

电子科技大学研究生试卷

2019 年随机过程

一、简答题

1. 设随机过程 $X(t) = A \cdot \cos t + Bt, t \in (0, \infty), c$ 为常数,

A 服从 $[0, 1]$ 区间上的均匀分布, $B \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(1) 请写出 $X(t)$ 的任意三条样本函数;

(2) 求出 $X(t)$ 的均值函数和自相关函数

(3) 求 $X(t)$ 的一维特征函数。

2. $F_1(x), t \in R$ 是一维分布函数, 现在给出多维分布函数的定义:

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n\}$$

对于任意的 a , 定义随机过程 $Y(t) = \begin{cases} 1, X(t) \leq a \\ 0, X(t) > a \end{cases}$

(1) 求 $Y(t)$ 的均值和自相关函数;

(2) 已知时刻, 有 $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$, 在 t_1 时刻观测到 $Y(t)$ 为 1, 现求 t_2, t_3, \dots, t_n 时刻观测到 $Y(t)$ 为 0 的概率。

3. 某商场为调查顾客到来的客源情况, 得到男女到达商场人数的速率分别为每分钟 2, 3 人, 男女到达商场的过程是相互独立的, 求

(1) 商场 t 时刻到达人数的分布函数;

(2) 在一小时有 50 人达到商场的情况下, 其中有 30 名是女性顾客的概率有多大? 平均来看其中有多少名是女性顾客?

4. 已知随机过程 $\{X(t), t \in R\}$ 的均值函数 $m_X(t) = 0$, 自相关函数为 $R_X(\tau) = e^{-\frac{1}{2}\tau^2}$, 若 $Y(t) = X(t) + X'(t)$, 求出 $Y(t)$ 的自相关函数和均值函数。

解: 由自相关函数可判断 $\{X(t), t \in R\}$ 均方连续, 由自相关函数的二阶导数在 $\tau=0$ 处连续

可知均方可微, 因此

$$E[Y(t)] = 0$$

$$R_Y(\tau) = -\tau e^{-\frac{1}{2}\tau^2}, R_Y^*(\tau) = (\tau^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}\tau^2}$$

$$\text{故 } R_Y(t, t+\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)] = R_Y(\tau) - R_Y^*(\tau) = (2 - \tau^2)e^{-\frac{1}{2}\tau^2}$$

5. 已知 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 6 的泊松过程，定义 $X(t) = N^3(t)$ ，试着判断 $X(t)$ 是否为马尔科夫过程，是否是齐次马尔科夫过程。

二：设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，常数 $a > 0$ ，现有：

$$X(t) = W(t+a) - W(t) \quad Y(t) = W(t+a) - W(a)$$

- (1) 求出 $\{X(t), t \geq 0\}$ 和 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 的均值函数和自相关函数；
- (2) $\{X(t), t \geq 0\}$ 和 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 的是正态过程吗？是维纳过程吗？为什么？
- (3) $\{X(t), t \geq 0\}$ 和 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 是平稳过程吗？为什么

三：已知 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为 4 的维纳过程，

$$X(t) = \frac{1}{t} \int_0^t s W(s) ds$$

- (1) 求 $X(t)$ 的均值函数和协方差函数；
- (2) 判断 $\lim_{t \rightarrow 0} X(t)$ 是否均方收敛。

四：已知随机过程 $\{X(t), t \in R\}$ 的均值函数 $m_X(t) = 0$ ，自相关函数为

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|\tau|, & |\tau| \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

判断随机过程 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 是否均方连续、均方可积、均方可导；判断随机过程是否具有均方遍历性

五、设齐次马氏链 $\{X(n), n \geq 0\}$ 的状态空间 $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ，其状态转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

- (1) 画出状态转移图；
- (2) 讨论各状态性质；
- (3) 分解状态空间；
- (4) 判断该链是否具有遍历性，如果有求出平稳分布。