5.3齐次马氏链

5.3.1 齐次马氏链的定义

定义5.3.1 若马氏链 $\{X(n), n\geq 0\}$的一步转移概率与起始时刻无关，即对任意m

$$p_{ij}^{(1)}(m) = P\{X(m+1)=j \mid X(m)=i\} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij},$$

与m无关

称$\{X(n), n\geq 0\}$为齐次马氏链.

若状态空间为$E=\{0,1,2,\ldots\}$

记 $$P=(p_{ij})=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

称 P 为一步转移矩阵.

转移矩阵是随机矩阵：每个元素为非负数，且每行之和均为1.

1) $0\le p_{ij}\le 1$, 和 2) $\sum_{j\in E} P_{ij}=1$成立

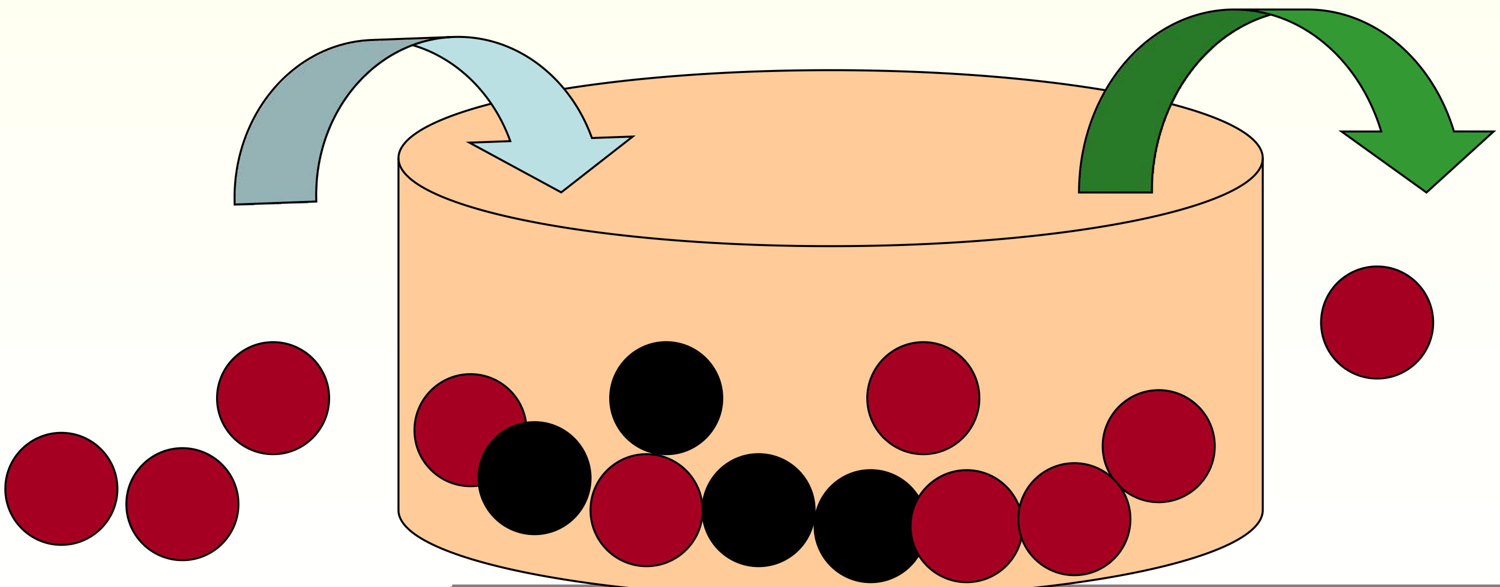
EX.1 在某数字通信系统中传0 和 1 两种信号, 且传递要经过多级. 若每级由于噪声的存在, 送出0，1信号的失真概率均为p $(0<p<1)$, 则各级输入状态和输出状态的转移矩阵为

$$P=(p_{ij})=\begin{bmatrix}1-p & p \\ p & 1-p\end{bmatrix} \quad E=\{0,1\}, \quad i,j\in E.$$

数字传输过程是齐次马氏链.

EX.2 *Polya*模型（传染病模型）

设坛子中有b个黑球，r 个红球. 从坛子中随机地摸出一个球，然后将球放回并加入c只同色球，如此取和放，不断进行下去. 研究坛子中黑色球个数.



$$p_{ij}^{(1)}(n) = P\{X(n+1)=j \mid X(n)=i\}$$

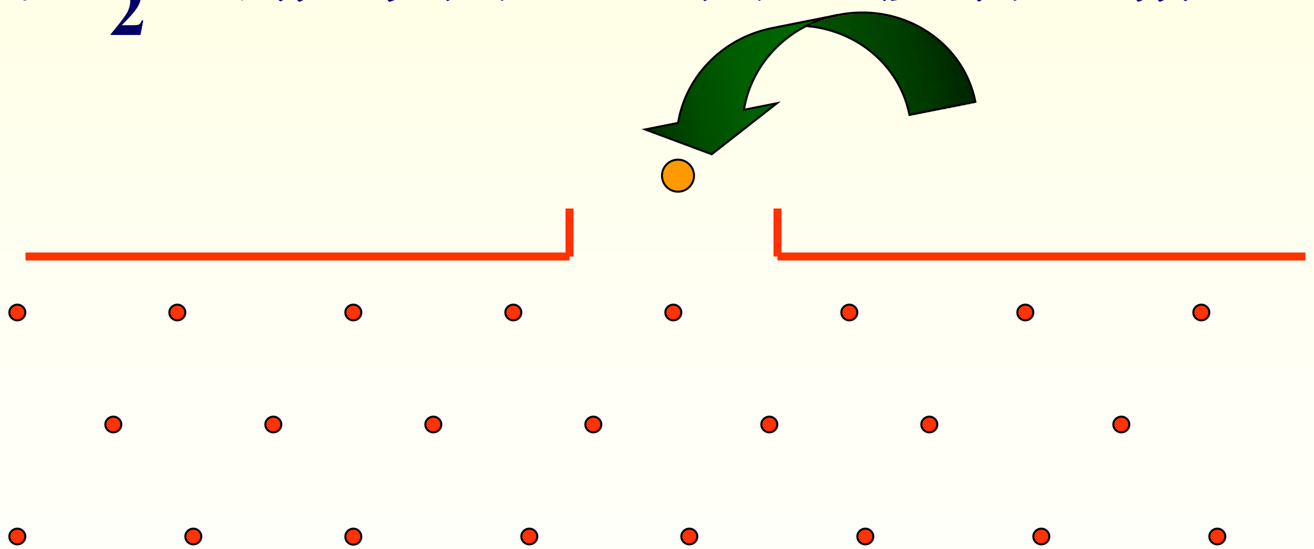
$$= \begin{cases} \dfrac{i}{b+r+nc}, & j=i+c; \\ 1-\dfrac{i}{b+r+nc}, & j=i; \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$$

n次转移概率与n有关，$\{X(n), n\geq 1\}$是非齐次马氏链

$\{X(n), n\geq 1\}$非齐次马氏链.

EX3. 随机游动(高尔顿钉板试验)

将一个小球投入无限大高尔顿钉板内, 小球各以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或向右移动一格.



$$X(k)=\begin{cases}1, & \text{在第}k\text{层向右位移一格;}\\ -1, & \text{在第}k\text{层向左位移一格.}\end{cases}$$

$X(k)$	-1	1
$P\{X(k)=i\}$	$1/2$	$1/2$

令 $$Y(n)=\sum_{k=0}^{n}X(k),$$

随机游动 n 步所处的状态

状态空间 $E=N$, 有

$$P\{Y(m_n)=j_n \mid Y(m_1)=j_1, Y(m_2)=j_2, \cdots Y(m_{n-1})=j_{n-1}\}$$

$$=P\{Y(m_n)=j_n \mid Y(m_{n-1})=j_{n-1}\}$$

$\{Y(n), n\in N\}$是马氏过程 .

更进一步，因对任意m 有

$$p_{ij}^{(1)}(m) = P\{Y(m+1) = j \mid Y(m) = i\} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij},$$

即马氏链 $\{Y(n), n \in N\}$的一步转移概率与起始时刻无关，是齐次马氏链.

转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

5.3.2 齐次马氏链的性质

定理5.3.1 齐次马氏链$\{X(n),n\geq 0\}$的k步转移概率满足**切普曼—柯尔莫哥洛夫方程**

$$p_{ij}^{(k+l)}=\sum_{r\in E}p_{ir}^{(k)}p_{rj}^{(l)}$$

推论1 齐次马氏链的n步转移矩阵为(一步)转移矩阵的n 次幂.

$$P^{(n)}=PP\cdots P=P^{n}$$

证 在$C-K$方程中，

令$k=s=1$, 有 $P^{(2)}=P^{(1)}P^{(1)}=P^2$,

令$k=2$, $s=1$, 有 $P^{(3)}=P^{(2)}P^{(1)}=P^2P=P^3$,

由数学归纳法知

$$P^{(n)}=P^{(n-1)}P=P^{n-1}P=P^n$$

齐次马氏链的n步转移矩阵由一步转移矩阵确定.

EX.4 天气预报问题 假设明日是否有雨仅与今日下雨与否有关，而与过去无关. 把有雨称为“0”状态天气，无雨称为“1”状态天气，这是一个两状态马氏链.

记 $p_{00}=\alpha$, $p_{10}=\beta$, 则过程的一步转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

设$\alpha=0.7$, $\beta=0.4$, 可得

$$P^{(4)} = P^4 = \begin{bmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{bmatrix}$$

可知今日有雨且第四日仍有雨的概率为

$$p_{00}^{(4)} = 0.5749.$$

问题:

1)计算$P^{(8)}$, $P^{(16)}$, $P^{(32)}$,尝试发现其变化规律.

2)若n趋于无穷时 $P^{(n)}$ 将会如何变化?

定义5.3.2 给定齐次马氏链$\{X(n), n\geq 0\}$,

记 $\pi_i(n)=P\{X(n)=i\}$ ， $i\in E$

称行向量

$$\pi(0)=\{\pi_0(0), \pi_1(0), \dots, \pi_i(0), \dots\}$$

为马氏链的**初始(概率)分布**

称行向量

$$\pi(n)=\{\pi_0(n), \pi_1(n), \dots, \pi_i(n),\dots\}\ (n\neq 0)$$

为马氏链的**绝对(概率)分布**.

定理5.3.3 设$\{X(n), n\geq 0\}$是齐次马氏链, 其绝对分布由初始分布和一步转移矩阵所完全确定.

$$\pi_j(n)=\sum_{i\in E}\pi_i(0)p_{ij}^{(n)},\quad j\in E$$

或 $$\pi(n)=\pi(0)P^{(n)}=\pi(0)P^n,\qquad n\geq 0.$$

证 由全概率公式及马氏性知

$$\pi_j(n)=P\{X(n)=j\}=\sum_{i\in E}P\{X(0)=i, X(n)=j\}$$

$$=\sum_{i\in E} P\{X(0)=i, X(n)=j\}$$

$$=\sum_{i\in E} P\{X(0)=i\}P\{X(n)=j \mid X(0)=i\}$$

$$=\sum_{i\in E} \pi_i(0)p_{ij}^{(n)}, \quad j\in E$$

或 $$\pi(n)=\pi(0)P^{(n)}=\pi(0)P^{n}, \qquad n\geq 0.$$

绝对分布

初始分布

定理5.3.4 齐次马氏链的有限维分布由初始分布和一步转移概率确定.

证 对于 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$,

$$P\{X(n_1)=i_1, X(n_2)=i_2, \cdots, X(n_k)=i_k\}$$

$$= \sum_{i\in E} P\{X(0)=i\} P\{X(n_1)=i_1 \mid X(0)=i\}$$

$$\times P\{X(n_2)=i_2 \mid X(n_1)=i_1\} \cdots P\{X(n_k)=i_k \mid X(n_{k-1})=i_{k-1}\}$$

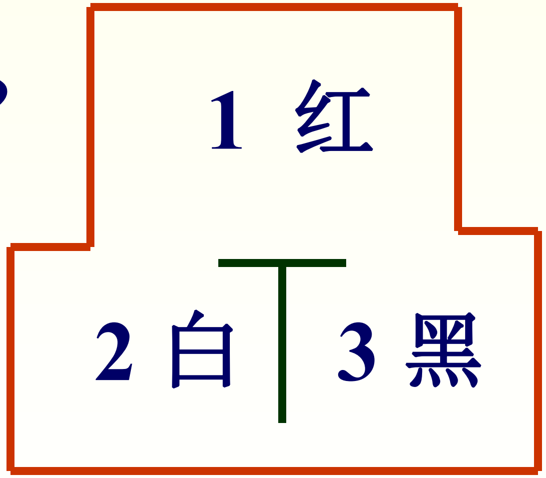
由$\{X(n), n\geq 0\}$的齐次性, 以上各转移概率均可利用$C-K$方程，由一步转移概率求出.

5.3.3 齐次马氏链的遍历性和平稳性

将老鼠迷宫涂上不同颜色，对老鼠运动进行足够多次的观察，以了解，

1）哪一种颜色的吸引力最大？

2）初始状态对结果有何种影响？



数学问题：

关注当$n\to\infty$, $p_{ij}^{(n)}$ 的极限分布（$j=1,2,3$）是否与 i 有关?

定义5.3.4 设$\{X(n),n=0，1,2,\ldots\}$是齐次马氏链, 若对 $\forall i,j\in E$, 下极限存在

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0,\quad (i,j\in E)$$

且与 i 无关，称此马氏链具有**遍历性**.

若 $\pi_j > 0,\ j \in E,$ 且 $\sum_{j\in E} \pi_j = 1,$

是概率向量

称$\{\pi_j,\ j\in E\}$为齐次马氏链的**极限分布**.

记 $\Pi = \{\pi_j,\ j\in E\},$

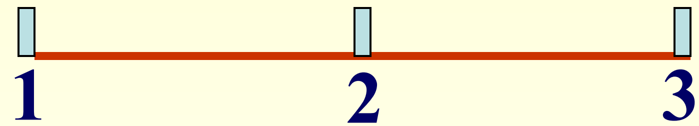
齐次遍历马氏链的n 步转移矩阵，有

$$P^{(n)} \to \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

当$n \to \infty$

EX.5 直线上的随机游动

状态空间$E=\{1, 2, 3\}$



一步概率转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

讨论$\{X(n), n\geq 1\}$是否遍历？

解 $\{X(n), n\geq 1\}$是齐次马氏链.

2步概率转移矩阵为 $$P^2 = PP = \begin{bmatrix} q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \end{bmatrix}$$

3步概率转移矩阵为

$$P^3 = P^2 P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

一般有 $$P^{2n-1} = P,$$

$$P^{2n} = \begin{bmatrix} q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \end{bmatrix}, \quad n = 1,2,\cdots$$

对$\forall i,j\in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$都不存在

故$\{X(n), n\geq 1\}$不是遍历马氏链.

定理5.3.5 (遍历性定理)

设齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\dots\}$的状态空间为 $E=\{1, 2,\dots, s\}$. 若存在正整数n_0，对任意的$i,j\in E$ 有 $P_{ij}^{(n_0)}>0$, 则此马氏链是遍历的，且极限分布Π是方程组

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{s} \pi_i p_{ij}, \quad (j = 1,2,\cdots s), \qquad (1)$$

在满足条件 $\pi_j > 0, \sum_{j=1}^{s} \pi_j = 1,$

是概率向量

下的唯一解.

注一 对于齐次马氏链, 由 $C-K$方程, 有

记 $P = (p_{ij}),\ P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)}) = P^n,$

定理5.3.5 条件可叙述为：存在正整数n_0，使n_0步转移矩阵 P^{n_0} 的每一元 素都为正数.

补充定义1 称齐次马氏链的转移矩阵P是**正则的**，若存在正整数k，使P^k的每一个元素均为正数.

推论1 若齐次马氏链的转移矩阵P是正则阵，则此马氏链是遍历的.

注二 记 $\Pi=\{\pi_1,\ \pi_2,\cdots,\pi_s\}$，

定理5.3.5中(1)式可改写为

$$\Pi=\Pi P \qquad (1')$$

$$\Pi P = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_s) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{s} \pi_i p_{i1} & \sum_{i=1}^{s} \pi_i p_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{s} \pi_i p_{is} \end{bmatrix}$$

$$= [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \cdots \quad \pi_s] = \Pi.$$

EX.6 迷宫问题 老鼠运动是齐次马氏链.

设老鼠运动的转移矩阵P为

$$P=\begin{bmatrix}0.1 & 0.7 & 0.2\\ 0.3 & 0.4 & 0.3\\ 0.5 & 0.2 & 0.3\end{bmatrix}$$

正则阵

设初始分布为$\pi_1(0)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$或$\pi_2(0)=(1,0,0)$

由于P是正则阵,则 $n\to\infty$时，有

$$P^{(n)} = P^n \to W = \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi \\ \Pi \end{bmatrix},$$

其中 $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3).$

第n步绝对分布为 $\pi(n) = \pi(0)P^{(n)} = \pi(0)P^n,$

有 $\pi(0)P^n \to \pi(0)W, \quad as\ n \to \infty$

$$\pi_1(0)W = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} = (\pi_1\ \pi_2\ \pi_3) = \Pi$$

$$\pi_2(0)W=(1\quad 0\quad 0)\begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3\\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{bmatrix}=\left(\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\right)=\Pi$$

一般, 对任意初始概率向量$\pi(0)=$（$p_1\ \ p_2\ \ p_3$）

均有 $\pi(0)\ W=\Pi$

定理5.3.6 设齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\ldots\}$有遍历性, 其绝对分布与转移概率有相同极限.

$$\lim_{n\to\infty}\pi_j(n)=\pi_j,\ j\in E$$

证 因绝对分布满足

$$\pi_j(n)=\sum_{i\in E}\pi_i(0)p_{ij}^{(n)},\quad j\in E$$

对两边取极限

$$\lim_{n\to\infty}\pi_j(n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in E}\pi_i(0)p_{ij}^{(n)}=\sum_{i\in E}\pi_i(0)\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$$

由遍历性定义 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\pi_j>0,\quad (i,j\in E)$

$$\lim_{n\to\infty}\pi_j(n)=\sum_{i\in E}\pi_i(0)\pi_j=\pi_j\sum_{i\in E}\pi_i(0)=\pi_j$$

定义5.3.5 $\{X(n),n=0,1,2,\ldots\}$ 为齐次马氏链，若存在 $V=\{v_j, j\in E\}$满足以下条件:

(1) $v_j \geq 0, j\in E$; (2) $\sum_{j\in E} v_j = 1$;

(3) $v_j = \sum_{i\in E} v_i p_{ij}$.

称马氏链是**平稳的**, 称 V 是马氏链的**平稳分布**.

由定理5.3.5的等价形式可得结论：

正则(遍历)马氏链的极限分布是平稳分布.

定理5.3.7 若马氏链的初始分布是一个平稳分布V，则绝对分布为

$$\pi(n)=VP^n=VPP^{n-1}=VP^{n-1}=\cdots=V$$

即绝对分布保持不变.

系统具有平稳性

EX.7 考虑经多级传送后，数字传输的准确可靠程度如何？（**P161例5.3.2**）

$X(0)$—进入系统第一级的数字；

$X(n)$—表示第n级传出的数字，

$\{X(n), n=0, 1, 2, \ldots\}$是齐次马氏链，状态空间为$E=\{0,1\}$.

假设每一级的误码率为p $(0<p<1)$，则转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

设初始分布为$\pi(0)$.

经第n 级传送后, 其概率分布(绝对分布)为

$$\pi(n)=\pi(0)P^n,\ \ n=1,2,\cdots$$

需求极限分布.

因P 是正则阵, 故此马氏链是遍历的, 极限分布即平稳分布.

由遍历性定理知问题转化为求P的概率向量

$$W=(w_1 \quad w_2)$$

W应满足：

是概率向量

$$\begin{cases} 1）\ w_1+w_2=1,\ w_i>0; \\ 2）\ WP=W. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad WP=(w_1\ w_2)\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$=[(1-p)w_1+pw_2 \quad pw_1+(1-p)w_2]=(w_1\ w_2)$$

$$[(1-p)w_1+pw_2 \quad pw_1+(1-p)w_2]=(w_1 \; w_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-p)w_1+w_2=w_1 \\ pw_1+(1-p)w_2=w_2 \\ w_1+w_2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_1=w_2 \\ w_1+w_2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow W=(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$$

$$P^n \to \begin{bmatrix} W \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{当} \quad n \to \infty,$$

故极限分布为$\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right)$, 从而有

$$\pi(n) = \pi(0)P^{(n)} = \pi(0)P^n$$

最坏结果

$$\to (p \quad 1-p)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right)$$

当 $n \to \infty$,

例 (*P*169例5.3.6)

1) 由二步转移阵验证转移阵是正则阵.

2）定理5.3.5的等价形式知马氏链是遍历的.

3）由定理5.3.5之推论 知正则(遍历)马氏链的极限分布是平稳分布.