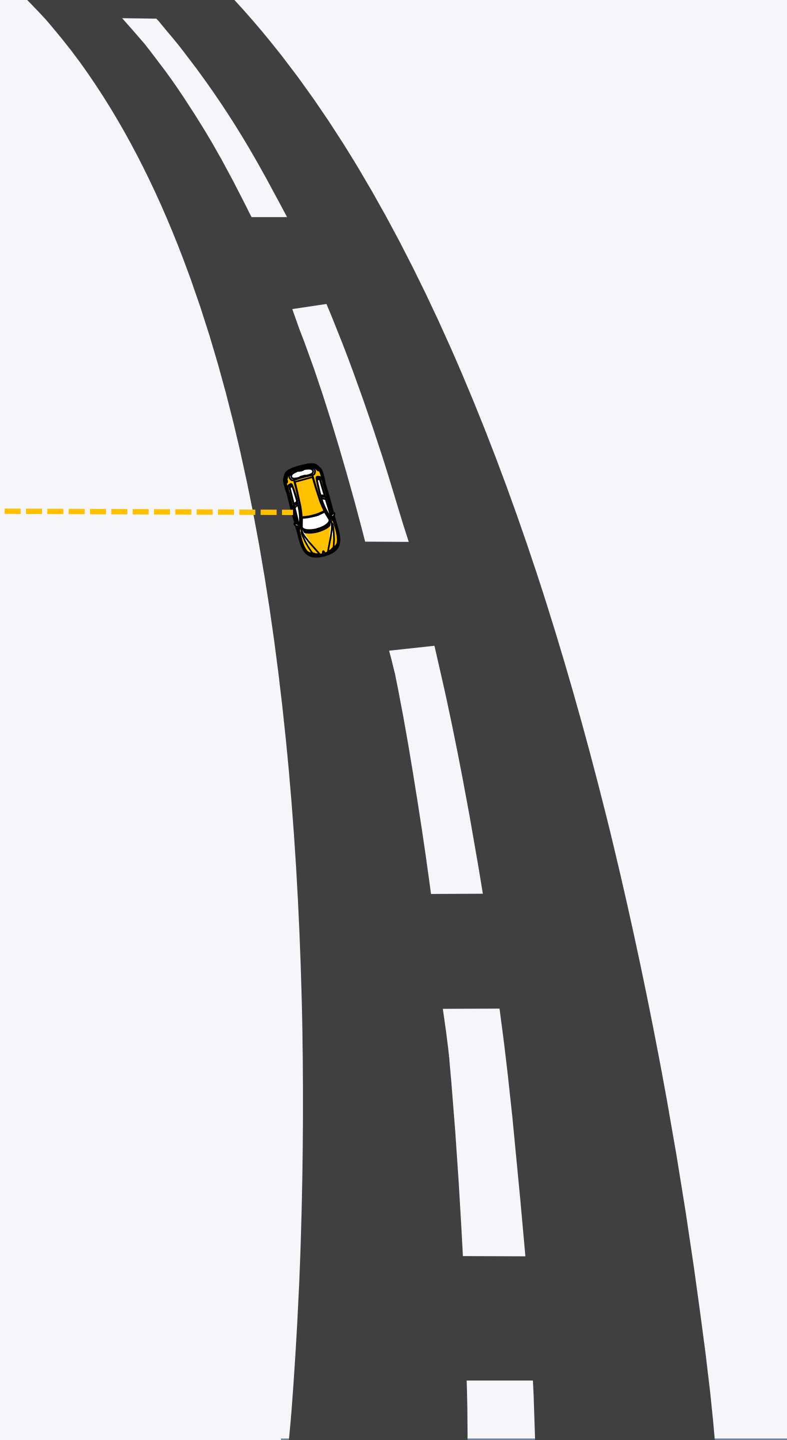
深度之眼
deepshare.net

# 数学基础—概率论

导师：Johnson

# 主要内容

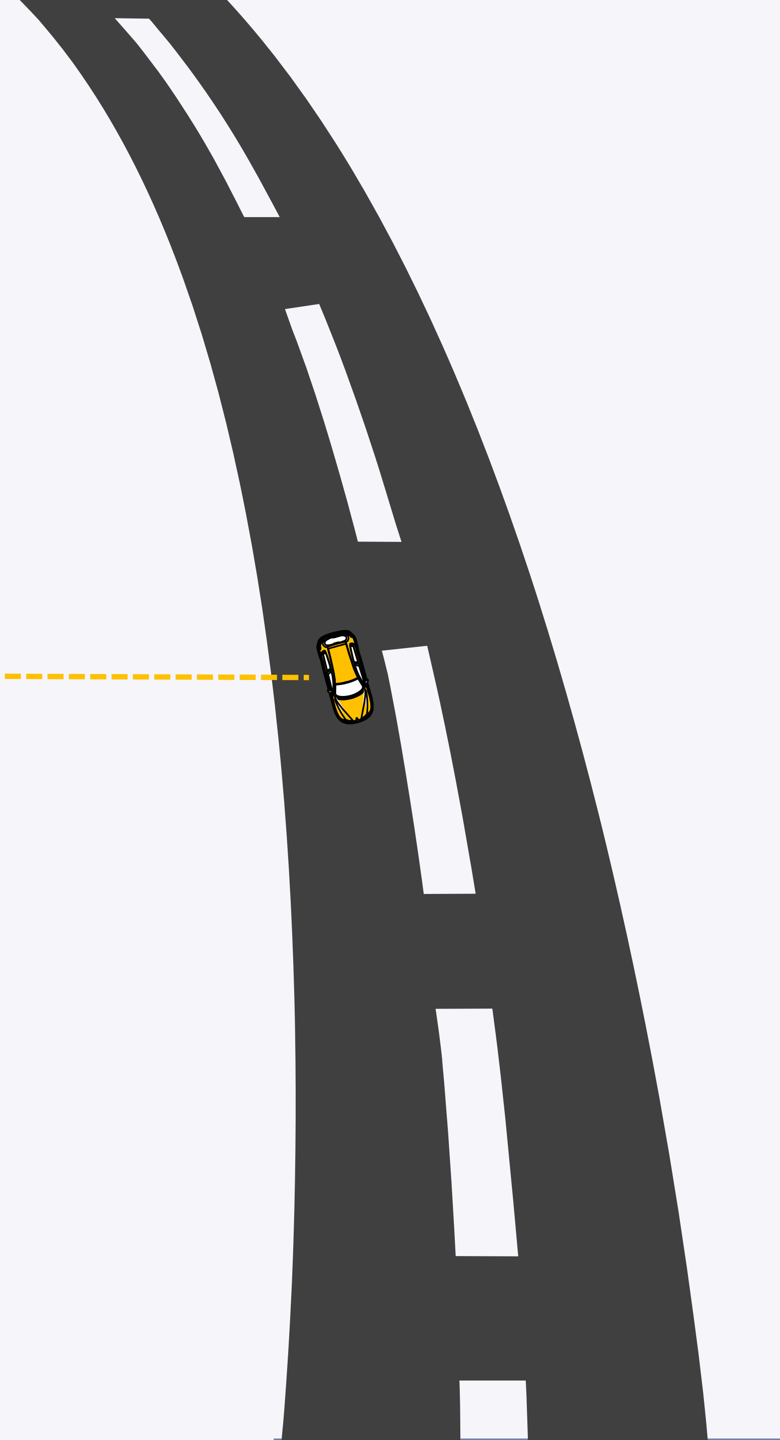
- **概率论**
  - **概率基础**
    - 1.随机试验样本空间和随机事件
    - 2.概率的定义
    - 3.条件概率与乘法公式
    - 4.全概率公式与贝叶斯公式以及应用
    - 5.独立性
  - **随机变量与多维随机变量**
    - 1.离散随机变量
    - 2.连续随机变量
    - 3.多维随机变量
    - 4.边缘分布和条件分布
    - 5.独立性
  - **期望与方差**
    - 1.期望与方差的定义
    - 2.常用随机变量期望与方差的计算
    - 3.期望与方差的性质
    - 4.协方差与协方差矩阵
  - **参数的估计**
    - 1.矩估计
    - 2.极大似然估计
    - 3.最大后验估计



# 主要内容

**概率论**

- **概率基础**
  - 1.随机试验样本空间和随机事件
  - 2.概率的定义
  - 3.条件概率与乘法公式
  - 4.全概率公式与贝叶斯公式以及应用
  - 5.独立性
- **随机变量与多维随机变量**
  - 1.离散随机变量
  - 2.连续随机变量
  - 3.多维随机变量
  - 4.边缘分布和条件分布
  - 5.独立性
- **期望与方差**
  - 1.期望与方差的定义
  - 2.常用随机变量期望与方差的计算
  - 3.期望与方差的性质
  - 4.协方差与协方差矩阵
- **参数的估计**
  - 1.矩估计
  - 2.极大似然估计
  - 3.最大后验估计



# 离散随机变量



**一.0-1分布：**

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P_k$ | 1-p | p |

验证满足概率的3个条件

**二.伯努利试验，二项分布：**

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

# 离散随机变量



**三：泊松分布**

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots,$$

具有泊松分布的随机变量在实际应用中是很多的。

例如，一本书一页中的印刷错误数、某地区在一天内邮递遗失的信件数、某一医院在一天内的急诊病人数、某一地区一个时间间隔内发生交通事故的次数、在一个时间间隔内某种放射性物质发出的、经过计数器的$\alpha$粒子数等都服从泊松分布。

泊松分布也是概率论中的一种重要分布。

# 连续随机变量

**分布函数：** $F(x) = P(X \leq x)$

$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

**分布函数$F(x)$具有以下的基本性质：**

$1°F(x)$是一个不减函数.

事实上，对于任意实数$x_1, x_2(x_1 < x_2)$，有

$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0.$

$2°0 \leq F(x) \leq 1$，且

$F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,$

$F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

# 连续随机变量



**例1** 一个靶子是半径为$2m$的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以$X$表示弹着点与圆心的距离.试求随机变量$X$的分布函数.

**解** 若$x<0$，则$\{X\le x\}$是不可能事件，于是 $F(x)=P\{X\le x\}=0.$

若$0\le x\le 2$，由题意，$P\{0\le X\le x\}=kx^2$，$k$是某一常数，为了确定$k$的值，取$x=2$，有$P\{0\le X\le 2\}=2^2k$，但已知$P\{0\le X\le 2\}=1$，故得$k=1/4$，即

$$P\{0\le X\le x\}=\frac{x^2}{4}.$$

于是 $$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X<0\}+P\{0\le X\le x\}=\frac{x^2}{4}.$$

若$x\ge 2$，由题意$\{X\le x\}$是必然事件，于是 $F(x)=P\{X\le x\}=1.$

综合上述，即得$X$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{4}, & 0\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

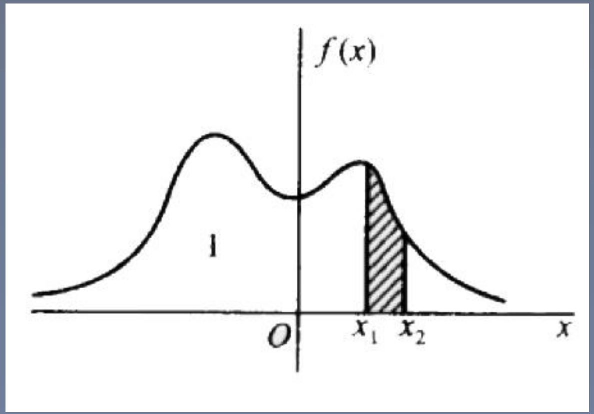
# 连续随机变量



一般，如上节例1中的随机变量那样，如果对于随机变量$X$的分布函数$F(x)$，存在非负函数$f(x)$，使对于任意实数$x$有$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$，

则称$X$为连续型随机变量，其中函数$f(x)$称为$X$的概率密度函数，简称概率密度.

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{P\{x<X\le x+\Delta x\}}{\Delta x}.$$




**f(x)满足哪些性质?**

# 连续随机变量



## （一）均匀分布

若连续型随机变量$X$具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称$X$在区间$(a,b)$上服从均匀分布.记为$X\sim U(a,b)$.

## （二）指数分布

若连续型随机变量$X$的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中$\theta>0$为常数，则称$X$服从参数为$\theta$的指数分布.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$$

令$t=-\dfrac{x}{\theta}$ $\Rightarrow dx=-\theta dt$

$$=\int_0^{-\infty}\frac{1}{\theta}e^{t}(-\theta)dt$$

$$=-\int_0^{-\infty}e^{t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{t}dt$$

$$=e^{t}\Big|_{-\infty}^{0}=e^{0}-e^{-\infty}=1$$

# 连续随机变量

## （三）正态分布

正态分布是重点!!!


若连续型随机变量$X$的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<\infty,$$

其中$\mu,\sigma(\sigma>0)$为常数，则称$X$服从参数为$\mu,\sigma$的正态分布或高斯(Gauss)分布，记为$\boldsymbol{X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)}$.

引理 若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

# 随机变量函数的分布

**例1** 设随机变量$X$具有以下的分布律，试求$Y=(X-1)^2$的分布律.

| $X$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $P_k$ | 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0.4 |

**解** $Y$所有可能取的值为0,1,4，由

$$P\{Y=0\}=P\{(X-1)^2=0\}=P\{X=1\}=0.1,$$
$$P\{Y=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.7,$$
$$P\{Y=4\}=P\{X=-1\}=0.2,$$

即得$Y$的分布律为

| $Y$ | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| $P_k$ | 0.1 | 0.7 | 0.2 |

# 多维随机变量

**定义** 设$(X, Y)$是二维随机变量，对于任意实数$x, y$，二元函数：

$$F(x, y) = P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\} \stackrel{\text{def}}{=} P\{X \le x, Y \le y\}$$

称为二维随机变量$(X, Y)$的分布函数，或称为随机变量$X$和$Y$的联合分布函数.

# 多维随机变量

**例1** 设随机变量$X$在1,2,3,4四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量$Y$在$1\sim X$中等可能地取一整数值.试求$(X,Y)$的分布律.

**解** 由乘法公式容易求得$(X,Y)$的分布律.易知$\{X=i,Y=j\}$的取值情况是：$i=1,2,3,4$，$j$取不大于$i$的正整数，且

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j|X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4},i=1,2,3,4,j\le i.$$

于是$(X,Y)$的分布律为

| Y \ X | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 4 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{16}$ |

$$p_{ij}\ge 0,\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1.$$

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

# 多维随机变量

深度之眼
deepshare.net

与一维随机变量相似，对于二维随机变量$(X,Y)$的分布函数$F(x,y)$，如果存在非负的函数$f(x,y)$使对于任意$x,y$有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$$

1. $f(x,y)\geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=F(\infty,\infty)=1$.
3. 设$G$是$xOy$平面上的区域，点$(X,Y)$落在$G$内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_{G}f(x,y)dxdy.$$

4. 若$f(x,y)$在点$(x,y)$连续，则有

$$\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y).$$

# 边缘分布和条件分布



$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},\qquad i=1,2,\cdots.\qquad P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},\qquad j=1,2,\cdots.$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy.\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx.$$

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},i=1,2,\cdots.$$

**易知上述条件概率具有分布律的性质：**

1. $P\{X=x_i|Y=y_j\}\geq 0;$
2. $\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i|Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=\frac{1}{p_{\cdot j}}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=\frac{p_{\cdot j}}{p_{\cdot j}}=1.$

**条件概率密度：**

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

# 独立性



**连续型：** $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

**离散型：** $P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$

深度之眼
deepshare.net

联系我们:

电话：18001992849

邮箱：service@deepshare.net

Q Q： 2677693114

公众号

客服微信