从习题探讨边界和内部关系

1600017744　谢李文含

2018 年 1 月 5 日

某堂习题课上,助教介绍了 Brouwer 不动点理论及其简单应用. 利用那题构造函数的思路,可以证明更进一步的结论,它们并没有那么直观,沟通了内部与边界. 在此基础上,补充对另外两个习题的发现.

定理. 欧几里得空间中,每一个从某个给定的闭球射到它自己的连续函数都有至少一个不动点.

习题 1. 设 $B: x^2+y^2 \leq 1$, 则不存在 $g \in C: B \to \partial B, g\,|_{\partial B} = Id$.

证明. 用反证法. 假设这样的映射存在, 则取 $f: \partial B \to \partial B,\ f(x) = -x$; $F: B \to \partial B,\ F(x) = f(g(x))$. 则由 *Brouwer* 不动点定理, 存在 $x_0 \in B$ 使 $F(x_0) = x_0 \Rightarrow -g(x_0) = f(g(x_0)) = g(x_0)$, 但 $g(x_0)$ 位于圆盘边界, 由此产生矛盾.

推广 1. $g \in C: B_r \to \mathbb{R}^n$, 若 $g(x)x^T \geq 0, \forall x \in \partial\, B_r$, 则 $g(x)$ 在 B_r 上有零点.

证明. 用反证法. 假设 $g(x) = 0$ 无解, 那么令 $G: B_r \to \partial B_1,\ G(x) = -\frac{g(x)}{||g(x)||}$. 根据 *Brouwer* 不动点定理,$\exists\, x_0 \in B_1$ 使得 $G(x_0) = x_0$. 一方面, $G(x_0)x_0^T = -\frac{1}{||g(x_0)||}g(x_0)x_0^T \leq 0$; 另一方面, $G(x_0)x_0^T = x_0x_0^T > 0$ (取等号当且仅当 $x_0 = 0$, 但 $x_0 = g(x_0) \neq 0$), 产生矛盾, 则不可规范化 $g(x) \Rightarrow g(x)$ 存在零点.

推广 2. $F \in C: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 若 $lim_{||x|| \to \infty} \frac{<F(x),x>}{||x||} = +\infty$, 则 $F(x)$ 是满射.

证明. 用反证法. 假设存在 $y_0 \in \mathbb{R}^n$ 且 $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ F(x) \neq y_0$, 则构造函数 $f(x) = F(x) - y_0$, *f(x)=0* 无解. 由条件 $lim_{||x|| \to \infty} \frac{<F(x),x>}{||x||} = +\infty$ 知 $\exists r > 0\ s.t. \frac{<F(x),x>}{||x||} > 0, \forall x \in \partial B_r$, 由推广 *1* 知 *f(x)=0* 有解, 产生矛盾, 假设不成立, 因此 *F* 是满射.

小结: Brouwer 不动点定理给出了闭球上连续函数不动点的存在性,因此与之相关的结论往往着眼于一个局部. 在证明手法上,以上三个结论均是使用反证法,通过构造与已有条件产生矛盾的函数来完成证明. 特别地,连续函数介值性在其中发挥着很大的作用.

以上是对内积具有某种表现的映射在内部的性质进行讨论,那么应该可以在另一种性质刻画下得到映射内部的性质. 在其他题目中,能够初见一些端倪.

习题 2. $\mathbb{R}^2$ 空间上, 若有 $g \in C^1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (0,0) \notin\ g(\partial B_1)$, 计算 $\oint_{\partial B_1} \frac{g_1dg_2 - g_2dg_1}{g_1^2+g_2^2}$.

解. 令 $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, G(x) = g_1(x) + ig_2(x)$. 记 *g(x)* 张成的幅角为 θ, 因为 $g(\partial B_1) \neq (0,0)$, 则 $d(lnG(x)) = \frac{g_1dg_1+ig_2dg_2}{g_1+ig_2}$. 而 $d(\theta) = \boldsymbol{Im}d(lnG(x))$, 将其化简, 即知 $\oint_{\partial B_1} d(\theta) = \oint_{\partial B_1} \frac{(g_1dg_2-g_2dg_1)}{g_1^2+g_2^2}$. 由 *g* 之连续性, 从 ∂B_1 某点沿边界走一圈, 则相应的函数值将会在 $\mathbb{R}^2$ 上走整数圈. 那么 $\oint_{\partial B_1} d(\theta) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

为了表达的简洁,下面定义符号 $\gamma(\Gamma, f) := \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma \frac{f_1df_2-f_2df_1}{f_1^2+f_2^2}$, 其中 $f: D \to \mathbb{R}^2, D \subset \mathbb{R}^2$.

习题 3. $g \in C^1: B^2 \to B^2$ 若 $(0,0) \notin g(\partial B^2)$, 是否存在连续映射 $H: \partial B^2 \times I \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ 使得 $H(x,0) = x, H(x,1) = g(x)$?

解. 假设存在这样的 H. 对给定的 y,$h(x) = H(x, y)$ 圈数为整数. 当 y 连续从 *0* 变化到 *1* 时,$H(x, y)$ 的圈数, 即 $\gamma(B^2, H(*, y))$ 也是连续变化. 但圈数必为整数, 所以圈数保持不变.$\gamma(\partial B^2, g) = \gamma(\partial B^2, H(*, 1)) = \gamma(\partial B^2, H(*, 0)) = \gamma(\partial B^2, Id) = 1$. 因此, 只有当 $\gamma(\partial B^2, g) = 1$ 时, 满足要求的 H 才存在.

在求解以上两题的过程中, 发现圈数的概念和部分解题思路可以用于推广以下结论.

推广 3. $g \in C^1 : B_r^2 \to \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0), r \in \mathbb{R}^*$, 若 $\gamma(\partial B_r^2, g) = 1$, 则 g 零点存在.

证明. 用反证法. 设 $H : [0, 2\pi] \times [0, r] \to \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0), H(\theta, l) = g(lcos\theta, lsin\theta)$. 假设 *g* 不存在零点, 则 H 可求圈数.$\gamma(B_r, H(*, r)) = \gamma(\partial B_r^2, g) = 1$. 当 *l* 连续从 *r* 趋近于 *0* 时, 同理 $\gamma(B_l, H(*, l)) = 1$. $l \to 0$ 时,$H(\theta, l) \to g(0, 0)$. 倘若 $g(0, 0) \neq (0, 0)$, 则 $\gamma(B_l, H(*, l)) = 0$, 矛盾. 则 $g(0, 0) = (0, 0)$. 这与假设矛盾. 故 g 存在零点.

这个小结论可以作为引理, 来证明习题 1 在 $g \in C^1$ 的情况; 同时, 由于这个结论不依赖于 Brouwer 不动点定理, 也可以作为结论来证明二维 Brouwer 不动点定理的经典证明中的关键引理.

对于高维的情况, 应该有类似的结论. 可想而知, "圈数" 的定义需要作一定的推广, 几何直观也将不再那么明显, 在此就不展开探索了.