§0.2 随机变量的数字特征

一、数学期望与方差

定义0.2.1 随机变量X 的分布函数为$F(x)$, 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|dF(x)<+\infty$, 则

$$E(X)\hat{=}\int_{-\infty}^{+\infty}xdF(x).$$

注 若X是连续型随机变量, 则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xF'(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

若X是离散型随机变量, 则

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i P\{X=x_i\}$$

定理0.2.1 设$F(x)$是 随机变量X的分布函数, $g(x)$在R上连续, 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|dF(x)<\infty$, 则$Y=g(X)$的数学期望存在, 且

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dF(x)$$

定理0.2.2 柯西-许瓦兹不等式 对任意的随机变量X,Y都有

$$\{E[|XY|]\}^2 \le E[X^2]\cdot E[Y^2]$$

等式当且仅当$P\{Y=aX\}=1$时成立, $a\in R$.

对随机变量X, 若有$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x)<\infty$, 则$E(X)$与$D(X)$存在, 且

$$0\le D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$\Rightarrow \quad [\int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)]^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x)$$

二、条件数学期望

1.条件数学期望概念

定义0.2.2 设(X, Y)是二维随机变量,条件分布函数$F_{Y|X}(y|x)$ 存在，又若

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|y|dF_{Y|X}(y|x)<\infty$$

称

$$E(Y \mid x)=E(Y|X=x)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}y\,dF_{Y|X}(y|x)$$

为在$X=x$的条件下,随机变量Y的**条件数学期望**.

若(X, Y)是连续型随机变量, 则

$$E(Y|x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy,$$

EX.1 若 $(X,Y)\sim N(0,1;0,1;\rho),(-1<\rho<1)$,

求 $E(Y|X=x)$

因 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2}, y\in R.$

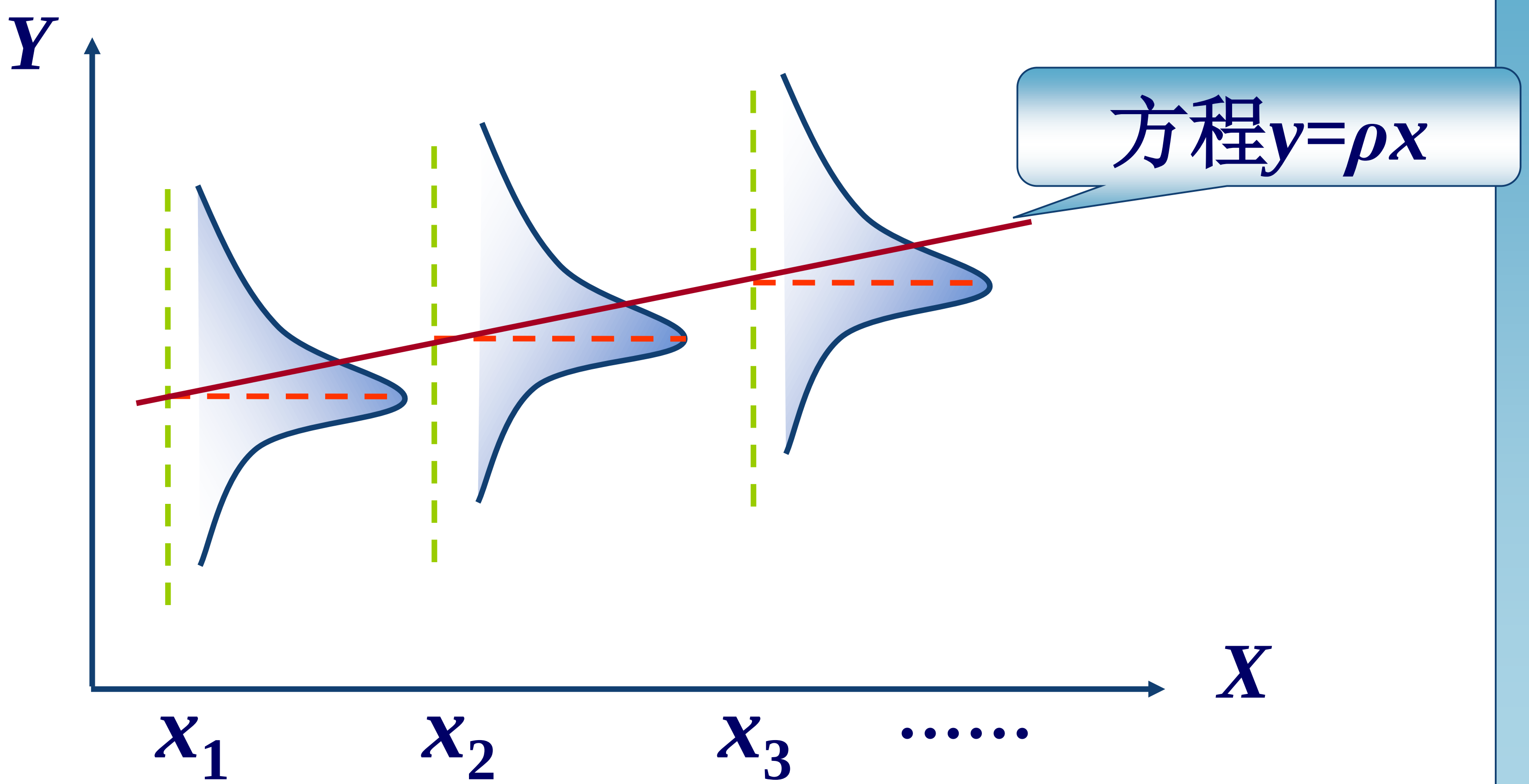
在$X=x$ 的条件下, $Y\sim N(\rho x,1-\rho^2)$;

则 $E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy=\rho x$

同理 $E(X|Y=y)=\rho y.$

都是实值函数.

对于X的不同取值x_1，x_2，…，x_n



Ex. 2 设随机变量(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y}, & y>|x|, -\infty<x<\infty;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试求$E(Y \mid X=x)$.

解 $$f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x\in R;$$

在“$X=x$”的条件下, 有条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}e^{-y+|x|}, & y>|x|;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy$$

$$=\int_{|x|}^{\infty} y e^{-y+|x|} dy = 1+|x|$$

同ex.1
也是实
值函数.

注 一般有

$$E(Y|X=x)=\mu(x), \quad E(X|Y=y)=\delta(y).$$

X关于Y的
回归函数

定理0.2.3 设函数$g(x)$在R上连续,若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dF_{X|Y}(x|y) < +\infty$$

则随机变量$g(X)$在“$Y=y$”条件下的条件数期望为

$$E[g(X)|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_{X|Y}(x|y)$$

定义0.2.3 称

$$D(X|Y=y) = E[X - E(X|Y=y)]^2$$

为“$Y=y$”的条件下, 随机变量X的**条件方差**.

注 为随机变量X相对于条件数学期望

$$E(X|Y=y)$$

的偏离程度的衡量指标.

2.条件数学期望性质

一般 $E(Y|X=x)=\mu(x),\quad E(X|Y=y)=\delta(y).$

是实值函数,可以证明随机变量的函数

$$\mu(X)=E(Y|X),\quad \delta(Y)=E(X|Y)$$

仍是随机变量.

定理0.2.4 设X,Y,Z是(Ω,F,P)上的随机变量，$g(\cdot)$和$h(\cdot)$为R上连续函数，且各数学期望存在，有

1）$E(c|Y)=c$，c 是常数；

证：1）对$\forall y$，$E(c|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} c\,dF_{X|Y}(x|y)=c$，

$\therefore E(c|Y)=c.$

2）$E[aX+bY|Z]=aE(X|Z)+bE(Y|Z)$，$a$，$b$是常数.

自证.

3) 如果X与Y相互独立, 则 $E(X|Y)=E(X)$.

证 X与Y独立, $\Rightarrow F_{X|Y}(x|y)=F_X(x), \quad \forall y\in R.$

对$\forall y\in R, \quad E(X|y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{X|Y}(x|y)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x)=E(X),$$

$\Rightarrow E(X|Y)=E(X).$

4) $E[g(X)h(Y)|X]=g(X)E[h(Y)|X];$

$E[g(X)h(Y)|Y]=h(Y)E[g(X)|Y].$ 自证.

5)* $E\{E[g(X,Y)|Y]\}=E[g(X,Y)];$

证 记 $E[\mathrm{g}(X,Y)|Y]=S(Y)$

则 $S(y)=E[\mathrm{g}(X,Y)|Y=y]=E[\mathrm{g}(X,y)|y]$

且 $E\{E[\mathrm{g}(X,Y)|Y]\}=E[S(Y)]$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}S(y)\mathrm{d}F_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}E[g(X,y)|y]\mathrm{d}F_Y(y)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)dF_{X|Y}(x|y)]dF_Y(y)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)[dF_{X|Y}(x|y)dF_Y(y)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)dF(x,y)=E[g(X,Y)].$$

6) $E[X-E(X|Y)]^2 \le E[X-g(Y)]^2.$

3. 全数学期望公式

1) $E(X)=E[E(X|Y)].$

2) $E[g(X)]=E\{E[g(X)|Y]\}.$

性质5)之特例

特别有全概率公式

对随机事件A，定义示性函数

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{若}A\text{发生}; \\ 0, & \text{若}A\text{不发生}. \end{cases}$$

两点分布随机变量

$$\because \quad E[I_A|Y=y]=P(A|Y=y)$$

$$\therefore \quad P(A)=E(I_A)=E\{E[I_A|Y]\}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} E[I_A|Y=y]dF_Y(y)$$

$$=\begin{cases} \sum_y P(A|Y=y)P(Y=y), & Y\text{是离散型} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(A|Y=y)f_Y(y)dy, & Y\text{是连续型} \end{cases}$$

Ex.3 常用全数学期望公式 若

$$P\{Y = y_k\} = p_k, (k = 1,2,\cdots), \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1,$$

记 $A_k = \{Y = y_k\}, \quad E(X|A_k) = E(X|Y = y_k),$

则有 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} E(X|A_k)P(A_k).$

Ex.4 设某段时间内到达商场的顾客人数N服从参数为λ的泊松分布.每位顾客在该商场的消费额X服从$[a, b]$上的均匀分布. 各位顾客之间消费是相互独立的且与N独立.求顾客在该商场平均总的消费额.

解 设第i个顾客消费额为X_i，全体顾客在该商场总消费额为

$$S=\sum_{i=1}^{N}X_i$$

根据全数学期望公式得

$$E(S)=E[E(S|N)]=E[E(\sum_{i=1}^{N}X_i|N)]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E[\sum_{i=1}^{n}X_i|N=n]P\{N=n\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{i=1}^{n}E(X_i)P\{N=n\}]$$

X_i与N相互独立

$$= E(X)\sum_{n=0}^{\infty} nP\{N=n\}$$

X_i同分布

$$= E(X)E(N) = \frac{a+b}{2}\lambda.$$

Ex.5 已知随机变量X服从$[0, a]$上的均匀分布,随机变量Y服从$[X, a]$上的均匀分布, 试求

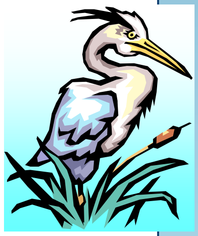
1) $E(Y|X=x)$, $0< x< a$; 2) $E(Y)$.

解 1) 由条件知对$x>0$, 有

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a-x}, & x<y<a;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对任意的$0<x<a$有

$$E(Y|X=x)=\int_x^a \frac{y}{a-x}dy=\frac{a+x}{2},$$



2) $$E(Y)=E[E(Y|X)]=E\left(\frac{a+X}{2}\right)=\frac{a+\frac{a}{2}}{2}=\frac{3}{4}a.$$