§ 5.4 齐次马氏链状态的分类(一)

为揭示齐次马氏链的基本结构，需对其状态按某些概率特性进行分类，状态分类是研究n步转移概率的极限状态的基础.

一、状态类型定义

EX.1 设系统有三种可能状态E={1, 2 ,3}, “1”表示系统运行良好, “2”表示系统运行正常， “3”表示系统失败.

以$X(n)$表示系统 在n 时刻的状态, 并设$\{X(n),n\geq 0\}$是一马氏链. 在没有维修及更换的条件下, 其自然转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17/20 & 2/20 & 1/20 \\ 0 & 9/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由矩阵P可见，从“1”或“2”出发经有限次转移后总能到达“3”状态，而一旦到达“3”状态则永远停留在“3”.

状态“1”,“2”与状态“3”有不同的概率特性.

1. 刻画状态特性的几个特征量

定义5.4.1 对$\forall i,j\in E$ 及 $n\geq 2$，记

$$f_{ij}^{(1)}\triangleq P\{X(1)=j\,|\,X(0)=i\}=p_{ij}^{(1)}$$

$$f_{ij}^{(n)}\triangleq P\{X(n)=j,X(k)\neq j,k=1,2,\cdots,n-1\,|\,X(0)=i\},$$

称为(n步)首达概率.

系统从状态“i”出发经过n步转移后首次到达状态“j”的概率

称 $f_{ij}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$ 为最终概率.

最终概率

$$f_{ij} = P\{\text{存在} n \geq 1, \text{使} X(n) = j \mid X(0) = i\},$$

是系统从状态 “i” 出发经过有限步转移后最终到达状态 “j” 的概率.

定理5.4.1 （首达概率表示式）

对$\forall i, j \in E$ 及 $n \geq 1$, 有

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \neq j} \sum_{i_2 \neq j} \cdots \sum_{i_{n-1} \neq j} p_{i\, i_1} p_{i_1\, i_2} \cdots p_{i_{n-1}\, j}$$

即首达概率可以用一步转移概率表示。

定义5.4.2 对$j \in E$, 称

$$T_{ij} = \min\{n : n \geq 1, X(n) = j, X(0) = i\}$$

为到达 j 的**首达时间**.

随机变量

注 若右边是空集, 则令$T_{ij}=\infty$.

注 1 T_{ij}表示从 i 出发首次到达 j 的时间,

T_{ii}表示从 i 出发首次回到i 的时间.

注 2 T_{ij}与 首达概率之间有关系式:

1) $f_{ij}^{(n)} = P\{T_{ij} = n \mid X(0) = i\},\ i,j \in E,\ n = \infty, 1, 2, \cdots$

2) $f_{ij} = P\{T_{ij} < \infty \mid X(0) = i\}, \quad i,j \in E.$

定理5.4.2 对$\forall i,j \in E$ 及 $n \geq 1$, 任意步转移

概率与首达概率有关系式

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^{(m)} P_{jj}^{(n-m)}$$

续EX.1 设系统有三种可能状态$E=\{1, 2, 3\}$, "1"表示系统运行**良好**, "2"表示系统运行**正常**, "3"表示系统**失败**.

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17/20 & 2/20 & 1/20 \\ 0 & 9/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T_{13}是系统的工作寿命，有

$$f_{13}^{(1)}=P\{T_{13}=1|X(0)=1\}=p_{13}=\frac{1}{20},$$

$$f_{13}^{(2)} = P\{T_{13} = 2 \mid X(0) = 1\}$$

$$= p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} = \frac{21}{400},$$

……

$P\{T_{13} \geq n\}$是系统在$[0, n]$内运行的可靠性，有

$$P\{T_{13} \geq n\} = \sum_{k=n}^{\infty} P\{T_{13} = k \mid X(0) = 1\} = \sum_{k=n}^{\infty} f_{13}^{(n)}$$

研究首达概率和首达时间有实际工程意义.

定义5.4.3 设 $P\{T_{ij}=\infty\}=0,\ j\in E$, 称

$$\mu_{ij} = E[T_{ij}] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

为从状态 i 出发, 首次到达状态j 的**平均转移步数(时间).**

特别当$i=j$，称 μ_{jj} 为状态j首次返回 的

平均返回时间。

定义5.4.4 对$i \in E$, 若正整数集

$$\{n \mid n \geq 1, P_{ii}^{(n)} > 0\}$$

非空, 则定义其最大公约数(GCD)为状态i 的**周期**，记为

$$d_i = GCD\{n \mid n \geq 1, P_{ii}^{(n)} > 0\}$$

若$d_i > 1$, 称状态i是 **周期的**.

若$d_i = 1$, 称状态i 是**非周期的**.

若 $\{n \mid n \geq 1, P_{ii}^{(n)} > 0\}$ 为空集，则不对 i 定义周期。

注：若i的周期为d,则存在正整数m,当n>m时，有 $P_{ii}^{(nd)}>0$ **。**

2. 状态类型分类

定义5.4.5 对状态$i \in E$, 最终返回概率为f_{ii},

若 $f_{ii}=1$，称状态i 是常返的;

若 $f_{ii}<1$，称状态 i 是非常返的(或滑过的).

注 1 $f_{ii}=1$表示系统从状态i 出发经有限步几乎必定会返回状态 i. 而$f_{ii}<1$表示从i 出发经有限步以概率f_{ii}返回状态 i，而以概率$1-f_{ii}$不再返回。

注 2 若i是常返状态，意味着从i出发，返回i的次数是无穷次.

那若i是非常返状态呢？

定义
$$Y_n=\begin{cases}1, & X(n)=i\\ 0, & X(n)\neq i\end{cases}$$

则 $Y=\sum_{n=1}^{\infty}Y(n)$ 表示到达i的次数，

而Y的条件期望

$$E[Y \mid X(0)=i]=E[\sum_{n=1}^{\infty} Y(n) \mid X(0)=i]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} E[Y(n) \mid X(0)=i]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} P[X(n)=i \mid X(0)=i]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$$

故从i出发返回i的平均次数为 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$ 。

定理5.4.3 若i是**非常返态**，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$$

证明见王梓坤著《随机过程论》P64.

定理5.4.4: （常返状态 判别准则）

状态i是**常返**的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$$

状态i是**非常返**的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < +\infty$$

推论1 若i是非常返的，则

$$\lim_{n\to+\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$$

定义5.4.6 对常返状态$i\in E$, 平均返回时间为μ_{ii},

若 $\mu_{ii}<+\infty$, 称状态i 是正常返的；

若 $\mu_{ii}=+\infty$, 称状态i 为零常返的.

注：零常返状态只能出现在无限状态的马氏链中。

定理5.4.5 若i是**常返态**且有周期d ,则

$$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{u_{ii}}$$

证明见王梓坤著《随机过程论》P65.

由该定理，不难得到

定理5.4.6: （正、零常返状态 判别准则）

状态i是正常返的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty \text{，且}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} \neq 0$$

状态i是零常返的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty\text{，且}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$$

小结：

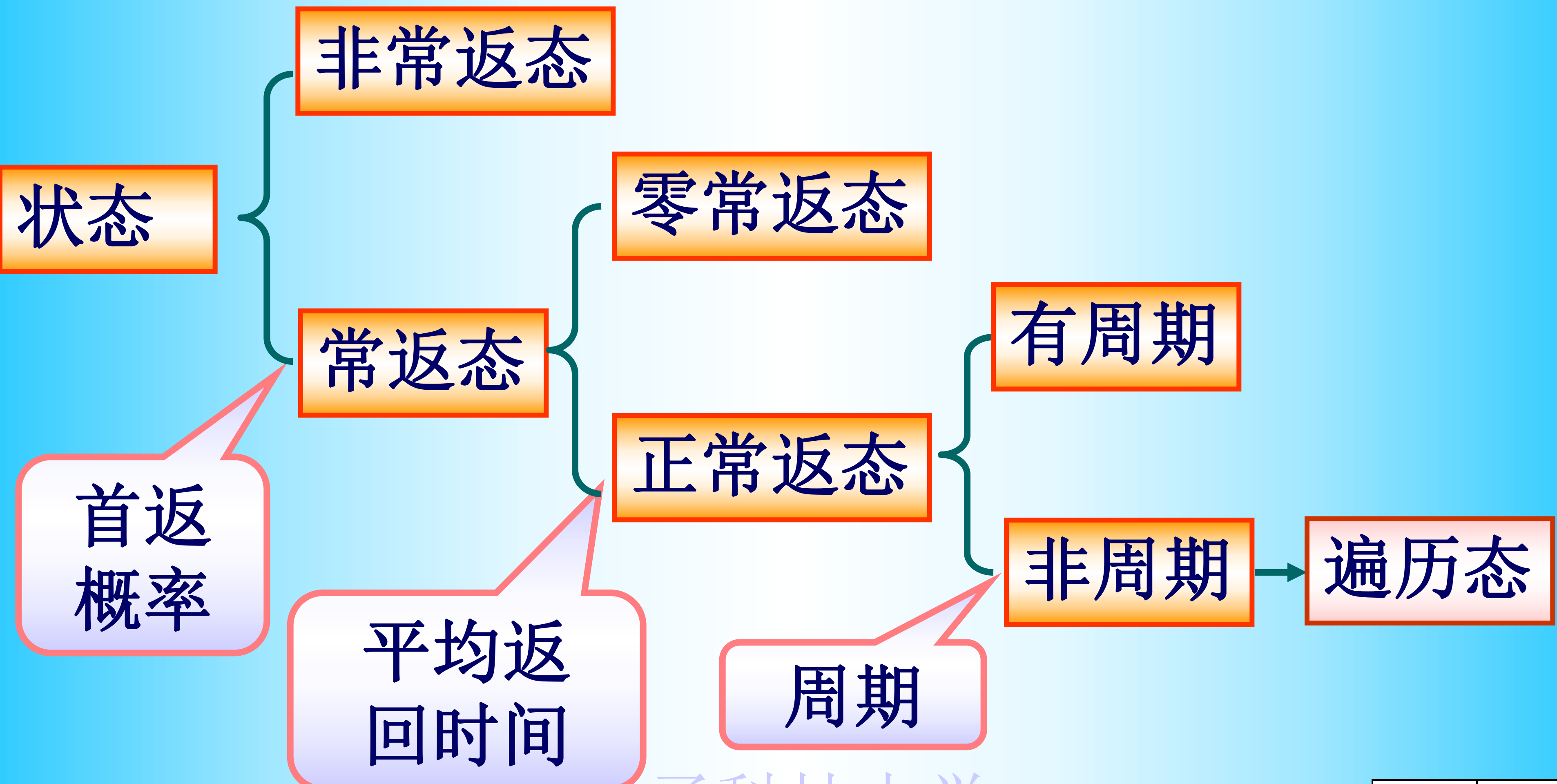
i是非常返态 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < +\infty$，此时 $p_{ii}^{(n)} \to 0$

i是零返态 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$ 且 $p_{ii}^{(n)} \to 0$

i是正常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$ 且 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} \neq 0$

定义5.4.7 称非周期正常返的状态为**遍历状态**.

以三个层次区分状态类型



EX.3 醉汉问题

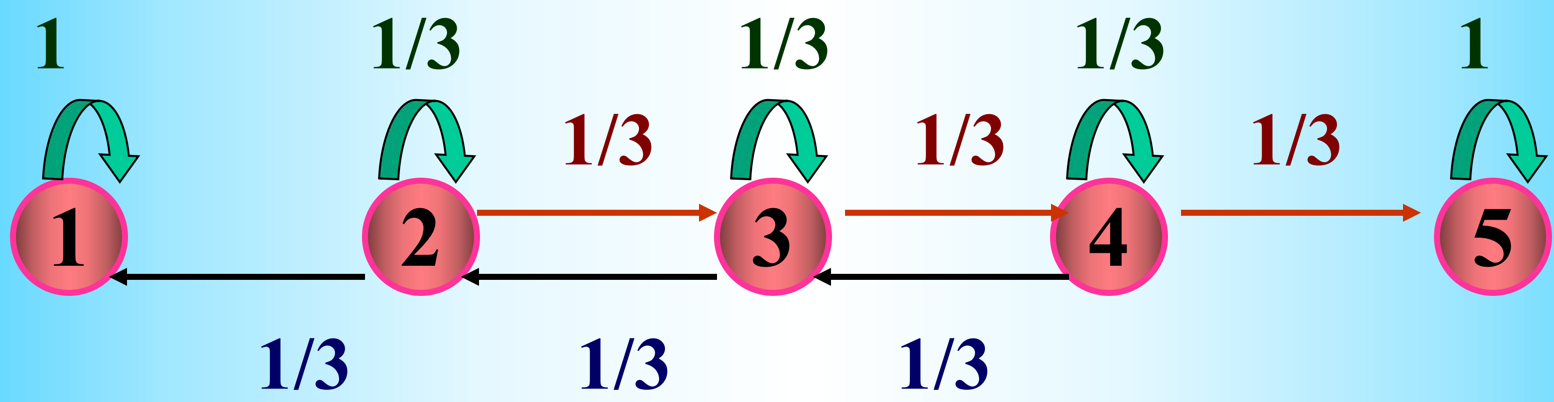
状态空间为$E=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

考虑各状态的类型.

状态示意图:



解 1)因 $p_{11}^{(1)} = f_{11}^{(1)} = 1,\ f_{11}^{(n)} = 0$ (当$n \geq 2$),

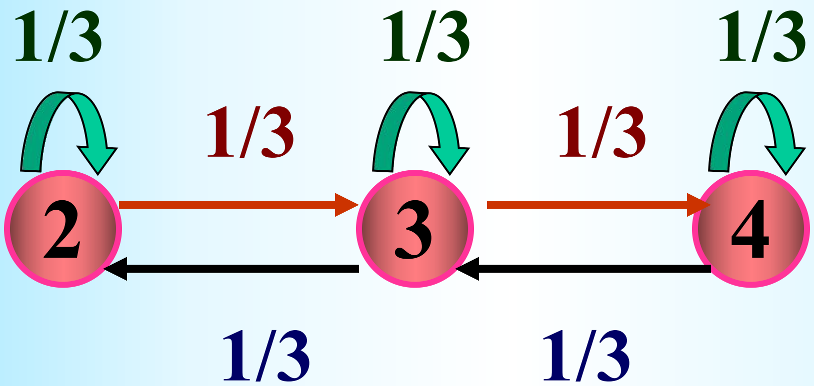
$$\Rightarrow\quad d(1) = 1, \qquad \mu_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = 1,$$

$$f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = 1,$$

状态1是非周期的正常返的，即为遍历状态.

同理，状态5 也是非周期的正常返的.

2) 考虑状态“2”的类型



$$f_{22}^{(1)} = \frac{1}{3}, \qquad f_{22}^{(2)} = p_{23}p_{32} = (\frac{1}{3})^2,$$

$$f_{22}^{(3)} = p_{23}p_{33}p_{32} = (\frac{1}{3})^3, \quad f_{22}^{(n)} = ? \quad (n \geq 4)$$

计算 $f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)}$ 非常困难.

提示 请考虑状态 “3”的类型.