

§ 3.5 随机过程的积分 (二)

五、正态过程的积分

定理1 正态随机变量序列 $\{X_n\}$ 的均方极限仍为正态分布随机变量。

定理2 设 $(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_k^{(n)})^T$ 为 k 维正态随机向量，且均方收敛于随机向量 $(X_1, X_2, \dots, X_k)^T$ 即对 $1 \leq i \leq k$ 均有



$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_i^{(n)} - X_i]^2 = 0$$

则 $(X_1, X_2, \dots, X_k)^T$ 也为k维正态随机向量。

定理3 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是正态过程，且在T上均方可导，则其导过程也是正态过程。

定理4 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是均方连续的正态过程，
令

$$Y(t) = \int_a^t X(s) ds, a, t \in T$$

则 $\{Y(t), t \in T\}$ 也是正态过程。



六、Ito积分

引例3.5.5 试求 $I = \int_a^b W(s) dW(s)$, 其中为标准维纳过程.

分析 借助于R-均方积分定义, 取 $[a,b]$ 上一组分点 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, 令 $\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$ 若均分积分 I 存在, 则应有对 $\forall u_i \in [t_{i-1}, t_i]$, 有



$$I' = \sum_{i=1}^n W(u_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})]$$

均方收敛于数 I . 现构造两个特别的和式

$$I_n = \sum_{i=1}^n W(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})]$$

$$J_n = \sum_{i=1}^n W(t_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})]$$

显然 $I_n + J_n = W^2(b) - W^2(a)$ 有与 $I_n - J_n = \sum_{k=1}^n [W(t_k) - W(t_{k-1})]^2$

均成立.



由维纳过程性质有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(J_n - I_n) = b - a \neq 0$$

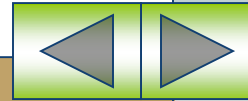
这说明两个和式和有着不同的均方极限值, 故和式的均方极限不存在.



定义3.5.3 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为二阶矩过程, $\{W(t), t \geq 0\}$ 为维纳过程, 在区间上任取一组分点, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, 令 $\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$, 记

$$I_n = \sum_{i=1}^n X(t_{k-1})[W(t_k) - W(t_{k-1})]$$

若 $\Delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, I_n 均方收敛, 则称该极限为 $X(t)$ 关于维纳过程的Ito积分, 记为 $\int_a^b X(t) dW(t)$.



定理3.5.10 设下列Ito积分存在

$$\int_a^b X(t)dW(t), \quad \int_a^b Y(t)dW(t), \quad \int_a^b g(t)dW(t)$$

则对任意常数 α, β 有

(1) $\int_a^b [\alpha X(t) + \beta Y(t)]dW(t) = \alpha \int_a^b X(t)dW(t) + \beta \int_a^b Y(t)dW(t)$

(2) 若 $a \leq c \leq b$, 则

$$\int_a^b X(t)dW(t) = \int_a^c X(t)dW(t) + \int_c^b X(t)dW(t)$$

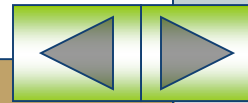
(3) $E[\int_a^b g(t)dW(t)] = 0$

(4) $E[|\int_a^b g(t)dW(t)|^2] = \int_a^b |g(t)|^2 dt$



七、Ito公式

在普通微积分学中, 复合函数求导的链规则是个很重要的公式. 同样在随机分析中也存在着对应的规则—Ito公式.



定理3.5.6 设 $X(t)$ 满足方程

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$$

则

$$dV(t, x(t)) = LV(t, x(t))dt + V_x(t, x(t))g(t, x(t))dW(t)$$

其中

$$LV(t, x(t)) = V_t(t, x(t)) + V_x(t, x(t))f(t, x(t)) + \frac{1}{2}g^2(t, x(t))V_{xx}(t, x(t))$$





若引入乘法表

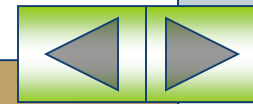
$$(dt)^2 = 0, \quad dt dW(t) = 0, \quad [dW(t)]^2 = dt$$

则上定理中结论为

$$dV(t, x(t)) = V_t dt + V_x dx(t) + \frac{1}{2} V_{xx} [dx(t)]^2$$

注：相对微积分中链规则，Ito公式多了项

$$\frac{1}{2} V_{xx} [dx(t)]^2$$



例 求 $\int_0^t W(s) dW(s)$

解 令 $V(t, x) = x^2$, $x(t) = W(t)$, 则由 Ito 公式

$$d(W^2(t)) = 2W(t)dW(t) + dt$$

于是

$$W^2(t) = 2\int_0^t W(s)dW(s) + t$$

故

$$\int_0^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2}[W^2(t) - t]$$



