1、设在底层乘电梯的人数服从均值 $\lambda=5$ 的泊松分布，又设此楼共有 $N+1$ 层。每一个乘客在每一层楼要求停下来离开是等可能的，而且与其余乘客是否在这层停下是相互独立的。求在所有乘客都走出电梯之前，该电梯停止次数的期望值。

2、设齐次马氏链 $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

（1）画出状态转移图；（2）讨论其遍历性；（3）求平稳分布；（4）计算下列概率：

i） $P\{X(4)=3 \mid X(1)=1, X(2)=1\}$；　ii） $P\{X(2)=1, X(3)=2 \mid X(1)=1\}$.

3、设顾客以泊松分布抵达银行，其到达率为 λ，若已知在第一小时内有两个顾客抵达银行，问：

（1）此两个顾客均在最初 20 分钟内抵达银行的概率是多少？

（2）至少有一个顾客在最初 20 分钟抵达银行的概率又是多少？

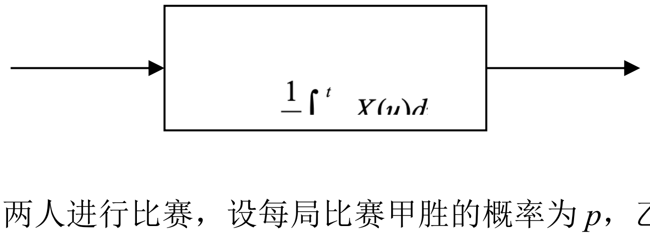
4、设 $X(t)=At^2+Bt+C$，其中 A,B,C 是相互独立的标准正态随机变量，讨论随机过程 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$ 的均方连续、均方可积和均方可导性.

5、设有实随机过程 $\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$，加上到一短时间的时间平均器上作它的输入，如下图所示，它的输出为 $Y(t), Y(t)=\dfrac{1}{T}\int_{t-T}^{t} X(u)\,\mathrm{d}u$，其中 t 为输出信号的观测时刻，T 为平均器采用的积分时间间隔。若 $X(t)=A\cos t$，A 是（0, 1）内均匀分布的随机变量。

（1）求输入过程的均值和相关函数，问输入过程是否平稳？

（2）证明输出过程 $Y(t)$ 的表示式为 $Y(t)=A\left(\dfrac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)\cdot\cos(t-\dfrac{T}{2})$.

（3）证明输出的均值为 $E[Y(t)]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)\cos(t-\dfrac{T}{2})$，输出相关函数为 $R(t_1,t_2)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)^2\cos(t_1-\dfrac{T}{2})\cos(t_2-\dfrac{T}{2})$，问输出是否为平稳过程？



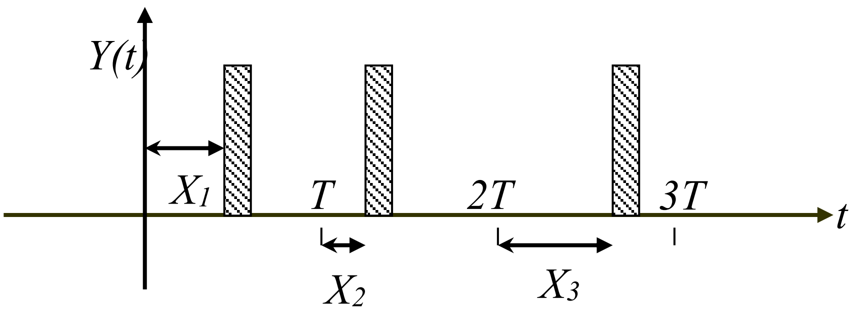
6、甲、乙两人进行比赛，设每局比赛甲胜的概率为 p，乙胜的概率为 q，和局的概率为 r，$p+q+r=1$，设每局比赛后胜者记“1”，分负者记“-

1”分，和局记“0”分. 当两人中有一个获得 2 分时，结束比赛. 以 $X(n)$ 表示比赛至第 n 局时，甲获得的分数. $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个齐次马氏链.

（1）写出此马氏链的状态空间；（2）写出状态转移矩阵；（3）计算 2 步转移矩阵；

7、假设 $[0,t)$ 内顾客到达商场的人数 $\{N(t), t\geq 0\}$ 是平均率为 λ 的泊松过程，且每一个到达商场的顾客是男性还是女性的概率分别为 p 和 q．$(p+q=1)$ 设 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别为 $[0,t)$ 内到达商场的男女顾客数. 求 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 的分布. 并证明它们相互独立.

8、考虑如下一通信系统：每隔 T 秒输出一个脉冲宽度为 $\frac{T}{6}$，幅度为 A 的脉冲，第 j 脉冲开始时间为 X_j， $j=1,2,\cdots n$， X_j 相互独立与 X 同分布，$X \sim U(0,\frac{5}{6}T)$，它的一个样本函数如图，这个通讯系统传输的信号称为脉冲位置调制信号 $Y(t)$，求其一维概率分布。



9、设随机过程 $\{X(t)=A\cos(\omega t+\Theta), t\in(-\infty,+\infty)\}$，其中 A， ω， Θ 为相互独立的实随机变量，其中 A 的均值为 2，方差为 4，且 $\Theta \sim U(-\pi,\pi)$，$\omega \sim U(-5,5)$，试问 $X(t)$ 是否为平稳过程，并讨论 $X(t)$ 的均值的遍历性。

10、设 $X(t)=\sin tX$，其中 X 为一随机变量且 $EX^4<\infty$.求证： $X'(t)=X\cos tX$.

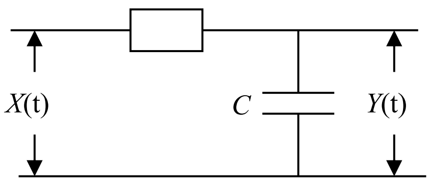
11、一条电话供顾客呼唤，按平均每分钟 0.8 次呼唤的泊松过程来到，通话时间服从参数为 μ 的指数分布，每次通话平均需要 $\frac{1}{\mu}=1.5$ 分钟，$X(t)$ 表时刻 t 通话占用的线路数，$\{X(t), t\geq 0\}$ 为生灭过程。

(1) 求此生灭过程的平稳分布；

(2) 该条线路每小时能接通多少次电话；

(3) 求每小时有多少次呼叫不通而档断。

12、给定 R-C 电路系统，如图，



如果输入平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$，

均值 $m_X(t) = 0$，自相关函数

$R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}, \beta > 0, \beta \neq \sigma = \dfrac{1}{RC}$，试求：

(1) 输出过程 $\{Y(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的均值 $m_Y(t)$；

(2) 自相关函数 $R_Y(\tau)$；

(3) 自谱密度 $S_Y(\omega)$ 及互谱密度 $S_{XY}(\omega)$；

13、齐次马氏链的状态空间 $E = \{1,2,3,4\}$，状态转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 < p < 1 \\ p + q = 1 \end{matrix}$$

(1) 画出状态转移图；(2) 讨论状态性质并分类；

14、参数为λ的齐次泊松柏松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$，求：

(1) 均值函数 $m_X(t)$；　　(2) 协方差函数 C(s,t);

(3) 是否均方连续？　　(4) 是否均方可导？

15、随机过程 $X(t)$ 叫做无线电传真信号，其实现方式如下：在某一随机时刻 T_1,出现持续时间为 t_0,随机振幅为 A_1 的矩形脉冲，A_1 的分布律与 T_1 无关，且已知 $m_{A_1} = 0, \sigma_{A_1} = \sigma$，在时刻 $T_1 + t_o$，前一脉冲终止，又出现持续时间为 t_0，随机振幅为 A_2 的矩形脉冲。A_2 与 A_1 同分布，

A_2与T_1也无关，如此等等。对于无线电传真信号的理想模型，我们假定过程的起点（时刻T_1）位于负无穷远处，求：

(1) $m_X(t)$；　　(2) $R_X(t_1,t_2)$；　　(3) 该过程是否广义平稳？

答案

1、解：设在底楼上电梯人数为 X，又设在所有乘客都走出电梯之前停止的次数为 Y，且$E[Y]=E[E(Y|X)]$，设$X=m$时，$E[Y|X=m]=n$，则

$$
\begin{aligned}
E[Y|X=m+1] &= \frac{n}{N}\cdot E[Y|X=m]+\frac{N-n}{N}\{E[Y|X=m]+1\} \\
&= \frac{n^2}{N}+\frac{(N-n)}{N}\cdot(n+1)=1+\frac{N-1}{N}\cdot n \\
&= 1+\frac{N-1}{N}\cdot E[Y|X=m]
\end{aligned}
$$

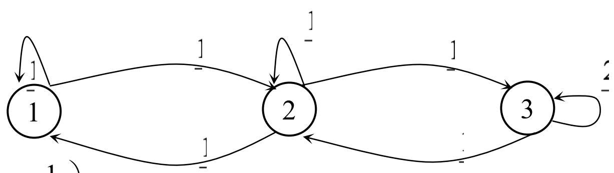
将$E[Y|X=0], E[Y|X=1]=1$代入上递推公式，$E[Y|X=m]=\dfrac{N^m-(N-1)^m}{N^{m-1}}$

所以

$$
\begin{aligned}
E[Y] = E[E(Y|X)] &= \sum_{m=0}^{\infty}E[Y|X=m]\cdot P\{X=m\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{N^m-(N-1)^m}{N^{m-1}}\cdot\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}=N(1-e^{-\frac{\lambda}{N}})
\end{aligned}
$$

代入$\lambda=5$有$E[Y]=N(1-e^{-\frac{5}{N}})$.

2、解：（1）状态转移图



（2）$P^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{3}{8} & \frac{19}{49} & \frac{11}{48}\\ \frac{1}{6} & \frac{11}{36} & \frac{19}{36}\end{pmatrix}$　$P_{ij}(2)>0$　$\cdots$

所有状态均具有遍历性

（3）平稳分布　　$\pi=(\frac{4}{11},\frac{4}{11},\frac{3}{11})$

（4）i）$P\{X(4)=3|X(1)=1,X(2)=1\}=P_{12}(1)P_{11}(1)=\frac{1}{4}.$

ii）$P\{X(2)=1,X(3)=2|X(1)=1\}=P_{13}(2)=\frac{1}{8}.$

3、解：设该泊松过程可以表示为 $\{N(t),t\geq 0\}$，另设 T_i 表示第 i 个顾客的到达时间

（1）$P\left\{T_2<\frac{1}{3}\middle|N(1)=2\right\}$

$$=\frac{P\left\{T_2<\frac{1}{3},N(1)=2\right\}}{P\{N(1)=2\}}$$

$$=\frac{P\left\{\text{在}\left[0,\frac{1}{3}\right)\text{内有两个到达}\right\}\cdot P\left\{\text{在}\left[\frac{1}{3},1\right]\text{内没有顾客到达}\right\}}{P\{N(1)=2\}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{3}\lambda}\frac{(\frac{1}{3}\lambda)^2}{2!}e^{-\frac{2}{3}\lambda}}{e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}}=\frac{1}{9}$$

（2）$P\left\{\text{至少有一个顾客在}\left[0,\frac{1}{3}\right)\text{内到达}\middle|N(1)=2\right\}$

$$=1-\frac{P\left\{T_1\geq\frac{1}{3},N(1)=2\right\}}{P\{N(1)=2\}}$$

$$=1-\frac{e^{-\frac{1}{3}\lambda}e^{-\frac{2}{3}\lambda}\frac{(\frac{2}{3}\lambda)^2}{2!}}{e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

4、解：（1）$R_X(s,t)=E[(As^2+Bs+C)(At^2+Bt+C)]$

$$=s^2t^2E[A^2]+stE[B^2]+E[C^2]$$

$$=s^2t^2+st+1$$

显然 $R_X(s,t)$ 在 (t,t) 上是连续的，所以 $X(t)$ 均方连续且均方可积.

（2）$\frac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial s\partial t}=4st+1$，即二阶混合偏导存在且连续，则广义导数存在，所以 $X(t)$ 均方可导.

5、解：（1）$E[X(t)]=E[A\cos t]=\frac{1}{2}\cos t$

$R_X(t_1,t_2)=\cos t_1\cdot\cos t_2 E[A^2]=\frac{1}{3}\cos t_1\cdot\cos t_2$

因为均值是时间 t 的函数，所以输入过程不是平稳过程.

（2）$Y(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}X(u)du=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}A\cos u du$

$$=\frac{A}{T}[\sin t-\sin(t-T)]=A\left(\frac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)\cos\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

（3） $E[Y(t)]=E\left[A\left(\dfrac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)\cos\left(t-\dfrac{T}{2}\right)\right]$

$$=\left(\dfrac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)\cos\left(t-\dfrac{T}{2}\right)E[A]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)\cos\left(t-\dfrac{T}{2}\right)$$

$$R(t_1,t_2)=E[A^2]\cdot\left(\dfrac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)^2\cos\left(t_1-\dfrac{T}{2}\right)\cos\left(t_2-\dfrac{T}{2}\right)$$

$$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sin\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)^2\cos\left(t_1-\dfrac{T}{2}\right)\cos\left(t_2-\dfrac{T}{2}\right)$$

因为均值是 t 的函数，所以输出不是平稳过程.

6、（14 分）（1） $E=\{-2,-1,0,1,2\}$；

（2）

$$P=\begin{array}{c}-2\\-1\\0\\1\\2\end{array}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\q&r&p&0&0\\0&q&r&p&0\\0&0&q&r&p\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

-2,2 为吸收壁.

（3）

$$P^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\q+qr&pq+r^2&(p+q)r&p^2&0\\q^2&2qr&2pq+r^2&2pr&p^2\\0&q^2&2qr&pq+r^2&pr+p\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

7、（14 分）

$$P\{N_1(t)=k\}=\sum_{n=k}^{\infty}P\{N(t)=n\}\cdot P\{N_1(t)=k\mid N(t)=n\}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\cdot C_n^k\cdot p^kq^{n-k}$$

$$=\frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{-\lambda pt}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

故 $N_1(t) \sim P(\lambda Pt)$；同理 $N_2(t) \sim P(\lambda qt)$

$$\begin{aligned}
&P\{N_1(t)=k,N_2(t)=j\}=P\{N_1(t)=k,N_1(t)+N_2(t)=k+j\} \\
&=P\{N(t)=k+j\}\cdot P\{N_1(t)=k\mid N(t)=k+j\} \\
&=\frac{(\lambda t)^{k+j}}{(k+j)!}e^{-\lambda t}\cdot C_{k+j}^{k}p^k q^j \\
&=\frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{-\lambda pt}\cdot\frac{(\lambda qt)^j}{j!}e^{-\lambda qt} \\
&=P\{N_1(t)=k\}\cdot P\{N_2(t)=j\} \qquad 0\le k,j
\end{aligned}$$

故 $N_1(t),N_2(t)$ 相互独立.

8、（14 分）

解：只需求 $t\in[0,T]$ 内 $Y(t)$ 的概率分布即可

$X \sim U(0,\frac{5}{6}T)$，$\therefore f_X(x)=\frac{6}{5T} \quad 0\le x\le\frac{5}{6}T$

$Y(t)$ 有两个可能取值，0 或 A

① 当 $t\le 0$ 时

$P\{Y(t)=A\}=0$

② 当 $0<t<\frac{T}{6}$ 时

$P\{Y(t)=A\}=P\{0<X\le t\}$

$=\int_0^t f_X(x)dx=\frac{6t}{5T}$

③ 当 $\frac{T}{6}\le t\le\frac{5}{6}T$ 时

$P\{Y(t)=A\}=P\{t-\frac{T}{6}\le X\le t\}=\frac{1}{5}$

④ 当 $\frac{5}{6}T<t<T$ 时

$P\{Y(t)=A\}=P\{t-\frac{T}{6}\le X\le\frac{5}{6}T\}$

$=\frac{6}{5T}(T-t)$

$P\{Y(t)=0\}=1-P\{Y(t)=A\}$

9、（14 分）

解：由题设知，$E(A)=2$，$D(A)=4$，$\Theta\sim U(-\pi,\pi)$，$\omega\sim U(-5,5)$，其联合密度函数为

$$f_{\omega\Theta}(x,y)=f_\omega(x)f_\Theta(y)=\begin{cases}\frac{1}{20\pi} & -5<\omega<5,-\pi<\Theta<\pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（1）$X(t)$ 是平稳过程，因为

① $m_X(t)=E[X(t)]=E[A\cos(\omega t+\Theta)]=E(A)E[\cos(\omega t+\Theta)]=$

$$2\iint_{R^2}\cos(xt+y)f_\omega(x)f_\Theta(y)dxdy=$$

$$\frac{2}{20\pi}\int_{-5}^{5}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(xt+y)dy\right)dx=$$

$$\frac{1}{10\pi}\int_{-5}^{5}[\sin(xt+\pi)-\sin(xt-\pi)]\mathrm{d}x=0$$

② $R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E(A^2)$

$$E[\cos(\omega t_1+\Theta)\cos(\cos\omega t_2+\Theta)]=$$

$$8\times\frac{1}{2}E[\cos(\omega(t_1+t_2)+2\Theta)+\cos\omega(t_2-t_1)]=$$

$$4E[\cos(\omega(t_1+t_2)+2\Theta)]+4E[\cos(\omega(t_2-t_1))]$$

其中

$$E[\cos(\omega(t_1+t_2)+2\Theta)]=0$$

$$E[\cos\omega(t_2-t_1)]=\begin{cases}1 & t_2-t_1=0\\ \dfrac{1}{10}\displaystyle\int_{-5}^{5}\cos((t_2-t_1)x)\mathrm{d}x=\dfrac{\sin5(t_2-t_1)}{5(t_2-t_1)} & t_2-t_1\neq0\end{cases}$$

所以

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=\begin{cases}4 & t_2-t_1=0\\ \dfrac{4\sin5(t_2-t_1)}{5(t_2-t_1)} & t_2-t_1\neq0\end{cases}$$

即 $R_X(t_1,t_2)=R_X(t_2-t_1)$，只与 t_2-t_1 有关，

③ $E[X^2(t)]=R(t,t)=4<\infty]$

故 $X(t)$ 为平稳过程，且为均方连续的。

（2）均值的遍历性：由（1）结果知，对任意的 t，$m_X(t)=E[X(t)]=0$，故

$$C_X(\tau)=R_X(\tau)-m_X(t_1)m_X(t_2)=\begin{cases}4 & \tau=0\\ \dfrac{4}{5\tau}\sin5\tau & \tau\neq0\end{cases},\quad \tau=t_2-t_1$$

而 $\lim\limits_{\tau\to\infty}C_X(\tau)=0$，故 $X(t)$ 的均值具有遍历性。

10、（14 分）

证　为证 $X'(t)=X\cos tX$，只需证明

$$\lim_{h\to0}E(\frac{\sin(t+h)X-\sin tX}{h}-X\cos tX)^2=0.$$

由于

$$E\left|\frac{\sin(t+h)X-\sin tX}{h}-X\cos tX\right|^2$$

$$=E\left|\frac{\sin tX\cdot(\cos hX-1)}{h^2}-X\cos tX+\frac{\sin hX}{h}\cos tX\right|^2$$

$$\le 2E\frac{\sin^2 X(\cos hX-1)^2}{h^2}+2E[\cos^2 tX\cdot(-X+\frac{\sin hX}{h})^2]$$

$$\le 2E\left[\frac{\sin^2 tX\cdot(hX)^4}{h^2}\right]+2E\left[\cos^2 tX\cdot\frac{(hX)^4}{h^2}\right]$$

$$=2E(h^2X^4)\to 0$$

于是得证 $X'(t)=X\cos tX$.

11、（1）平稳分布 $\begin{cases}\pi_0=\dfrac{5}{11}\\ \pi_1=\dfrac{6}{11}\end{cases}.$

（2）每小时能接通次数 $\dfrac{240}{11}\approx 22$（次）

（3）电话损失率 $=\dfrac{6}{11}$，每小时不能接通次数为 $\dfrac{288}{11}\approx 26$（次）

12、$\dfrac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}+\alpha Y(t)=\alpha X(t),\ \ \alpha=\dfrac{1}{RC}$

$i\omega Y(\omega)+\alpha Y(\omega)=\alpha X(\omega).$

系统频率响应函数 $H(i\omega)=\dfrac{\alpha}{i\omega+\alpha}$

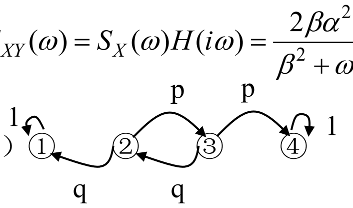
脉冲响应函数 $h(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}.$

（1）$m_Y(t)=0$

（2）$R_Y(\tau)=\dfrac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}[\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|}]$

（3）$S_Y(\omega)=F[R_Y(\tau)]=\dfrac{2\alpha^2\beta\sigma^2}{(\omega^2+\alpha^2)(\omega^2+\beta^2)}$

$$S_{XY}(\omega)=S_X(\omega)H(i\omega)=\frac{2\beta\alpha^2}{\beta^2+\omega^2}\cdot\frac{\alpha}{i\omega+\alpha}$$

13、（1）

（2）$p_{11}=1$，$f_{11}=1$，$\mu_1=1$，状态 1 为吸收状态正常返；类似状态 4 为吸收状态，正常返状态。

状态 2 和 3 互通，具有相同状态性质，$f_{22} = pq < 1$，非常返 $N = \{2,3\}$，非常返集；$c_1 = \{1\}$，$c_4 = \{4\}$ 为正常返集。

状态空间分解为 $E = N + C_1 + C_2 = \{2,3\} + \{1\} + \{4\}$。

14、（1）$m_N(t) = \lambda t$；（2）$C(s,t) = \lambda \min\{s,t\}$；（3）连续；（4）不可导（必要条件不成立）。

15、（1）$m_X(t) = 0$；

（2）$E[X(t)X(t+\tau)] = \begin{cases} \sigma^2 p\{\tau < T\} + 0 \cdot p\{\tau \ge T\}, & 0 < \tau < t_0 \\ 0, & \tau \ge t_0 \end{cases}$

$$R_X(t,t+\tau) = \begin{cases} \sigma^2 (1 - \dfrac{\tau}{t_0}), & 0 < \tau < t_0 \\ 0, & \tau \ge t_0 \end{cases}$$

（3）$X(t)$ 是广义平稳过程。