§3.4 随机过程的均方导数

## 一、均方导数概念

**定义3.4.1** $\{X(t), t\in T\}$是二阶矩过程, 对于确定的 $t\in T$，若存在 $Y\in H$, 使得

$$\underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m}}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}=Y$$

称$X(t)$在$t$ 处**均方可微(可导)**，称$Y$为$X(t)$ 在$t$处的**均方导数**, 记为

$$\frac{dX(t)}{dt} \quad \text{或} \quad X'(t).$$

若对$t \in T$, $X(t)$都均方可微, 称 $\{X(t), t \in T\}$ 为**均方可微过程.**

可证明均方导数过程

$$\{X'(t), t \in T\}$$

仍是二阶矩过程，可定义其均方导数过程

$$\{X''(t), t \in T\},$$

余类推.

**EX.1** 试求随机过程

$$X(t)=At+B$$

的均方导数, 其中$A$、$B$是相互独立的随机变量.

**解** $$X'(t)=\underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m}}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$$

$$=\underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m}}\frac{A(t+\Delta t)+B-(At+B)}{\Delta t}=\underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m}}\,A=A$$

而

$$E\left|\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-A\right|^2=E|A-A|^2=0$$

在一般情况下, 直接判断随机过程的可微性并求出导数过程是极其困难的.

为将随机过程的均方导数研究问题转移到实数域进行讨论分析,引进广义二阶导数概念:

**定义3.4.2** 称二元函数 $f(s,t)$ 在$(s, t)$处广义二阶可微, 若极限

$$\lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{f(s+\Delta s,t+\Delta t)-f(s+\Delta s,t)-f(s,t+\Delta t)+f(s,t)}{\Delta t\Delta s}$$

存在, 称此极限为$f(s, t)$在$(s, t)$处的广义二阶导数.

注 广义二阶导数是二重极限,而二阶混合偏导是二次极限, 一般情况下二者不相等.

**引理3.4.1**若二元函数$f(s,t)$关于$s, t$的一阶偏导存在, 二阶混合偏导存在并连续,则$f(s,t)$一定是广义二阶可微的. 且广义二阶导数为

$$f_{st}''(s,t)=f_{ts}''(s,t)$$

## 二、均方可微准则

**定理3.4.1** (均方可微准则)

二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$在$t_0\in T$处均方可微的充要条件是其相关函数$R(s,t)$在$(t_0,t_0)$处广义二阶可微.

**证** 由均方收敛定义及收敛准则可知,

$\{X(t),t\in T\}$在$t_0$处均方可微

$$\Longleftrightarrow \quad \underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{X(t_0+\Delta t)-X(t_0)}{\Delta t}\text{存在}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}} E\left\{\frac{X(t_0+\Delta t)-X(t_0)}{\Delta t}\,\overline{\frac{X(t_0+\Delta s)-X(t_0)}{\Delta s}}\right\}\text{存在}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}} \frac{1}{\Delta t\Delta s}[R(t_0+\Delta t,t_0+\Delta s)-R(t_0+\Delta t,t_0)$$

$$-R(t_0,t_0+\Delta s)+R(t_0,t_0)]\quad\text{存在,}$$

即，$R(s, t)$在$(t_0, t_0)$处广义二阶可微.

**推论3.4.1** 二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$的相关函数$R(s,t)$在$T\times T$的对角线上广义二阶可微，则$R'_s(s,t), R'_t(s,t), R''_{st}(s,t), R''_{ts}(s,t)$在$T\times T$上均存在。而且

(1) 导数过程$\{X'(t),t\in T\}$的均值函数为

$$m_{X'}(t)=E[X'(t)]=\frac{d}{dt}E[X(t)]=m'_X(t)$$

(2) 导数过程$\{X'(t),t\in T\}$的自相关函数为

$$R_{X'}(s,t)=E[X'(\mathrm{s})\overline{X'(t)}]=R''_{st}(s,t)=R''_{ts}(s,t)$$

(3) 导数过程$\{X'(t), t\in T\}$与$\{X(t), t\in T\}$的互相关函数为

$$R_{X'X}(s,t)=E[X'(s)\overline{X(t)}]=R'_s(s,t)$$

$$R_{XX'}(s,t)=E[X(s)\overline{X'(t)}]=R'_t(s,t)$$

证

(1) $$m_{X'}(t)=E[X'(t)]=E\left[\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}E\left[\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[ \frac{m_X(t+\Delta t) - m_X(t)}{\Delta t} \right] = m'_x(t)$$

(3) $$R_{X'X}(s,t) = E[X'(s)\overline{X(t)}]$$

$$= E\left[\operatorname*{l\cdot i\cdot m}_{\Delta s \to 0} \frac{X(s+\Delta s) - X(s)}{\Delta s} \cdot \overline{X(t)}\right]$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{E[X(s+\Delta s)\overline{X(t)} - X(s)\overline{X(t)}]}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{R(s+\Delta s,t) - R(s,t)]}{\Delta s} = R'_s(s,t)$$

(2) $R_{X'}(s,t) = E[X'(s)\overline{X'(t)}]$

$$= E[\operatorname*{l.i.m}_{\Delta s\to 0} \frac{X(s+\Delta s)-X(s)}{\Delta s}\cdot \overline{X'(t)}]$$

$$= \lim_{\Delta s\to 0} \frac{E[X(s+\Delta s)\overline{X'(t)} - X(s)\overline{X'(t)}]}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s\to 0} \frac{R'_t(s+\Delta s,t) - R'_t(s,t)}{\Delta s} = R''_{ts}(s,t)$$

由(3)可得

**EX.2** 设随机变量$\xi$满足$E(\xi)=0$，$D(\xi)=\sigma^2$，

令 $$X(t)=\xi t,\quad t\in T$$

证明 $\{X(t),t\in T\}$ 是均方可微过程.

证 $\{X(t), t\in R\}$是二阶矩过程,

$E[X(t)]=0$，$D[X(t)]=t^2\sigma^2$,

$$R_X(s,t)=E[X(s)\overline{X(t)}]$$

$$=E[\xi s\overline{\xi t}]=stE(\xi\overline{\xi})=st\sigma^2$$

其广义二阶导数为

$$\lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{1}{\Delta s\Delta t}[R_X(s+\Delta s,t+\Delta t)-R_X(s+\Delta s,t)$$

$$-R_X(s,t+\Delta t)+R_X(s,t)]$$

$$=\lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{\sigma^2}{\Delta s\Delta t}[(s+\Delta s)(t+\Delta t)-(s+\Delta s)t-s(t+\Delta t)+st]$$

$$=\sigma^2<\infty$$

故$\{X(t),t\in T\}$是一个均方可微过程.

**EX.3** 设$\{W(t), t\geq 0\}$是参数为$\sigma^2$的维纳过程，讨论随机过程 $X(t)=W^2(t), t\geq 0$是否均方可微?

**解** 自相关函数为

$$R(s,t)=\sigma^4(st+2\min^2(s,t))$$

$$R'_{s+}(t,t)=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{R(t+\Delta t,t)-R(t,t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{\sigma^4[(t+\Delta t)t+2t^2-3t^2]}{\Delta t}=\sigma^4 t,$$

$$R'_{s-}(t,t)=\lim_{\Delta t\to 0-}\frac{R(t+\Delta t,t)-R(t,t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0-}\frac{\sigma^5[(t+\Delta t)t+2(t+\Delta t)^2-3t^2]}{\Delta t}=5\sigma^4 t,$$

$R'_{S+}(t,t)\neq R'_{S-}(t,t)$，所以$R'_S(t,t)$不存在，

$R(s,t)$不是广义二阶可导的，

$X(t)=W^2(t)$，$t\geq 0$不是均方可微的.

三、均方导数基本性质

**性质3.4.1** 均方可导必均方连续. $\{X(t), t\in T\}$ 在 $t$ 处均方可微,则 $X(t)$ 在 $t$ 处均方连续.

证 $X'(t)\in H$,故

$$\lim_{\Delta t\to 0} E[|X(t+\Delta t)-X(t)|^2]$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\mathrm{E}\left[\left|\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right|^2\right]\cdot(\Delta t)^2=E[|X'(t)|^2]\cdot 0=0$$

注 性质的逆不真.

**EX.4** 参数为$\sigma^2$的Wiener过程$\{W(t), t\geq 0\}$是均方连续的，但不是均方可微的.

**解** 已证均方连续性，

因 $R_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$,

$$R_W(t+\Delta t,t)-R_W(t,t)=\sigma^2[\min(t+\Delta t,t)-t]$$

$$=\begin{cases}0, & \Delta t>0;\\ \Delta t, & \Delta t<0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad R'_{s+}(t,t)=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{0}{\Delta t}=0,$$

$$R'_{s-}(t,t)=\lim_{\Delta t\to 0^-}\frac{\Delta t}{\Delta t}=1.$$

$R'_s(t,t)$不存在，因此$\{W(t),\ t\geq 0\}$不是均方可微的.

注 可通过引进Dirac-δ函数,定义Wiener过程的导数过程(参见P93).

**性质3.4.2** 均方导数在概率为1 的意义下惟一.

若 $X'(t)=Y_1(t),\ X'(t)=Y_2(t),$

则 $Y_1(t)=Y_2(t)\quad (a.e)$

证 由均方极限的惟一性可得.

**性质3.4.3** 均方导数具有线性性

$X(t),Y(t)$均方可微, 则$\{aX(t)+bY(t),t\in T\}$ , $a$, $b\in C$, 也均方可微, 且

$$[aX(t)+bY(T)]'=aX'(t)+bY'(t)$$

请自证

**性质3.4.4** 设$f(t)$是定义在$T$上的普通可微函数，$\{X(t),t\in T\}$是均方可微过程，则$\{f(t)X(t),t\in T\}$也是可微过程，有

$$[f(t)X(t)]' = f'(t)X(t) + f(t)X'(t)$$

**性质3.4.5** 设$\{X(t),t\in T\}$是均方可微过程，且$X'(t)=0$，则$X(t)$是一个常随机变量（即与指标$t$无关的随机变量）.

## 等价于

具有相等均方导数的两个随机过程，它们最多仅相差一个随机变量，即

$$[X(t)+X]' = X'(t)$$