学号________ 姓名________ 学院________ 教师________

密……封……线……以……内……答……题……无……效

电子科技大学研究生试卷

（考试时间：_______至______，共　　小时）

课程名称 应用随机过程　学时 60　学分 3　教学方式 讲授

考核日期 2009 年 元 月 5 日　成绩______________________________

考核方式：__________（学生填写）

一、（12 分）已知随机过程 $\{X(t), t\in[-2,2]\}$, $X(t)=U+t$, U 为随机变量，服从 $(0,\pi)$

上　的均匀分布。试求：

（1）任意两个样本函数，并绘出草图；

（2）随机过程 $X(t)$ 的特征函数；

（3）随机过程 $X(t)$ 的均值函数，自协方差函数。

解　（1）

（2）$\varphi(t;u)=E[e^{juX(t)}]=E[e^{ju(U+t)}]=e^{jut}E[e^{juU}]$

$$= e^{jut}\frac{e^{j\pi u}-1}{j\pi u}$$

（3）$E(X(t))=E(U+t)=E(U)+t=t+\frac{\pi}{2}$；

$$\begin{aligned} C(s,t)&=E[X(s)X(t)]-E[X(s)]E[X(t)]\\ &=E[(U+s)(U+t)]-E[U+s]E[U+t]\\ &=E(U^2)-[E(U)]^2=D(U)=\frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

二、（12 分）设随机过程 $\{X(t,\omega), -\infty<t<+\infty\}$ 只有两条样本函数

$$X(t,\omega_1)=2\cos t,\quad X(t,\omega_2)=-2\cos t,\quad -\infty<t<+\infty$$

且 $P(\omega_1)=0.8$，$P(\omega_2)=0.2$，分别求：

（1）一维分布函数 $F(0;x)$ 和 $F(\frac{\pi}{4};x)$；

（2）二维分布函数 $F(0,\frac{\pi}{4};x,y)$。

解　1) 对任意实数 $t\in R$,有

$X(t)$	$-2\cos t$	$2\cos t$
p	0.2	0.8

特别有

$X(0)$	-2	2
p	0.2	0.8

，

$X(\frac{\pi}{4})$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
p	0.2	0.8

故 $F(0;x)=P\{X(0)<x\}=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ 0.2 & -2<x\le 2;\\ 1, & 2<x.\end{cases}$

$$F(\frac{\pi}{4};x)=P\{X(\frac{\pi}{4})<x\}=\begin{cases}0, & x\le -\sqrt{2};\\ 0.2, & -\sqrt{2}<x\le\sqrt{2};\\ 1, & \sqrt{2}<x.\end{cases}$$

2）

$(X(0),X(\frac{\pi}{4}))$	$(-2,-\sqrt{2})$	$(2,\sqrt{2})$
p	0.2	0.8

$$F(0,\frac{\pi}{4};x,y)=P\{X(0)<x,X(\frac{\pi}{4})<y\}$$

$$=\begin{cases}\mathbf{0}, & \boldsymbol{x\le -2}\text{或}\boldsymbol{y\le\sqrt{2}};\\ \mathbf{0.2}, & \boldsymbol{-2<x\le 2, y>-\sqrt{2}}\text{或者}\boldsymbol{-\sqrt{2}<y\le\sqrt{2}, x>-2};\\ \mathbf{1}, & \boldsymbol{x>2, y>\sqrt{2}}.\end{cases}$$

三、（12 分）设随机过程 $Y(t)=X\cos(\omega t+\Theta)$，其中 ω 为常数，随机变量 X 服从瑞利分布：

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\quad(\sigma>0)$$

$\Theta\sim U(0,2\pi)$，且 X 与 Θ 相互独立，试求随机过程 $Y(t)$ 的均值函数与自协方差函数。

解 $E[Y(t)]=E(X)E[\cos(\omega t+\Theta)]=\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+y)dy=0$

$$\begin{aligned}C(s,t)&=E[X(s)X(t)]-E[X(s)]E[X(t)]=E[X(s)X(t)]\\&=E(X^2)E[\cos(\omega s+\Theta)\cos(\omega t+\Theta)]\\&=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^{+\infty}x^3e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega s+y)\cos(\omega t+y)dy\\&=4\sigma^2\int_0^{+\infty}ue^{-u}du\times\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\cos\beta(t-s)+\cos(\beta(t+s)+2\theta)d\theta\\&=4\sigma^2\times\frac{1}{2}\cos\beta(t-s)=2\sigma^2\cos\beta(t-s).\end{aligned}$$

四、（12 分）设在[0, t)时段内乘客到达某售票处的数目为一强度是 $\lambda=2.5$（人/分）的泊松过程，试求：

（1）在 5 分钟内有 10 位乘客到达售票处的概率；

（2）第 10 位乘客在 5 分钟内到达售票处的概率；

（3）相邻两乘客到达售票处的平均时间间隔。

解 记泊松过程为 $\{N(t),t\ge 0\}$

（1） $p_1=P\{N(5)=10\}=\dfrac{(5\times 2.5)^{10}}{10!}e^{-5\times 2.5}=\dfrac{(12.5)^{10}}{10!}e^{-12.5}$

（2）设 W_{10} 为第 10 位顾客出现的到达时间

$$p_2 = P\{W_{10} \le 5\} = P\{N(5) \ge 10\} = \sum_{k=10}^{\infty} \frac{(12.5)^k}{k!} e^{-12.5}, t \ge 0$$

（3）设 T 是两位顾客到达间隔时间，因参数为 λ 的泊松过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 的间隔时间序列相互独立同服从参数为 λ 的指数分布，故两位顾客到达的平均间隔时间 $E\{T\}=1/\lambda$.

五、（12 分）设 $X(t)$ 是一宽平稳随机过程，其自相关函数为

$$R_X(t_1, t_2) = e^{-(\frac{t_1 - t_2}{2})^2}$$

若 $Y(t) = 2X(t) + \frac{d}{dt}X(t)$，试求 $Y(t_1)$ 与 $Y(t_2)$ 的自相关函数。

解 记 $\boldsymbol{R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau) = e^{-(\frac{\tau}{2})^2}}$

因 $\boldsymbol{R_X''(\tau) = [e^{-(\frac{\tau}{2})^2}]'' = [-\frac{\tau}{2} e^{-(\frac{\tau}{2})^2}]' = (\frac{\tau^2}{4} - \frac{1}{2}) e^{-(\frac{\tau}{2})^2}}$，即 $R_X(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处二次可微，其均方导数过程 $X'(t)$ 为平稳过程, 有

$$\begin{aligned}
R_Y(t_1, t_2) &= E\{[2X(t_1) + X'(t_1)][2X(t_2) + X'(t_2)]\} \\
&= E[4X(t_1)X(t_2)] + 2E[X'(t_1)X(t_2)] + 2E[X(t_1)X'(t_2)] + E[X'(t_1)X'(t_2)]\} \\
&= 4R_X(\tau) + 2[R_{X'X}(\tau)] + 2[R_{XX'}(\tau)] + R_{X'X'}(\tau) \\
&= \boldsymbol{4R_X(\tau) + 2[R'(\tau)] - 2[R'(\tau)] - R''(\tau)} = 4R_X(\tau) - R''(\tau) \\
&= \boldsymbol{[4 - \frac{\tau^2}{4} + \frac{1}{2}] e^{-(\frac{\tau}{2})^2} = [\frac{9}{2} - \frac{\tau^2}{4}] e^{-(\frac{\tau}{2})^2}}
\end{aligned}$$

六、（12 分）设 $X(1), X(2), \ldots$ 是一个独立同分布的随机变量序列，其分布律为

$X(n)$	-1	1
p_i	0.3	0.7

$n \ge 1$　　令 $Y(n) = \sum_{k=1}^{n} X(k) \quad (n \ge 1)$

试求下列概率：

（1） $P\{X(1) \ge 0,\ Y(2) \ge 0,\ Y(3) \ge 0,\ Y(4) \ge 0\}$

（2） $P\{Y(1) \ne 0,\ Y(2) \ne 0,\ Y(3) \ne 0,\ Y(4) \ne 0\}$

解 因 $X(1), X(2), \ldots$ 是独立同分布的随机变量序列, 所以和过程 $Y(n), (n \ge 1)$ 是平稳独立增量过程，从而是齐次马氏链。

又因 $Y(n) = Y(n-1) + X(n)$, 且 $Y(n-1)$ 和 $X(n)$ 相互独立，故对 n=1，2，3，…

$$\begin{aligned}
p_{ij} &= P\{Y(n) = j | Y(n-1) = i\} = P\{Y(n-1) + X(n) = j | Y(n-1) = i\} \\
&= P\{Y(n-1) + X(n) = j | Y(n-1) = i\} = P\{X(n) = j - i | Y(n-1) = i\} \\
&= P\{X(n) = j - i\} = \begin{cases} 0.3, & j = i - 1; \\ 0.7, & j = i + 1; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned}$$

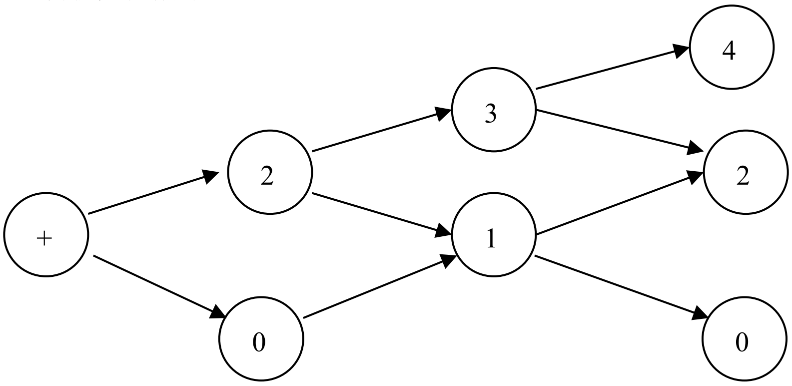
$\boldsymbol{P\{X(1) \ge 0,\ Y(2) \ge 0,\ Y(3) \ge 0,\ Y(4) \ge 0\}} =$

$\boldsymbol{P\{Y(1) \ge 0,\ Y(2) \ge 0,\ Y(3) \ge 0,\ Y(4) \ge 0\}} =$

$$\boldsymbol{P\{Y(1) = 1,\ \bigcup_{i_2=0,2} Y(2) = i_2, \bigcup_{i_3=1,3} Y(3) = i_3, \bigcup_{i_4=0,2,4} Y(4) = i_4\}} =$$

$$\boldsymbol{\sum_{i_2=0,2} \sum_{i_3=1,3} \sum_{i_4=0,2,4} P\{Y(1) = 1,\ Y(2) = i_2, Y(3) = i_3, Y(4) = i_4\}}$$

状态转移如图所示:



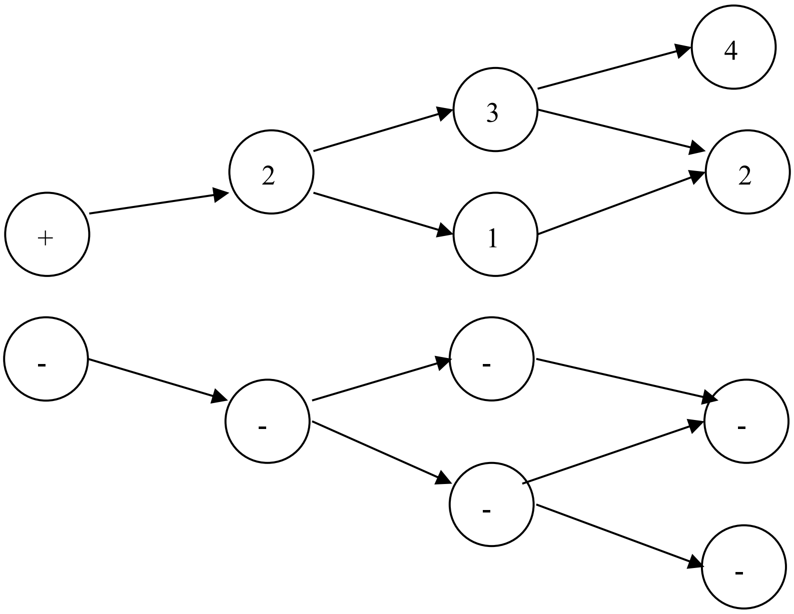
所以

$$P\{X(1)\geq 0,\ Y(2)\geq 0,\ Y(3)\geq 0,\ Y(4)\geq 0\}=$$

$$\sum_{i_2=0,2}\sum_{i_3=1,3}\sum_{i_4=0,2,4}P\{Y(1)=1\}p_{1i_2}p_{i_2i_3}p_{i_3i_4}=0.7^2\times 1.3=0.637$$

$$P\{Y(1)\neq 0,\ \ Y(2)\neq 0,\ \ Y(3)\neq 0,\ \ Y(4)\neq 0\}$$
$$=P\{Y(1)\neq 0\}P\{Y(2)\neq 0\,|\,Y(1)\neq 0\}P\{Y(3)\neq 0\,|\,Y(1)\neq 0,\ \ Y(2)\neq 0\}$$
$$P\{Y(4)\neq 0\,|\,Y(1)\neq 0,\ \ Y(2)\neq 0,\ \ Y(3)\neq 0\}$$
$$=P\{Y(1)\neq 0\}P\{Y(2)\neq 0\,|\,Y(1)\neq 0\}P\{Y(3)\neq 0\,|\,Y(2)\neq 0\}P\{Y(4)\neq 0\,|\,Y(3)\neq 0\}$$

状态之间的转移如图所示:



所以

$$P\{Y(1)\neq 0,\ \ Y(2)\neq 0,\ \ Y(3)\neq 0,\ \ Y(4)\neq 0\}$$
$$=0.7^3+0.7^3\times 0.3+0.3^3+0.3^3\times 0.7$$
$$=0.4918$$

七、（16 分）已知齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$的状态空间为$E=\{1,2,3\}$，状态转移矩阵为

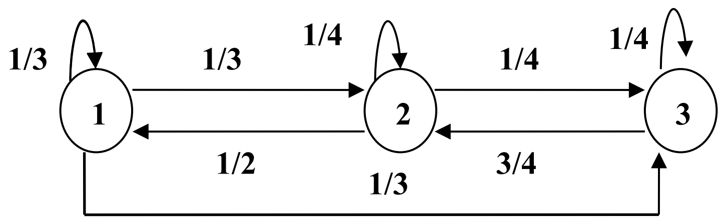
$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

（1）画出概率转移图；

（2）求二步转移矩阵及转移概率 $p_{13}^{(4)}$；

（3）此链是否为遍历的，试求其平稳分布。

解 （1）



（2）$P^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{15}{54} & \frac{24}{54} & \frac{15}{54}\\ \frac{7}{24} & \frac{10}{24} & \frac{7}{24}\\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{2}{8}\end{bmatrix}$

因 $\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$ 齐次马氏链，有 $P^{(4)}=P^4=P^2P^2$，故

$p_{13}^{(4)}=p_{11}^{(2)}p_{13}^{(2)}+p_{12}^{(2)}p_{23}^{(2)}+p_{13}^{(2)}p_{33}^{(2)}=\frac{15}{54}\times\frac{15}{54}+\frac{24}{54}\times\frac{7}{24}+\frac{15}{54}\times\frac{2}{8}$=**0.4568**

（3）因对任意 i，$j\in E$，有 $p_{ij}^{(2)}>0$，P 是正则阵，根据遍历性定理此马氏链是遍历的，且正则(遍历)马氏链的极限分布是平稳分布，需求 P 的不动点概率向量 $\Pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$，即满足 $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$ 和

$$\Pi P=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\left[\sum_{i=1}^{3}\pi_i p_{i1}\quad \sum_{i=1}^{3}\pi_i p_{i2}\quad \sum_{i=1}^{3}\pi_i p_{i3}\right]$$

$$=\left[\frac{\pi_1}{3}+\frac{\pi_2}{2}\quad \frac{\pi_1}{3}+\frac{\pi_2}{4}+\frac{3\pi_3}{4}\quad \frac{\pi_1}{3}+\frac{\pi_2}{4}+\frac{\pi_3}{4}\right]=\left[\pi_1\quad \pi_2\quad \pi_3\right]$$

解得 平稳分布为$\left[\boldsymbol{\pi_1}\quad \boldsymbol{\pi_2}\quad \boldsymbol{\pi_3}\right]=\left[\boldsymbol{\frac{9}{29}}\quad \boldsymbol{\frac{12}{29}}\quad \boldsymbol{\frac{8}{29}}\right]$

八、（12 分）设 $\{W(t),t\geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，a 为一正常数，令

$$X(t)=W(t+a)-W(t)\qquad t\geq 0$$

试证明 $\{X(t),t\geq 0\}$ 是严平稳的正态过程。

证明 维纳过程是平稳独立增量，且有 $\boldsymbol{X(t)=W(t+a)-W(t)\sim N(0,a\,\sigma^2)}$，故

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[W(t+a)-W(t)]=0,$$

$$\begin{aligned}R_X(t,t+\tau)&=E[X(t)X(t+\tau)]\\&=R_W(t+a,t+a+\tau)-R_W(t+a,t+\tau)-R_W(t,t+a+\tau)+R_W(t,t+\tau)\\&=\sigma^2[\min(t+a,t+a+\tau)-\min(t+a,t+\tau)-\min(t,t+a+\tau)+\min(t,t+\tau)]\\&=\sigma^2\{[t+a+\min(0,\tau)]-[t+\min(a,\tau)]-[t+\min(0,\tau+a)]+[t+\min(0,\tau)]\\&=\sigma^2[a+2\min(0,\tau)-\min(a,\tau)-\min(0,a+\tau)]\\&=\begin{cases}\sigma^2(a-|\tau|), & |\tau|<a;\\0, & |\tau|\ge a\end{cases}\end{aligned}$$

$R_X(t, t+\tau)$与 t 无关, $X(t)$是宽平稳过程得证。

又因$\{W(t),t\ge 0\}$是正态过程, 下面证明$\{X(t),t\ge 0\}$也是正态过程.

对$\forall 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$, n是任意的正整数. 把$t_1,t_2,\cdots,t_n$和$t_1+a,t_2+a,\cdots,t_n+a$重新按从小到从的顺序列如下:

$$0<t'_1\le t'_2\le\cdots\le t'_{2n-1}\le t'_{2n},$$

考虑随机向量

$[W(t'_1),W(t'_2)-W(t'_1),\cdots,W(t'_{2n-1})-W(t'_{2n-2}),W(t'_{2n})-W(t'_{2n-1})]^T$

因为维纳过程$\{W(t),t\ge 0\}$是平稳独立增量的正态过程, 则上述随机向量是由$2n$个相互独立的正态随机变量(可以是退化的)所构成的随机向量. 从而它是$2n$维的正态随机向量(可以是退化的).

对任意的t_i, 一定存在m和k, 使得$t_i=t'_m<t'_{m+k}=t_i+a$

从而有

$$\begin{aligned}X(t_i)&=W(t_i+a)-W(t_i)=W(t'_{m+k})-W(t'_m)\\&=\sum_{s=1}^{k}W(t'_{m+s})-W(t'_{m+(s-1)})\end{aligned}$$

所以$[X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_{n-1}),X(t_n)]^T$表示成了一个$2n$维的正态随机向量的线性变换

从而$[X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_{n-1}),X(t_n)]^T$是$n$维的正态随机向量(可以是退化的).

所以$\{X(t),t\ge 0\}$也是正态过程(可以是退化的).

因为当$\{X(t),t\ge 0\}$是正态过程时, 严平稳与宽平稳是等价的.

所以$\{X(t),t\ge 0\}$是严平稳过程.