一、简答题

1. (龚) $\{X(t), t\in T\}$ 为定义在概率空间 (Ω, F, P) 上的平稳过程, 请给出均值均方遍历的数学定义，并请阐述其工程意义.

2. （徐）设在[0, t)时段内乘客到达某售票处的数目是强度为 $\lambda=2.5$（人/分）的泊松过程 $\{N(t), t\geq 0\}$，试求

(1) 在 5 分钟内有 10 位乘客到达售票处的概率 p_1;

(2) 在第 5 分钟有 10 位顾客到达, 第 1 分钟内无顾客到达的概率 p_2.

(3) 在第 5 分钟有 10 位顾客到达, 第 1 分钟内有顾客到达的概率 p_3.

3．(张)随机过程 $X(t)=\cos(t+A), -\infty<t<+\infty$，其中 A 是随机变量，其分布律为 $P\{A=i\}=\dfrac{1}{3}(i=0,\dfrac{\pi}{2},\pi)$，求:（1）画出样本函数简图;（2）求均值函数 $m_X(t)$.

4.（王）已知随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 的自相关函数 $R_X(\tau)=e^{-\tau^2}$，试求 $\{X(t), t\in T\}$ 与其导数过程的互相关函数 $\mathrm{R}_{\dot{X}X}(s,t)$.

二、(张）设 $\{X(n), n=1,2,\cdots,100\}$ 是独立同分布的随机序列，其中 $X(k)$ 的分布律为 $P\{X(k)=1\}=P\{X(k)=-1\}=\dfrac{1}{2}, k=1,2,\cdots,100$，设 $Y(n)=\sum_{k=n}^{100}X(k),\quad n=1,2,\cdots,100$.(1) 求 $Y(2)$ 的分布律; (2) 求 $Y(n)$ 的特征函数 $\varphi(n)$；(3) 计算相关函数 $R_Y(m,n)$.

三、(龚)设 $\{W(t), t\geq 0\}$ 是 $\sigma^2=1$ 的维纳过程，令 $X(t)=e^{-\frac{t}{2}}W(e^t)$(称为 Ornstein-Uhlenbeck 过程).

(1) 证明：$\{X(t), t\geq 0\}$ 是一个严平稳过程;

(2) 判断过程 $\{X(t), t\geq 0\}$ 的均方连续性，均方可积性，均方可导性.

四、(高）设齐次马氏链 $\{X_n, n=0,1,2,\ldots\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3,4\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 画出状态转移图; (2)讨论各状态性质; (3)分解状态空间.

五、(王)设 $\{W(t), t\geq 0\}$ 是标准维纳过程，令 $X(t)=\int_0^t W(u)\,\mathrm{d}u$.求随机过程 $\{X(t), t\geq 0\}$ 的一维概率密度和特征函数.

六 、(徐) 设随机过程 $X(t)=\xi\cos(\beta t+\eta), t\in R$，其中 $\xi\sim N(0,1),\ \eta\sim U(0,2\pi)$，$\xi$ 与 η 相互独立，β 为正常数. 试证：随机过程 $\{X(t), t\in R\}$ 为平稳过程, 且具有关于均值的均方遍历性.

七 、(徐) 在传送数字 0 和 1 的通信系统中，每个传送数字必须经过若干级，而每一级中数字正确传送的概率为 p ($0<p<1$)，设 $X(0)$表示进入系统的数字，$X(n)$表示离开系统第 n 级的数字.已知 $\{X(n), n=1,2,\cdots\}$ 是齐次马氏链. 试讨论经多级传送后, 数字传输的准确可靠程度如何？