学院________ 姓名 ______ 学号________ 任课老师________选课号/座位号______

………密………封………线………以………内………答………题………无………效……

电子科技大学 2013-2014 学年第 2 学期期 末 考试 B 卷

课程名称： 应用随机过程 考试形式：一页纸开卷 考试日期：20 14 年__月__日 考试时长： 120 分钟

课程成绩构成：平时 30 %， 期中 0 %， 实验 0 %， 期末 70 %

本试卷试题由 3 部分构成，共____页。

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	合计	复核人签名
得分												
签名												

得 分

一、论述题（共 18 分，共 3 题，每题 6 分）

1. 试述随机过程的均值函数和方差函数分别表征了其什么特征？

解答 均值函数表征了随机过程在各时间点上的平均特征. （3 分）

方差函数描述了随机过程在各时点处相对平均值的波动程度. （6 分）

2. 随机过程的自相关函数刻画了其什么特征？为什么说自相关函数对研究过程的概率与统计特性尤其重要?

解答 刻画两个不同时点随机过程状态之间的线性关联程度. （2 分）

随机过程的极限问题**转化为自相关函数的收敛性问题. (4 分)** 如关于随机过程均方极限的存在性，过程的均方连续性、可积性和可导性都可转化为自相关函数的性质来进行研究. (6 分)

3. 请阐述平稳增量过程的数学定义.

设随机过程 $\{X_t, t\in T\}$ 对任意 $t<s\in T$ 及实数 h, (2 分)随机变量 $X_t - X_s$ 与 $X_{t+h} - X_{s+h}$ 具有相同的概率分布, 称是一个具有平稳增量的过程. (4 分)

即增量的分布仅与区间长度 $s-t$ 的大小有关, 与起始点无关. (6 分)

得 分

二、简答题（共 18 分，共 3 题，每题 6 分）

1.设在[0, t)时段内乘客到达某售票处的数目是强度为 $\lambda = 2.5$（人/分钟）的泊松过程，试求：在 5 分钟内有 10 位乘客到达售票处的概率 p, 相邻两乘客到达售票处的平均时间间隔.

解答 $$p_1 = P\{N(5)=10\} = \frac{(5\times 2.5)^{10}}{10!}e^{-5\times 2.5} = \frac{(12.5)^{10}}{10!}e^{-12.5} \quad (2\text{ 分})$$

设 T 是两位顾客到达间隔时间，因参数为 λ 的泊松过程$\{N(t), t\geq 0\}$的间隔时间序列相互独立同服从参数为 λ 的指数分布，(4 分) 故两位顾客到达的平均间隔时间 $E\{T\}=1/\lambda=0.4$（分钟）. (6 分)

2.设随机过程$\{X(t),t\in T\}$与$\{Y(t),t\in T\}$都是正态过程,并相互独立.若需证明$\{X(t)+Y(t),t\in T\}$也是正态过程, 请给出证明的简略思路（不必给出详尽证明过程）.

解答 对任意正整数 n 及 $t_1,t_2,\cdots t_n \in R$，需证明 $(X(t_1)+Y(t_1),X(t_2)+Y(t_2),\cdots,X(t_n)+Y(t_n))$ 服从 n 维联合正态分布. (2 分) 根据定义知

$$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)) \text{ 和 } (Y(t_1),Y(t_2),\cdots,Y(t_n))$$

都是 n 维联合正态随机向量，并相互独立, (4 分) 利用特征函数法可证明结论. (6 分)

3. 一个信号传输过程的均值函数和自相关函数为

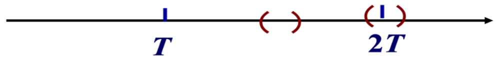
$$E[X(t)]=1\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=0,\ E\{X^2(t)\}=1,$$

$$R(s,t)=E[X(s)X(t)]=\begin{cases}1, & (n-1)T<s,t<nT\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

其中$(n-1)T<t<nT,(T>0,n\in N)$. 此传输过程是 (弱)平稳过程吗？请给出理由.

解答 此过程的均值函数为常数. (2 分)

如下图, 自相关函数取值不仅与两个时点的间距有关，还与所处位置有关，亦即与起点有关 (4 分)



其自相关函数不满足平稳性条件 $R(s,t)=R(s-t)$, 故传输过程非 (弱)平稳过程. (6 分)

得 分

三、证明题（12 分）

设$\{X(t),t\in N^+\}$是独立随机过程, 状态空间为 $E=\{1,2,\ldots\}$, 证明$\{X(t),t\in T\}$是马氏过程.

证明 对于任意 $n\geq 2$ 及 $t_1<t_2<\ldots<t_n\in T$, 任意的 $m_1,m_2,\cdots,m_n\in E$, 因 $X(t_1),\ldots,X(t_n)$相互独立. (3 分)

$$P\{X(t_n)=m_n|X(t_1)=m_1,X(t_2)=m_2,\cdots,X(t_{n-1})=m_{n-1}\}$$

$$=\frac{P\{X(t_n)=x_n,X(t_1)=x_1,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}{P\{X(t_1)=x_1,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}} \qquad (6 \text{ 分})$$

$$=\frac{P\{X(t_n)=m_n\}P\{X(t_1)=m_1\}\cdots P\{X(t_{n-1})=m_{n-1}\}}{P\{X(t_1)=m_1\}\cdots P\{X(m_{n-1})=m_{n-1}\}} \qquad (9 \text{ 分})$$

$=P\{X(t_n)=m_n\}=P\{X(t_n)=m_n|X(t_{n-1})=m_{n-1}\}$ (因 $X(t_n)$与$X(t_{n-1})$相互独立). (12 分)

得 分

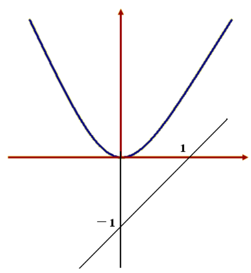
四、(12 分)设随机过程$\{X(t,\omega),-\infty<t<\infty\}$， $X(t,\omega_1)=t^2,\ X(t,\omega_2)=t-1,\ -\infty<t<\infty$ 且 $P(\omega_1)=1/3,P(\omega_2)=2/3$ 分别求：

1. 画出此过程的全部样本函数（6 分）
2. 一维分布函数 $F(0;x)$ 和 $F(1;x)$；（6 分）

解答 1) 对任意实数 $t\in R$,有

$X(t)$	t^2	$t-1$
p	$1/3$	$2/3$

（3 分）



（6 分）

2) 特别

$X(0)$	-1	0
p	$2/3$	$1/3$

，

$X(1)$	0	1
p	$2/3$	$1/3$

(8 分)

故 $$F(0;x)=P\{X(0)\le x\}=\begin{cases}0, & x<-1;\\ 2/3 & -1\le x<0;\\ 1, & 0\le x.\end{cases}$$ (10 分)

$$F(1;x)=P\{X(1)\le x\}=\begin{cases}0, & x<0;\\ 2/3 & 0\le x<1;\\ 1, & 1\le x.\end{cases}$$ (12 分)

得 分

五、(14 分) 随机变量 X～$U(2, 4)$, $X_1, X_2, \ldots, X_N$ 相互独立且与 X 同分布, 并均与 N 相互独立, N~$P(5)$.令 $Y=\sum_{k=1}^{N}X_k$，试计算数学期望 $E(Y)$的值.

解答 $$E(Y)=E\left(\sum_{k=1}^{N}X_k\right)=E\left\{E\left(\sum_{k=1}^{N}X_k\middle|N\right)\right\}$$ (4 分)

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}E\left(\sum_{k=1}^{N}X_k\middle|N=n\right)P\{N=n\}$$ (6 分)

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\middle|N=n\right)P\{N=n\}=\sum_{n=0}^{+\infty}E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)P\{N=n\}$$ (8 分)

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}nE(X)P\{N=n\}=E(X)\sum_{n=0}^{+\infty}nP\{N=n\}=E(X)E(N)$$ (12 分)

$E(Y)=E(N)\,E(X)=5\times3=15$ (14 分)

得 分

六、(12 分) 设随机过程 $\{X(t),t\in R\}$ 是实随机过程, 其均值函数为 $m_X(t)=a+bt$ (其中 a 和 b 是常数), 协方差函数为 $C(s,t)=e^{-|s-t|}$. 讨论过程 $\{X(t),t\in R\}$ 是否为广义平稳过程;

解答 已知过程 $\{X(t),t\in R\}$ 的均值函数为 $m_X(t)=a+bt$,若 $b\ne0$ 均值函数非常数,故 $\{X(t),t\in R\}$ 非广义平稳过程. (3 分)

自相关函数为

$$R_X(s,t)=C(s,t)+m_X(t)m_X(s)$$ (6 分)

$$=\begin{cases}e^{-|s-t|}+a^2=R_X(s-t), & b=0;\\ e^{-|s-t|}+(a+bt)(a+bs), & b\ne0.\end{cases}$$ (9 分)

若 $b=0$ 则均值函数 $m_X(t)=a$ 为常数,且相关函数满足 $R_X(s,t)=R_X(s-t)$, $\{X(t),t\in R\}$ 是广义平稳过程. (12 分)

得 分

七、(14 分)在多级传输系统中, 在各级传输数字 0 和 1 时误码率均为 p ($0<p<1$)，$X(0)$是进入系统第一级的数字，$X(n)$表示第 n 级传出的数字. $\{X(n), n=0, 1, 2, \ldots\}$构成一个齐次马氏链,状态空间为 $E=\{0,1\}$. 试求: 1.转移矩阵; 2.过程经第 n 级传输后的绝对分布; 3.过程的极限分布.

解 1. $$P=\begin{bmatrix}p_{00} & p_{01}\\ p_{10} & p_{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{bmatrix}$$ (3 分)

2.经第 n 级传送后，其概率分布(绝对分布)为 $\pi(n)=\pi(0)P^n$，$n=1,2,\cdots$ (6 分)

3.因 P 是正则阵，故此马氏链是遍历的，极限分布即平稳分布，即求转移矩阵的不动点概率向量，,需求满足方程 (9 分)

$$\begin{cases}(1-p)w_1+w_2=w_1\\ pw_1+(1-p)w_2=w_2\\ w_1+w_2=1\end{cases} \qquad (12\text{ 分})$$

解得极限分布 $W=(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$. (14 分)