§2.4 泊松过程的推广

2.4.1 更新计数过程

对齐次泊松过程进行推广:

考虑计数过程$\{N(t), t\geq 0\}$的时间间隔序列$T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$相互独立同分布的情形.

同类型设备的更新，如

一个元件；一个灯泡；一个系统...

若各更换对象的寿命具有相同概率密度, 则

相继两次损坏之间的运行时间$T_1, T_2, \ldots$相互独立同分布.

一、更新过程定义

定义2.4.1 设$\{T_n, n\geq 1\}$是相互独立同分布的非负随机变量序列, 令

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} T_i, n \geq 1, W_0 = 0$$

称

$$N(t) = \sup\{n : W_n \leq t\}$$

计数过程$\{N(t), t\geq 0\}$ 为更新(计数)过程.

注 1 更新过程是满足零初值性的平稳独立增量过程.

注 2 事件发生一次称为一次更新,则

T_n: 第$n-1$到第n次更新相距时间(更新间距).

W_n: 第n次更新发生的时刻(更新时刻).

$N(t)$: t 时刻之前发生的总更新次数.

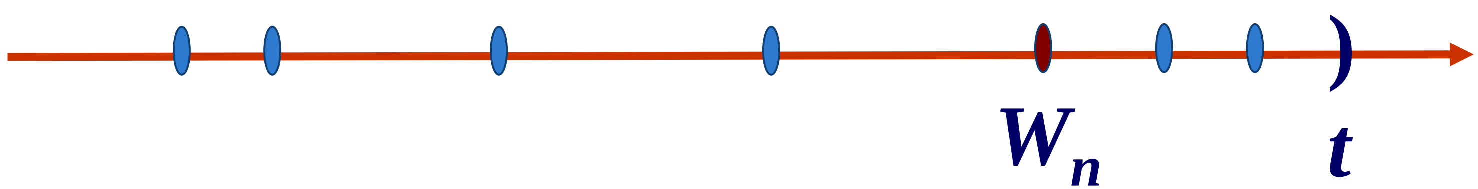
二、更新过程有关分布

结论1 更新过程的更新间距T_n的分布函数为$F(x)$, $F_n(x)$为更新时刻W_n的分布函数，则

1) $F_n(t) = 1 - F_{N(t)}(n-1).$

2) $P\{N(t)=n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t)$

证 1) 因 $\{N(t) \geq n\} = \{W_n \leq t\}$



2) $P\{N(t)=n\} = P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\}$

$$= P\{W_n \le t\} - P\{W_{n+1} \le t\}$$

$$= F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

结论2 更新过程的更新间距的特征函数为 $\varphi_T(u)$，则更新时刻的特征函数为

$$\varphi_{W_k}(u) = [\varphi_T(u)]^k$$

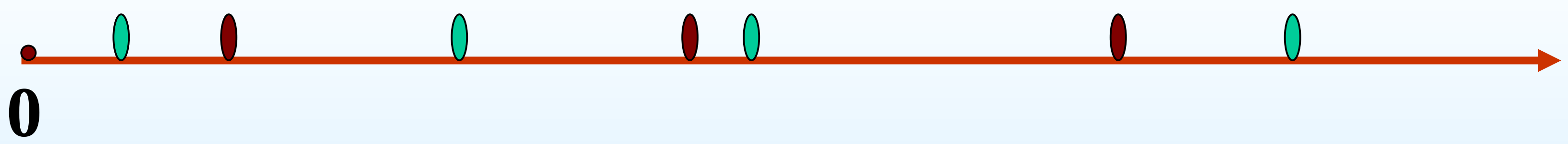
泊松过程是更新过程. 强度为λ的泊松过程$\{N(t), t\geq 0\}$其到达时间间隔序列相互独立同服从参数为λ的指数分布.

反之，若更新计数过程$\{N(t), t\geq 0\}$的更新间距具有指数分布, 则$\{N(t), t\geq 0\}$是泊松过程.

证明：见P61.

定理2.4.1 更新计数过程$\{N(t), t\geq 0\}$是泊松过程的充要条件是更新间距具有指数分布.

Ex.4 设[0, *t*]时间内到达计数器的离子数形成泊松过程, 平均每分钟到达4个. 某计数器对到达的离子每隔一个才记录一次. 讨论记录下的离子个数是否构成泊松过程?



解 设

$$X_1, X_2, \cdots X_n, \cdots$$

是相继到达的离子之间的时间间隔独立同服从参数为λ=4 的指数分布 .

相继被记录的离子之间的时间间隔

$$T_1 = X_1 + X_2, T_2 = X_3 + X_4, \cdots T_n = X_{2n-1} + X_{2n}, \cdots$$

也独立同分布, 因

$$\{T_1 > t\} = \{X_1 + X_2 > t\}$$

$$=\{[0, t]内至多到达一个离子\}$$

$$P\{T_1 > t\} = P\{N(t) \le 1\} = P\{N(t) = 0\} + P\{N(t) = 1\}$$

$$= e^{-4t} + 4te^{-4t}$$

$T_1, T_2, \cdots T_n, \cdots$ 的分布函数均为

$$F_T(t) = P\{T \le t\} = 1 - P\{T > t\}$$

$$= 1 - e^{-4t} - 4te^{-4t}, \quad t > 0,$$

非指数分布

记录下的离子个数不能构成泊松过程.

三、更新函数

更新过程的更新函数为 $M(t)=E[N(t)]$

更新密度(强度) 为 $m(t)=M'(t)$

定理2.4.2 设$\{N(t),t\geq 0\}$是更新过程, 其更新函数为

$$M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$$

更新密度(强度) 为

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)$$

证 $$M(t)=E[N(t)]=\sum_{k=0}^{\infty}kP\{N(t)=k\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}n[F_n(t)-F_{n+1}(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$$

Ex.5 对某电力系统进行定时检查, 每次检查均以概率$p(0<p<1)$需停电检修. 用N_j表示第j次检查时已发生停电检修的次数, 讨论此计数过程是否为更新过程.

分析 在每个检查时刻独立进行贝努里试验，其中 A={停电检修}, $P(A)=p$.

将“停电检修”视为更新事件,第j次检查时已发生停电检修的次数记为N_j. 讨论

$$\{N_j, j=1,2,\ldots\}$$

是否为更新过程.

第j次检查相当于进行 j 重贝努里试验.

更新间距相互独立同服从几何分布

$$P\{T_i=k\}=q^{k-1}p,\ k=1,2,\cdots,(i=1,2,\cdots)$$

2.4.2 复合泊松过程

EX. 6 调查城市人员流动情况, 可在关键路口观察公交车的载客情况，设$[0, t]$内通过的公交车数$N(t)$是一个poisson过程，而每辆车的载客人数为 ξ_n，则经公交车通过此路口的人数为：

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}\xi_n$$

定义2.4.3 设$\{N(t),t\geq 0\}$是齐次poisson过程,$\{Y_n, n\geq 1\}$是相互独立同分布的随机变量序列，并与$N(t)$相互独立,称

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n,\ t\geq 0$$

为复合poisson过程. .

EX.7 设某仪器受到震动而引起损伤，若震动次数$N(t)$按强度为λ的Possion过程发生，第k次震动时引起的损伤为D_k，且$D_1,D_2,\ldots$相互独立同分布，与$\{N(t),t\geq 0\}$相互独立.

又假设仪器受到震动而引起损伤将随时间按指数衰减.

分析

1）设初始损伤为D_k，经时间t后衰减为

$$D_k e^{-\alpha t}，\ t\geq 0 \quad (\alpha>0);$$

2）假设各次震动而引起损伤是可叠加的，则在t时刻的总损伤可表示为

$$D(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-W_k)},\ t\geq 0$$

其中W_k是第k次受震动的时刻. 此过程非复合泊松过程.

定理2.4.3 设$\{X(t),t\geq 0\}$是复合泊松过程

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n,\qquad t\geq 0$$

则满足:

1) 是独立增量过程.

2）Y_1的特征函数为 $\varphi_{Y_1}(u)$,则$X(t)$的一维特征函数

$$\varphi_X(t,u)=e^{jt[\varphi_{Y_1}(u)-1]},\qquad t\geq 0.$$

3）均值函数和方差函数分别为

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[N(t)]E(Y_1)=\lambda t E(Y_1).$$

$$D_X(t)=D(N)E(Y_1^2)=\lambda t E(Y_1^2).$$

证 2) 由全期望公式

$$\varphi_X(u;t) = E[e^{juX(t)}] = E\{E[e^{juX(t)} | N(t)]\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} E[e^{juX(t)} | N(t) = k] P\{N(t) = k\}$$

因 $E[e^{juX(t)} | N(t) = k] = E[e^{ju\sum_{n=1}^{k} Y_n}]$

$$= \prod_{n=1}^{k} E(e^{juY_1}) = [\varphi_{Y_1}(u)]^k$$

故 $\varphi_X(u;t) = \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi_{Y_1}(u)]^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

$$= e^{\lambda t[\varphi_{Y_1}(u) - 1]}$$

EX.8 保险公司赔偿金储备问题

设寿命投保人的死亡数$N(t)$是强度为λ的泊松过程, Y_n表示第n 个死亡者的赔偿金额, Y_n, $n=1,2,\ldots$相互独立同分布, 概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad (\alpha>0)$$

$Y(t)$是保险公司在$[0, t]$时间段内的总赔付金额, 试求平均赔付金额和$D[Y(t)]$.

解

$$Y(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n,\qquad t\geq 0$$

是复合泊松过程, 有

$$E[Y(t)]=E[N(t)]E(Y_1)=\lambda t E(Y_1).$$

$$E(Y_1)=\int_0^{+\infty} x f(x)dx=\frac{1}{\alpha}$$

保险公司在[0, t)时间内平均支付的赔偿金为

$$E[Y(t)]=\lambda t E(Y_1)=\lambda t\frac{1}{\alpha}.$$

$$D[Y(t)]=\lambda t E(Y_1^2)=\lambda t\frac{1}{\alpha^2}=\frac{2\lambda t}{\alpha^2}.$$

续EX.7　考虑总损伤的平均程度,需求$E[D(t)]$.

解　由全期望公式

$$E[D(t)] = E[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-W_k)}]$$

$$= E\{E[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-W_k)} | N(t)]\}$$

对任意正整数n, 有

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-W_k)} \big| N(t)=n]$$

$$= E[\sum_{k=1}^{n} D_k e^{-\alpha(t-W_k)} \big| N(t)=n]$$

$$= E(D_k)e^{-\alpha t} E[\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha W_k} \big| N(t)=n]$$

D_k 与 $N(t)$ 相互独立 D_k 与 W_k 相互独立.

根据定理2.3.5可得

$$E[\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha W_k} \big| N(t)=n]$$

$$E[\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha W_k} \mid N(t)=n]$$

$$= E[\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha U_{(k)}}] = E[\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha U_k}] = nE(e^{\alpha U_1})$$

$$= n\frac{1}{t}\int_0^t e^{\alpha x}dx = \frac{n}{\alpha t}(e^{\alpha t}-1)$$

$$\Rightarrow \quad E[D(t) \mid N(t)] = \frac{N(t)}{\alpha t}(1-e^{-\alpha t})E(D_1)$$

$$\Rightarrow \quad E[D(t)] = \frac{\lambda}{\alpha}E(D_1)(1-e^{-\alpha t}),\ t \geq 0.$$

2.4.3泊松过程的叠加与分解

1.泊松过程的叠加

定理2.4.4 设$\{N_1(t), t\geq 0\}$和$\{N_2(t), t\geq 0\}$是相互独立的强度分别为λ_1和λ_2的泊松过程, 则$\{N(t)=N_1(t)+N_2(t), t>0\}$是强度为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程.

证明参见P56，需证零初值性、独立增量性、增量平稳性 及泊松性.

注 定理可以推广到任意有限个过程的情形.

EX.9 设小轿车、大型客车，运输车三类车独立到达大型收费站, 这三类车在[0, t]时间内的到达数是强度分别为λ_1, λ_2及λ_3的泊松过程, 分别记为$\{N_i(t),t>0\}$. (假设各类汽车没有长度,没有延时).

(1)求两辆大型客车到达时间间隔的概率密度.

(2)求两辆汽车到达时间间隔的概率密度.

(3) 求非小轿车到达的时间间隔的概率密度.

解 设T_1, T_2, T_3分别表示小轿车、大型客车，运输车到达的时间间隔.

(1) 两辆大型客车之间

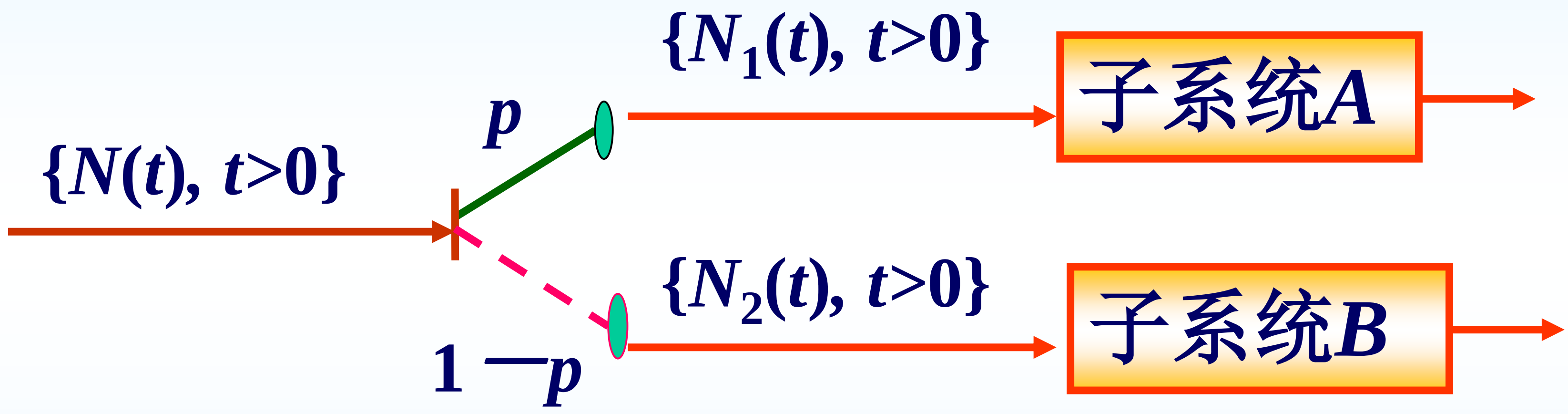
$$f_{T_2}(t)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

(2) 因独立泊松过程之和仍为泊松过程，参数为 $\lambda_S=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$

$$f_{T_S}(t)=\begin{cases}\lambda_S e^{-\lambda_S t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

2.泊松过程的分解

分解模型— 随机并联系统



若输入 $\{N(t), t>0\}$是强度为λ的泊松过程，子系统A与B的输入过程$\{N_1(t), t>0\}$、$\{N_2(t), t>0\}$有什么关系？

问题 对任意$t\in T$，有$N(t)=N_1(t)+N_2(t)$,

(1) $\{N_1(t),t\geq 0\}$与$\{N_2(t), t\geq 0\}$是否仍为泊松过程?

(2) $\{N_1(t),t\geq 0\}$与$\{N_2(t), t\geq 0\}$是否相互独立?

定理2.4.5 $\{N(t),t\geq 0\}$强度为λ的泊松过程，全体事件可分为r类，第i类事件发生的概率为p_i，且

$$0 < p_i < 1, i = 1,2,\cdots,r, \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

则$\{N(t),t\geq 0\}$可分解为r个相互独立的泊松过程之和，各泊松过程的参数分别为λp_i，i=1,2，…，r.

r= 2时的证明参见P59.