五、正态过程的积分

定理1 正态随机变量序列$\{X_n\}$的均方极限仍为正态分布随机变量。

定理2 设 $(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \cdots, X_k^{(n)})^T$ 为k维正态随机向量，且均方收敛于随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_k)^T$ 即对$1 \le i \le k$ 均有

$$\lim_{n\to\infty} E[X_i^{(n)} - X_i]^2 = 0$$

则 $(X_1, X_2, \cdots, X_k)^T$ 也为k维正态随机向量。

定理3 设$\{X(t), t\in T\}$ 是正态过程，且在T上均方可导，则其导过程也是正态过程。

定理4 设$\{X(t), t\in T\}$是均方连续的正态过程，令

$$Y(t) = \int_a^t X(s)ds,\ a, t\in T$$

则 $\{Y(t), t\in T\}$也是正态过程。

六、Ito积分

引例3.5.5 试求 $I=\int_a^b W(s)dW(s)$，其中为标准维纳过程.

分析 借助于R-均方积分定义, 取[a,b]上一组分点 $a=t_0<t_1<\ldots\ldots<t_n=b$ ，令 $\Delta=\max\limits_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$

若均分积分I存在, 则应有对 $\forall u_i\in[t_{i-1},t_i]$ ，有

$$I' = \sum_{i=1}^{n} W(u_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})]$$

均方收敛于数I. 现构造两个特别的和式

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} W(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})]$$

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} W(t_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})]$$

显然 $I_n + J_n = W^2(b) - W^2(a)$ 有与 $I_n - J_n = \sum_{k=1}^{n} [W(t_k) - W(t_{k-1})]^2$

均成立.

由维纳过程性质有

$$\lim_{n\to\infty} E(J_n - I_n) = b - a \neq 0$$

这说明两个和式和有着不同的均方极限值, 故和式的均方极限不存在.

定义3.5.3 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为二阶矩过程,$\{W(t), t \geq 0\}$ 为维纳过程, 在区间上任取一组分点, $a = t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_n = b$, 令 $\Delta = \max\limits_{1 \leq k \leq n}(t_k - t_{k-1})$,记

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} X(t_{k-1})[W(t_k) - W(t_{k-1})]$$

若 $\Delta \to 0, n \to \infty$, I_n 均方收敛, 则称该极限为$X(t)$关于维纳过程的Ito积分, 记为 $\int_a^b X(t) dW(t)$.

定理3.5.10 设下列Ito积分存在

$$\int_a^b X(t)dW(t),\quad \int_a^b Y(t)dW(t),\quad \int_a^b g(t)dW(t)$$

则对任意常数 α,β 有

(1) $\int_a^b[\alpha X(t)+\beta Y(t)]dW(t)=\alpha\int_a^b X(t)dW(t)+\beta\int_a^b Y(t)dW(t)$

(2) 若 $a\le c\le b$，则

$$\int_a^b X(t)dW(t)=\int_a^c X(t)dW(t)+\int_c^b X(t)dW(t)$$

(3) $E[\int_a^b g(t)dW(t)]=0$

(4) $E[|\int_a^b g(t)dW(t)|^2]=\int_a^b|g(t)|^2\,dt$

七、Ito公式

在普通微积分学中, 复合函数求导的链规则是个很重要的公式. 同样在随机分析中也存在着对应的规则—Ito公式.

定理3.5.6 设X(t)满足方程

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$$

则

$$dV(t, x(t)) = LV(t, x(t)dt + V_x(t, x(t)g(t, x(t)dW(t)$$

其中

$$LV(t, x(t)) = V_t(t, x(t)) + V_x(t, x(t)) f(t, x(t)) + \frac{1}{2} g^2(t, x(t))V_{xx}(t, x(t))$$

若引入乘法表

$$(dt)^2=0,\quad dtdW(t)=0,\quad [dW(t)]^2=dt$$

则上定理中结论为

$$dV(t,x(t))=V_t dt+V_x dx(t)+\frac{1}{2}V_{xx}[dx(t)]^2$$

注：相对微积分中链规则，Ito公式多了项

$$\frac{1}{2}V_{xx}[dx(t)]^2$$

例 求 $\int_0^t W(s)dW(s)$

解 令 $V(t,x)= x^2$，$x(t)=W(t)$，则由 Ito公式

$$d(W^2(t))=2W(t)dW(t)+dt$$

于是 $$W^2(t)=2\int_0^t W(s)dW(s)+t$$

故 $$\int_0^t W(s)dW(s)=\frac{1}{2}[W^2(t)-t]$$