题化成标准形：

a．min　$y=-3x_1-4x_2+2x_3$

s.t.　$3x_1+4x_2+x_3\le 2$

$2x_1-3x_2+x_3\ge -4$

$x_1\le 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\le 0$

解：令 $y'=-y$ 得

max　$y'=3x_1+4x_2-2x_3$

s.t.　$3x_1+4x_2+x_3+x_4=2$

$-2x_1+3x_2-x_3+x_5=4$

$x_1\le 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\le 0$

再令 $x_1=x'_1-x''_1(x'_1\ge 0, x''_1\ge 0)$

$x_3=x'_3-x''_3(x'_3\ge 0,\ x''_3\ge 0)$

可得：max　$y'=3x'_1-3x''_1+4x_2-2x'_3+2x''_3$

s.t.　$3x'_1-3x''_1+4x_2+x'_3-x''_3+x_4=2$

$-2x'_1+2x''_1+3x_2-x'_3+x''_3+x_5=4$

$x'_1\ge 0,\ x''_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x'_3\ge 0,\ x''_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\ge 0$

b．min　$y=3x_1-4x_2+x_3$

s.t.　$-x_1+x_2+x_3\le 5$

$x_1-x_2-2x_3\ge -6$

$5x_1+x_2-3x_3=4$

$x_i\ge 0, i=1, 2, 3$

解：令 $y'=-y$

得 max　$y'=-3x_1+4x_2-x_3$

将 b_i 变成正并引入松弛变量 x_4 , x_5 可得：

max　$y'=-3x_1+4x_2-x_3$

s.t.　$-x_1+x_2+x_3+x_4=5$

$-x_1+x_2+2x_3+x_5=6$

$5x_1+x_2-3x_3=4$

$x_i\ge 0, i=1, 2, 3, 4, 5$

8.3　用单纯形法求解下列线性规划问题：

a．max　$y=3x_1+6x_2+2x_3$

s.t.　$3x_1+4x_2+x_3\le 2$

$x_1+3x_2+2x_3\le 1$

$x_i\ge 0, i=1, 2, 3$

解：引入松弛变量 x_4 , x_5 ，将约束条件变成标准形式，并改写目标函数得：

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 1$$
$$y - 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0$$

选初始基本可行解为：

（0，0，0，2，1）

用基本可行解中的非基本变量表示出基本变量和目标函数：

$$x_4 + 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \quad （1）$$

$$x_5 + x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \quad （2）$$

$$y - 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0 \quad （3）$$

选 x_2 作为基本变量，在式（1）（2）中取 $x_2 = \min\{\frac{1}{2}，\frac{1}{3}\} = \frac{1}{3}$，则得另一基本可行解为

（0，$\frac{1}{3}$，0，$\frac{2}{3}$，0）

再用基本可行解中的非基本变量表示出基本变量和目标函数：

$$x_4 + \frac{5}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_5 = \frac{2}{3} \quad （1）'$$

$$x_2 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{1}{3} \quad （2）'$$

$$y - x_1 + 2x_3 + 2x_5 = 2 \quad （3）'$$

选 x_1 作为基本变量，在式（1）'（2）'中取 $x_2 = \min\{\frac{2}{5}，1\} = \frac{2}{5}$，则得另一基本可行解为

（$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{5}$，0，0，0）

再用基本可行解中的非基本变量表示出基本变量和目标函数：

$$x_1 - x_3 + \frac{3}{5}x_4 - \frac{4}{5}x_5 = \frac{2}{5} \quad （1）''$$

$$x_2 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{3}x_5 = \frac{1}{5} \quad （2）''$$

$$y + x_3 + \frac{3}{5}x_4 + \frac{6}{5}x_5 = \frac{12}{5} \quad （3）''$$

此时，目标函数中 x_3, x_4, x_5 的系数均为正，表示当 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ 时，$\max y = \frac{12}{5}$，最优基本可行解为：

（$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{5}$，0，0，0）

b．min　$y = x_1 - x_2$

s.t.　$4x_1 - 5x_2 \le 10$

$5x_1 + 2x_2 \le 1$

$3x_1 + 3x_2 \le 12$

$x_i \ge 0, i = 1, 2$

解：首先引入松弛变量 x_3, x_4, x_5，并令 $y' = -y$，使约束条件变成标准形式，并改写目标函数得：

$$
\begin{aligned}
&4x_1 - 5x_2 + x_3 = 10 \\
&5x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\
&3x_1 + 3x_2 + x_5 = 12 \\
&y' + x_1 - x_2 = 0 \\
&x_i \ge 0, i = 1, 2, 3, 4, 5
\end{aligned}
$$

选择一初始基本可行解（0，0，10，1，12），并将上式改写为：

$$
\begin{aligned}
&x_3 + 4x_1 - 5x_2 = 10 \\
&x_4 + 5x_1 + 2x_2 = 1 \\
&x_5 + 3x_1 + 3x_2 = 12 \\
&y' + x_1 - x_2 = 0 \\
&x_i \ge 0, i = 1, 2, 3, 4, 5
\end{aligned}
$$

使用表格法，可得表 8-2、表 8-3．

表　8-2

	x_1	x_1	解
x_3	4	–5	10
x_4	5	$\boxed{2}$	1
x_5	3	3	12
y'	1	–1	0

表　8-3

	x_1	x_4	解
x_3	$\frac{33}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{2}$
x_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_5	$\frac{9}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{21}{2}$
y'	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

此时目标函数中的系数都为正，则：

$$\max \quad y'=\frac{1}{2}，\min \quad y=-\frac{1}{2}$$

最优基本可行解为（0，$\frac{1}{2}$，$\frac{25}{2}$，0，$\frac{21}{2}$）.

c．max　$y=10x_1+15x_2+12x_3$

s.t.　$-5x_1+6x_2+15x_3\leq 15$

$2x_1+x_2+x_3\geq 5$

$x_i\geq 0$，$i=1$，2，3

解：首先引入松弛变量 x_4, x_5，使约束条件变成标准形式，并改写目标函数得：

$$\begin{aligned}
\max \quad & y=10x_1+15x_2+12x_3 \\
\text{s.t.} \quad & -5x_1+6x_2+15x_3+x_4=15 \\
& 2x_1+x_2+x_3-x_5=5 \\
& x_i\geq 0，(i=1，2，3，4，5)，y_1\geq 0
\end{aligned}$$

显然上式无明显基本可行解，用二阶段法来求解该问题，引入人工变量y_1，构造新的线性规划如下：

$$\begin{aligned}
\max \quad & z=-y_1 \\
\text{s.t.} \quad & -5x_1+6x_2+15x_3+x_4=15 \\
& 2x_1+x_2+x_3-x_5+y_1=5 \\
& x_i\geq 0，(i=1，2，3，4，5)，y_1\geq 0
\end{aligned}$$

显然有初始基本可行解为（0，0，0，15，0，5），由表格法求解如表 8-4、表 8-5 所示.

表　8-4

	x_1	x_2	x_3	x_5	解
x_4	–5	6	15	0	15
y_1	$\boxed{2}$	1	1	–1	5
z	–2	–1	–1	1	–5

表　8-5

	y_1	x_2	x_3	x_5	解
x_4	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{35}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{55}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
z	1	0	0	0	0

由表 8-4 知y_1是非基本变量，最优可行解为（$\frac{5}{2}$，0，0，$\frac{55}{2}$，0，0），于是原问题的基本可行解为（$\frac{5}{2}$，0，0，$\frac{55}{2}$，0），在表 8-5 中去掉y_1所在的列并用目标函数y的系数替换表 8-5 的最后一行，得表 8-6.

表 8-6

	x_2	x_3	x_5	解
x_4	$\frac{17}{2}$	$\frac{35}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{55}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
y	–10	–7	–5	25

有一列元素全为负，无最优解.

d．min　$y=x_2-3x_3+2x_5$

s.t.　$x_1+3x_2-3x_3+2x_5=7$

$-2x_1+4x_3+x_4=12$

$-4x_2+3x_3+8x_5+x_6=10$

$x_i\geq 0, i=1,2,3,4,5,6$

解：对原式进行标准化，得：

$$\begin{aligned}
&\max\quad z=-\min\quad y=-x_2+3x_3-2x_5\\
&\text{s.t.}\quad x_1+3x_2-3x_3+2x_5=7\\
&\qquad -2x_1+4x_3+x_4=12\\
&\qquad -4x_2+3x_3+8x_5+x_6=10\\
&\qquad x_i\geq 0, i=1,2,3,4,5,6
\end{aligned}$$

显然上式无明显的基本可行解．故用二阶段法寻求问题的初始基本可行解.

第一阶段引入人工变量y_1，构造如下新的线性规划问题：

$$\begin{aligned}
&\max\quad z'=-y_1\\
&\text{s.t.}\quad x_1+3x_2-3x_3+2x_5+y_1=7\\
&\qquad -2x_1+4x_3+x_4=12\\
&\qquad -4x_2+3x_3+8x_5+x_6=10\\
&\qquad x_i\geq 0, i=1,2,3,4,5,6,\quad y_1\geq 0
\end{aligned}$$

显然有基本可行解（0，0，0，12，0，10，7），用单纯形表格求解如表 8-7、表 8-8

所示.

表　8-7

	x_1	x_2	x_3	x_5	解
x_4	–2	0	4	0	12
x_6	0	–4	3	8	10
y_1	1	$\boxed{3}$	–3	2	7
z'	–1	–3	3	–2	–7

表　8-8

	x_1	y_1	x_3	x_5	解
x_4	–2	0	4	0	12
x_6	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	–1	$\frac{32}{3}$	$\frac{58}{3}$
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	–1	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
z'	0	1	0	0	0

由表 8-8 知，y_1 是非基本变量，最优基本可行解为（0，$\frac{7}{3}$，0，12，0，$\frac{58}{3}$，0），于是去掉人工变量 y_1=0，则（0，$\frac{7}{3}$，0，12，0，$\frac{58}{3}$）就是原问题的基本可行解.

第二阶段以（0，$\frac{7}{3}$，0，12，0，$\frac{58}{3}$）作为初始基本可行解，对原问题式使用单纯形法开始第二阶段的计算，如表 8-9、表 8-10、表 8-11 所示.

表　8-9

	x_1	x_3	x_5	解
x_2	$\frac{1}{3}$	–1	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
x_4	–2	$\boxed{4}$	0	12
x_6	$\frac{4}{3}$	–1	$\frac{32}{3}$	$\frac{58}{3}$
z	$-\frac{1}{3}$	–2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$

表 8-10

	x_1	x_4	x_5	解
x_2	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{3}$
x_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	3
x_6	$\boxed{\frac{5}{6}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{32}{3}$	$\frac{67}{3}$
z	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{3}$

表 8-11

	x_6	x_4	x_5	解
x_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{42}{15}$	$\frac{49}{5}$
x_3	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{32}{5}$	$\frac{82}{5}$
x_1	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{64}{5}$	$\frac{134}{5}$
z	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{276}{15}$	$\frac{197}{5}$

由表 8-11 的最后一行可见，非基本变量的系数全为正，故目标函数取得极大值，$\max\ z=\frac{197}{5}$，故 $\min\ y=-\frac{197}{5}$.

其最优基本可行解为（$\frac{134}{5}$，$\frac{49}{5}$，$\frac{82}{5}$，0，0，0）.

e.

$$
\begin{aligned}
\min\quad & y=2x_1-3x_2+6x_3+x_4-2x_5 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1-3x_2+x_3+3x_4-x_5=3 \\
& x_1+x_2 0-2x_3+9x_4=4 \\
& x_i\geq 0, i=1,2,3,4,5
\end{aligned}
$$

解：对原式进行标准化，得：

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z=-\min\quad y=-2x_1+3x_2-6x_3-x_4+2x_5 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1-3x_2+x_3+3x_4-x_5=3 \\
& x_1+x_2-2x_3+9x_4=4 \\
& x_i\geq 0, i=1,2,3,4,5
\end{aligned}
$$

显然上式无明显的基本可行解．故用二阶段法寻求问题的初始基本可行解．

第一阶段引入人工变量 y_1，y_2，构造如下新的线性规划问题：

$$\max \quad z' = -(y_1 + y_2)$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 + y_1 = 3$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 9x_4 + y_2 = 4$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad y_j \geq 0, j = 1, 2$$

显然有基本可行解（0，0，0，0，0，3，4），用单纯形表格求解如下表 8-12、表 8-13、表 8-14 所示.

第二阶段以（1，0，0，$\frac{1}{3}$，0）作为初始基本可行解，对原问题式使用单纯形法开始第二阶段的计算，如表 8-15 所示.

表　8-12

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	解
y_1	2	−3	1	3	−1	3
y_2	1	1	−2	$\boxed{9}$	0	4
z'	−3	2	1	−12	1	−7

表　8-13

	x_1	x_2	x_3	y_1	x_5	解
y_1	$\boxed{\frac{5}{3}}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	−1	$\frac{5}{3}$
x_4	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
z'	$-\frac{5}{3}$	$\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$

表　8-14

	y_1	x_2	x_3	y_2	x_5	解
x_1	$\frac{3}{5}$	−2	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1
x_4	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
z'	1	0	0	1	0	0

表　8-15

	x_2	x_3	x_5	解
x_1	−2	1	$-\frac{3}{5}$	1
x_4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{1}{15}}$	$\frac{1}{3}$
z	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$	$-\frac{13}{15}$	$-\frac{7}{3}$

表　8-16

	x_2	x_3	x_4	解
x_1	1	−2	9	4
x_5	5	−5	15	5
z	$\frac{41}{3}$	0	13	2

由表 8-16 的最后一行可见，非基本变量的系数全为正，故目标函数取得极大值.

$$\max\quad z=2，故\min\quad y=-2$$

其最优基本可行解为（4，0，0，0，5）.

8.4　一家银行准备把它的钱进行投资，有两种投资计划可供选择. 投资计划 A 可以保证每 1 元钱投资 1 年后可赚 0.7 元. 而投资计划 B 可以保证每 1 元钱投资两年后可赚两元. 但在投资计划 B 中，只有投资的时间是两年的倍数才可以. 为了使它在第 3 年年底的收入最多，它应该怎样投资 100 000 元.

解：设给计划 A 投资 x_1 元，给计划 B 投资 x_2 元，则由题意可得：

$$\begin{aligned}\max\quad & y=1.7^3x_1+3\times1.7x_2=4.913x_1+5.1x_2\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2=100\,000\\ & x_i\ge 0, i=1,2\end{aligned}$$

解得

$$x_1=0，\quad x_2=100\,000$$

$$\max\quad y=510\,000$$

8.5　一家汽车制造厂生产 A 型和 B 型两种卡车. 每一部 A 型车的利润是 200 元，B 型车的利润是 100 元. A 型车平均需要 150 人同时来组装，50 人同时来油漆，10 人同时来检验. B 型车平均需要 60 人同时来组装，40 人同时来油漆，20 人同时来检验. 在每一种生产过程中，组装车间有 30 000 人同时可供使用，油漆车间有 13 000 人同时可供使用，检验车间有 5000 人同时可供使用. 为了在每一生产过程中获得最大可能的利润，该汽车制造厂应如何安排它的生产计划.

解：设生产 A 型车为 x_1 部，生产 B 型车为 x_2 部，利润为 y 元，则问题的数学模型为：

$$\begin{aligned}\max\quad & y=200x_1+100x_2\\ \text{s.t.}\quad & 150x_1+60x_2\le 30\,000\\ & 50x_1+40x_2\le 13\,000\\ & 10x_1+20x_2\le 5000\\ & x_i\ge 0, i=1,2\end{aligned}$$

引入松弛变量 x_3，x_4，x_5，将约束条件化为标准型并改写目标函数，得到：

$$150x_1+60x_2+x_3=30\,000$$
$$50x_1+40x_2+x_4=13\,000$$
$$10x_1+20x_2+x_5=5000$$
$$y-200x_1-100x_2=0$$
$$x_i\geq 0,\ i=1,2,3,4,5$$

由表格法可得表 8-17、表 8-18、表 8-19.

表　8-17

	x_1	x_2	解
x_3	$\boxed{150}$	60	30000
x_4	50	40	13000
x_5	10	20	5000
y	−200	−100	0

表　8-18

	x_3	x_2	解
x_1	$\frac{1}{150}$	$\frac{2}{5}$	200
x_4	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{20}$	3000
x_5	$-\frac{1}{15}$	16	3000
y	$\frac{4}{3}$	−20	40000

表　8-19

	x_3	x_4	解
x_1	$\frac{1}{75}$	$-\frac{1}{50}$	140
x_2	$-\frac{1}{60}$	$\frac{1}{20}$	150
x_5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	600
y	1	1	43000

由 8-19 最后一行可见，非基本变量 x_3，x_4 的系数全为正，故目标函数取极大值 43 000，其最优基本可行解为（140，150，0，0，600），即汽车厂应生产 A 车 140 部，B 车 150 部，才能获得最大利润 43 000 元.

8.6　用二阶段法求解下列线性规划问题：

a．max　$y=-4x_1-3x_2$

s.t.　$2x_1+x_2\ge 25$

$x_1+3x_2\ge 30$

$x_1+x_2\ge 20$

解：引入松弛变量 x_3， x_4, x_5，将约束条件变成标准形式，并改写目标函数得：

$$2x_1+x_2-x_3=25$$

$$x_1+3x_2-x_4=30$$

$$x_1+x_2-x_5=20$$

$$y+4x_1+3x_2=0$$

显然，上述问题无明显的基本可行解，故用二阶段法寻求该问题的初始基本可行解.

第一阶段：引入人工变量 y_1， y_2， y_3，构造如下的线性规划问题

$$\max\quad z=-(y_1+y_2+y_3)$$

$$\text{s.t.}\quad 2x_1+x_2-x_3+y_1=25$$

$$x_1+3x_2-x_4+y_2=30$$

$$x_1+x_2-x_5+y_3=20$$

上式有明显的基本可行解（0，0，0，0，0，25，30，20）. 用这个基本可行解作为初始基本可行解，利用单纯形表格可得表 8-20、表 8-21、表 8-22、表 8-23.

表　8-20

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	解
y_1	2	1	−1	0	0	25
y_2	1	$\boxed{3}$	0	−1	0	30
y_3	1	1	0	0	−1	20
z	−4	−5	1	1	1	−75

表　8-21

	x_1	y_2	x_3	x_4	x_5	解
y_1	$\boxed{\frac{5}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	−1	$\frac{1}{3}$	0	15
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	10
y_3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	−1	10
z	$-\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	1	−25

表 8-22

	y_1	y_2	x_3	x_4	x_5	解
x_1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	9
x_2	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	7
y_3	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\boxed{\frac{1}{5}}$	–1	4
z	$\frac{7}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	–4

表 8-23

	y_1	y_2	x_3	y_3	x_5	解
x_1	1	0	–1	–1	1	5
x_2	–1	0	1	2	–2	15
x_4	–2	–1	2	5	–5	20
z	1	1	0	1	0	0

由表 8-23 知，y_1，y_2，y_3是非基本变量，最优基本可行解为（5，15，0，20，0，0，0，0），于是去掉人工变量$y_1 = y_2 = y_3$=0，则（5，15，0，20，0）就是原问题的基本可行解.

第二阶段以（5，15，0，20，0）作为初始基本可行解，对原问题式使用单纯形法开始第二阶段的计算.

利用表 8-23，在表 8-23 中去掉人工变量y_1，y_2，y_3对应的列，并用原目标函数的系数替换表 8-23 中的最后一行，得表 8-24 如下：

表 8-24

	X_3	x_5	解
x_1	–1	1	5
x_2	1	–2	15
x_4	2	–5	20
y	1	2	–65

由表 8-24 的最后一行可见，非基本变量x_3，x_5的系数全为正，故目标函数取得极大值–65，其最优基本可行解为（5，15，0，20，0）.

b．min y=–2 $x_1 - x_2 - x_3$

s.t. $4x_1+6x_2+3x_3\le 8$

$x_1-9x_2+x_3\le -3$

$-2x_1-3x_2+5x_3\le -4$

解：首先引入松弛变量x_4,x_5,x_6，并令$y'=-y$，使约束条件变成标准形式，并改写目标函数得：

$$\begin{aligned}&4x_1+6x_2+3x_3+x_4=8\\&-x_1+9x_2-x_3-x_5=3\\&2x_1+3x_2-5x_3-x_6=4\\&y'-2x_1-x_2-x_3=0\\&x_i\ge 0,i=1,2,3,4,5,6\end{aligned}\tag{8-1}$$

显然式（8-1）无明显的基本可行解．故用二阶段法寻求问题的初始基本可行解．

第一阶段引入人工变量y_1，y_2，构造如下新的线性规划问题：

$$\begin{aligned}\max\quad & z=-(y_1+y_2)\\ \text{s.t.}\quad & 4x_1+6x_2+3x_3+x_4=8\\ & -x_1+9x_2-x_3-x_5+y_1=3\\ & 2x_1+3x_2-5x_3-x_6+y_2=4\\ & x_i\ge 0,i=1,2,3,4,5,6,\quad y_i\ge 0,i=1,2\end{aligned}\tag{8-2}$$

式（8-2）有明显的基本可行解（0，0，0，8，0，0，3，4）．用这个基本可行解作为初始可行解．利用单纯形表格得表 8-25、表 8-26、表 8-27．

表 8-25

	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	解
x_4	4	6	3	0	0	8
y_1	–1	9	–1	–1	0	3
y_2	$\boxed{2}$	3	–5	0	–1	4
z	–1	–1	2	6	11	–7

表 8-26

	y_2	x_2	x_3	x_5	x_6	解
x_4	–2	0	1	30	2	0
y_1	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{21}{2}}$	$-\frac{7}{2}$	–1	$-\frac{1}{2}$	5
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2
z	$\frac{1}{2}$	$-\frac{21}{2}$	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	–5

表　8-27

	y_2	y_1	y_3	y_5	y	解
x_4	-2	0	13	0	2	0
x_2	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{21}$	$-\frac{1}{21}$	$\frac{10}{21}$
x_1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	-2	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$
y'	1	1	0	0	0	0

由表 8-27 可知，y_1，y_2 是非基本变量，其最优基本可行解为（$\frac{9}{7}$，$\frac{10}{21}$，0，0，0，0，0，0）. 于是去掉人工变量 $y_1=y_2=0$，则（$\frac{9}{7}$，$\frac{10}{21}$，0，0，0，0）就是原问题式（1）的基本可行解.

第二阶段以（$\frac{9}{7}$，$\frac{10}{21}$，0，0，0，0）作为初始基本可行解. 对原问题式（1）使用单纯形法开始第二阶段的计算.

利用表 8-27，在表 8-27 中去掉人工变量 y_1，y_2 对应的列，并用式（1）中目标函数的系数替换表 8-27 中的最后一行，得表 8-28、8-29.

表　8-28

	x_3	x_5	x_6	解
x_4	$\boxed{1}$	30	2	0
x_2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{21}$	$-\frac{1}{21}$	$\frac{10}{21}$
x_1	-2	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$
y'	$-\frac{16}{3}$	$\frac{4}{21}$	$-\frac{19}{21}$	$\frac{64}{21}$

表　8-29

	x_4	x_5	x_6	解
x_3	$\frac{1}{13}$	0	$\frac{2}{13}$	0
x_2	$\frac{1}{39}$	$-\frac{2}{21}$	$-\frac{4}{273}$	$\frac{10}{21}$
x_1	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{11}{91}$	$\frac{9}{7}$
y'	$\frac{16}{39}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{53}{273}$	$\frac{64}{21}$

由表 8-29 最后一行知，非基本变量x_4，x_5，x_6的系数全为正，故有max　$y'=\frac{64}{21}$，其最基本可行解为（$\frac{9}{7}$，$\frac{10}{21}$，0，0，0，0）

$$\min\quad y=-\max\quad y'=-\frac{64}{21}$$

8.7　求解下列线性规划问题的对偶问题：

a．max　$y=5x_1+6x_2-4x_3+4x_4$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & x_1+x_2+5x_3-5x_4\le 3\\ & x_1+x_2-x_3+x_4\ge 4\\ & -x_1-2x_2-3x_3+3x_4\le 1\\ & x_i\ge 0,\ i=1,2,3,4\end{aligned}$$

解：原问题的对偶问题为：

$$\begin{aligned}\min\quad & z=3y_1-4y_2+y_3\\ \text{s.t.}\quad & y_1-y_2-y_3\ge 5\\ & y_1-y_2-2y_3\ge 6\\ & 5y_1+y_2-3y_3\ge -4\\ & -5y_1-y_2+3y_3\ge 4\end{aligned}$$

对上式首先引入松弛变量y_4，y_5，y_6，y_7，并令 $z'=-z$，使约束条件变成标准形式，并改写目标函数得：

$$\begin{aligned}\max\quad & z'=-3y_1+4y_2-y_3\\ \text{s.t.}\quad & y_1-y_2-y_3-y_4=5\\ & y_1-y_2-2y_3-y_5=6\\ & 5y_1+y_2-3y_3-y_6=-4\\ & -5y_1-y_2+3y_3-y_7=4\end{aligned}$$

显然式（1）无明显的基本可行解，故用二阶段法寻求问题的初始基本可行解.

第一阶段引入人工变量y_8，y_9，y_{10}，构造如下新的线性规划问题：

$$\begin{aligned}\max\quad & X=-(y_8+y_9+y_{10})\\ \text{s.t.}\quad & y_1-y_2-y_3-y_4+y_8=5\\ & y_1-y_2-2y_3-y_5+y_9=6\\ & -5y_1-y_2+3y_3+y_6=4\\ & -5y_1-y_2+3y_3-y_7+y_{10}=4\end{aligned}$$

显然有基本可行解（0，0，0，0，0，4，0，5，6，4），用单纯形表格求解如下表 8-30、

表 8-31 所示.

表 8-30

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_7	解
y_6	−5	−1	3	0	0	0	4
y_8	$\boxed{1}$	−1	−1	−1	0	0	5
y_9	1	−1	−2	−1	0	0	6
y_{10}	−5	−1	3	0	0	−1	4
x	−3	−3	0	−2	0	−1	0

表 8-31

	y_8	y_2	y_3	y_4	y_5	y_7	解
y_6	5	−6	−2	−5	0	0	29
y_1	1	−1	−1	−1	0	0	5
y_9	1	0	−1	0	0	0	1
y_{10}	5	−6	−2	−5	0	−1	29
x	3	0	−6	−2	0	−1	15

表 8-31 中有一列元素全为负，故原问题无最优解.

b．min $y=2x_1+2x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 2x_1+4x_2\geq 1 \\ & x_1+2x_2\geq 1 \\ & 2x_1+x_2\geq 1 \\ & x_i\geq 0, i=1,2 \end{aligned}$$

解：原问题的对偶问题是：

$$\begin{aligned} \max\quad & z=y_1+y_2+y_3 \\ \text{s.t.}\quad & 2y_1+y_2+2y_3\leq 2 \\ & 4y_1+2y_2+y_3\leq 2 \\ & y_i\geq 0，i=1，2，3 \end{aligned}$$

对上式首先引入松弛变量 y_4， y_5，使约束条件变成标准形式，并改写目标函数得：

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 2y_1+y_2+2y_3+y_4=2 \\ & 4y_1+2y_2+y_3+y_5=2 \\ & z-y_1-y_2-y_3=0 \end{aligned}$$

$$y_i \ge 0，i=1，2，3，4，5$$

显然，其初始基本可行解为（0，0，0，2，2）.

使用表格法求解得如下表 8-32、表 8-33、表 8-34、表 8-35 所示.

表 8-32

	y_1	y_2	y_3	解
y_4	2	1	2	2
y_5	$\boxed{4}$	2	1	2
z	−1	−1	−1	0

表 8-33

	y_5	y_2	y_3	解
y_4	$-\frac{1}{2}$	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	1
y_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
z	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

表 8-34

	y_5	y_2	y_4	解
y_3	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
y_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
z	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

表 8-35

	y_5	y_1	y_4	解
y_3	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
y_2	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
z	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$

由表 8-31 可得对偶问题的最优基本可行解为（0，$\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}$，0，0），max　$z=\frac{4}{3}$.

原问题的最优基本可行解为：（$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$）．min　$y=\frac{4}{3}$．

8.8　利用单纯形法证明以下问题无最优可行解．

$$\begin{aligned}\max\quad & y=x_1+2x_2\\ \text{s.t.}\quad & -2x_1+x_2+x_3\le 2\\ & -x_1+x_2-x_3\le 1\\ & x_i\ge 0，i=1，2，3\end{aligned}$$

证：首先引入松弛变量 x_4，x_5，使约束条件变成标准形式，并改写目标函数得：

$$-2x_1+x_2+x_3+x_4=2$$

$$-x_1+x_2-x_3+x_5=1$$

$$y-x_1-2x_2=0$$

$$x_i\ge 0，i=1，2，3，4，5$$

由表格法求解此问题得如下表 8-36、表 8-37、表 8-38、表 8-39 所示

表　8-36

	x_1	x_2	x_3	解
x_4	–2	1	1	2
x_5	–1	$\boxed{1}$	–1	1
y	–1	–2	0	0

表　8-37

	x_1	x_5	x_3	解
x_4	–1	–1	$\boxed{2}$	1
x_2	–1	1	–1	1
y	–3	2	–2	2

表　8-38

	x_1	x_5	x_4	解
x_3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y	–4	1	–1	3

表　8-39

	x_1	x_5	x_3	解
x_4	−1	−1	2	1
X_2	−1	1	−1	1
y	−5	0	2	4

由于最后的单纯形表中存在 x_1 对应的一列的系数全为负，故目标函数的值无界，即该问题无最优可行解.

8.9　试证定理 8.6 及其推论

为了证明的简洁性，本题分两部分进行证明：

1）用矩阵表示线性规划的标准形式：

线性规划的标准模式为

$$\max \quad y=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{8.3}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i=b_1 \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i=b_2 \\ &\cdots\cdots \\ &\sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i=b_m \\ &x_i\geq 0，i=1，2，\cdots，n \end{aligned} \tag{8.3'}$$

式中 $b_i\geq 0$，(i=1，2，$\cdots$，m)

以上线性规划可以用矩阵表示为：

$$\max \quad y=CX \tag{8.4}$$

$$\text{s.t.} \quad AX=b \tag{8.4'}$$

$$X\geq 0$$

其中，A 是式（8.3'）的系数矩阵，$X=(x_1，x_2，\cdots，x_m，x_{m+1}，\cdots，x_n)^T=\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$

$X_B=(x_1，x_2，\cdots，x_m)^T$，$X_N=(x_{m+1}，\cdots，x_n)^T$，

$C=(c_1，\cdots，c_m\ _{m+1}，\cdots，c_n))=(C_B，C_N)$，$C_B=(c_1，\cdots，c_m)$，$C_N=(c_{m+1}，\cdots，c_n)$

$b=(b_1，b_2，\cdots，b_m)^T$，$O=(0，0，\cdots，0)$

不失一般性，设 A=(B，N)，其中 B 表示 A 中前 m 个性线无关的列向量组成的块矩阵（称 B 为基矩阵），N 表示 A 中余下的 n–m 个非基本列向量组成的块矩阵，即有

$$B=(P_1, P_2, \cdots, P_m) \qquad N=(P_{m+1}, P_{m+2}, \cdots, P_n)$$

其中 p_i 为列向量（$i=1, 2, \cdots, n$），则根据式（8.4'）有：

$$(B, N)\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}=b$$

由块矩阵乘法有

$$BX_B=b-NX_N$$

由于 B 可逆，将上式两边同乘以 B^{-1} 得：

$$X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N=B^{-1}b-B^{-1}(P_{m+1}, P_{m+2}, \cdots, P_n)\cdot\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$=B^{-1}b-\sum_{j=m+1}^{n}B^{-1}P_jx_j$$

又

$$\because y=CX=(C_B, C_N)\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}=C_BX_B+C_NX_N$$

则：

$$\begin{aligned} y&=C_B(B^{-1}b-B^{-1}NX_N)+C_NX_N \\ &=C_BB^{-1}b+(C_N-C_BB^{-1}N)X_N \\ &=C_BB^{-1}b+\left[(C_{m+1}, C_{m+2}, \cdots, C_n)-C_BB^{-1}(P_{m+1}, P_{m+2}, \cdots, P_n)\right]\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &=C_BB^{-1}b+\sum_{j=m+1}^{n}(C_j-C_BB^{-1}P_j)x_j \end{aligned}$$

因此，线性规划问题（8.3）和（8.3'）又可表示为：

$$\max \quad y=C_BB^{-1}b+\sum_{j=m+1}^{n}(C_j-C_BB^{-1}P_j)x_j \tag{8.5}$$

$$\text{s.t.} \quad X_B=B^{-1}b-\sum_{j=m+1}^{n}B^{-1}P_jx_j \tag{8.5'}$$

$$X_B, X_N\geq O$$

显然，由式（8.5）知，当 $C_j-C_BB^{-1}P_j\leq 0$ 时，线性规划问题得到最优可行解．称

$$\sigma_j=C_j-C_BB^{-1}P_j \tag{8.6}$$

为 x_j 检验数．

（2）**定理 8.6**　设本原问题式（8.32）与对偶问题式（8.33）之一有最优可行解，则另

一个问题也有最优解可行解，且它们的目标函数值相等.

证明： 将本原问题（8.32）和对偶问题（8.33）分别用矩阵表示如下：

$$\max \quad y = CX \tag{8.7}$$

$$\text{s.t.} \quad AX \le b \tag{8.7'}$$

$$X \ge O$$

$$\min \quad z = Yb \tag{8.8}$$

$$\text{s.t} \quad YA \ge C \tag{8.8'}$$

$$Y \ge O$$

其中，A 是(8.32)的系数矩阵，X=(x_1, x_2, …, x_r)^T Y=(y_1, y_2, …, y_m)C=(c_1, c_2 …, c_r) b=(b_1， b_2， …， b_m)^T， O=（0，0， …， 0）

将本原问题（8.7）和（8.7'）化为标准形式为：

$$\text{Max} \quad y' = CX + C_\alpha X_\alpha \tag{8.9}$$

$$\text{s.t.} \quad AX + I \cdot X_\alpha = b \tag{8.9'}$$

$$X \ge 0, \quad X_\alpha \ge 0$$

其中 X_α =（ x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_{r+m})^T 为松弛变量组成的向量，C_α =（ C_{r+1}， C_{r+2}， …， C_{r+m} ）为松弛变量的系数组成的向量，且 C_α =（ C_{r+1}， C_{r+2}， …， C_{r+m} ）=（0，0， …，0)， I 为 m 阶单位矩阵

设本原问题（8.9）(8.9'）有最优可行解为 $\hat{X}^{(0)}$，相应的最优基矩阵为 B，则有：

$$\hat{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} X^* \\ X_\alpha^* \end{bmatrix}$$

其中， X^* 为本原问题（8.7)（8.7'）的最优可行解.

由 1）中的式（8.6）知（8.9)（8.9'）中的 x_j 检验数 $\sigma_j \le 0$，即有：

$$\sigma_j = C_j - C_B B^{-1} P_j \le 0.（j=1，2， …， r，r+1， …， r+m）$$

记 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \cdots, \sigma_{r+m})$， 则有

$$\sigma = (C_1,\ C_2,\ \cdots C_r,\ C_{r+1},\ \cdots C_{r+m}) - C_B B^{-1} (P_1,\ P_2,\ \cdots P_r,\ P_{r+1},\ \cdots,\ P_{r+m}) \tag{8.10}$$

其中，0 为零向量.

在上式中去掉与本原问题相关的松弛变量及其系数，有：

$$(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r) = (C_1,\ C_2 \cdots C_r) - C_B B^{-1} (P_1,\ P_2,\ \cdots P_r) \le O$$

将上式可以写为（注意：A=（B，N）=（ P_1, P_2, …, P_r， P_{r+1}, P_{r+2}, …, P_{r+m}）：

$$C - C_B B^{-1} A \le O$$

记 $Y^{(0)} = C_B B^{-1}$，则上式变成：

$$Y^{(0)}\ A \ge C$$

所以， $Y^{(0)}$ 满足对偶问题（8.8)（8.8'）的约束条件.

又在式（8.10）中挑出松弛变量及其系数部分有

$$(\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \cdots, \sigma_{r+m}) = (C_{r+1}, \cdots C_{r+m}) - C_B B^{-1} (P_{r+1}, \cdots, P_{r+m}) \le 0 \tag{8.11}$$

∵ $$C_{r+1}=C_{r+2}=\cdots=C_{r+m}=0$$

∴ $$Y^{(0)}\geq 0$$

∴ $Y^{(0)}$ 也满足对偶问题（8.8）（8.8'）的非负条件．因此，$Y^{(0)}=C_BB^{-1}$ 为对偶问题的一个可行解．

又由单纯形法原理可知：基矩阵 B 与基本可行解的取值有下述关系：

$$X_B=B^{-1}\cdot b$$

∴ $$Y^{(0)}b=C_BB^{-1}b=C_BX_B$$

由于本原问题（化为标准形式的）的目标函数为：

$$y'=CX+C_\alpha X_\alpha$$

又由 1）中的式（8.4）有

$$y'=C_BX_B+C_NX_N$$

∴ $$C_BX_B+C_NX_N=CX+C_\alpha X_\alpha$$

同理，对于 $\hat{X}^{(0)}=\begin{bmatrix}X^*\\X_\alpha^*\end{bmatrix}$ 也可写为　$\hat{X}^{(0)}=\begin{bmatrix}X_B^{(0)}\\X_N^{(0)}\end{bmatrix}$

∴ $$CX^*+C_\alpha X_\alpha^*=C_BX_B^{(0)}+C_NX_N^{(0)}$$

又∵ $C_\alpha=0$， $X_N^{(0)}=0$

∴ $$CX^*=C_BX_B^{(0)}$$（X^* 为本原问题的最优可行解）

又因 $$X_B^{(0)}=B^{-1}b$$

∴ $$Y^{(0)}\ b=C_BB^{-1}\ b=C_BX_B^{(0)}=CX^*$$

上式表明本原问题与对偶问题的解相等．由定理 8.5 知，这两个解均是各自问题的最优解．本定理得证．

下面，我们证明定理 8.6 的推论.

推论：在本原问题的最优单纯形表中，目标函数的松弛变量的系数就是对偶问题的最优基本可行解.

上述推论等价于：

对于本原问题：

Max　$y=CX$

s.t.　　$AX\leq b$

　　　$X\geq 0$

若有最优解，则在其最优单纯形表中，松弛变量 $X_\alpha=$（x_{r+1},x_{r+2}，⋯，$x_{r+m})^T$ 的检验数（σ_{r+1}，σ_{r+2}，⋯，σ_{r+m}）的负值即为对偶问题的一个最优可行解．下面我们证明这个事实.

若它本原问题的标准形式（8.9）（8.9'）有最优可行解时，由定理 8.6 知，$Y^{(0)}=C_BB^{-1}=$（y_1，y_2，⋯，y_m) 为对偶问题的一个最优可行解.又由式（8.11）知

$(\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \cdots, \sigma_{r+m}) = (C_{r+1},\ C_{r+2},\ \cdots C_{r+m}) - C_B B^{-1}(P_{r+1},\ P_{r+2},\ \cdots,\ P_{r+m})$

将 $C_{r+1} = C_{r+2} = \cdots = C_{r+m} = 0$；$(P_{r+1},\ P_{r+2},\ \cdots,\ P_{r+m}) = I$

代入上式有

$$\begin{aligned}(\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \cdots, \sigma_{r+m}) &= (C_{r+1},\ C_{r+2},\ \cdots C_{r+m}) - C_B B^{-1}(P_{r+1},\ P_{r+2},\ \cdots,\ P_{r+m}) \\ &= (0,\ 0,\ \cdots,\ 0) - Y^{(0)} I \\ &= (0,\ 0,\ \cdots,\ 0) - (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m) \\ &= (-y_1,\ -y_2,\ \cdots,\ -y_m)\end{aligned}$$

$\therefore\ (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m) = (-\sigma_{r+1},\ -\sigma_{r+2},\ \cdots,\ -\sigma_{r+m})$

这就证明了本原问题的松弛变量 $X_\alpha = (x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_{r+m})^T$ 的检验数 $(\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \cdots, \sigma_n)$ 的负值即为对偶问题的一个最优可行解，也即证明了在本原问题的最优单纯形表中，目标函数的松弛变量的系数就是对偶问题的最优基本可行解.

第九章　动 态 规 划

一、内容提要

动态规划是美国数学家 Richard Bellman 在 1951 年提出来的分析一类多阶段决策过程的最优化方法，它在工程技术、工业生产、经济管理、军事及现代控制工程等方面都有着广泛的应用．而且，由于动态规划方法有其独特之处，在解决某些实际问题时利用动态规划的方法比用线性规划和非线性规划方法更加方便有效．

（一）基本概念

1．基本思想

把一个较为复杂的问题分成几个同一类型的更易求解的子问题，然后将这些子问题从后向前按整体最优思想逐个地最优化，再从前向后顺序地求出整个问题的最优解．这就是动态规划的基本思想．

定义 9.1　便于求解，把所给问题的全过程恰当地分成若干个相互联系的子问题，则称这些子问题为阶段，称问题的全过程为多阶段过程．一个多阶段过程由一定数目的参数来描述，称这些参数为状态变量．诸状态变量的一个集合称为过程的状态．

定义 9.2　如果一个多阶段状态过程在每阶段的性状唯一地依赖于状态变量的现时值，则称该过程为 Markov 过程．换句话说，Markov 过程是指：如果某阶段状态给定，则在此阶段以后过程的发展只与当前的状态有关，而与过去的历史无关．

定义 9.3　在一个多阶段过程的每一个阶段，当状态给定以后，往往可以做出不同的决定，从而确定下一阶段的状态，这种决定称为决策．在一个决策过程中被优化的量称做目标函数．

定义 9.4　在多阶段过程中的每一个阶段做出一个决策就构成了一个决策序列，称这个决策序列为策略．使目标函数最优化的策略称之为最优策略．

2．最优原理

一个过程的最优策略具有这样的性质，即无论过程的初始状态和初始决策如何，以后的诸决策对于由第一个决策所形成的状态作为初始状态的过程而言，必须构成最优策略．

由最优原理可知，一个最优策略可以分成若干个子策略，而每个子策略也是最优的．这

就是我们使用动态规划方法的基础．由此可见，用动态规划的方法求解问题的最优解，其基本思想是：首先求部分问题的最优解，再求更大部分问题的最优解．

3．函数递归方程

在最短路问题例子中，如果用w表示图上任一顶点，并用f_k（w）表示从顶点w经过k个阶段到达终点T的最短距离，h_k（w）表示在顶点w要经过k个阶段到达终点T时所选择的下一个顶点，于是由最优原理可得最短路的函数递归方程为

$$f_k(w)=\min\{d(w,h_k(w))+f_{k-1}(h_k(w))\}$$

则称上式为动态规划的递归函数方程，它表明了 k 阶段与 k–1 阶段的递归关系式．

注意：使用动态规划求多阶段决策问题时，首先要求对于该问题最优原理成立．然后列出函数递归方程，先求部分问题的最优解，再求更大部分问题的最优解，直到最后求出整个问题的最优解．

（二）动态规划应用举例

1．资源分配问题

问题的提法：设有某种资源，其总数量为a，用于生产n种产品．若分配数量x_i生产第i种产品，其收益为f_i（x_i），其中f_i（x_i）为已知函数．问应如何分配这种资源才能使总收益最大？

问题的数学模型

$$\max \quad y=\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = a$$

$$x_i \geq 0，i=1，2，\cdots，n$$

上式中，若f_i（x_i）（i=1，2，…，n）全为线性函数，则上述问题为线性规划问题，否则是一个非线性规划问题．无论是线性或非线性规划问题，当n较大时，具体求解是较麻烦的．然而，由于这类问题的特殊结构，可将它看成是一个多阶段决策问题，就可以用动态规划的方法求其最优解．

动态规划方法：设F_k（x）表示以资源x投入生产前k种产品所得到的最大总收益，则由最优原理可导出如下的函数递归方程

$$F_1(x)=f_1(x)$$

$$F_k(x)=\max_{0\leq x_k\leq x}\{f_k(x_k)+F_{k-1}(x-x_k)\} \qquad k=2，3，\cdots，n$$

$$0\leq x\leq a$$

由上式即可递推地求出F_n（a），F_n（a）就是问题的最优解．

2．可靠性设计问题

问题的提法设一个大型系统有n个部件D_1，D_2，…，D_n串联组成，其中如有一个D_i（i=1，2，…，n）出现故障，则整个系统就不能工作，为了提高这个系统的可靠性，每个部件D_i由若干个元件并联而成，并联元件越多，可靠性就越高，但系统的成本与重量等就都要增大．这在实际上是办不到的．因此成本、重量必须有一定的条件限制．为使整个系统可靠性最高，应如何配置各部件的并联元件的个数？

问题的数学模型：设第i个部件D_i由x_i个元件并联而成，每一个并联元件的成本为c_i，重量为a_i，C，A分别为系统的总成本和总重量．于是上述可靠性问题的数学模型为

$$\max \quad R=\prod_{i=1}^{n} r_i(x_i)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le C$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le A$$

$$x_i \ge 1$$

动态规划方法：如果把问题中的一个部件看成是一个阶段，则上面的系统就是多阶段系统．因此，这是一个多阶段决策问题．

设q_i（$u^{(i)}$，$v^{(i)}$）表示前i级部件串联成本限制上界为$u^{(i)}$，重量限制上界为$v^{(i)}$时的最高可靠性，则由最优原理可导出如下的函数递归方程

$$\begin{cases} q_1(u^{(1)}, v^{(1)}) = \max\limits_{1\le x_1\le \zeta_1} \quad r_1(x_1) \\ q_k(u^{(k)}, v^{(k)}) = \max\limits_{1\le x_k\le \zeta_k} \left\{ r_k(x_k) \;\; q_{k-1}(u^{(k)}-c_k x_k, v^{(k)}-a_k x_k) \right\} \end{cases}$$

式中

$$\zeta_k=\min\left\{\left[\frac{u^{(k)}}{c_k}\right],\left[\frac{v^{(k)}}{a_k}\right]\right\}$$

逐步计算q_1（$u^{(1)}$，$v^{(1)}$），q_2（$u^{(2)}$，$v^{(2)}$），…，q_k（$u^{(k)}$，$v^{(k)}$），最后求得q_n（C，A）即为最高可靠性．

3．背包问题

问题提法：有一个徒步旅行者，已知他所能承受的旅行背包的重量不超过a（kg）．设有n种物品可供他选择装入背包，这n种物品分别编号为 1，2，…，n．其中第i种物品每件的重量为a_i（kg），其使用价值为c_i（i=1，2，…，n）．问这位旅行者应如何选择携带这n种物品的件数，使得总价值最大？

问题的数学模型：设旅行者选择携带第i种物品的件数为x_i，于是背包问题的数学模型为

$$\max \quad R=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le a$$

$$x_i \ge 0\text{，且为整数，}i=1\text{，}2\text{，}3\cdots$$

动态规划方法：f_k（y）等于当背包中允许装入物品的总重量不超过y和只允许装入前k种物品采用最优策略时的最大使用价值（k=1，2，…，n），则由最优原理可导出如下的函数递归方程

$$\begin{cases} f_1(y)=\max\limits_{0\le x_1\le\left\lfloor \frac{y}{a_1}\right\rfloor} c_1 x_1 \\ f_k(y)=\max\limits_{0\le x_k\le\left\lfloor \frac{y}{a_k}\right\rfloor}\{c_k x_k + f_{k-1}(y-a_k x_k)\} \end{cases}$$

逐步计算f_1（y），f_2（y），…，f_n（y），及相应的决策变量x_1（y），x_2（y），…，x_n（y），最后求得f_n（a）就是所求的最大价值，其相应的最优策略由回代运算即可得出．

注意：

（1）上面的问题我们只考虑了背包重量的限制，称它为“一维背包”问题．如果再考虑背包的体积限制为 b，并假设第 i 种物品每件的体积为 v_i 立方米．问应如何装载货物使得总价值最大，这就是二维背包问题．

（2）工厂里的下料问题、运输中的最优装载问题等均属于背包类型的问题．

4．货郎担问题

问题的提法：设有 n 个城市的集合 C=｛c_1，c_2，…，c_n｝．d_{ij} 表示城市 c_i 与 c_j 的距离，i，j=1，2，…，n．有一位旅行者从某一城市出发，希望到各个城市去旅游一次且仅一次，然后回到出发的城市．他希望安排一条旅游路线，使得这条路线的距离最小．问应如何安排他的旅游路线？

由图论的知识，可以画出一个具有 n 个顶点的完全图．每一个顶点表示一个城市，连接两个顶点的一条边表示两个城市间的一条道路．边上的权表示这两个城市的距离．于是上面的问题变成要在这个完全图中找出一条哈密尔顿圈，使得该圈的边上权之和为最小的问题．

动态规划方法：如果把问题中的每一个城市看成是一个阶段，则本问题就是一个多阶段决策问题．

设 f_k（c_i，S）是从城市 c_i 出发通过由 k 个城市组成的集合 S 中所有城市一次且仅一次，最后返回到城市 c_1 的最短路的长度．由最优原理有

$$f_k（c_i，S）=\min\{d_{ij}+f_{k-1}[c_j，S-（c_j）]\}$$

当集合S为空集时，上式表示由c_i出发，不经过其他城市回到城市c_1的最短路的长度d_{i1}．

由上式求出所有f（c_j，S）的值，其中集合S分别包含一个城市、两个城市……直到求出$f[c_1$，（$C–c_1$）]的值.

5．其他类型问题

动态规划法：除了在上述几类问题中有重要应用外，还可应用在许多其他类型的问题中，如生产计划、设备更新、货物运输以及数学等问题中．具体应用，请参阅有关文献．

二、习题解答

9.1 设有五个城镇之间的距离如表 9-5 所示．一个流动的推销员从 1 城出发，要求到每个城市去一次且仅一次，最后回到 1 城，问他应选择怎样的行走路线，使总的行程最短？（单位：百公里）．

表 9-5

i 距离 j	1	2	3	4	5
1	0	3	1	5	4
2	1	0	5	4	3
3	5	4	0	2	1
4	3	1	3	0	3
5	5	2	4	1	0

解：推销员从 1 城出发，经过每个城市一次且仅一次，最后回到 1 城．要求其所走路程最短，即寻找一条最短的哈密尔顿圈．

假设已找到一条最短的哈密尔顿圈．现假设它先从 1 城到 k 城，从 k 城出发，沿着这条哈密尔顿圈到 1 城是所有从 k 城出发，经过 C–{1，k}中每个城市一次且仅一次最后回到 1 城的路中最短的．因此，最优原理成立．

假设 C={1，2，3，4，5}表示 5 个城市的集合，$f_k(i,S)$ 表示从 i 城出发，经过由 k 个城市组成的集合 S 中每个城市一次且仅一次，最后回到 1 城的最短路长度由最优原理有：

$$f_k(i,S)=\min_{\substack{j\neq i\\1\leq j\leq 5}}\{d_{ij}+f_{k-1}[j,S-(j)]\}$$

（1）当 $S=\Phi$ 时，表示由 j 出发，不经过其他城市回到 1 城的最短路的长度

$$f（2，\Phi）=1$$

$$f（3，\Phi）=5$$

$$f(4, \Phi)=3$$
$$f(5, \Phi)=5$$

（2）当 S 中的元素只有一个时

$$f[2,(3)]=d_{23}+f(3, \Phi)=10$$
$$f[2,(4)]=d_{24}+f(4, \Phi)=7$$
$$f[2,(5)]=d_{25}+f(5, \Phi)=8$$
$$f[3,(2)]=d_{32}+f(2, \Phi)=5$$
$$f[3,(4)]=d_{34}+f(4, \Phi)=5$$
$$f[3,(5)]=d_{35}+f(5, \Phi)=6$$
$$f[4,(2)]=d_{42}+f(2, \Phi)=2$$
$$f[4,(3)]=d_{43}+f(3, \Phi)=8$$
$$f[4,(5)]=d_{45}+f(5, \Phi)=8$$
$$f[5,(2)]=d_{52}+f(2, \Phi)=3$$
$$f[5,(3)]=d_{53}+f(3, \Phi)=9$$
$$f[5,(4)]=d_{54}+f(4, \Phi)=4$$

（3）当 S 中的元素只有一个时

$$f[2,(3,4)]=\min\{d_{23}+f[3,(4)], d_{24}+f[4,(3)]\}=10$$
$$f[2,(3,5)]=\min\{d_{23}+f[3,(5)], d_{25}+f[5,(3)]\}=11$$
$$f[2,(4,5)]=\min\{d_{24}+f[4,(5)], d_{25}+f[5,(4)]\}=7$$
$$f[3,(2,4)]=\min\{d_{32}+f[2,(4)], d_{34}+f[4,(2)]\}=4$$
$$f[3,(2,5)]=\min\{d_{32}+f[2,(5)], d_{35}+f[5,(2)]\}=4$$
$$f[3,(4,5)]=\min\{d_{34}+f[4,(5)], d_{35}+f[5,(4)]\}=5$$
$$f[4,(2,3)]=\min\{d_{42}+f[2,(3)], d_{43}+f[3,(2)]\}=8$$
$$f[4,(2,5)]=\min\{d_{42}+f[2,(5)], d_{45}+f[5,(2)]\}=6$$
$$f[4,(3,5)]=\min\{d_{43}+f[3,(5)], d_{45}+f[5,(3)]\}=9$$
$$f[5,(2,3)]=\min\{d_{52}+f[2,(3)], d_{53}+f[3,(2)]\}=9$$
$$f[5,(2,4)]=\min\{d_{52}+f[2,(4)], d_{54}+f[4,(2)]\}=3$$
$$f[5,(3,4)]=\min\{d_{53}+f[3,(4)], d_{54}+f[4,(3)]\}=9$$

（4）当 S 中有 3 个元素时

$$f[2,(3,4,5)]=\min\{d_{23}+f[3,(4,5)], d_{24}+f[4,(3,5)], d_{25}+f[5,(3,4)]\}=10$$
$$f[3,(2,4,5)]=\min\{d_{32}+f[2,(4,5)], d_{34}+f[4,(2,5)], d_{35}+f[5,(2,4)]\}=4$$
$$f[4,(2,3,5)]=\min\{d_{42}+f[2,(3,5)], d_{43}+f[3,(2,5)], d_{45}+f[5,(2,3)]\}=7$$
$$f[5,(2,3,4)]=\min\{d_{52}+f[2,(3,4)], d_{53}+f[3,(2,4)], d_{54}+f[4,(2,3)]\}=8$$

（5）当 S 中有 4 个元素时

f［1，（2，3，4，5）］=min{d_{12}+f［2，（3，4，5）]，d_{13}+f［3，（2，4，5）]，d_{14} +f［4，（2，3，5）]，d_{15}+f［5，（2，3，4）］=5

回代求得最短的哈密尔顿圈是

$$1\to3\to5\to4\to2\to1$$

即推销员从 1 城出发，经过 5 个城市的顺序安排为：

$$1\to3\to5\to4\to2\to1$$

9.2　某电视机厂有 100 台彩电的订单要在三周内交货．在第一、第二和第三周生产 x 台彩电的费用分别是$120x, 1.2x^2, 1.5x^2$．定出每周生产彩电的数目的最优策略．

解：假设 x_i（i=1，2，3）表示在第 i 周生产的彩电数，$f_i(x_i)$ 表示第 i 周生产 x_i 台彩电的费用，则此问题的数学模型为

$$\min \quad y = f_1(x_1) + f_2(x_{2i}) + f_3(x_3) = 120x_1 + 1.2x_2^2 + 1.5x_3^2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

显然这是一个非线性规划问题，下面用动态规划方法求解．

假设 $F_k(x)$ 表示在前 k 周生产 x 台彩电所得到的最小费用，则由最优原理可得出如下的递归方程：

$$F_1(x) = f_1(x)$$
$$F_k(x) = \min_{0 \leq x_k \leq x}\{f_k(x_k) + F_{k-1}(x - x_k)\}, k = 2,3$$
$$0 \leq x \leq 100$$

原问题的解就是 $F_3(100)$．

由上式可知

$$F_1(x) = f_1(x) = 120x$$
$$F_2(x) = \min_{0 \leq x_2 \leq x}\{f_2(x_2) + F_1(x - x_2)\}$$
$$F_3(x) = \min_{0 \leq x_3 \leq x}\{f_3(x_3) + F_2(x - x_3)\}$$

解上面的递归方程，可得当 x_1=10，$x_2 = 50$，x_3=40 时有最小值

$$F_3(100) = 6600$$

即第一周生产 10 台彩电，第二周生产 50 台彩电，第三周生产 40 台彩电，可获得最小费用 6600．

9.3　在一个五周生产过程中，有甲、乙两种类型的机器可以用来制造 A 和 B 两种类型的产品，指定机器来制造产品的安排可以每周变更一次．根据机器制造的产品，它的周折旧率如表 9-6 所示的数字．制造产品 A 的机器产生每周 300 元的利润，而制造产品 B 的机

器产生每周 400 元的利润．试决定经营的最优策略．

表 9-6

	产品 A	产品 B
甲型机器	30%	50%
乙型机器	50%	80%

解：设 $f_k(a,b)$ 为 k 周中甲机器生产 a 个产品，乙机器生产 b 个产品的最大利润．其中甲机器生产产品 A 为 x 个，产品 B 为 $a–x$ 个；乙机器生产产品 A 为 y 个，产品 B 为 $b–y$ 个．则由最优原理可得如下的递归方程：

$$f_1(a,b)=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{300x+400(a-x)+300y+400(b-y)\}$$

$$f_k(a,b)=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{300x+400(a-x)+300y+400(b-y)+f_{k-1}(0.7x+0.5(a-x),0.5y+0.2(b-y))\}$$

由上面的递归方程可递推计算如下：

$$f_1(a,b)=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{300x+400(a-x)+300y+400(b-y)\}$$

$$=400a+400b\ （当\ x=0，y=0）$$

$$f_2(a,b)=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{300x+400(a-x)+300y+400(b-y)+f_1(0.7x+0.5(a-x),0.5y+0.2(b-y))\}$$

$$=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{-20x+600a+20y+480b\}$$

$$=600a+500b\ （当\ x=0，y=b）$$

$$f_3(a,b)=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{300x+400(a-x)+300y+400(b-y)+f_2(0.7x+0.5(a-x),0.5y+0.2(b-y))\}$$

$$=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{20x+700a+50y+500b\}$$

$$=720a+550b\ （当\ x=a，y=b）$$

$$f_4(a,b)=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{300x+400(a-x)+300y+400(b-y)+f_3(0.7x+0.5(a-x),0.5y+0.2(b-y))\}$$

$$=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{44x+760a+65y+510b\}$$

$$=804a+575b\ （当\ x=a，y=b）$$

$$f_5(a,b)=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{300x+400(a-x)+300y+400(b-y)+f_4(0.7x+0.5(a-x),0.5y+0.2(b-y))\}$$

$$=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{60.8x+802a+72.5y+515b\}$$

$$=862.8a+587.5b\ （当\ x=a，y=b）$$

因此，在五周生产过程中，甲机器生产 a 个产品，乙机器生产 b 个产品的最大利润是

$$f_5(a,b)=862.8a+587.5b \text{ 元}$$

故经营的最优策略为表 9-6（a）所示的数字．

表　9-6（a）

周	1		2		3		4		5	
产品	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*
机器甲	a	0	$0.7a$	0	0.7^2a	0	0	0.7^3a	0	$0.5(0.7)^3a$
机器乙	b	0	$0.5b$	0	0.5^2b	0	0.5^3b	0	0	0.5^4b

9.4　某公司购置五套先进设备，需分配给所属的甲、乙、丙三个工厂．各工厂获得这种设备后，每年为公司提供的盈利（单位：万元）如表 9-7 所示．问如何分配这些设备，才能使公司得到的盈利最大？

表　9-7

设备数 / 盈利 / 工厂	0	1	2	3	4	5
甲	0	3	7	9	12	13
乙	0	5	10	11	11	11
丙	0	4	6	11	12	12

解：设该公司分别分配 x_1，x_2，x_3 套给三个工厂甲、乙、丙（分别用 1，2，3 代表甲、乙、丙），其盈利分别为 $f_1(x_1)$，$f_2(x_2)$，$f_3(x_3)$，则此问题的数学模型为

$$\max \quad Y=\sum_{i=1}^{3} f_i(x_i)$$

$$\text{s.t.} \quad x_1+x_2+x_3=5$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1，2，3$$

显然这是一个线性规划问题．下面用动态规划方法求解．

设F_k（x）是将x套设备分配到前k（k=1，2，3）个工厂得到的最大盈利，x_k（x）表示取得最大盈利时第k家工厂所得的设备数，由最优原理可得如下的递归方程：

$$\begin{cases} F_1(x)=f_1(x) \\ F_k(x)=\max\limits_{0\le x_k\le x}\{f_k(x_k)+F_{k-1}(x-x_k)\}，k=2，3 \\ 0\le x\le 5 \end{cases}$$

由上面的递归方程可递推计算如下：

$F_3(x) = \max\{f_3(x_3) + F_2(x - x_3)\}$

$F_3(5) = \max\limits_{0 \le x_3 \le 5}\{f_3(x_3) + F_2(5 - x_3)\}$

$=\max\{f_3(0)+F_2(5)$，$f_3(1)+F_2(4)$，$f_3(2)+F_2(3)$，$f_3(3)+F_2(2)$，$f_3(4)+F_2(1)$，$f_3(5)+F_2(0)\}$

$F_2(x) = \max\limits_{0 \le x_2 \le x}\{f_2(x_2) + F_1(x - x_2)\}$

$F_2(5) = \max\limits_{0 \le x_2 \le 5}\{f_2(x_2) + F_1(5 - x_2)\}$

$=\max\{f_2(0)\}+\mathrm{F}_1(5)$，$f_2(1)+F_1(4)$，$f_2(2)+F_1(3)$，$f_2(3)+F_1(2)$，$f_2(4)+F_1(1)$，$f_2(5)+F_1(0)\}$

=max{13，17，19，18，14，11}=19

$F_2(4) = \max\limits_{0 \le x_2 \le 4}\{f_2(x_2) + F_1(4 - x_2)\}$

$=\max\{f_2(0)+F_1(4)$，$f_2(1)+F_1(3)$，$f_2(2)+F_1(2)$，$f_2(3)+F_1(1)$，$f_2(4)+F_1(0)\}$

=max{12，14，17，14，11}=17

$F_2(3) = \max\limits_{0 \le x_3 \le 3}\{f_2(x_2) + F_1(3 - x_2)\}$

$=\max\{f_2(0)+F_1(3)$，$f_2(1)+F_1(2)$，$f_2(2)+F_1(1)$，$f_2(3)+F_1(0)\}$

=max{9，12，13，11}=13

$F_2(2)=\max\{f_2(0)+F_1(2)$，$f_2(1)+F_1(1)$，$f_2(2)+F_1(0)\}$

=max{7，8，10}=10

$F_2(1)=\max\{f_2(0)+F_1(1)$，$f_2(1)+F_1(0)\}$

=max{3，5}=5

$F_2(0)=0$

$F_3(5)=$max{19，21，19，21，17，12}=21

由$F_3(5)=21$，并回代可得：$x_3=1$，$x_2=2$，$x_1=2$ 或者$x_3=3$，$x_2=2$，$x_1=0$

即按如下两种分配方案可使公司得到的盈利最大：

分别分配给工厂甲 2 套、工厂乙 2 套、工厂丙 1 套

不分配给工厂甲、分配给工厂乙 2 套、工厂丙 3 套

9.5　某研究所要用 1 万元资金研制一种电子设备．该设备由四种元件组成．如其中一种元件损坏，整台设备就不能运行．为了提高设备的可靠性，每种元件设计成并联系统，并联一个、二个、三个元件时（并联几个是指有几个元件），它们正常运行的概率和费用（千元）分配如表 9-8（a）、（b）所示．问利用这 1 万元资金，每种元件应并联几个，才能使设备正常运行的概率（可能性）最大？

表 9-8（a）概率表

并联数 \ 元件	1	2	3	4
1	0.70	0.50	0.70	0.60
2	0.80	0.70	0.90	0.70
3	0.90	0.80	0.95	0.90

表 9-8（b）费用表

并联数 \ 元件	1	2	3	4
1	1	2	1	2
2	2	4	3	3
3	3	5	4	4

解：假设第i个部件由x_i个元件并联而成，其可靠性为r_i（x_i），费用为c_i（x_i），则数学模型为：

$$\max \quad R=\sum_{i=1}^{4} r_i(x_i)$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{4} c_i(x_i) \le 10,$$

$$x_i \ge 1 \quad i=1，2，3，4$$

这是一个非线性规划问题．下面用动态规划方法求解．

设q_k（u^k）表示前k级部件串联成本限制上界为$u^{(k)}$时的最高可靠性，由最优原理得：

$$\begin{cases} q_1(u^{(1)}) = \max r_i(x_1)，\ 0 \le x_1 \le \zeta \\ q_k(u^{(k)}) = \max\limits_{1 \le x_k \le \zeta_k} \{r_k(x_k) q_{k-1}(u^{(k)} - c_k(x_k))\}，\text{式中：} \zeta_k = \min\{3, u^{(k)} \ge c_k(x_k)\} \end{cases}$$

$$\therefore \quad q_4(10) = \max_{0 \le x_4 \le 3}\{r_4(x_4) \cdot q_3(10 - c_4(x_4))\}$$

$$= \max\{r_4(1) q_3(8)，r_4(2) q_3(7)，r_4(3) q_3(6)\}$$

$$q_3(8) = \max_{0 \le x_3 \le 3}\{r_3(x_3) \cdot q_2(8 - c_3(x_3))\}$$

$$= \max\{r_3(1) q_2(7)，r_3(2) q_2(5)，r_3(3) q_2(4)\}$$

$$=\{0.56，0.72，0.665\}=0.72$$

$$q_3(7) = \max_{0 \le x_3 \le 3}\{r_3(x_3) \cdot q_2(7 - c_3(x_3))\}$$

$$= \max\{r_3(1) q_2(6)，r_3(2) q_2(4)，r_3(3) q_2(3)\}$$

$$= \max\{0.56，0.45，0.475\}=0.63$$

$$q_3(6)=\max_{0\le x_3\le 3}\{r_3(x_3)\cdot q_2(6-c_3(x_3))\}$$

$=\max\{r_3(1)q_2(5)，r_3(2)q_2(3)，r_3(3)q_2(2)\}$

$=\max\{0.56，0.45.0.475\}=0.56$

$$q_2(7)=\max_{0\le x_2\le 3}\{r_2(x_2)\cdot q_1(7-c_2(x_2))\}$$

$=\max\{r_2(1)q_1(5)，r_2(2)q_1(3)，r_2(3)q_1(2)\}$

$=\{0.45，0.63.0.64\}=0.64$

$q_2(6)=\max\{r_2(1)q_1(4)，r_2(2)q_1(2)，r_2(3)q_1(1)\}$

$=\{0.45，0.56，0.56\}=0.56$

$q_2(5)=\max\{r_2(1)q_1(3)，r_2(2)q_1(1)，r_2(3)q_1(0)\}$

$=\{0.45，0.49，0\}=0.49$

$q_2(2)=\max\{r_2(1)q_1(2)，r_2(2)q_1(0)$

$=\{0.4，0\}=0.4$

$q_2(3)=\max\{r_2(1)q_1(1)\}=0.35$

由回代可得：

$q_4(10)=\max\{0.432，0.441，0.504\}$

则系统的可靠性最大为 0.504，最优的策略如表 9-8（c）所示。

表　9-8（c）

元　件	一	二	三	四
并联数	1	2	1	3

9.6　有一辆大型载运卡车的最大货运量为 12t，最大容量为 10m^3，用来装载两种货物．其各件货物的重量、体积及价值如表 9-9 所示，问应如何装载才能使总价值最大？

表　9-9

货物	重量（t）	容量（m^3）	价值
1	3	1	2
2	4	5	3

解：这是二维背包问题，设卡车装载第 i 种货物的件数为 x_i（$i=1，2$），则其数学模型为：

$$\begin{aligned}
&\max\quad Z=2x_1+3x_2\\
&\text{s.t.}\quad 3x_1+4x_2\le 12\\
&\qquad\quad x_1+5x_2\le 10\\
&\qquad\quad x_i\ge 0 \text{ 且为整数}，i=1，2
\end{aligned}$$

这是一个线性规划问题．下面用动态规划方法求解．

设f_k（y，v）为装载前k件物品其总重量不超过y、总体积不超过v的最大使用价值，由最优原理得如下的递归方程：

$$f_k（y，v）= \max_{\substack{\sum_{i=1}^{k} a_i x_i \le y \\ \sum_{i=1}^{k} v_i x_i \le v}} \sum_{i=1}^{k} c_i x_i \qquad i=1，2$$

x_i≥0 且为整数

∴ $$f_2（y，v）= \max_{0\le x_2 \le \min\left\{\left\lfloor \frac{y}{a_2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{v}{v_2} \right\rfloor\right\}=2} \{3x_2 + f_1(y-4x_2, v-5x_2)\}$$

∴ $$f_2（12，10）= \max_{0\le x_2 \le \min\left\{\left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor\right\}=2} \{3x_2 + f_1(12-4x_2, 10-5x_2)\}$$

$$=\max\{f_1（12，10），3+f_1（8，5），6+f_1（4，0）\}$$

$$f_1（12，10）= \max_{0\le x_2 \le \min\left\{\left\lfloor \frac{12}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{10}{1} \right\rfloor\right\}=4} c_1 x_1$$

$$=\max\{0，2，4，6，8\}=8$$

$$f_1（8，5）= \max_{0\le x_2 \le \min\left\{\left\lfloor \frac{8}{5} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{5}{1} \right\rfloor\right\}=2} c_1 x_1$$

$$=\max\{0，2，4\}=4$$

$$f_1（4，0）=0$$

∴ $$f_2（12，10）=\max\{8，7，6\}=8$$

于是，当负载达到最大价值为 8 时，装载方法为：x_1=4，x_2=0．即货物 1 装载 4 件，货物 2 不装时，才能使总价值最大为 8．

9.7　求积 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 的极大值，其所接受的约束条件是

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \ge 0, \qquad i=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

解：这个问题可看成是一个多阶段决策问题，可把 1 在n步中分成n个非负部分．设f_k（y）表示将数y（y>0）分成k个非负部分时乘积的最大值，由最优原理得如下的递归方程：

$$\therefore \begin{cases} f_1(y) = y \\ f_k(y) = \max_{0 \le x_k \le y} \{x_k f_{k-1}(y-x_k)\}, k=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

由数学归纳法可以证明，上述方程的解为：$x_k=\frac{y}{k}$，f_k（y）=（$\frac{y}{k}$）^{k}

证明如下：

$$f_1(y)=y$$

$$f_2(y)=\max_{0\le x_2\le y}\{x_2 f_1(y-x_2)\}=\max\{x_2(y-x_2)\}$$

当$x_2=\dfrac{y}{2}$时，$x_2(y-x_2)$}取最大值为$\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=f_2(y)$

由此可见当k=1，2 时，$x_k=\dfrac{y}{k}$，$f_k(y)=\left(\dfrac{y}{k}\right)^k$是递归方程的解.

设$x_{n-1}=\dfrac{y}{n-1}$，$f_{n-1}(y)=\left(\dfrac{y}{n-1}\right)^{n-1}$是递归方程的解，则

$$f_n(y)=\max_{0\le x_n\le y}\{x_n f_{n-1}(y-x_n)\}=\max\left\{x_n\left(\frac{y-x_n}{n-1}\right)^{n-1}\right\}$$

令$Z=x_n\left(\dfrac{y-x_n}{n-1}\right)^{n-1}$

则$Z'=0$时，可求得$x_n=\dfrac{y}{n}$，故有：

$$f_n(y)=\frac{y}{n}\left(\frac{y-\frac{y}{n}}{n-1}\right)^{n-1}=\left(\frac{y}{n}\right)^n$$

由归纳法原理知，$x_k=\dfrac{y}{k}$，$f(y)=\left(\dfrac{y}{k}\right)^k$是递归方程的解.

故当y=1 时，有

$$f_n(1)=\left(\frac{1}{n}\right)^n \text{且} x_i=\frac{1}{n}$$

9.8　极小化$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，其所接受的约束条件是

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1\\ x_i\ge 0, \qquad i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

解：设$f_k(y)$表示将数y分成k个部分时其各部分平方的和的极小值，由最优原理得如下的递归方程：

$$\therefore\begin{cases}f_1(y)=y^2\\ f_k(y)=\min\limits_{0\le x_k\le y}\{x_k^2+f_{k-1}(y-x_k)\}, k=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

当k=1 时，$f_1(y)=y^2$

当 k=2 时

$$f_2（y）=\min\{x_2^2+f_1（y-x_2）\}=\min\{x_2^2+（y-x_2）^2\}$$

$x_2=\dfrac{y}{2}$ 时，$x_2^2+（y-x_2）^2$有最小值且为 $2\cdot\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{y^2}{2}$

可见，当 k=1，2 时，$x_k=\dfrac{y}{k}$，$f_k(y)=\dfrac{y^2}{k}$是递归方程的解.

假设k=n–1 时，$x_i=\dfrac{y}{n-1}$，$f_{n-1}（y）=（n-1）\times\left(\dfrac{y}{n-1}\right)^2=\dfrac{y^2}{n-1}$为递归方程的解，则

$$f_n（y）=\min_{0\le x_n\le y}\{x_n^2+f_{n-1}（y-x_n）\}$$

$$=\min\{x_n^2+\frac{(y-x_n)^2}{n-1}\}$$

令 $Z=x_n^2+\dfrac{(y-x_n)^2}{n-1}$，则有

$$Z'=2x_n+\frac{1}{n-1}（-2y+2x_n）$$

令Z'=0 时，可求得$x_n=\dfrac{y}{n}$，则Z取得最小值为$\dfrac{y^2}{n}$，即$f_n（y）=\dfrac{y^2}{n}$

可见，当 k=n 时，$x_k=\dfrac{y}{k}$，$f_k(y)=\dfrac{y^2}{k}$是递归方程的解.

故当 y=1 时，有

$$f_n（1）=\frac{1}{n}，x_i=\frac{1}{n}（i=1，2，\cdots，n）$$

9.9　极大化 $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，其所接受的约束条件是

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=a\\ \sum\limits_{i=1}^{n}y_i=b\\ x_i\ge 0,y_i\ge 0,i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

解：令$f_k（a，b）$为将数a，数b分别分成k个部分其对应各个部分乘积之和的极大值，由最优原理得如下的递归方程：

$$\therefore\begin{cases}f_1(a,b)=ab\\ f_k(a,b)=\max\limits_{\substack{0\le x_k\le a\\0\le y_k\le b}}\{x_ky_k+f_{k-1}(a-x_k,b-y_k)\},\qquad k=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

当 k=1 时

$$f_1（a，b）=ab$$

k=2 时

$$f_2(a,b)=\max\{x_2y_2+f_1(a-x_2,b-y_2)\}$$
$$=\max\{x_2y_2+(a-x_2)(b-y_2)\}$$

当$x_2=a$，$y_2=b$时

$$f_2(a,b)=ab$$

∴假设$k=n-1$时$x_{n-1}=a$，$y_{n-1}=b$且$x_i=0$，$y_i=0$，$i=1$，2，…，$n-2$，则$f_{n-1}(a,b)=ab$

∴
$$f_n(a,b)=\max\{x_ny_n+f_{n-1}(a-x_n,b-y_n)\}$$
$$=\max\{x_ny_n+(a-x_n)(b-y_n)\}$$

当$x_n=a$，$y_n=b$时，$f_n(a,b)$可取得最大值为ab.

∴由归纳原理可得：

$$x_n=a,\ y_n=b\text{时，}f_n(a,b)=ab$$

9.10　用动态规划的方法证明不等式

$$\left(\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}\leq\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^{1/n}\leq\left(\frac{x_1^\beta+x_2^\beta+\cdots+x_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta}$$

其中，$x_i>0\left(i=1,2,\cdots,n\right),\alpha<0<\beta$.

证：先证不等式右边

$\because\ \beta>0$

∴
$$\left(x_1^\beta x_2^\beta\cdots x_n^\beta\right)^{1/n}\leq\frac{x_1^\beta+x_2^\beta+\cdots+x_n^\beta}{n} \qquad ①$$

考虑如下的非线性规划问题（不妨设$a>0,b>0$）

$$\max\quad z=\left(\prod_{i=1}^n x_i^\beta\right)^{1/n}$$
$$\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^n x_i^\beta=a$$
$$f_k\left(x\right)=\max_{\sum_{i=1}^k x_i^\beta=x}\left\{(\prod_{i=1}^k x_i^\beta)^{1/k}\right\}$$

式中$\beta>0$，$x\geq0$，要证①式为不等式，只需证明

$$f_n\left(a\right)=\frac{a}{n}$$

即可．现用归纳法证明如下：设$x>0$，首先有

$$f_1\left(x\right)=\max_{x_1^\beta=x}x_1^\beta=x$$

其次，设$n=k-1$时，对任意$x>0$，有

$$f_{k-1}(x)=\frac{x}{k-1}$$

则对任意 $x\geq 0$，有

$$\begin{aligned}f_k(x)&=\max_{\sum_{i=1}^{k}x_i^{\beta}=x}\left\{(\prod_{i=1}^{k}x_i^{\beta})^{1/k}\right\}\\&=\max_{\sum_{i=1}^{k}x_i^{\beta}=x}\left\{(\prod_{i=1}^{k-1}x_i^{\beta}\cdot x_k^{\beta})^{1/k}\right\}\\&=\max_{\sum_{i=1}^{k-1}x_i^{\beta}=x-x_k^{\beta}}\left\{\left[(\prod_{i=1}^{k-1}x_i^{\beta})^{\frac{1}{k-1}}\cdot(x_k^{\beta})^{\frac{1}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}\right\}\\&=\max_{x_i^{\beta}\leq x}\left\{\left[f_{k-1}(x-x_k^{\beta})\cdot(x_k^{\beta})^{\frac{1}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}\right\}\end{aligned}$$

由归纳假设

$$f_{k-1}\left(x-x_k^{\beta}\right)=\frac{x-x_k^{\beta}}{k-1}$$

有

$$f_k(x)=\max_{x_i^{\beta}\leq x}\left\{\left[\frac{x-x_k^{\beta}}{k-1}\cdot(x_k^{\beta})^{\frac{1}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}\right\}$$

可以证明，上式的最大值在 $x_k^{\beta}=\dfrac{x}{k}$ 时达到，因此

$$\begin{aligned}f_k(x)&=\max_{x_i^{\beta}\leq x}\left\{\left[\frac{x-x_k^{\beta}}{k-1}\cdot(x_k^{\beta})^{\frac{1}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}\right\}\\&=\left[\frac{x-\frac{x}{k}}{k-1}\cdot(\frac{x}{k})^{\frac{1}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}\\&=\frac{x}{k}\end{aligned}$$

故①式成立，同理可证不等式左边，故结论成立.

第十章　区 组 设 计

一、内容提要

区组设计理论是组合数学的一个重要分支．它有许多有价值的和实际的应用．它不仅在统计学的“试验的分析和设计”这一分支起着重要的作用，而且在计算机科学和数字通信理论领域都有着十分重要的应用．

（一）基本概念

定义 10.1　设$S=\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$是一个$n$元集，$A=(a_{ij})$是$n\times n$矩阵．若$A$的每一行都是集$S$的不同的全排列，$A$的每一列也是$S$的不同全排列，则称矩阵$A$为一个$n$阶拉丁方．

定义 10.2　设$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$是两个不同的n阶拉丁方，如果在由这两个拉丁方所并置起来的方阵$((a_{ij}, b_{ij}))$中，所有的n^2个有序数对(a_{ij}, b_{ij})（$i, j=1, 2, \cdots, n$）都是不同的，则称拉丁方A与B是正交的．

定义 10.3　设X是一个有限集合，$X_1, X_2, \cdots$ X_b是它的b个子集，则称簇$\{X_1, X_2, \cdots, X_b\}$为集合$X$上的一个区组设计．$X_i$（$i=1, 2, \cdots, b$）称作该设计的区组．$X$中的诸元素的一种确定的安排就叫做$X$上的一个组合设计．

定义 10.4　一个射影平面π是一个系统，它由一些称为“点”的元素和另一些称为“直线”的元素所组成．这些点和直线以“基本关联关系”结合在一起，且这种关系满足四条性质：

1．通过π上任意两个不同的点的直线有且仅有一条．

2．π上任意两条不同的直线通过且仅通过一个公共点（交点）．

3．π上存在 4 个点，其中的任意 3 个点都不在同一直线上．

4．π上存在 4 条直线，其中的任意 3 条都不通过同一点．

定义 10.5　只含有限个点的射影平面π称为有限射影平面．

定理 10.1　设$n\geq 2$．如果射影平面π上有一条直线l恰含$n+1$个点，则有

1．通过不在l上的任一点都恰有$n+1$条直线．

2．射影平面π上的每一条直线都恰含$n+1$个点．

定理 10.2　设$n\geq 2$，在一个射影平面π中，下列六条性质相互等价：

1．存在一条线恰含 $n+1$ 个点；

2．存在一个点恰在 $n+1$ 条线上；

3．每条线恰含 $n+1$ 个点；

4．每一个点恰在 $n+1$ 条线上；

5．π中恰有n^2+n+1 个点；

6．π中恰有n^2+n+1 条线．

定义 10.6　一个有限射影平面 π 称作 n 阶的，如果 π 上有一条直线 l 恰含有 $n+1$ 个点．

定义 10.7　在一个射影平面 π 中，去掉任意一条固定的直线后，所剩下的点和直线仍然保持原来的基本关联关系的一个数学系统，叫做由射影平面 π 导出的仿射平面．

定义 10.8　由一个有限射影平面 π 导出的仿射平面 π'叫做有限仿射平面．如果 π 是 n 阶的射影平面，则 n 也称作仿射平面 π'的阶．

定理 10.3　设 π'是一个 n 阶仿射平面，则下列性质成立：

性质 1　π'上恰有n^2个点；

性质 2　π'上恰有n^2+n条直线；

性质 3　π'上每条直线恰有 n 个点；

性质 4　π'上的每一点恰在 $n+1$ 条直线上；

性质 5　π'上每两个不同的点恰在一条直线上．

定理 10.4　若 π'是由有限个点和直线组成的一个系统，且 π'满足定理 10.3 的五条性质，则 π'是一个 n 阶仿射平面．

定理 10.5　设 $n=P^m$，其中 P 是素数，m 是正整数，则必存在 n 阶有限射影平面．

定理 10.6　设 $n=1，2$（mod4）且 n 的无平方因子部分至少有一个素数因子 $P=3$（mod4）时，n 阶有限射影平面不存在．

定义 10.9　设 $X=\{x_1, x_2, \cdots x_v\}$．$X$ 的一个完全区组设计是 X 的满足一定条件的若干个无重复全排列的全体，其中每一个全排列称为一个区组．

定义 10.10　设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times$s 矩阵，若 A 的任一行是集{1，2，…，n}的一个 s–排列，任一列是集{1，2，…，n}的一个 m–排列，则称 A 是一个 $m\times s$ 拉丁矩（$m\le n$，$s\le n$）．

定义 10.11　设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 的拉丁矩，如果 A 的第一行为 1，2，…，n，则称 A 为行规范的拉丁矩．若一个 $n\times s$ 的拉丁矩 B，第 1 列为 1，2，…，n，则称 B 为列规范的拉丁矩．

定理 10.7　设 $A=(a_{ij})$ 是集{1，2，…，n}上的 $m\times$s 拉丁矩．用 $N(i)$ 表示 i 在此拉丁矩中出现的次数，则此拉丁矩可以扩充为 n 阶拉丁方的充要条件是：

$$N(i) \geq m+s-n \ (i=1, 2, \cdots, n)$$

定义 10.12 设A_1，A_2，$\cdots A_k$是一组n阶拉丁方（$n \geq k \geq 2$）．如果A_i与A_j正交（$i \neq j$；i，$j=1$，2，$\cdots$，k），则称A_1，A_2，$\cdots A_k$是一个正交拉丁方组，或两两正交的拉丁方组．

引理 设$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$是一对正交的拉丁方，若将$A=(a_{ij})$的元重新标号，即作置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

得到$A'=(a_{ij}')$，则A'与B仍是正交的．

定理 10.8 设A_1，A_2，$\cdots$，A_k是两两正交的n阶拉丁方组，则$k \leq n-1$．

定理 10.9 设$n=P^m$，其中P是素数，m是正整数，则当$n \geq 3$时，一定存在$n-1$个n阶拉丁方是两两正交的．

定理 10.10 设A_1，A_2，$\cdots$，A_k是一组两两正交的n_1阶拉丁方．B_1，B_2，$\cdots$，B_k是另一组两两正交的n_2阶拉丁方．$n_1 \times n_2$阶矩C_r的构造如下：

$$C_r = \begin{bmatrix} (a_{11}^{(r)}, B_r) & (a_{12}^{(r)}, B_r) & \cdots & (a_{1n_1}^{(r)}, B_r) \\ (a_{21}^{(r)}, B_r) & (a_{22}^{(r)}, B_r) & \cdots & (a_{2n_1}^{(r)}, B_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{n_1 1}^{(r)}, B_r) & (a_{n_1 2}^{(r)}, B_r) & \cdots & (a_{n_1 n_1}^{(r)}, B_r) \end{bmatrix}$$

式中$(a_{ij}^{(r)}, B_r)$是n_2阶矩阵，其第k行l列的元素为$(a_{ij}^{(r)}, b_{kl}^{(r)})$，$k$，$l=1$，2，$\cdots$，$n_2$．则$C_1$，$C_2$，$\cdots$，$C_k$是$n_1 \times n_2$阶的两两正交拉丁方组．

定理 10.11 设$n = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \cdots P_k^{a_k}$是$n$的素数因子分解．其中$a_i$是正整数，$P_i$（$i=1$，2，$\cdots$，$k$）是不同的素数．令$t=\min\{P_i^{a_i}-1\}$，$i=1$，2，$\cdots$，$k$．若$t \geq 2$，则必存在$t$个$n$阶两两正交的拉丁方．

定理 10.12 $n-1$个n阶正交拉丁方组存在的充分必要条件是存在n阶仿射平面．

定义 10.13 设$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_v\}$，$\{X_1, X_2, \cdots, X_b\}$是$X$上的一个区组设计．如果它满足条件：

1．$|X_i|=k$（$i=1$，2，3，$\cdots$，b）

2．对任何$x_i \in X$，x_i正好属于b个区组中的r个；

3．对X的任一个二元子集$\{x_i, x_j\}$正好是b个区组中λ个的子集；

4．$k<v$．

则称$\{X_1, X_2, \cdots, X_b\}$是$X$上的一个平衡不完全区组设计．简称为（，$v$，$r$，$k$，$\lambda$）-设计，$b$，$v$，$r$，$k$，$\lambda$是这个设计的 5 个基本参数．平衡不完全区组设计又称为BIBD设计，它们是Balanced Incomplete Block Design的缩写．

定理 10.13 （b，v，r，k，λ）-设计必须满足关系：

$$bk=vr$$

$$r(k-1)=\lambda(v-1)$$

定义 10.14 设 $\{X_1, X_2, \cdots, X_b\}$ 是X的一个 (b, v, r, k, λ)–设计，令

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & x_i\in X_j\\ 0 & x_i\notin X_j\end{cases}\qquad i=1, 2, \cdots, v;\ j=1, 2, \cdots, b$$

则称矩阵 $A=(a_{ij})$ 为 (b, v, r, k, λ)–设计的关联矩阵.

定理 10.14 设 $A=(a_{ij})$ 是 (b, v, r, k, λ)–设计的关联矩阵，则有

$$AA^T=(r-\lambda)I+\lambda J \tag{10.9}$$

式（10.9）中，J 是一个 v 阶方阵，它的所有元均为 1；I 是 v 阶单位方阵.

定理 10.15 若A是一个 (b, v, r, k, λ)–设计的关联矩阵，且$B=AA^T$，则

$$\det B=(r-\lambda)^{v-1}(v\lambda-\lambda+r)$$

$$b\geq v,\ r\geq k$$

定理 10.16 如果 π' 是一个n阶有限仿射平面，则它是一个 (b, v, r, k, λ)–设计，其中，$b=n^2+n$，$v=n^2$，$r=n+1$，$k=n$，$\lambda=1$ $(n\geq 2)$.

定义 10.15 对一个 (b, v, r, k, λ)–设计，如果 $v\geq 3$，$k=3$ 时，称 $(b, v, r, 3, \lambda)$–设计为一个三连组系．当 $\lambda=1$ 时，又称 $(b, v, r, 3, 1)$–设计为一个 v 阶 Steiner 三连组系.

定理 10.17 存在 v 阶 Steiner 三连组系的必要条件是

$$v\geq 3,\ v=1, 3\ (\mathrm{mod}\,6)$$

定理 10.18 如果存在一个v阶Steiner三连组系φ_1和一个u阶Steiner三连组系φ_2，则存在一个vu阶Steiner三连组系φ.

定义 10.16 设 $X=\{1, 2, \cdots, v\}$，$v=6n+3$，φ 是 X 的一个 Steiner 三连组系，如果 ϕ的 b $(b=v(v-1)/6=(2n+1)(3n+1))$ 个三连组可以划分成 $3n+1$ 个部分，每个部分包含 $2n+1$ 个三连组，而且 X 的每一个元素都在以上 $3n+1$ 个部分中正好出现一次，则称 ϕ为一个 v 阶 Kirkman 三连组系.

定义 10.17 若对一个 (b,v,r,k,λ) – 设计，当 $b=v$ 时，必有 $r=k$，则称 (b,v,r,k,λ) – 设计是对称的区组设计，简记为 (v,k,λ) –设计.

定理 10.19 若 A 是对称的 (v,k,λ) –设计的关联矩阵，则有

$$AA^T=(k-\lambda)I+\lambda J$$

$$A^TA=(k-\lambda)I+\lambda J$$

$$AJ=JA=kJ$$

定理 10.20 若 A 是对称的 (v, k, λ)–设计的关联矩阵，则 (v, k, λ)–设计中任两个区组的公共元素的个数为 λ. 即

$$|X_i\cap X_j|=\lambda\ (i\neq j)$$

定理 10.21　设 A 为对称设计 (v,k,λ) –设计的关联矩阵 ，则有

$$\lambda(v-1)=k(k-1)$$

定理 10.22　若 A 是对称的 (v,k,λ) –设计的关联矩阵，如果 v 是偶数，则 $k-\lambda$ 是一个平方数.

定理 10.23　n阶有限射影平面与对称的（n^2+n+1，$n+1$，1）–设计等价.（$n\geq 2$）

定理 10.24　设 $\chi=\{X_1,X_2,\cdots X_v\}$ 是 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_v\}$ 上一个对称的(v,k,λ)–设计，对任一固定的 i，设

$$\chi'=\{X_1\cap X_i,X_2\cap X_i,\cdots,\ X_{i-1}\cap X_i,X_{i+1}\cap X_i,\cdots,X_v\cap X_i\}$$

则 χ' 是集X_i上的一个（v–1，k，k–1，λ，λ–1）–设计.

定义 10.18　称区组设计 χ' 为区组设计 χ 的导出设计.

定理 10.25　设 $X''=\{X_1\setminus X_i,X_2\setminus X_i,\cdots,X_{i-1}\setminus X_i,X_{i+1}\setminus X_i,\cdots X_v\setminus X_i\}$，则 χ'' 是集合 $X\backslash X_i$上的一个（v–1，v–k，k，k–λ，λ）–设计.

定义 10.19　称区组设计 χ'' 为区组设计 χ 的剩余设计.

定义 10.20　设 H 是一个元素为+1 或–1 的 n 阶方阵，如果

$$HH^T=nI$$

式中 I 为 n 阶单位方阵，则称 H 为 Hadamard 矩阵，简称 H–矩阵.

定义 10.21　设 H 是一个 H–矩阵，如果 H 的第一行、第一列的元全为+1，则称 H 为规范化的矩阵.

定理 10.26　当 n>2 时，n 阶 Hadamard 矩阵存在的必要条件是

$$n=0(\operatorname{mod}4)$$

定理 10.27　当 $n\geq 8$ 时，n 阶的 H–矩阵等价于一个对称的（v，k，λ）–设计. 其中

$$v=n-1,\ k=n/2-1,\ \lambda=n/4-1$$

定义 10.22　设A=（a_{ij}），B=（b_{ij}）分别是m和n阶方阵，则称$m\times n$阶方阵

$$A\times B=\begin{bmatrix}a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B\\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B\end{bmatrix}$$

为 A 与 B 的 Kronecker 积，或称直积.

定理 10.28　如果存在两个阶数为 m 和 n 的 H–矩阵，则它们的直积是一个 $m\times n$ 阶的 H–矩阵.

（二）基本方法

1．拉丁方的构造方法

（1）首先写出 $1\times n$ 的行规范拉丁矩（1，2，3，…，n）；

（2）将最后一列的 n 与前面的 $n-1$ 列交换到第一列，就得到拉丁矩 $2\times n$ 的第二行（n，1，2，…，$n-1$）．于是 $2\times n$ 阶拉丁矩为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

（3）再将 $2\times n$ 拉丁矩的第二行中最后一列 $n-1$ 与第二行前面的 $n-1$ 列交换到第一列，就得到拉丁矩 $3\times n$ 的第三行（$n-1$，n，1，2，…，$n-2$），于是 $3\times n$ 拉丁矩为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \end{pmatrix}$$

（4）反复这样的过程，直到得到一个 $n\times n$ 拉丁方为止．

注意：（1）也可以从 $1, 2, \cdots, n$ 的任一个全排列的 $1\times n$ 拉丁矩出发来构造拉丁方．

（2）也可以由一个 $m\times s$ 的拉丁矩构造 n 阶拉丁方（$m\le n$，$s\le n$），其方法如下：

① 选择 m 个在拉丁矩中出现次数小于 m 的元，这 m 个元必须包含了满足 $N(i)=m+s-n$ 的全部元 i，作为一列添加到原拉丁矩上，并且使得任一行不会出现两个以上集{1，2，…，n}中的元．

② 扩充后得到 $m\times$（$s+1$）拉丁矩，只要 $s+1<n$，就可以照上述的方法，继续添加列构造出新的拉丁矩，直到构造出 $n\times n$ 的拉丁方为止．

注意：上述方法对行同样适合，因而可以按以上方法不断添加行，直至构造出 n 阶拉丁方．

2．当 $n=p^m$ 时，$n-1$ 个两两正交 n 阶拉丁方的一种构造方法

（1）构造原理：定理 10.9

（2）构造方法：

① n 必须等于 p^m，即 $n=p^m$，　其中 p 是素数，m 是正整数

② 构造 $n-1$ 个 n 阶方阵 $A_k(k=1, 2, \cdots, n-1)$ 如下：

$$A_k=(a_{ij}^{(k)}), i, j=1, 2, \cdots,\ n; k=1, 2, \cdots, n-1$$

式中 $a_{ij}^{(k)}=a_k\cdot a_i+a_j$

上式中“+”和“·”分别是 $GF(P^m)$ 域的“加”和“乘”法运算，且 $a_1=1$ 为乘法恒等元，$a_n=0$ 为加法恒等元．

③ 按②构造 $n-1$ 个 n 阶方阵 $A_k(k=1, 2, \cdots, n-1)$ 就是 $n-1$ 个两两正交的 n 阶拉丁方．

注意：这个方法只解决了 $n=p^m$（p 是素数，m 是正整数）时构造 $n-1$ 个 n 阶两两正交的拉丁方的方法．

3．一般 n 阶正交拉丁方的一种构造方法

（1）构造原理：定理 10.10 和定理 10.11

（2）构造方法：

① 对任一正整数 $n \neq 2$（$\bmod 4$）将其分解为如下形式：

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$$

② 利用方法 2（即上面的方法）分别构造 n_1-1 个、n_2-1 个、…、n_k-1 个 n_1 阶、n_2 阶、…、n_k 阶两两正交的拉丁方.

③ 反复利用定理 10.10 的构造方法即可构造 t 个 n 阶两两正交的拉丁方，其中 $t=\min\{n_i-1\} \geq 2$，$i=1,2,\cdots,k$.

注意：当 $n=p^m=2(\bmod 4)>6$ 时，必存在一对正交的拉丁方（可参看有关文献），但当 n 较大时，其通用的构造方法还是远未解决的难题.

4．H–矩阵的一种构造方法（由两个低阶 H–矩阵构造更高阶的 H–矩阵的方法）

（1）构造原理：定理 10.28

（2）构造方法：

① 设 H_m，H_n 分别是已知的 m 和 n 阶 H–矩阵

② 直积的定义 10.22 构造出 H_m 和 H_n 的直积 $H_m \times H_n$

③ 直积 $H_m \times H_n$ 就是构造得到的 $m \times n$ 阶 H–矩阵

注意：反复利用这种方法可以得到许多更高阶的 H–矩阵.

5．对称区组设计（v,k,λ）的一种构造方法

（1）构造原理：定理 10.27

（2）构造方法：

① 按上述方法（方法 4）构造一个 n（$n>8$）阶 H–矩阵

② 将 H–矩阵规范化

③ 去掉规范化后的 H–矩阵的第一行及第 1 列的所有元，然后令-1 为 0，就得到一个对称的（v,k,λ）–设计的关联矩阵，其中，$v=n-1, k=n/2-1, \lambda=n/4-1$.

④ 由得到的关联矩阵写出所求的对称区组设计

6．平衡不完全区组设计 (b,v,r,k,λ) 的一种构造方法

（1）构造原理：定理 10.24 和定理 10.25

（2）构造方法：

① 按上述方法（方法 5）构造一个（v,k,λ）–设计

② 写出 (v,k,λ)–设计的关联矩阵 A

③ 由定理 10.24（或定理 10.25）确定 (v,k,λ)–设计的导出设计（或剩余设计）的参数，即（$v-1,k,k-1,\lambda,\lambda-1$）–设计（或（$v-1,v-k,k,k-\lambda,\lambda$）–设计）

④ 从关联矩阵 A 中去掉第 i 列以及第 i 列元素为 0（或 1）的所有行得到新的关联矩

阵.

⑤ 由新的关联矩阵写出所求的 $(v-1,k,k-1,\lambda,\lambda-1)-$ 设计（或（$v-1,v-k,k,k-\lambda,\lambda$）–设计）

注意：对于上述的三个构造方法（即方法 4，5，6）存在一个很明显的缺陷，即：如果 $n>2$，只有 $n=0$（mod4）时，H–矩阵才有可能存在，也就是说，构造（v，k，λ）–设计时，v，k，λ的值是受到限制的，从而构造（b，v，r，k，λ）设计时诸参数之值也受到限制.

二、习题解答

10.1 证明：设 π'是一个 n 阶仿射平面，则下列性质成立：

（1）π'上恰有n^2个点；

（2）π'上恰有n^2+n条直线；

（3）π'上每条直线恰有 n 个点；

（4）π'上的每一点恰在 $n+1$ 条直线上；

（5）π'上每两个不同的点恰在一条直线上.

证：由定义 10.7 和定义 10.8 知，π'是由π上去掉一条直线所得到的n阶仿射平面，于是，由定理 10.2 性质 5 知，π上恰有n^2+n+1 个点，由于去掉的一条直线上恰含有$n+1$ 个点，故π'上恰有n^2个点，性质 1 成立．又由定理 10.2 性质 6 知，π上恰有n^2+n+1 条直线，去掉一条直线后，π'上恰有n^2+n条直线 ，故性质 2 成立．又由定理 10.2 性质 3 知，π上每条直线恰含有$n+1$ 点，由于π上去掉的一条直线上正好有一点（与每条直线的交点）被去掉，故π'上每条直线恰有n个点，因此性质 3 也成立.

下面，用反证法证明性质 4：如果性质 4 的结论不成立，即假设π'上的每一点恰在n条直线上，则由性质 3 知，π'上每条直线恰有n个点，这样一来，π'上恰有n^2-n+1 个点，这与性质 1 的结论矛盾，因此，性质 4 的结论成立.

由于 π'是π的一个子系统，由定义 10.4 知，性质 5 显然成立．定理证毕.

10.2 构造两个 7 阶的正交拉丁方.

解：由定理 10.9 容易构造如下的两个 7 阶正交拉丁方：

$$A_1=\begin{bmatrix}7&6&5&4&3&2&1\\6&5&4&3&2&1&7\\5&4&3&2&1&7&6\\4&3&2&1&7&6&5\\3&2&1&7&6&5&4\\2&1&7&6&5&4&3\\1&7&6&5&4&3&2\end{bmatrix}\qquad A_2=\begin{bmatrix}7&1&2&3&4&5&6\\6&7&1&2&3&4&5\\5&6&7&1&2&3&4\\4&5&6&7&1&2&3\\3&4&5&6&7&1&2\\2&3&4&5&6&7&1\\1&2&3&4&5&6&7\end{bmatrix}$$

10.3 构造 6 个两两正交的 7 阶拉丁方.

解：GF（7）=$\{1，2，3，4，5，6，7\}$可构造出 6 个两两正交的 7 阶拉丁方．

由定理 10.9 有

$$A_k=(a_{ij}^{(k)}),\ a_{ij}^{(k)}=a_k*a_i+a_j.$$

分别令 k=1，2，⋯，6；i，j=1，2，⋯，7．

并注意a_1=1 是乘法恒等元，a_7=7（=0）是加法恒等元，可得如下的 6 个两两正交的 7 阶拉丁方：

$$A_1=(a_{ij}^{(1)})=\begin{bmatrix}2&3&4&5&6&7&1\\3&4&5&6&7&1&2\\4&5&6&7&1&2&3\\5&6&7&1&2&3&4\\6&7&1&2&3&4&5\\7&1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6&7\end{bmatrix}\qquad A_2=(a_{ij}^{(2)})=\begin{bmatrix}3&4&5&6&7&1&2\\5&6&7&1&2&3&4\\7&1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&7&1\\4&5&6&7&1&2&3\\6&7&1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5&6&7\end{bmatrix}$$

$$A_3=(a_{ij}^{(3)})=\begin{bmatrix}4&5&6&7&1&2&3\\7&1&2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7&1&2\\6&7&1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6&7&1\\5&6&7&1&2&3&4\\1&2&3&4&5&6&7\end{bmatrix}\qquad A_4=(a_{ij}^{(4)})=\begin{bmatrix}5&6&7&1&2&3&4\\2&3&4&5&6&7&1\\6&7&1&2&3&4&5\\3&4&5&6&7&1&2\\7&1&2&3&4&5&6\\4&5&6&7&1&2&3\\1&2&3&4&5&6&7\end{bmatrix}$$

$$A_5=(a_{ij}^{(5)})=\begin{bmatrix}6&7&1&2&3&4&5\\4&5&6&7&1&2&3\\2&3&4&5&6&7&1\\7&1&2&3&4&5&6\\5&6&7&1&2&3&4\\3&4&5&6&7&1&2\\1&2&3&4&5&6&7\end{bmatrix}\qquad A_6=(a_{ij}^{(6)})=\begin{bmatrix}7&1&2&3&4&5&6\\6&7&1&2&3&4&5\\5&6&7&1&2&3&4\\4&5&6&7&1&2&3\\3&4&5&6&7&1&2\\2&3&4&5&6&7&1\\1&2&3&4&5&6&7\end{bmatrix}$$

10.4　构造两个 11 阶的正交拉丁方．

解：GF（11）=$\{1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11\}$可构造出 10 个两两正交的 11 阶拉丁方，这里，仅构造两个 11 阶的正交拉丁方即可，根据定理 10.9 有

$A_{\text{k}}=(a_{ij}^{(k)})$，$a_{ij}^{(k)}=a_k*a_i+a_j$．分别令$k$=1，2，$i$，$j$=1，2，⋯，11

其中a_1=1 是乘法恒等元，a_{11}=11（=0）是加法恒等元．可得如下的两个两两正交的 11 阶拉丁方

$$A_1=(a_{ij}^{(1)})=\begin{bmatrix}2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&1\\3&4&5&6&7&8&9&10&11&1&2\\4&5&6&7&8&9&10&11&1&2&3\\5&6&7&8&9&10&11&1&2&3&4\\6&7&8&9&10&11&1&2&3&4&5\\7&8&9&10&11&1&2&3&4&5&6\\8&9&10&11&1&2&3&4&5&6&7\\9&10&11&1&2&3&4&5&6&7&8\\10&11&1&2&3&4&5&6&7&8&9\\11&1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11\end{bmatrix}$$

$$A_2=(a_{ij}^{(2)})=\begin{bmatrix}3&4&5&6&7&8&9&10&11&1&2\\5&6&7&8&9&10&11&1&2&3&4\\7&8&9&10&11&1&2&3&4&5&6\\9&10&11&1&2&3&4&5&6&7&8\\11&1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&1\\4&5&6&7&8&9&10&11&1&2&3\\6&7&8&9&10&11&1&2&3&4&5\\8&9&10&11&1&2&3&4&5&6&7\\10&11&1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11\end{bmatrix}$$

10.5　构造两个 12 阶的正交拉丁方.

解：根据定理 10.10 的构造方法可得如下的两个 12 阶的正交拉丁方：

$$A_1=\begin{bmatrix}12&11&10&9&8&7&6&5&4&3&2&1\\11&12&9&10&7&8&5&6&3&4&1&2\\10&9&12&11&6&5&8&7&2&1&4&3\\9&10&11&12&5&6&7&8&1&2&3&4\\8&7&6&5&4&3&2&1&12&11&10&9\\7&8&5&6&3&4&1&2&11&12&9&10\\6&5&8&7&2&1&4&3&10&9&12&11\\5&6&7&8&1&2&3&4&9&10&11&12\\4&3&2&1&12&11&10&9&8&7&6&5\\3&4&1&2&11&12&9&10&7&8&5&6\\2&1&4&3&10&9&12&11&6&5&8&7\\1&2&3&4&9&10&11&12&5&6&7&8\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}12&10&9&11&4&2&1&3&8&6&5&7\\11&9&10&12&3&1&2&4&7&5&6&8\\10&12&11&9&2&4&3&1&6&8&7&5\\9&11&12&10&1&3&4&2&5&7&8&6\\8&6&5&7&12&10&9&11&4&2&1&3\\7&5&6&8&11&9&10&12&3&1&2&4\\6&8&8&5&10&12&11&9&2&4&3&1\\5&7&8&6&9&11&12&10&1&3&4&2\\4&2&1&3&8&6&5&7&12&10&9&11\\3&1&2&4&7&5&6&8&11&9&10&12\\2&4&3&1&6&8&7&5&10&12&11&9\\1&3&4&2&5&7&8&6&9&11&12&10\end{bmatrix}$$

10.6　构造两个 15 阶的正交拉丁方.

解：先构造两个 3 阶正交拉丁方和两个 5 阶正交拉丁方如下：

$$A_1=\begin{bmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}3&1&2\\2&3&1\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}2&3&4&5&1\\3&4&5&1&2\\4&5&1&2&3\\5&1&2&3&4\\1&2&3&4&5\end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix}5&1&2&3&4\\4&5&1&2&3\\3&4&5&1&2\\2&3&4&5&1\\1&2&3&4&5\end{bmatrix}$$

再由定理 10.10 的构造方法可得如下的两个 15 阶正交拉丁方：

$$C_1=\begin{bmatrix}
7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1\\
8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2\\
9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3\\
10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 15 & 11 & 12 & 13 & 14 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4\\
6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\
12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6\\
13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7\\
14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8\\
15 & 11 & 12 & 13 & 14 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9\\
11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11\\
3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12\\
4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13\\
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 15 & 11 & 12 & 13 & 14\\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15
\end{bmatrix}$$

$$C_2=\begin{bmatrix}
15 & 11 & 12 & 13 & 14 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9\\
14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8\\
13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7\\
12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6\\
11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\
10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 15 & 11 & 12 & 13 & 14 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4\\
9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3\\
8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2\\
7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1\\
6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 14\\
4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13\\
3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12\\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11\\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15
\end{bmatrix}$$

10.7 构造两个 21 阶的正交拉丁方.

解：先构造两个 3 阶的正交拉丁方和两个 7 阶的正交拉丁方如下：

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}\qquad A_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$B_1=\begin{pmatrix}2&3&4&5&6&7&1\\3&4&5&6&7&1&2\\4&5&6&7&1&2&3\\5&6&7&1&2&3&4\\6&7&1&2&3&4&5\\7&1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6&7\end{pmatrix}\qquad B_2=\begin{pmatrix}3&4&5&6&7&1&2\\5&6&7&1&2&3&4\\7&1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&7&1\\4&5&6&7&1&2&3\\6&7&1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5&6&7\end{pmatrix}$$

再由定理 10.10 的构造方法可得如下的两个 21 阶正交拉丁方：

$$C_1=\begin{pmatrix}
2&3&4&5&6&7&1&9&10&11&12&13&14&8&16&17&18&19&20&21&15\\
3&4&5&6&7&1&2&10&11&12&13&14&8&9&17&18&19&20&21&15&16\\
4&5&6&7&1&2&3&11&12&13&14&8&9&10&18&19&20&21&15&16&17\\
5&6&7&1&2&3&4&12&13&14&8&9&10&11&19&20&21&15&16&17&18\\
6&7&1&2&3&4&5&13&14&8&9&10&11&12&20&21&15&16&17&18&19\\
7&1&2&3&4&5&6&14&8&9&10&11&12&13&21&15&16&17&18&19&20\\
1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20&21\\
16&17&18&19&20&21&15&2&3&4&5&6&7&1&9&10&11&12&13&14&8\\
17&18&19&20&21&15&16&3&4&5&6&7&1&2&10&11&12&13&14&8&9\\
18&19&20&21&15&16&17&4&5&6&7&1&2&3&11&12&13&14&8&9&10\\
19&20&21&15&16&17&18&5&6&7&1&2&3&4&12&13&14&8&9&10&11\\
20&21&15&16&17&18&19&6&7&1&2&3&4&5&13&14&8&9&10&11&12\\
21&15&16&17&18&19&20&7&1&2&3&4&5&6&14&8&9&10&11&12&13\\
15&16&17&18&19&20&21&1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14\\
9&10&11&12&13&14&8&16&17&18&19&20&21&15&2&3&4&5&6&7&1\\
10&11&12&13&14&8&9&17&18&19&20&21&15&16&3&4&5&6&7&1&2\\
11&12&13&14&8&9&10&18&19&20&21&15&16&17&4&5&6&7&1&2&3\\
12&13&14&8&9&10&11&19&20&21&15&16&17&18&5&6&7&1&2&3&4\\
13&14&8&9&10&11&12&20&21&15&16&17&18&19&6&7&1&2&3&4&5\\
14&8&9&10&11&12&13&21&15&16&17&18&19&20&7&1&2&3&4&5&6\\
8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20&21&1&2&3&4&5&6&7
\end{pmatrix}$$

$$C_2=\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 8 & 9 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 15 & 16\\
5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 12 & 13 & 14 & 8 & 9 & 10 & 11 & 19 & 20 & 21 & 15 & 16 & 17 & 18\\
7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 14 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 21 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20\\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 8 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 15\\
4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 11 & 12 & 13 & 14 & 8 & 9 & 10 & 18 & 19 & 20 & 21 & 15 & 16 & 17\\
6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 13 & 14 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19\\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21\\
10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 8 & 9 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 15 & 16 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2\\
12 & 13 & 14 & 8 & 9 & 10 & 11 & 19 & 20 & 21 & 15 & 16 & 17 & 18 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4\\
14 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 21 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\
9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 8 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 15 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1\\
11 & 12 & 13 & 14 & 8 & 9 & 10 & 18 & 19 & 20 & 21 & 15 & 16 & 17 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3\\
13 & 14 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\
8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\
17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 15 & 16 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 8 & 9\\
19 & 20 & 21 & 15 & 16 & 17 & 18 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 12 & 13 & 14 & 8 & 9 & 10 & 11\\
21 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 14 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13\\
16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 15 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 8\\
18 & 19 & 20 & 21 & 15 & 16 & 17 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 11 & 12 & 13 & 14 & 8 & 9 & 10\\
20 & 21 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 13 & 14 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12\\
15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14
\end{array}\right)$$

10.8　将下面 3*6 拉丁矩补足为一个 6 阶拉丁方.

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 2\\3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6\\5 & 6 & 3 & 2 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

解：根据定理 10.7，此拉丁矩满足可以扩充为拉丁方的充要条件，因此，可以补足为一个 6 阶拉丁方，如下：

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 2\\3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6\\5 & 6 & 3 & 2 & 4 & 1\\2 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4\\4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5\\6 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

10.9　将下面 3*3 拉丁矩补足为一个 6 阶拉丁方.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

解：根据定理 10.7，此拉丁矩满足可以扩充为拉丁方的充要条件，因此，可以补足为

一个 6 阶拉丁方，如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

10.10　将下面 3*7 拉丁矩补足为一个 7 阶拉丁方.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

解：根据定理 10.7，此拉丁矩满足可以扩充为拉丁方的充要条件，因此，可以补足为一个 7 阶拉丁方，如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 7 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

10.11　证明不存在$(b, v, r, k, \lambda)-$设计，其参数为

（1）$b=8$，$v=6$，$r=5$，$k=3$，$\lambda=2$

证明：根据定理 10.13 $(b, v, r, k, \lambda)-$设计必须满足关系$bk=vr$

$$bk=24$$

∵ $$vr=30$$

$$bk \neq vr$$

∴　不存在$(b, v, r, k, \lambda)-$设计.

（2）$b=22$，$v=22$，$r=22$，$k=22$，$\lambda=22$

证明：

∵ $b=v$，$k=r$，故$(b, v, r, k, \lambda)-$设计为对称区组设计．又因 v=22 为偶数，且k–λ=5 不是一个平方数，由定理 10.22 知，该区组设计不存在.

10.12　在$(b, v, r, k, \lambda)-$设计中如果 $v=21, b=28$和$r=8$，试决定 k, λ；又如果 $v=15, b=5$ 和 $r=2$ 试决定 b 和 r.

解：根据定理 10.13 $(b, v, r, k, \lambda)-$设计必须满足关系$bk=vr$ 和 $r(k-1)=\lambda(\upsilon-1)$，由于

$v=21, b=28, r=8$　故有

$$bk = vr \Rightarrow k = \frac{vr}{b} = 6$$

$$r(k-1) = \lambda(v-1) \Rightarrow r = \frac{\lambda(k-1)}{v-1} = 2$$

又因 $v=15, k=5, \lambda=2$，故有

$$r(k-1) = \lambda(v-1) \Rightarrow r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} = 7$$

$$bk = vr \Rightarrow b = \frac{vr}{k} = 21$$

10.13　对称的 $(7,3,1)-$设计的 7 个区组中的 4 个是 $\{x_1, x_2, x_4\}$，$\{x_2, x_3, x_5\}$，$\{x_3, x_4, x_6\}$ 和 $\{x_4, x_5, x_7\}$，求其余三个区组.

解：　$b=7$，$v=7$，$r=3$，$k=3$，$\lambda=1$

$\because 7 = 2^2+2+1$，3=2+1，根据定理 10.23　n 阶有限射影平面与对称的 $(n^2+n+1, n, 1)-$设计等价，把 $x_1, \cdots, x_7$ 作为点，区组作为直线.

$\therefore$ 只要能构造出一个 2 阶有限射影平面，就能得到一个对称的 $(2^2+2+1, 3, 1)-$设计，根据定义 10.4 的性质，构造一个 2 阶有限射影平面，根据定义 10.4 的性质 1（通过射影平面上任意两个不同的点的直线有且仅有一条），性质 2（射影平面上任意两条不同的直线通过且仅通过一个公共点），因此点 x_2 仅能与 x_6 和 x_7 构成一条直线，即区组为 $\{x_2, x_6, x_7\}$，同理可得另外两区组 $\{x_1, x_5, x_6\}$ 和 $\{x_1, x_3, x_7\}$

10.14　研究具有下列参数的对称 $(v, k, \lambda)-$设计的存在性

题号	v=b	k=r	λ
a.	46	10	2
b.	34	12	4
c.	67	12	2
d.	54	11	2
e.	53	13	3
f.	92	14	2
g.	41	39	4
h.	211	15	1
k.	106	15	2

解：

a．对称 $(v, k, \lambda)-$设计不存在，因为不满足定理 10.22（$\because$ v 为偶数，但 $k-\lambda=8$ 不是一个平方数）

b．对称$(v,k,\lambda)-$设计不存在，因为不满足定理 10.22（$\because$ v 为偶数，但$k-\lambda=8$不是一个平方数）

c．满足必要条件，但不能证明其存在

d．不存在，因为不满足定理 10.21（$\because$ $r(k-1)\neq\lambda(v-1)$）

e．满足必要条件，但还不能证明其存在

f．满足必要条件，但还不能证明其存在

g．不存在，因为不满足定理 10.21（$\because$ $r(k-1)\neq\lambda(v-1)$）

h．不存在，因为$b=14^2+14+1, k=14+1, \lambda=1$，故该设计与$n=14$的有限射影平面等价，根据定理 10.6，14 阶有限射影平面不存在

k．不存在，因为不满足定理 10.22（$\because v$为偶数，但$k-\lambda=13$不是一个平方数）

10.15　设$(b,v,r,k,\lambda)-$设计存在，其关联矩阵为 A，将 A 中的 0 换为 1，1 换为 0，所得的矩阵为A'，称为 A 的补矩阵.

a．证明 A'是某区组设计（称为原设计的补设计）的关联矩阵.

b．求出这个补设计的参数.

c．证明：若原设计是对称的，则补设计也是对称的.

证明：由于 A 是$(b,v,r,k,\lambda)-$设计的关联矩阵，故关联矩阵 A 是一个$v\times b$矩阵，且具有如下性质：

① 关联矩阵 A 的任意一列有k个元素为 1，$v-k$个元素为 0

② 关联矩阵 A 的任意一行有r个元素为 1，$b-r$个元素为 0

③ 关联矩阵 A 的任意两行对应的元均为 1 的个数为λ，即任意两行的内集为λ，由题意知，矩阵 A' 也是一个$v\times b$矩阵，且具有如下性质：

① 矩阵 A' 的任意一列有$v-k$个元素为 1，k个元素为 0

② 矩阵 A' 的任意一行有$b-r$个元素为 1，r个元素为 0

③ 矩阵 A' 的任意两行对应的元均为 1 的个数为$b-2r+\lambda$，即任意两行的内集为$b-2r+\lambda$以上性质满足某一个区组设计的关联矩阵的性质，故矩阵 A' 是某一个区组设计的关联矩阵. 显然，这个区组设计（即补设计）的参数为$(b,v,b-r,v-k,b-2r+\lambda)$若原设计是对称的，即在$(b,v,r,k,\lambda)-$设计中，$b=v, r=k$，则在补设计$(b,v,b-r,v-k,b-2r+\lambda)-$设计中，也有$b-r=v-k$，因此补设计$(b,v,b-r,v-k,b-2r+\lambda)-$设计也是对称的.

10.16　试说明如何构造一个 21 阶 Steiner 三连组系.

解：首先构造一个 3 阶Steiner三连组系φ_1和一个 7 阶Steiner三连组系φ_2，然后根据定理 10.18 的构造方法，即可得到一个 21 阶Steiner三连组系

设$X=\{x_1,x_2,x_3\}$　$Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7\}$

φ_1是 X 上的一个 3 阶Steiner三连组系：$\{x_1, x_2, x_3\}$

φ_2是 Y 上的一个 7 阶Steiner三连组系：

$\{y_1, y_2, y_4\}$ $\{y_2, y_3, y_5\}$ $\{y_3, y_4, y_6\}$ $\{y_4, y_5, y_7\}$ $\{y_5, y_6, y_1\}$ $\{y_6, y_7, y_2\}$ $\{y_7, y_1, y_3\}$

令Z=｛z_{ij} ｜i=1，2，3；j=1，2，…，7｝是具有 21 个元素的集合．按下列方式把Z的元素排成一个 3×7 矩阵，该矩阵第i行对应于X的一个元x_i，第j列对应于Y的一个元y_j．也就是说，该矩阵为

$$Z = \{z_{ij}\} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} & z_{16} & z_{17} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} & z_{26} & z_{27} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & z_{35} & z_{36} & z_{36} \end{bmatrix} \end{array}$$

用 Z 来构造 21 阶 Steiner 三连组系φ，对于 Z 的一个 3－子集$\{z_{ir}, z_{js}, z_{ht}\}$，如果满足下列条件之一，则属于$\varphi$

（1） $r = s = t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$　$\{x_i, x_j, x_k\} \in \varphi_1$ 得

$\{z_{11}, z_{21}, z_{31}\}$　$\{z_{12}, z_{22}, z_{32}\}$　$\{z_{13}, z_{23}, z_{33}\}$　$\{z_{14}, z_{24}, z_{34}\}$

$\{z_{15}, z_{25}, z_{35}\}$　$\{z_{16}, z_{26}, z_{36}\}$　$\{z_{17}, z_{27}, z_{37}\}$

（2） $i = j = k = 1, 2, 3$　$\{y_r, y_s, y_t\} \in \varphi_2$ 得

$\{z_{11}, z_{12}, z_{14}\}$　$\{z_{21}, z_{22}, z_{24}\}$　$\{z_{31}, z_{32}, z_{34}\}$　$\{z_{12}, z_{13}, z_{15}\}$　$\{z_{22}, z_{23}, z_{35}\}$　$\{z_{32}, z_{32}, z_{35}\}$

$\{z_{13}, z_{14}, z_{16}\}$　$\{z_{23}, z_{24}, z_{26}\}$　$\{z_{33}, z_{34}, z_{36}\}$　$\{z_{14}, z_{15}, z_{17}\}$　$\{z_{24}, z_{25}, z_{27}\}$　$\{z_{34}, z_{35}, z_{37}\}$

$\{z_{15}, z_{16}, z_{11}\}$　$\{z_{25}, z_{26}, z_{21}\}$　$\{z_{35}, z_{36}, z_{31}\}$　$\{z_{16}, z_{17}, z_{12}\}$　$\{z_{26}, z_{27}, z_{22}\}$　$\{z_{36}, z_{37}, z_{32}\}$

$\{z_{17}, z_{11}, z_{13}\}$　$\{z_{27}, z_{21}, z_{23}\}$　$\{z_{37}, z_{31}, z_{33}\}$

（3） $\{x_i, x_j, x_k\} \in \varphi_1$，$\{y_r, y_s, y_t\} \in \varphi_2$ 得

$\{z_{11}, z_{22}, z_{34}\}$　$\{z_{11}, z_{24}, z_{32}\}$　$\{z_{12}, z_{21}, z_{34}\}$　$\{z_{12}, z_{24}, z_{31}\}$　$\{z_{14}, z_{21}, z_{32}\}$　$\{z_{14}, z_{22}, z_{31}\}$

$\{z_{12}, z_{23}, z_{35}\}$　$\{z_{12}, z_{25}, z_{33}\}$　$\{z_{13}, z_{22}, z_{35}\}$　$\{z_{13}, z_{25}, z_{32}\}$　$\{z_{15}, z_{22}, z_{33}\}$　$\{z_{15}, z_{23}, z_{32}\}$

$\{z_{13}, z_{24}, z_{36}\}$　$\{z_{13}, z_{26}, z_{34}\}$　$\{z_{14}, z_{23}, z_{36}\}$　$\{z_{14}, z_{26}, z_{33}\}$　$\{z_{16}, z_{23}, z_{34}\}$　$\{z_{16}, z_{24}, z_{33}\}$

$\{z_{14}, z_{25}, z_{37}\}$　$\{z_{14}, z_{27}, z_{35}\}$　$\{z_{15}, z_{24}, z_{37}\}$　$\{z_{15}, z_{27}, z_{34}\}$　$\{z_{17}, z_{24}, z_{35}\}$　$\{z_{17}, z_{25}, z_{34}\}$

$\{z_{15}, z_{26}, z_{31}\}$　$\{z_{15}, z_{21}, z_{36}\}$　$\{z_{11}, z_{25}, z_{36}\}$　$\{z_{11}, z_{26}, z_{35}\}$　$\{z_{16}, z_{21}, z_{35}\}$　$\{z_{16}, z_{25}, z_{31}\}$

$\{z_{16}, z_{27}, z_{32}\}$　$\{z_{16}, z_{22}, z_{37}\}$　$\{z_{12}, z_{26}, z_{37}\}$　$\{z_{12}, z_{27}, z_{36}\}$　$\{z_{17}, z_{26}, z_{32}\}$　$\{z_{17}, z_{22}, z_{36}\}$

$\{z_{17}, z_{21}, z_{33}\}$　$\{z_{17}, z_{23}, z_{31}\}$　$\{z_{11}, z_{23}, z_{37}\}$　$\{z_{11}, z_{27}, z_{33}\}$　$\{z_{13}, z_{21}, z_{37}\}$　$\{z_{13}, z_{27}, z_{31}\}$

上述三种情形所得到的共 70 个三连组就组成了 21 阶 Steiner 三连组系．

10.17　构造一个 27 阶 Steiner 三连组系.

解：首先构造一个 3 阶Steiner三连组系φ_1和一个 9 阶Steiner三连组系φ_2，然后根据定理 10.18 的构造方法，即可得到一个 27 阶Steiner三连组系，其构造过程同上题一样，这里略去，请读者自己得出.

10.18　已知

$$H_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\qquad\qquad H_4=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

分别是 2 阶和 4 阶的 H–矩阵．试用直积的方法构造一个 8 阶 H–矩阵，并由此导出一个$(v,k,\lambda)-$设计，继而导出 4 个不同的 BIBD 设计.

解：由直积的定义 10.22 及定理 10.28 容易构造 8 阶 H–矩阵 H_8 如下

$$H_8=H_2\times H_4=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

将上面的矩阵去掉第一行和第一列所有的元，然后令–1 为 0，就得到一个对称的$(7,3,1)-$设计的关联矩阵为

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{matrix}X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7\end{matrix}\\
\begin{matrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\end{matrix} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}
\end{array}$$

这个关联矩阵所对应的$(7,3,1)-$设计为

$X_1=\{x_1,x_4,x_5\}$　　$X_2=\{x_2,x_4,x_6\}$　　$X_3=\{x_3,x_4,x_7\}$　　$X_4=\{x_1,x_2,x_3\}$

$X_5=\{x_1,x_6,x_7\}$　　$X_6=\{x_2,x_5,x_7\}$　　$X_7=\{x_3,x_5,x_6\}$

由定理 10.24 和定理 10.25 可以分别导出集$X\bigcap X_1$，$X\bigcap X_2$，$X\backslash X_1$和$X\backslash X_2$的 4 个BIBD设计如下：

（1）$X\bigcap X_1$ 上的一个（6，3，2，1，0）导出设计的为关联矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

这个关联矩阵所对应的（6，3，2，1，0）–设计为：

$$X_2 \cap X_1 = \{x_4\} \qquad X_3 \cap X_1 = \{x_4\} \qquad X_4 \cap X_1 = \{x_1\}$$
$$X_5 \cap X_1 = \{x_1\} \qquad X_6 \cap X_1 = \{x_5\} \qquad X_7 \cap X_1 = \{x_5\}$$

（2）$X\bigcap X_2$ 上的一个（6，3，2，1，0）导出设计的关联矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这个关联矩阵所对应的（6，3，2，1，0）–设计为：

$$X_1 \cap X_2 = \{x_4\} \qquad X_3 \cap X_2 = \{x_4\} \qquad X_4 \cap X_2 = \{x_2\}$$
$$X_5 \cap X_2 = \{x_6\} \qquad X_6 \cap X_2 = \{x_2\} \qquad X_7 \cap X_2 = \{x_6\}$$

（3）$X\backslash X_1$ 上的一个（6，4，3，2，1）剩余设计的关联矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

这个关联矩阵所对应的（6，4，3，2，1）–设计为

$$X_2 \setminus X_1 = \{x_2, x_6\} \qquad X_3 \setminus X_1 = \{x_3, x_7\} \qquad X_4 \setminus X_1 = \{x_2, x_3\}$$
$$X_5 \setminus X_1 = \{x_6, x_7\} \qquad X_6 \setminus X_1 = \{x_2, x_7\} \qquad X_7 \setminus X_1 = \{x_3, x_6\}$$

（4）$X\backslash X_2$ 上的一个（6，4，3，2，1）剩余设计的关联矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

这个关联矩阵所对应的（6，4，3，2，1）–设计为

$$X_1 \setminus X_2 = \{x_1, x_5\} \qquad X_3 \setminus X_2 = \{x_3, x_7\} \qquad X_4 \setminus X_2 = \{x_1, x_3\}$$
$$X_5 \setminus X_2 = \{x_1, x_7\} \qquad X_6 \setminus X_2 = \{x_5, x_7\} \qquad X_7 \setminus X_2 = \{x_3, x_5\}$$

参 考 文 献

［1］孙世新．组合数学（第三版）．成都：电子科技大学出版社，2003

［2］柯召，魏万迪．组合论（上册）．北京：科学出版社，1981

［3］魏万迪．组合论（下册）．北京：科学出版社，1987

［4］C.L.Liu．组合数学导论．魏万迪译．成都：四川大学出版社，1987

［5］卢开澄，卢华明．组合数学（第 3 版）．北京：清华大学出版社，2002

［6］温一慧，孙述寰．组合数学．兰州：甘肃文化出版社，1994

［7］王元元，王庆瑞等．组合数学 • 理论与题解．上海：上海科学技术文献出版社，1989

［8］Richard A．Brualdi．Introductory Combinatorics．Prentice Hall，Inc，1999

［9］L.Lovász．Combinatorial Problems and Exercises．North Holland Publishing Company，1979

［10］A.Kaufmann，D.Coster．Exercies de Combinatorique avec Solutions．DUNOD，1969