习题三

2. ∵ A, B, C 相互独立且服从标准正态分布.

∴ $E(A)=E(B)=E(C)=0,\quad E(A^2)=E(B^2)=E(C^2)=1$

$E(AB)=E(BC)=E(AC)=0.$

$E[X(t)] = E[At^2+Bt+C]=0.$

$$R_X(s,t) = E[(As^2+Bs+C)(At^2+Bt+C)]$$
$$= s^2t^2E[A^2]+ st\,E(B^2)+E(C^2)$$
$$= s^2t^2+st+1$$

显然 当$s=t$, $R_X(s,t)$ 连续函数, 故过程均方连续, 从而均方可积.

不难得到 $R_X(s,t)$ 广义二阶导数存在且为 $4st+1$. 故过程均方可导.

(过程省略) 考试要求完整.

3. ∵ 过程均值为0, 当 $s=t$ 时有

$$R(t,t)=C(t,t)=e^{-2\cdot 0}=1.$$ 是连续函数.

故过程均方连续, 从而均方可积.

又 $R(s,t)$ 一阶偏导数不存在. 故过程均方不可导

(过程省略) 考试要求完整.

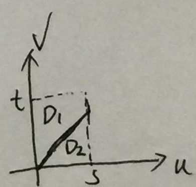
6. 因 $E[N(t)]=\lambda t$, ∴ $C_N(s,t)=\lambda\min(s,t)$

$$R_N(s,t) = \lambda\min(s,t)+\lambda^2 st$$

故 $E[X(t)] = \frac{1}{t}\int_0^t \lambda u\,du = \frac{\lambda t}{2}$,

$$R_X(s,t)= \frac{1}{st}\int_0^s\int_0^t R_N(u,v)\,du\,dv$$

$$\overset{令s<t}{=} \frac{1}{st}\int_0^s\int_0^t[\lambda\min(u,v)+\lambda^2 uv]\,du\,dv$$



$$= \frac{1}{st}\iint_{D_1}(\lambda u+\lambda^2 uv)\,du\,dv +$$
$$\frac{1}{st}\iint_{D_2}(\lambda v+\lambda^2 uv)\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{st}\left[\int_0^s\left[\int_u^t(\lambda u+\lambda^2uv)dv\right]du+\int_0^s\left[\int_0^u(\lambda v+\lambda^2uv)dv\right]du\right]$$

$$= \frac{1}{st}\left[\frac{\lambda s^2t}{2}+\frac{\lambda^2s^2t^2}{4}-\frac{\lambda s^3}{6}\right] = \frac{\lambda s}{2}+\frac{\lambda^2 st}{4}-\frac{\lambda s^2}{6t}$$

故 $R_X(s,t)=\begin{cases}\frac{\lambda s}{2}+\frac{\lambda^2st}{4}-\frac{\lambda s^2}{6t} & s<t\\ \frac{\lambda t}{2}+\frac{\lambda^2st}{4}-\frac{\lambda t^2}{6s} & s\geq t\end{cases}$

$$C_X(s,t)=R_X(s,t)-E[X(s)]E[X(t)]=R_X(s,t)-\frac{\lambda^2st}{4}.$$

$$=\begin{cases}\frac{\lambda s}{2}-\frac{\lambda s^2}{6t} & s<t\\ \frac{\lambda t}{2}-\frac{\lambda t^2}{6s} & s\geq t.\end{cases}$$

9. 因维纳过程是正态过程，而正态过程的积分仍是正态过程，

∴ $X(t)$是正态过程，故求一二维密度即是求期望和相关函数.

$E[X(t)]=E[\int_0^t W(u)du]=0.$

$R_X(s,t)=\int_0^s\int_0^t R_W(u,v)dudv=\int_0^s\int_0^t \min(u,v)dudv$

$$\overset{与6类似}{=\!=}\begin{cases}\frac{s^2t}{2}-\frac{s^3}{6} & s<t\\ \frac{t^2s}{2}-\frac{t^3}{6} & s\geq t\end{cases} = C_X(s,t).$$

$D_X(t,t)=\frac{t^3}{3}.$

∴ 一维密度 $f_{X(t)}(x)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi t}\cdot t}e^{-\frac{3x^2}{2t^3}}$ $x\in R$. $\varphi_t(u)=e^{-\frac{t^3}{6}u^2}$.

二维 $\mu=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}t_1^3 & \frac{1}{6}(3t_1^2t_2-t_1^3)\\ \frac{1}{6}(3t_2^2t_1-t_2^3) & \frac{1}{3}t_2^3\end{pmatrix}$