§3.3 随机过程的均方极限与均方连续

本节将二阶矩随机变量空间中的均方极限概念引入二阶矩随机过程中,并引进均方连续的概念.

一、二阶矩过程的均方极限

定义3.3.2 设$\{X(t), t\in T\}$是二阶矩过程, $X\in H$, 如果

$$\lim_{t\to t_0} d(X(t), X) = \lim_{t\to t_0}\|X(t)-X\| = 0$$

称$X(t)$ 均方收敛于X,记为 $\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}}\, X(t) = X$

注 $\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}}\, X(t) = X$成立的充分必要条件是

对任意的数列$\{t_k\}$, 若 $t_k \to t_0 (k \to \infty)$, 有

$$\underset{t_k \to t_0}{\mathrm{l.i.m}}\, X(t_k) = X$$

随机过程有类似随机变量序列的均方收敛意义下的性质.

定理3.3.1(洛易夫均方收敛准则)

$X(t)$在t_0处收敛的充分必要条件是极限

$$\lim_{s,t \to t_0} E(X(s)\overline{X(t)})$$存在.

二重极限

二、二阶矩过程的均方连续

定义3.3.3 称二阶矩过程$\{X(t), t\in T\}$在$t_0\in T$处均方连续,如果

$$\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}}\, X(t)=X(t_0)$$

若$X(t)$对$\forall t\in T$ 都均方连续,称随机过程

$$\{X(t), t\in T\}$$

是均方连续的.

定理3.3.2 (均方连续准则)

二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$在$t_0\in T$处连续的充分必要条件是$\{X(t),t\in T\}$的相关函数$R(s,t)$在(t_0, t_0)处连续.

定理3.2.5及均方连续定义

证 由均方收敛准则知

$$\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m}}\, X(t)=X(t_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{s,t\to t_0} E(X(s)\overline{X(t)})=E[X(t_0)\overline{X(t_0)}]$$

即

$$\lim_{s,t\to t_0} R(s,t)=R(t_0,t_0).$$

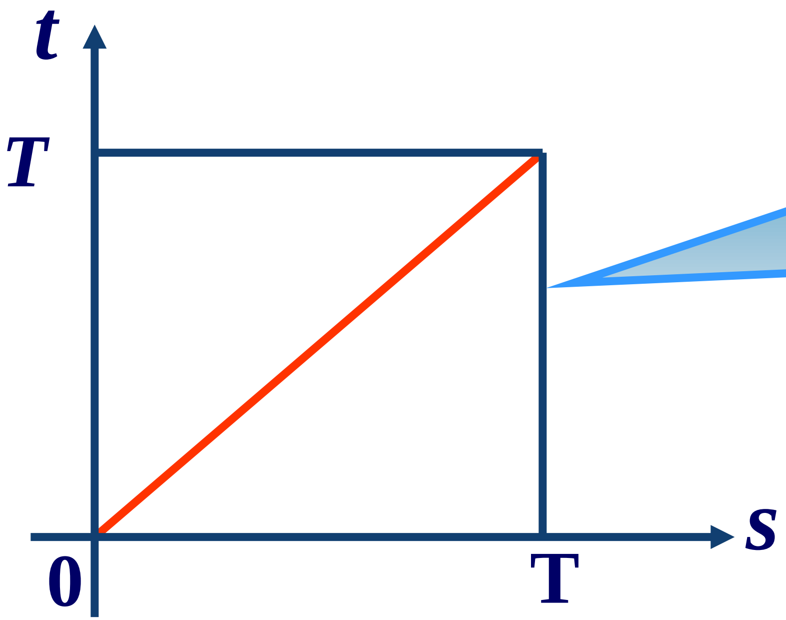
均方连续准则的**重要性**:

二阶矩过程的均方连续可由其**相关函数**的普通意义下的连续性来确定.

均方连续的**重要结论**:

定理3.3.3 二阶矩过程的均方连续 $\Longleftrightarrow$ 相关函数$R(s,t)$在对角线上连续.

推论1 二阶矩过程$\{X(t), t\in T\}$的相关函数$R(s,t)$对 $\forall t\in T$ 在点(t,t)处连续, 则它在$T\times T$上连续.



$R(s, t)$在整个区域$T\times T$上连续，等价于在对角线上连续.

证　$R(s,t)$对$\forall t\in T$,在(t,t)处连续

定理3.3.2　$\{X(t),t\in T\}$在T上均方连续

对$\forall s_0,t_0\in T$,有

$$\underset{s\to s_0}{\mathrm{l.i.m}}\,X(s)=X(s_0),\quad \underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}}\,X(t)=X(t_0)$$

定理3.2.5之1)

$$\lim_{\substack{s\to s_0\\ t\to t_0}} E(X(s)\overline{X(t)}) = E[X(s_0)\overline{X(t_0)}]$$

即

$$\lim_{\substack{s\to s_0\\ t\to t_0}} R(s,t) = R(s_0,t_0)$$

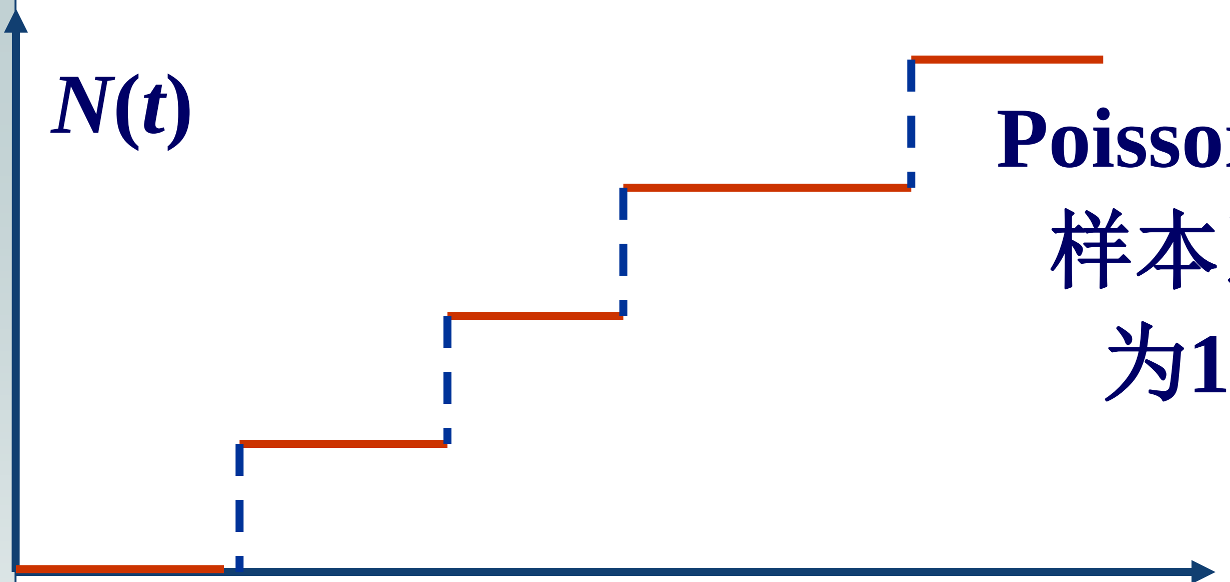
由s_0, t_0的任意性知$R(s, t)$在$T\times T$上连续.

EX.2 $\{N(t), t\geq 0\}$为参数为λ的Poisson过程,

均值函数 $m_N(t) = \lambda t$,

自相关函数 $R_N(s,t) = \lambda \min(s,t) + \lambda^2 st$

在(t, t)处连续,故$\{N(t),t\geq 0\}$是均方连续过程.



Poisson过程的每一条样本函数都是跃度为1 的阶梯函数

均方连续过程的样本函数可能不连续..

EX.3 设$\{W(t), t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程 ,其自相关函数

$$R_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$$

对任意$t\geq 0$在(t, t)处连续，维纳过程均方连续.

设随机过程 $X(t)=W^2(t)$, $t\geq 0$，其

均值函数为 $E[X(t)]=\sigma^2 t$.

自相关函数为 $R_X(s,t)=\sigma^4(st+2\min^2(s,t))$

对任意$t\geq 0, R_X(t,t)=3\sigma^4 t^2$是连续函数，故$X(t)$是均方连续过程.

同理

过程$X(t)=tW(\frac{1}{t})$，对所有$t>0$均方连续.

推论2 若二阶矩随机过程$\{X(t),t\in T\}$均方连续，则其均值函数、方差函数也在T上连续.

由定理3.2.5可得

思考题：

1)你认为关于随机过程的均方极限最本质的性质是哪一条？为什么？

2)均方连续随机过程的样本函数是否一定是连续函数？