Part 0.5

cross ratio: show by example (picture+computation) one of the points should be at infinity, for example the train tracks

Notes:

- In the perspective image, all parallel lines meet at a single point.
  This point is called the “Vanishing Point”.
- Vanishing points are often outside the image boundary.
- Joining two vanishing points gives a vanishing line.
- The parallel lines become non-parallel when projected on the image plane.
- If one of the measurements is unknown in the real world, it can be calculated using the cross ratio.
- Cross ratio depends on angels and it is thus invariant under projection, so it will be exactly the same as in the real world.
- if one point is the mid-point of the other two points while the 4th point is a point at infinity, than the cross ratio is 0.5.

נתבונן בנקודות הבאות :

כאשר שלושת הנקודות הראשונות הן על אותו ישר l1.

_p1 = (599,559)

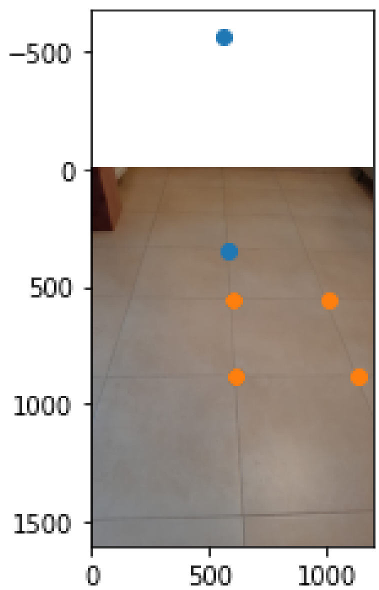
_p2 = (611,877)

_p3 =(581, 349)

ושתי הנקודות הבאות נמצאות על ישר שמקביל ישר l1 , נקרא לו l2.

p4 =(1004,553)

p3 =(1136, 883, 1)



את הנקודות הנ"ל מצאנו בעזרת קוד במטלאב שמאפשר באמצעות לחיצת עכבר על הנקודה הרצויה בתמונה לקבל את הערכים של הנקודה.

משוואת הישר של שתי הנקודות הראשונות:

l1 = [318   -12 -183774]

משוואת הישר של שתי הנקודות על הישר המקביל:

l2 = [-330   132 258324]

נקודת החיתוך של שני ישרים מקבילים:

vanishing_point = [556.5625, -565.59375]

את משוואות הישר קבלנו על ידי cross product של שתי נקודות על הישר.
את נקודת החיתוך של שני ישרים קבלנו על ידי cross product של שני הישרים.
במרחב פרויקטיבי שני קוים מקבילים נחתכים באינסוף, כך שעל ידי מציאת נקודת החיתוך של הישרים המקבילים מצאנו נקודה באינסוף vanish point.

כעת יש לנו 4 נקודות שנמצאות על הישר l1 כאשר הנקודות הרביעית היא באינסוף, ונוכל לחשב את ה cross ratio.
נבחין כי בחרנו 3 נקודות על הישר שהן במרחק זהה זו מזו ונקודה רביעית באינסוף.
במציאות נצפה כי התוצאה של ה cross ration תהיה 0.5 ואכן כך קבלנו.
Cross ration = 0.501023513812881

compute fig 2.18 on your own picture, your job is

a) find a line from 2 or more points

b) set up the equations

The points are :

[[599 1041]

[611 723]

[1136 717]

[1004 1047]]

l1 [318 12 -202974]

l2 [-330 -132 469524]

l3 [324 537 -753093]

m1 [-6 405 -418011]

m2 [6 525 -383241]

m3 [-324 393 -86175]

Equation : (84845367666, -59239140651.0, -179940918564, 166146279849.0, 124077611313.0, 64897895340) c = 0

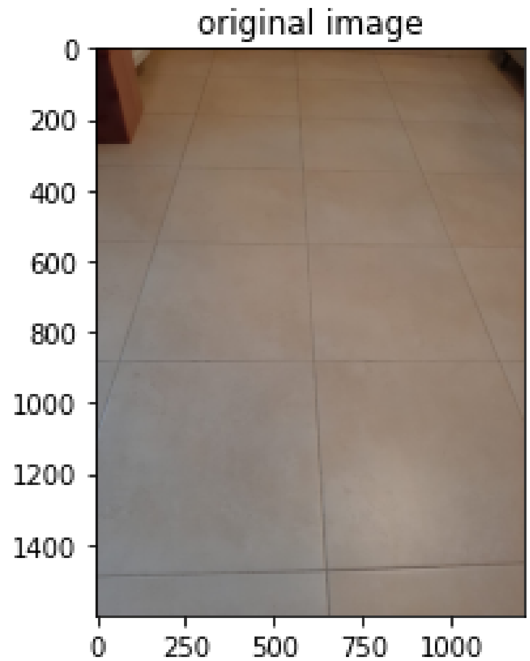
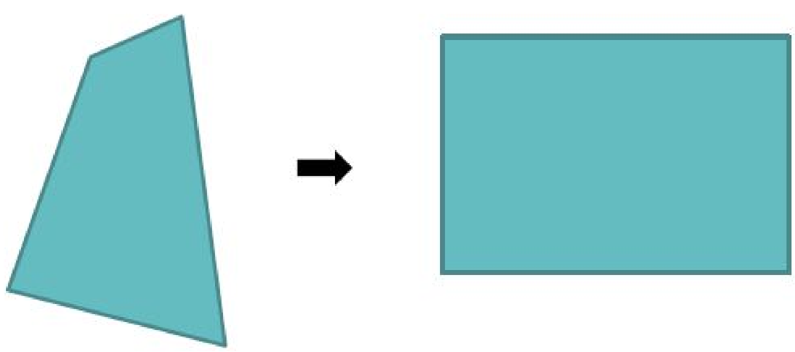


Image rectification

- It is possible to remove perspective distortion of a plane in a scene if
  - We can find the vanishing line of the plane
  - We have two reference measurements of known lengths and angles
- We need to identify 4 points on the plane such that



The points are used to provide constraints on the affine transformation.
In general, we need four points for rectifying a plane that has been distorted by a perspective projection.

Reconstruction of affine properties

- An affine transformation maps the line at infinity onto itself since

$$\mathbf{l}'_\infty = \mathtt{H}_\mathtt{A}^{-\top}\mathbf{l}_\infty = \begin{bmatrix} \mathtt{A}^{-\top} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{t}^\top \mathtt{A}^{-\top} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{l}_\infty.$$

Affine rectification

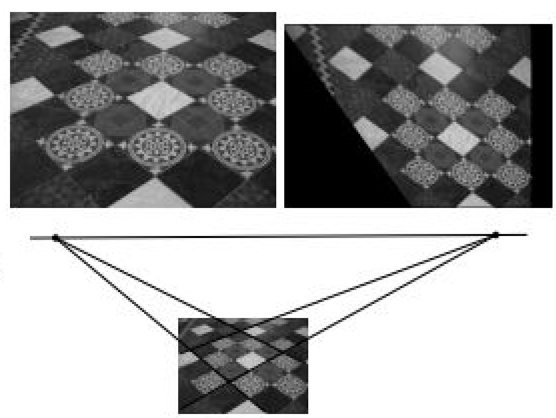
- We may also transform the image such that $\mathbf{l}'_\infty$ is transformed back to $\mathbf{l}_\infty$.
- If $\mathbf{l}'_\infty$ is the line $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)^\top$ we may (assuming $l_3 \neq 0$) construct the following transformation

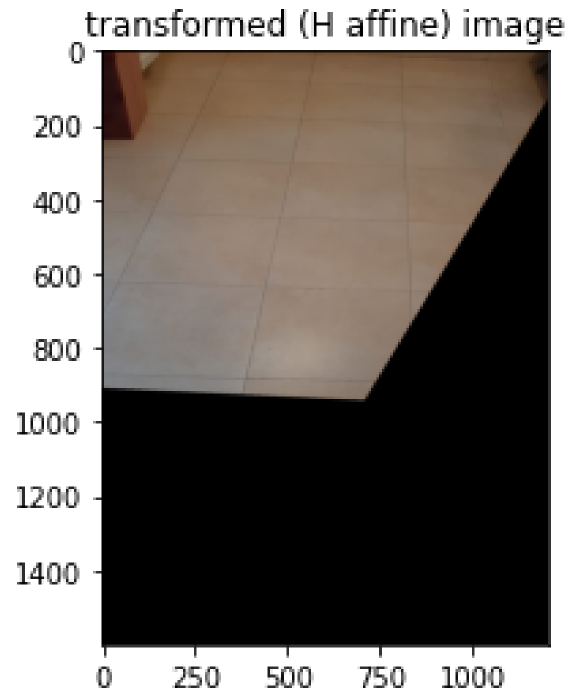
$$\mathtt{H} = \mathtt{H}_\mathtt{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix},$$

where $\mathtt{H}_\mathtt{A}$ is an arbitrary affine transformation.

- If we apply $\mathtt{H}$ on the image, the line at infinity will be mapped to its canonical positions since

$$\mathtt{H}^{-\top}(l_1, l_2, l_3)^\top = (0, 0, 1)^\top = \mathbf{l}_\infty.$$





Metric rectification by orthogonal line

- If an images has been affinely rectified we need 2 equations to determine the 2 degrees of freedom in $\mathtt{K}$. We may get these equation from pairs of imaged orthogonal lines.
- Assume $\mathbf{l}'$ and $\mathbf{m}'$ in the affinely rectified image correspond to two orthogonal lines $\mathbf{l}$ and $\mathbf{m}$ in the world plane.
- Since $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ we have

$$\begin{bmatrix} l'_1 \\ l'_2 \\ l'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathtt{KK}^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'_1 \\ m'_2 \\ m'_3 \end{bmatrix} = 0$$

- which is a linear equation in

$$\mathtt{S} = \mathtt{KK}^\top = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix},$$

$$[l'_1 m'_1, l'_1 m'_2 + l'_2 m'_1, l'_2 m'_2]\, \mathbf{s} = 0,$$

where $\mathbf{s} = (s_{11}, s_{12}, s_{22})^\top$.

- Given the image of two pairs of orthogonal lines we may determine $\mathtt{s}$ and therefore $\mathtt{K}$ and $\mathtt{H}_\mathtt{A}$ up to an unknown scale.
- The application of $\mathtt{H}_\mathtt{A}^{-1}$ on the image will do a metric rectification.

Calculating the homography matrix H

- The homography matrix has 9 unknowns and is defined up to an unknown scale

$$\begin{bmatrix} su_i \\ sv_i \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

- We get

$$u_i = \frac{h_{11}X_i + h_{12}Y_i + h_{13}}{h_{31}X_i + h_{32}Y_i + h_{33}} \qquad v_i = \frac{h_{21}X_i + h_{22}Y_i + h_{23}}{h_{31}X_i + h_{32}Y_i + h_{33}}$$

- Writing it as a system of linear equations

$$\begin{bmatrix} X_i & Y_i & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_iX_i & -u_iY_i & -u_i \\ 0 & 0 & 0 & X_i & Y_i & 1 & -v_iX_i & -viYi & -v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ \vdots \\ h_{33} \end{bmatrix} = 0$$

This has for form $Ah = 0$ and the solution is the right singular vector corresponding to the smallest singular value of A i.e. $svd(A) = USV^T$, the last column of V is equal to h.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \textbf{2N x 9} & \textbf{9 x 1} & & \textbf{2N x 1} \\
\textbf{4 POINTS} & \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1x'_1 & -y_1x'_1 & -x'_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1y'_1 & -y_1y'_1 & -y'_1 \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \\
\textbf{additional points} & \vdots & & & \vdots
\end{array}$$

Homogeneous equations $\overset{2N\text{x}9}{A}\ \overset{9\text{x}1}{h} = \overset{2N\text{x}1}{0}$

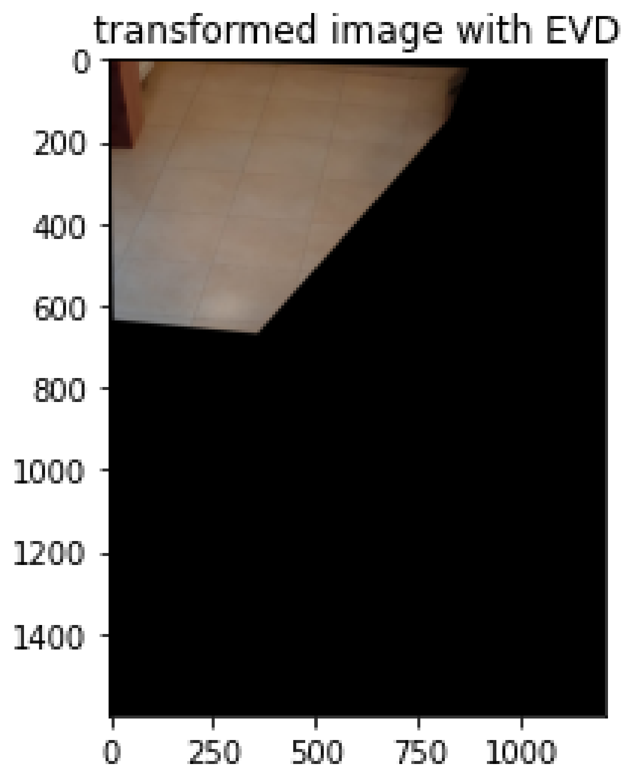
Solve:

$$\overset{9\text{x}2N}{A^T}\ \overset{2N\text{x}9}{A}\ \overset{9\text{x}1}{h} = \overset{9\text{x}2N}{A^T}\ \overset{2N\text{x}1}{0}$$

$$\overbrace{(A^T\ A)}^{9\text{x}9}\ \overset{9\text{x}1}{h} = \overset{9\text{x}1}{0}$$

SVD of $A^TA = U\ D\ U^T$

Let h be the column of U (unit eigenvector) associated with the smallest eigenvalue in D. (if only 4 points, that eigenvalue will be 0)



Part 1 :

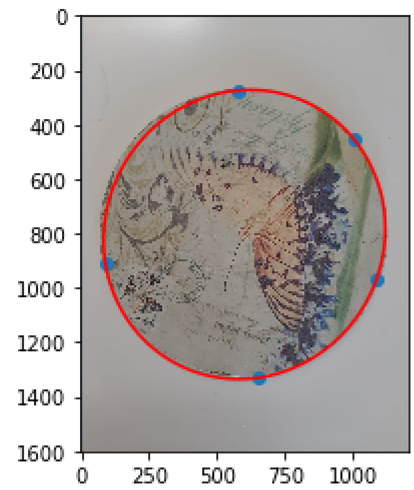
Take pictures of a circle from different positions trying to get all the different types of conics,

draw the conic by algebraically fitting a conic to some (at least 5) points and solving for the conic's parameters, use the discriminant (google) to classify the conic's type

נתייחס לקורדינטות של 5 נקודות בצורות הקנוניות הבאות : מעגל, אליפסה, פרבולה והיפרבולה.
בעזרת נקודות אלו נוכל לחלץ את הפרמטרים הקנונים , ועל פי הדטרמיננטה של A33 (כפי שהוסבר בשאלה 2.10.2) נוכל לדעת באיזה צורה מדובר.
בהצגת המשוואה כפלנו ב 10^6.

<u>מעגל</u>

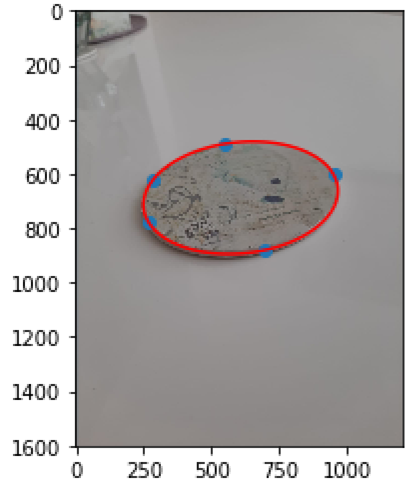
Shape circle
5 Points : [[1001 451]
 [1085 970]
 [653 1330]
 [89 907]
 [575 274]]
a = -1.3474284371403357e-06
b = -1.0444998457051423e-07
c = -1.276581408282604e-06
d = 0.0017016010330114788
e = 0.0021144877880499035
f = 1.0
4ac - b^2: 6.869498568101771e-12
-1.3474284371403358 * x ^ 2 + -0.10444998457051423 * x * y + -1.276581408282604 * y ^ 2 + 1701.6010330114789 * x + 2114.4877880499034 * y + 1000000.0 = 0.



כלומר הדטרמיננטה של A33 גדולה מ-0
בנוסף a~c
b~0
בהתאם לצורה קנונית של מעגל.

<u>אליפסה</u>

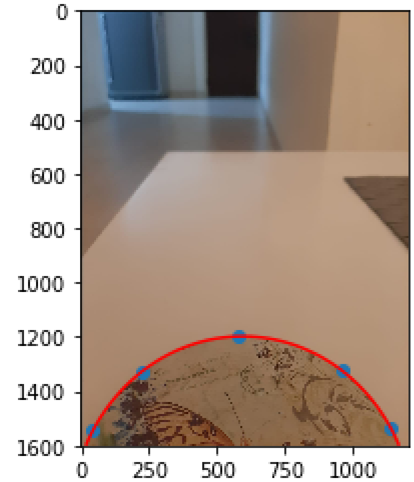
Shape ellipse
5 Points : [[545 490]
 [284 622]
 [266 775]
 [698 880]
 [950 604]]
a = -5.439183788473025e-07
b = -2.3183217736806905e-07
c = -1.6307031984023638e-06
d = 0.0008198427247321264
e = 0.002384052433470738
f = 1.0
4ac - b^2: 3.4941316017612795e-12
-0.5439183788473024 * x ^ 2 + -0.23183217736806905 * x * y + -1.6307031984023639 * y ^ 2 + 819.8427247321264 * x + 2384.052433470738 * y + 1000000.0 = = 0.



כלומר הדטרמיננטה של A33 גדולה מ-0 בהתאם לצורה קנונית של אליפסה.

<u>פרבולה</u>

Shape parabola
5 Points : [[44 1543]
 [224 1327]
 [578 1198]
 [959 1324]
 [1139 1537]]
a = -3.3721426794219123e-07
b = -1.042256381389018e-09
c = -2.854900730914249e-07
d = 0.0004016127868072444
e = 0.0010776159430349141
f = 1.0
4ac - b^2: 3.8508421771078556e-13
-0.3372142679421912 * x ^ 2 + -0.001042256381389018 * x * y + -0.28549007309142493 * y ^ 2 + 401.6127868072444 * x + 1077.6159430349142 * y + 1000000.0 = 0.



כלומר הדטרמיננטה מאוד קטנה ושואפת ל-0 בהתאם לפרבולה.
לא קיבלנו תוצאה מדוייקת לאחר ניסיונות רבים של צילום ומזויות שונות ובחירת נקודות, רק עם זאת הדטרמיננטה קטנה בסדר גודל שלה לעומת התוצאות האחרות והכי קרובה ל-0.

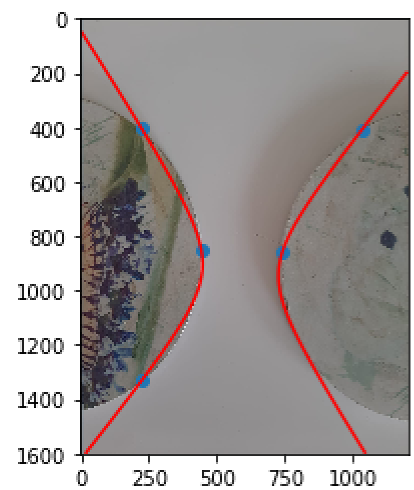
<u>היפרבולה</u>

לא היה ברור כיצד לצלם את ההיפרבולה כך שהצגנו שתי אופציות :

Shape hyperbola
5 Points : [[413 1510]
 [452 1489]
 [530 1468]
 [581 1471]
 [632 1483]]
a = 2.06458030737942e-07
b = -1.866834411150199e-07
c = -4.812304000455325e-07
d = 5.019642183470455e-05
e = 0.0014289591837507985
f = 1.0
4ac - b^2: -4.322662300850758e-13
0.206458030737942 * x ^ 2 + -0.1866834411150199 * x * y + -0.48123040004553247 * y ^ 2 + 50.19642183470455 * x + 1428.9591837507985 * y + 1000000.0 = 0.

כלומר הדטרמיננטה של A33 קטנה מ - 0 בהתאם להיפרבולה.

אופציה שניה:




```
 Shape  hyperbola
5 Points :  [[ 443  853]
 [ 221  400]
 [ 224 1330]
 [ 740  859]
 [1034  406]]
a =  2.556660091462313e-05
b =  4.213683499154846e-06
c =  -1.3569783908769715e-05
d =  -0.033889777092704326
e =  0.022599045465735802
f =  1.0
4ac - b^2:  -1.40548812740381e-09
```

כלומר הדטרמיננטה של A33 קטנה מ - 0 בהתאם להיפרבולה.

Ex1 Computer Vision

2.10.2 a:

נראה כי הטרנספורמציה האפינית יכולה למפות מעגל לאליפסה, אך לא יכולה למפות אליפסה להיפרבולה או לפרבולה.

$$A_Q = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \qquad A_{33} = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

quadratic equation $x^T A_Q x = 0$,
where x is the homogeneous coordinate vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$.

נוכל לקבוע מהו הסוג של העקומה הקונית: אליפסה, פרבולה או היפרבולה, על ידי חישוב של הדטרמיננטה של A_{33}. כלומר

$ac - (\frac{b}{2})^2 < 0 \iff det(A_{33}) < 0 \iff$ היא היפרבולה Q

$ac = (\frac{b}{2})^2 \iff det(A_{33}) = 0 \iff$ היא פרבולה Q

$ac - (\frac{b}{2})^2 > 0 \iff det(A_{33}) > 0 \iff$ היא אליפסה. Q

אנו יודעים מתקיים כי $a=c$ ו- $b=0$ אזי Q הוא מעגל.

כעת ניקח עקומה קונית של מעגל ונשים לב כי תחת טרנספורמציה אפינית, הסיווג של התמונה לא ישתנה.

$$Q = \begin{pmatrix} c & 0 & \frac{d}{2} \\ 0 & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

טרנספורמציה אפינית הינה

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

נבחין כי

$$\begin{pmatrix} A & t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^{-1} & -AA^{-1}t+t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

כאשר המטריצה אינה סינגולרית, ויש לה הופכית ומכאן ש

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת טרנספורמציה של עקומה קונית הינה $x' = Hx$

$\Leftarrow H^{-1}x' = x$

$$x^T Q x = (H^{-1}x')^T Q (H^{-1}x') = x'^T \underline{(H^{-1})^T Q H^{-1}} x'$$

$\Leftarrow$ מעגל תחת טרנספורמציה אפינית הינו $C' = H^{-T} Q H^{-1}$

$\Leftarrow$

$$C' = \begin{pmatrix} A^{-T} & 0 \\ (-A^{-1}t)^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \cdot I_2 & b \\ b^T & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{-T}CA^{-1} & \vdots & - \\ & \vdots & \end{pmatrix} \Longrightarrow A'_{33} = A^{-T}CA^{-1}$$

$\Leftarrow$

$$det\{A^{-T}CA^{-1}\} = det\{A^T A_{33} A\} = (det(A))^2 \cdot (ac - \frac{b^2}{4})$$

נשים לב כי $(det(A))^2 > 0$ ולכן הסימן של $det\{A^{-T}CA^{-1}\}$ יקבע ע"פ $ac - \frac{b^2}{4}$. מכיוון שמדובר במעגל $ac - \frac{b^2}{4} > 0$ ולכן תחת טרנספורמציה אפינית נקבל אליפסה. ולא ייתכן שנקבל היפרבולה שבה הדיסקרימיננטה צריכה להיות קטנה מ-0 או פרבולה שבה הדיסקרימיננטה שווה ל-0.

2.10.2 ii) Projective transformations

Show that there is a three parameter family of projective transformations which fix a unit circle at the original.
What is the geometric interpretation of this family?

מ- result 2,13 ראינו כי טרנספורמציה של עקומה קונית C תחת

$$C' = H^{-T} C H^{-1}$$

טרנספורמציה פרויקטיבית

$$X' = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} X = H_p X = \begin{bmatrix} A & t \\ V^T & 1 \end{bmatrix} X$$

לטרנספורמציה 8 דרגות חופש

ונתון במטריצה $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ שמייצגת את מעגל היחידה.

טרנספורמציה שמשמרת את מעגל היחידה תספק את התנאי
הבא:

$$C' = H^{-T} C H^{-1} = KC$$

עבור סקלר כלשהו K

מכיוון ש-H מייצגת מחלקת שקילות וגם להגדיר $K=1$
ובלי הגבלת הכלליות

$$\boxed{H^{-T} C H^{-1} = C}$$

ונשים לב כי $C = C^{-1}$

$$\Rightarrow \quad HCH^T = C = C^{-1}$$

$$HCH^T = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} \\ h_{12} & h_{22} & h_{32} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} \\ h_{12} & h_{22} & h_{32} \\ -h_{13} & -h_{23} & -h_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_{11}^2 + h_{12}^2 - h_{13}^2 & h_{11}h_{21} + h_{12}h_{22} - h_{13}h_{23} & h_{31}h_{11} + h_{32}h_{12} - h_{33}h_{13} \\ h_{21}h_{11} + h_{22}h_{12} - h_{23}h_{13} & h_{21}^2 + h_{22}^2 - h_{23}^2 & h_{31}h_{21} + h_{32}h_{22} - h_{33}h_{23} \\ h_{31}h_{11} + h_{32}h_{12} - h_{33}h_{13} & h_{21}h_{31} + h_{22}h_{32} - h_{23}h_{33} & h_{31}^2 + h_{32}^2 - h_{33}^2 \end{pmatrix}$$

ונדרוש שוויון רכיבים

$$= C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

נקבל את המשוואות הבאות

$$h_{11}^2 + h_{12}^2 - h_{13}^2 = 1 \qquad h_{31}h_{11} + h_{32}h_{12} - h_{33}h_{13} = 0$$

$$h_{21}^2 + h_{22}^2 - h_{23}^2 = 1 \qquad h_{21}h_{11} + h_{22}h_{12} - h_{23}h_{13} = 0$$

$$h_{31}^2 + h_{32}^2 - h_{33}^2 = 1 \qquad h_{21}h_{31} + h_{22}h_{32} - h_{23}h_{33} = 0$$

מקבלים 9 משוואות ליניאריות ויש 6 נעלמים, רק שמספר דרגות החופש של המערכת הוא 3

לכן H יכולה להיות three parameter family של טרנספורמציה היפרבוליות (הנדרשת)

נתבונן במערכת הקוניות עם מטריצה עמיר הדרושה $HCH^T = C$:

$$\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} HCH^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

זה אומר שמשפחת הטרנספורמציות ההיפרבוליות עם מטריצה שמשמרות את מעגל היחידה C

לכן ניתן לזהות אותן לעצמנו, היא זהה לקבוצת הטרנספורמציות האפיניות שמשמרות קונוס מסוים.

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x^2+y^2-z^2+1=0$$

היפרבולואיד דו יריעתי

נבחין כי יש שני סוגים של טרנספורמציות אפיניות שמשמרות צורה זו: רוטציה ושיקוף - rotation and similarity transformations

בקורדינטות הומוגניות:
טרנספורמצית סיבוב -

$$\begin{pmatrix} R_\theta & O_{2\times2} \\ O_{2\times2} & I_{2\times2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ההיפרבולואיד סימטרי סביב ציר z, כך שסיבוב סביב ציר z ישאיר אותו בצורתו ומיקומו.

טרנספורמצית שיקוף -

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נראה כי ההיפרבולואיד שמתקבל באופן סימטרי עם מישורים שניצבים למישור xy ועוברים בראשית הצירים או למשל המישור xz

ועכשיו נתייחס לסוג השלישי: סיבוב היפרבולי - כאשר ההיפרבולואיד ישאר עם רוטציה היפרבולית הלא מינימית:

$$\begin{pmatrix} \cosh(\beta) & 0 & \sinh(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh(\beta) & 0 & \cosh(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\gamma) & \sinh(\gamma) & 0 \\ 0 & \sinh(\gamma) & \cosh(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

זהו טרנספורם לורנץ

כאשר β ו-γ הן הזוויות ההיפרבוליות של הסיבוב

לכן ניתן לבטא את הטרנספורמציה הנדרשת ע"י הרכבה של 3 הטרנספורמציות

בכל מקרה, קיבלנו 3 סוגים של טרנספורמציות ששומרות את מעגל היחידה שעוברות בראשית, והן כה

סיבוב היפרבולי, שיקוף, סיבוב

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\gamma & \sinh\gamma \\ 0 & \sinh\gamma & \cosh\gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh\beta & 0 & \sinh\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\beta & 0 & \cosh\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

יש 3 פרמטרים כאן γ, β, α שמשפיעים על הטרנספורמציות

ושים לב כי רק 3 מתוך 4 הטרנספורמציות הן בלתי תלויות, שכן סיבוב הוא הרכבה של שיקופים.

Q.5.2 i

Let Io be a projective image, and I_1 be an image of Io (an image of an image). Let the composite image be donated by I'.
Show that the apparent camera center of I' is the same as that of Io. Speculate on how this explains why a portrait's eyes "follow you round the room".
Verify on the other hand that all other parameters of I' and Io may be different.

We use $[u, v, 1]^T$ to represent a 2D point position in pixel coordinate, and $[X_w, Y_w, Z_w, 1]^T$ is used to represent a 3D point position in world coordinate.
Referring to the pin hole camera model, a camera matrix M is used to denote a projective mapping from world coordinate to pixel coordinate.

$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = K[R\ T] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & \mu & u_0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

The intrinsic matrix K contains 5 instrinsic parameters of the specific camera model.

$\alpha_x = f \cdot m_x$, $\alpha_y = f \cdot m_y$ - represent focal length in terms of pixels.

m_x, m_y - scale factors relating pixels to distance
f - focal length in terms of distance.

μ - represents the skew coefficient between x and y axis and is often 0.

u_0, v_0 - represent the pricipal points, which would be ideally in the center of the image.

Rotation + Translation

$$\begin{bmatrix} R_{3\times3} & T_{3\times1} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix}$$

R, T are the extrinsic parameters which denote the coordinates system transformation from 3D world coordinate to 3D camera coordinate.
The extrinsic parameters define the position of the camera center, and the camera heading in world coordinates.
T is the position of the origin of the world coordinate system.
Let P be a camera matrix representing a general projective camera.
The camera center C is the point which $PC = 0$

The most severe distortion than can arise from image of image process is a planar homography. The camera representing the image of image is HP, where H is the homography matrix.
Since H is non-singular, the left 3x3 submatrix of HP is non singular and can be decomposed as the product KR, where $\mu \neq 0$ in K.
K and R are no longer the calibration matrix and orientation of the original camera.
In addition the process of taking an image of image doesn't change the apparent camera centre: $HPC = 0 \iff PC = 0$ since H is non-singular.