深度之眼
deepshare.net

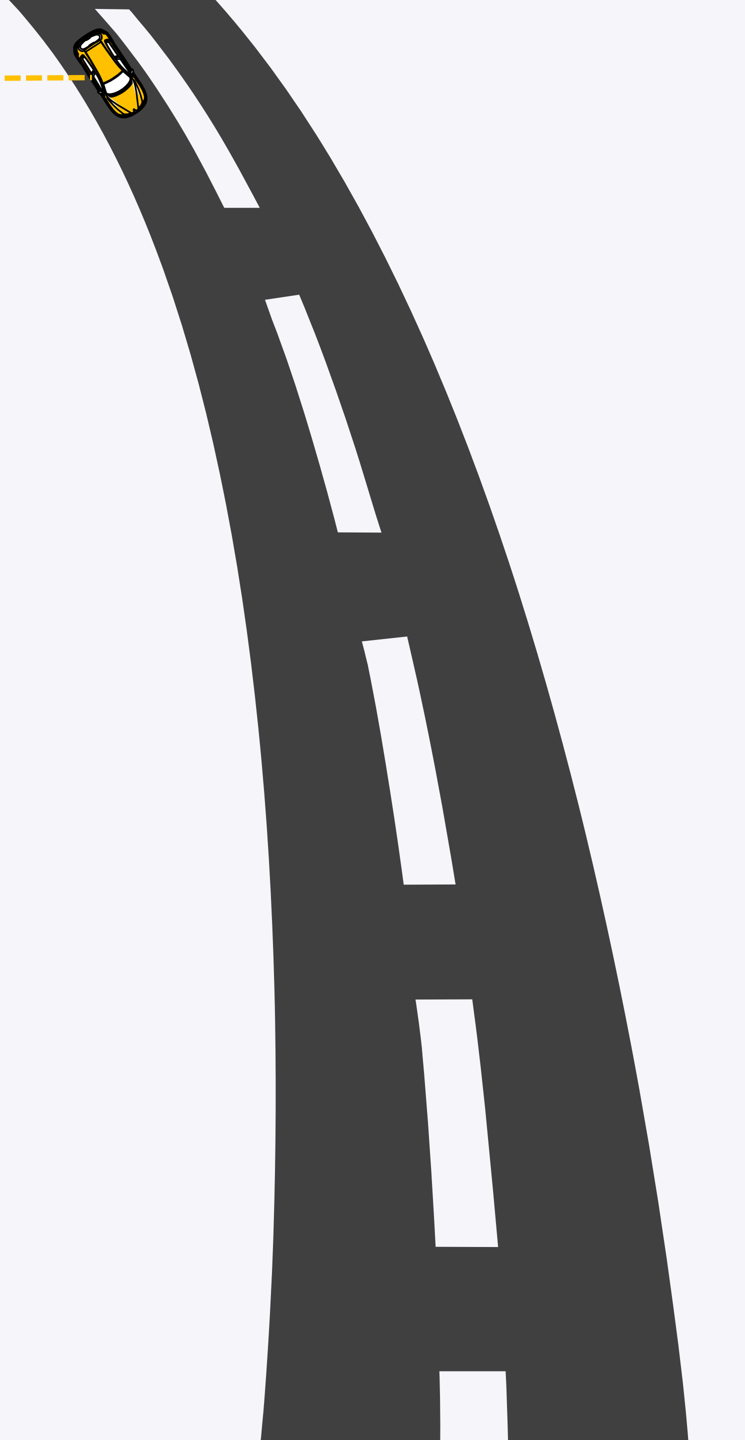
数学基础—线性代数

导师：Johnson

主要内容

线性代数（下）

- P4:矩阵的初等变换
  - 1.初等变换的引入
  - 2.三种矩阵的初等变换以及对应的三种初等矩阵，矩阵的标准
  - 3.初等变换的常用性质与矩阵逆矩阵的另外一种简单求法
  - 4.矩阵秩的定义以及性质
  - 5.线性方程组解的个数
  - 6.矩阵的秩在机器学习线性回归算法中的运用
- P5:矩阵的特征值与特征向量
  - 1.向量的线性相关，线性无关以及和可逆矩阵的关系
  - 2.向量的内积，范数，正交，规范正交基
  - 3.施密特正交化
  - 4.特征值和特征向量的定义以及直观的意义
  - 5.特征值与特征向量的求法以及常用性质
- P6:矩阵对角化以及二次型
  - 1.相似矩阵的定义以及矩阵的对角化
  - 2.矩阵对角化的条件以及对称矩阵的对角化
  - 3.对角化在数据压缩算法中的应用
  - 4.二次型与矩阵的正定性
  - 5.矩阵的正定性在机器学习线性回归算法中的运用
- SVD分解及应用
  - 1.SVD分解的证明上
  - 2.SVD分解的证明上
  - 3.SVD分解的应用:图像压缩算法
  - 4.SVD分解的应用:深度学习的加速



主要内容

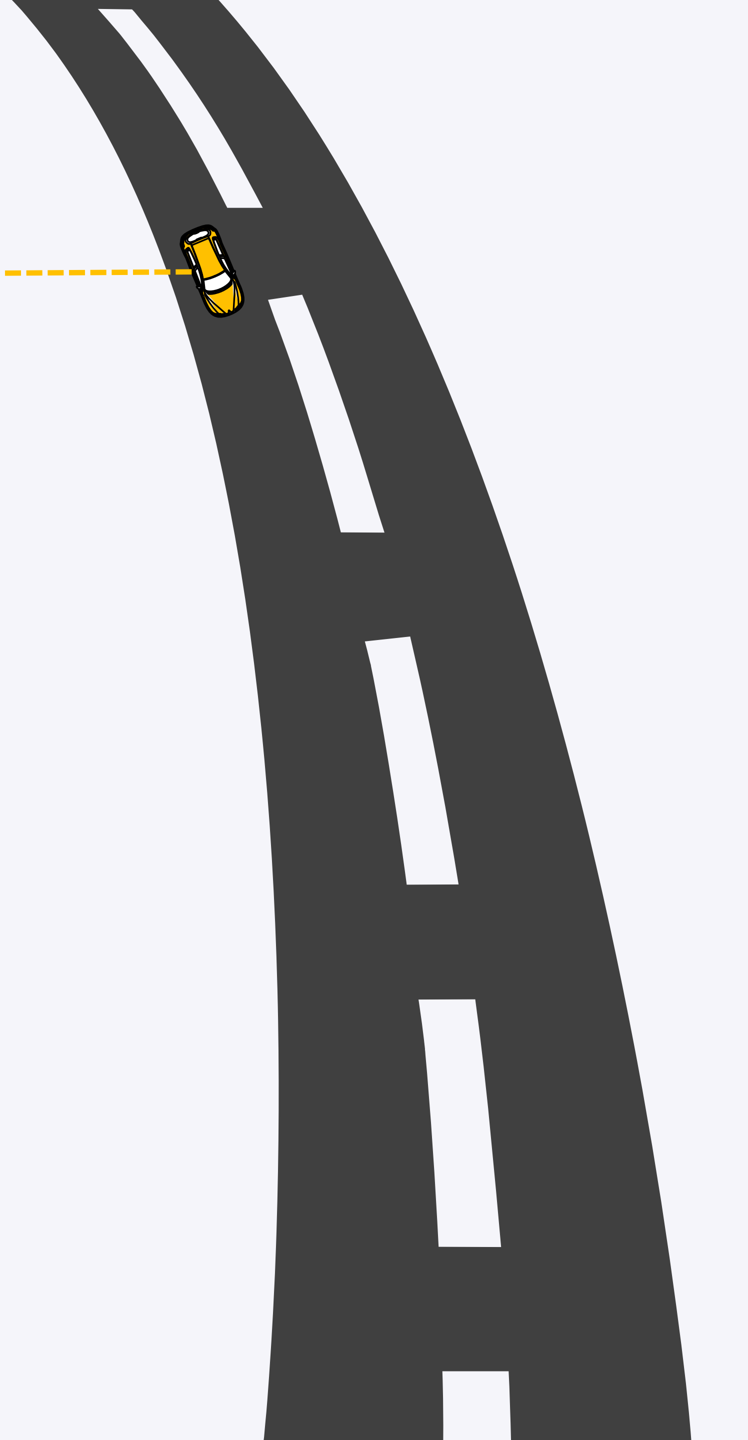
线性代数（下）

- P4:矩阵的初等变换
  - 1.初等变换的引入
  - 2.三种矩阵的初等变换以及对应的三种初等矩阵，矩阵的标准
  - 3.初等变换的常用性质与矩阵逆矩阵的另外一种简单求法
  - 4.矩阵秩的定义以及性质
  - 5.线性方程组解的个数
  - 6.矩阵的秩在机器学习线性回归算法中的运用
- P5:矩阵的特征值与特征向量
  - 1.向量的线性相关，线性无关以及和可逆矩阵的关系
  - 2.向量的内积，范数，正交，规范正交基
  - 3.施密特正交化
  - 4.特征值和特征向量的定义以及直观的意义
  - 5.特征值与特征向量的求法以及常用性质
- P6:矩阵对角化以及二次型
  - 1.相似矩阵的定义以及矩阵的对角化
  - 2.矩阵对角化的条件以及对称矩阵的对角化
  - 3.对角化在数据压缩算法中的应用
  - 4.二次型与矩阵的正定性
  - 5.矩阵的正定性在机器学习线性回归算法中的运用
- SVD分解及应用
  - 1.SVD分解的证明上
  - 2.SVD分解的证明上
  - 3.SVD分解的应用:图像压缩算法
  - 4.SVD分解的应用:深度学习的加速

主要内容

线性代数（下）

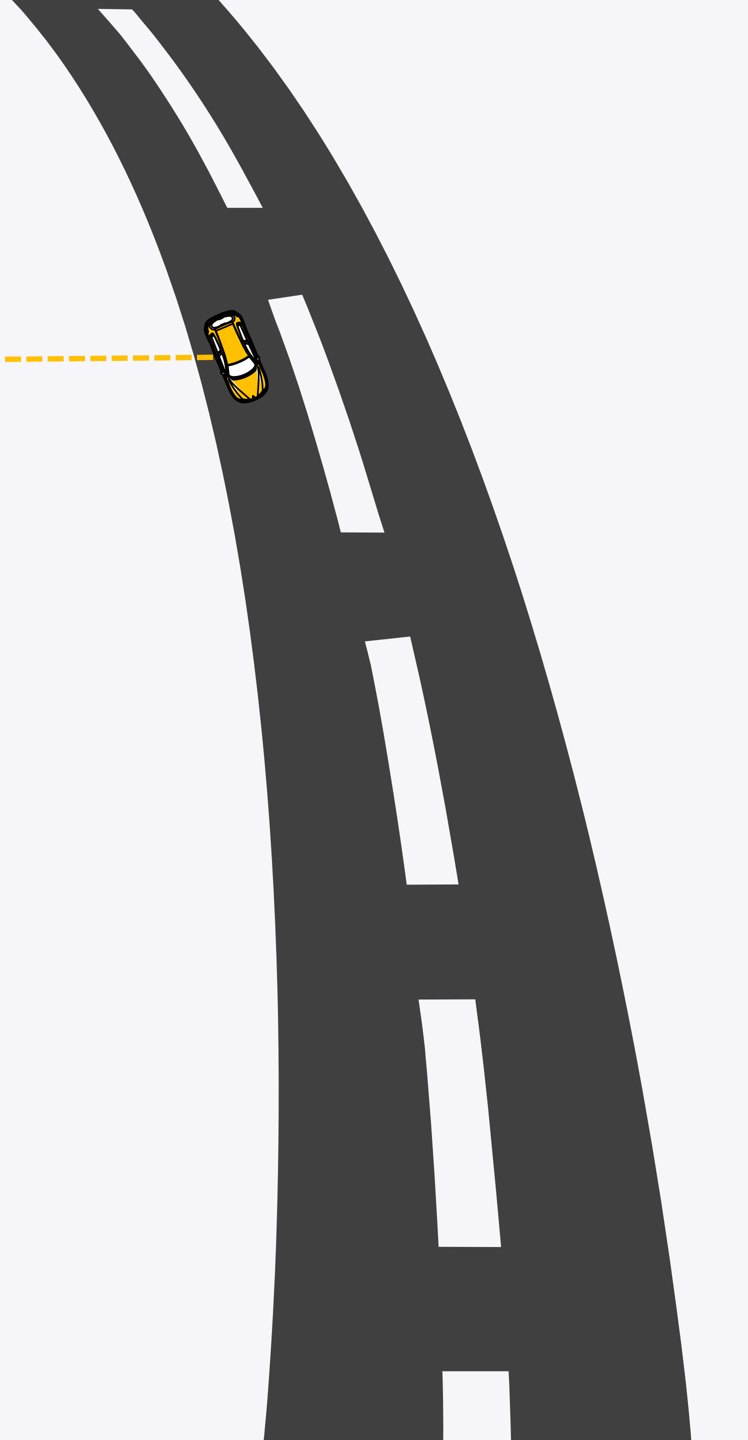
- **P4:矩阵的初等变换**
  - 1.初等变换的引入
  - 2.三种矩阵的初等变换以及对应的三种初等矩阵，矩阵的标准
  - 3.初等变换的常用性质与矩阵逆矩阵的另外一种简单求法
  - 4.矩阵秩的定义以及性质
  - 5.线性方程组解的个数
  - 6.矩阵的秩在机器学习线性回归算法中的运用
- **P5:矩阵的特征值与特征向量**
  - 1.向量的线性相关，线性无关以及和可逆矩阵的关系
  - 2.向量的内积，范数，正交，规范正交基
  - 3.施密特正交化
  - 4.特征值和特征向量的定义以及直观的意义
  - 5.特征值与特征向量的求法以及常用性质
- **P6:矩阵对角化以及二次型**
  - 1.相似矩阵的定义以及矩阵的对角化
  - 2.矩阵对角化的条件以及对称矩阵的对角化
  - 3.对角化在数据压缩算法中的应用
  - 4.二次型与矩阵的正定性
  - 5.矩阵的正定性在机器学习线性回归算法中的运用
- **SVD分解及应用**
  - 1.SVD分解的证明上
  - 2.SVD分解的证明上
  - 3.SVD分解的应用:图像压缩算法
  - 4.SVD分解的应用:深度学习的加速



主要内容

线性代数（下）

- P4:矩阵的初等变换
  - 1.初等变换的引入
  - 2.三种矩阵的初等变换以及对应的三种初等矩阵，矩阵的标准
  - 3.初等变换的常用性质与矩阵逆矩阵的另外一种简单求法
  - 4.矩阵秩的定义以及性质
  - 5.线性方程组解的个数
  - 6.矩阵的秩在机器学习线性回归算法中的运用
- P5:矩阵的特征值与特征向量
  - 1.向量的线性相关，线性无关以及和可逆矩阵的关系
  - 2.向量的内积，范数，正交，规范正交基
  - 3.施密特正交化
  - 4.特征值和特征向量的定义以及直观的意义
  - 5.特征值与特征向量的求法以及常用性质
- P6:矩阵对角化以及二次型
  - 1.相似矩阵的定义以及矩阵的对角化
  - 2.矩阵对角化的条件以及对称矩阵的对角化
  - 3.对角化在数据压缩算法中的应用
  - 4.二次型与矩阵的正定性
  - 5.矩阵的正定性在机器学习线性回归算法中的运用
- SVD分解及应用
  - 1.SVD分解的证明上
  - 2.SVD分解的证明上
  - 3.SVD分解的应用:图像压缩算法
  - 4.SVD分解的应用:深度学习的加速



初等变换的引入

深度之眼 deepshare.net

引例 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \qquad (1)$$

解

$$(1) \xrightarrow[③\div 2]{①\leftrightarrow②} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \qquad (B_1)$$

$$\xrightarrow[\substack{③-2①\\④-3①}]{②-③} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④ \end{cases} \qquad (B_2)$$

$$\xrightarrow[\substack{③+5②\\④-3②}]{②\times\frac{1}{2}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3. & ④ \end{cases} \qquad (B_3)$$

$$\xrightarrow[④-2③]{③\leftrightarrow④} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & ③ \\ 0 = 0. & ④ \end{cases} \qquad (B_4)$$

三种矩阵的初等变换以及对应的三种初等矩阵，矩阵的标准形

三种矩阵的初等变换

定义 下面三种变换称为矩阵的初等行变换：

有没有似曾相识？

(i)对调两行(对调i,j两行，记作$r_i \leftrightarrow r_j$)；

(ii)以数$k \neq 0$乘某一行中的所有元素(第i行乘k，记作$r_i \times k$)；

(iii)把某一行所有元素的k倍加到另一行对应的元素上去(第j行的k倍加到第i行上，记作$r_i + kr_j$).

把定义中的“行”换成“列”，即得矩阵的初等列变换的定义(所用记号是把“r”换成“c”).

矩阵的初等行变换与初等列变换，统称初等变换.

三种矩阵的初等变换以及对应的三种初等矩阵，矩阵的标准形

深度之眼
deepshare.net

三种矩阵的初等变换

显然，三种初等变换都是**可逆的**，且其**逆变换是同一类型的初等变换**；

变换$r_i \leftrightarrow r_j$**的逆变换就是其本身**；

变换$r_i \times k$**的逆变换为**$r_i \times \left(\frac{1}{k}\right)$**(或记作**$r_i \div k$**)**；

变换$r_i + kr_j$**的逆变换为**$r_i + (-k)r_j$**(或记作**$r_i - kr_j$**)**.

如果矩阵A经有限次初等行变换变成矩阵B，就称矩阵A与B行等价，记作$A\overset{r}{\sim}B$；
如果矩阵A经有限次初等列变换变成矩阵B，就称矩阵A与B列等价，记作$A\overset{c}{\sim}B$；
如果矩阵A经有限次初等变换变成矩阵B，就称矩阵A与B等价，记作$A\sim B$.

矩阵之间的等价关系具有下列性质：

(i)反身性 $A\sim A$；

(ii)对称性 若$A\sim B$**，则**$B\sim A$；

(iii)传递性 若$A\sim B$**，**$B\sim C$**，则**$A\sim C$.

三种矩阵的初等变换以及对应的三种初等矩阵，矩阵的标准形

深度之眼 deepshare.net

三种矩阵的初等变换

$$B=\begin{bmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}$$

$$\underset{r_3\div 2}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\2&-3&1&-1&2\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}=B_1$$

$$\underset{r_4-3r_1}{\overset{\substack{r_2-r_3\\r_3-2r_1}}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{bmatrix}=B_2$$

$$\underset{r_4-3r_2}{\overset{\substack{r_2\div 2\\r_3+5r_2}}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{bmatrix}=B_3$$

$$\underset{r_4-2r_3}{\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=B_4$$

$$B_4\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1-r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=B_5$$

B_5对应方程组

$$\begin{cases}x_1-x_3=4,\\x_2-x_3=3,\\x_4=-3,\end{cases}$$

取x_3为自由未知数，并令$x_3=c$，即得

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c+4\\c+3\\c\\-3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\3\\0\\-3\end{bmatrix},$$

其中c为任意常数.

三种矩阵的初等变换以及对应的三种初等矩阵，矩阵的标准形

矩阵的标准形

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{c_5 - 4c_1 - 3c_2 + 3c_3}{\overset{\substack{c_3 \leftrightarrow c_4 \\ c_4 + c_1 + c_2}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F,$$

矩阵F称为矩阵B的标准形，其特点是：**F的左上角是一个单位矩阵，其余元素全为0.**

对于$m \times n$矩阵A，总可经过初等变换（行变换和列变换）把它化为标准形

$$F = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m \times n}$$

三种矩阵的初等变换以及对应的三种初等矩阵，矩阵的标准形

三种初等矩阵

$$E(i,j)=\begin{bmatrix}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&0&&\cdots&&1&&&\\&&&&1&&&&&&\\&&&\vdots&&\ddots&&\vdots&&&\\&&&&&&1&&&&\\&&&1&&\cdots&&0&&&\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \leftarrow 第i行\\ \\ \\ \\ \leftarrow 第j行\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$E(i(k))=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&k&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \leftarrow 第i行\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$E(ij(k))=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \leftarrow 第i行\\ \\ \leftarrow 第j行\\ \\ \\ \end{matrix}$$

三种矩阵的初等变换以及对应的三种初等矩阵，矩阵的标准形

三种初等矩阵

性质1 设A是一个$m \times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘以相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于在A的右边乘以相应的n阶初等矩阵.

性质2 方阵A可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_i$，使$A = P_1 P_2 \cdots P_i$.

推论 方阵A可逆的充分必要条件是$A \overset{r}{\sim} E$. 非常重要!!! 非常重要!!!

深度之眼
deepshare.net

初等变换的常用性质以及逆矩阵的另外一种简单求法

常用性质

性质1 设A是一个$m \times n$矩阵，对A施行一次初等行变换，相当于在A的左边乘以相应的m阶初等矩阵；对A施行一次初等列变换，相当于在A的右边乘以相应的n阶初等矩阵.

性质2 方阵A可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_i$，使$A = P_1 P_2 \cdots P_i$.

推论 **方阵A可逆的充分必要条件是$A \overset{r}{\sim} E$.** 非常重要!!!

定理 设A与B为$m \times n$矩阵，那么：

$(i) A \overset{r}{\sim} B$的充分必要条件是存在$m$阶可逆矩阵$P$；使$PA = B$；

$(ii) A \overset{c}{\sim} B$的充分必要条件使存在$n$阶可逆矩阵$Q$，使$AQ = B$；

$(iii) A \sim B$的充分必要条件使存在m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩阵Q，使$PAQ = B$.

初等变换的常用性质以及逆矩阵的另外一种简单求法

深度之眼 deepshare.net

矩阵逆的简单求法

例 设$A=\begin{bmatrix}0&-2&1\\3&0&-2\\-2&3&0\end{bmatrix}$，证明$A$可逆，并求$A^{-1}$.

$$(A,E)=\begin{bmatrix}0&-2&1&1&0&0\\3&0&-2&0&1&0\\-2&3&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\underset{r_1\leftrightarrow r_2}{\overset{\substack{r_3\times 3\\ r_3+2r_2}}{\sim}}\begin{bmatrix}3&0&-2&0&1&0\\0&-2&1&1&0&0\\0&9&-4&0&2&3\end{bmatrix}\underset{r_3+9r_2}{\overset{r_3\times 2}{\sim}}\begin{bmatrix}3&0&-2&0&1&0\\0&-2&1&1&0&0\\0&0&1&9&4&6\end{bmatrix}$$

$$\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1+2r_3}{\sim}}\begin{bmatrix}3&0&0&18&9&12\\0&-2&0&-8&-4&-6\\0&1&1&9&4&6\end{bmatrix}\underset{r_2\div(-2)}{\overset{r_1\div 3}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&0&6&3&4\\0&1&0&4&2&3\\0&0&1&9&4&6\end{bmatrix}$$

因$A\overset{r}{\sim}E$，故A可逆，且$A^{-1}=\begin{bmatrix}6&3&4\\4&2&3\\9&4&6\end{bmatrix}$.

矩阵秩的定义及性质

定义 在$m \times n$矩阵A中，任取k行于与k列$(k \le m, k \le n)$，位于这些行列交叉处的k^2个元素，不改变它们在A中所处的位置次序而得的k阶行列式，称为矩阵A的k阶子式.

$m \times n$矩阵A的k阶子式共有$C_m^k \cdot C_n^k$个.

定义 设在矩阵A中有一个不等于0的r阶子式D，且所有$r+1$阶子式（如果存在的话）全等于0，那么D称为矩阵A的最高阶非零子式，数r称为矩阵A的秩，记作$R(A)$.并规定零矩阵的秩等于0.

显然，若A为$m \times n$矩阵，则$0 \le R(A) \le min\{m, n\}$.

由于行列式与其转置行列式相等，因此A^T的子式与A的子式对应相等，从而$R(A^T) = R(A)$.

对于n阶矩阵A，由于A的n阶子式只有一个$|A|$，故当$|A| \ne 0$时$R(A) = n$，当$|A| = 0$时$R(A) < n$.

可见**可逆矩阵的秩等于矩阵的阶数，不可逆矩阵的秩小于矩阵的阶数**.因此，**可逆矩阵又称满秩矩阵，不可逆矩阵（奇异矩阵）又称降秩矩阵.**

矩阵秩的定义及性质

深度之眼
deepshare.net

例 求矩阵A和B的秩，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&-1&0&3&-2\\0&3&1&-2&5\\0&0&0&4&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

解 在A中，容易看出一个2阶子式$\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}\neq 0$，$A$的3阶子式只有一个$|A|$，经计算可知$|A|=0$，因此$R(A)=2$.

B是一个行阶梯形矩阵，其非零行有3行，即知B的所有4阶子式全为零.而以三个非零行的第一个非零元为对角元的3阶行列式

$$\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&3&-2\\0&0&4\end{vmatrix}$$

是一个上三角形行列式，它显然不等于0，因此$R(B)=3$.

从本例可知，对于一般的矩阵，当行数与列数较高时，按定义求秩式很麻烦的，然而对于行阶梯形矩阵，它的秩就等于非零行的行数，一看便知毋须计算.因此自然想到用初等变换把矩阵化为行阶梯形矩阵，但两个等价矩阵的秩是否相等呢？

下面的定理　对此作出肯定的回答.

矩阵秩的定义及性质

深度之眼 deepshare.net

Rank of matrix

定理 若$A \sim B$，则$R(A) = R(B)$

推论 若可逆矩阵P, Q使$PAQ = B$，则$R(A) = R(B)$

例 设$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. 求矩阵A及矩阵$B = (A, b)$的秩.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \underset{r_4 - 3r_1}{\overset{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 2r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4 + 3r_2}{\overset{\substack{r_2 \div 2 \\ r_3 - r_2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_4 - r_3}{\overset{r_3 \div 5}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此，

$$R(\boldsymbol{A}) = 2, R(\boldsymbol{B}) = 3.$$

从矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行阶梯形矩阵可知，本例中的 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所对应的线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 是无解的，这是因为行阶梯形矩阵的第 3 行表示矛盾方程 $0 = 1$.

矩阵秩的定义及性质

①$0 \le R(A_{m\times n}) \le min|m,n|$;

②$R(A^T) = R(A)$;

③若$A\sim B$，则$R(A) = R(B)$;

④若P、Q可逆，则$R(PAQ) = R(A)$.

非常重要!!!

下面再介绍几个常用的矩阵秩的性质：

⑤$max\{R(A),R(B)\} \le R(A,B) \le R(A)+R(B)$,

特别地，当$B=b$为非零列向量时，有

$$R(A) \le R(A,b) \le R(A)+1.$$

⑥$R(A+B) \le R(A)+R(B)$.

$$R(A+B) \le R(A+B,B) = R(A,B) \le R(A)+R(B).$$

A为$n\times n$方阵

则 A可逆$\Leftrightarrow |A| \ne 0 \Leftrightarrow A\sim E \Leftrightarrow rank(A)=n$

⑦$R(AB) \le min\{R(A),R(B)\}$.

非常重要,用的非常多!!!

⑧若$A_{m\times n}B_{n\times i}=O$，则$R(A)+R(B) \le n$

线性方程组解的个数

设有n个未知数m个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (3)$$

(3)式可以写成以向量x为未知元的向量方程

$$Ax = b, \quad (4)$$

定理3 n元线性方程组$Ax = b$

(i)无解的充分必要条件是$R(A) < R(A, b)$；

(ii)有唯一解的充分必要条件是$R(A) = R(A, b) = n$；

(iii)有无限多解的充分必要条件是$R(A) = R(A, b) < n$.

定理4 n元齐次线性方程组$Ax = 0$有非零解的充分必要条件是$R(A) < n$.

定理5 线性方程组$Ax = b$有解的充分必要条件是$R(A) = R(A, b)$.

矩阵秩在机器学习线性回归算法中的应用(中级)

$x_1, x_2, \cdots, x_N, x_i \in \mathbb{R}^n$

$y_1, y_2, \cdots, y_N, y_i \in \mathbb{R}^1$

$y_1 = x_{11}a_1 + x_{12}a_2 + \cdots + x_{1n}a_n$

$y_2 = x_{21}a_1 + x_{22}a_2 + \cdots + x_{2n}a_n$

$\vdots$

$y_N = x_{N1}a_1 + x_{N2}a_2 + \cdots + x_{Nn}a_n$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$X_{N\times n}a_{n\times 1} = Y_{N\times 1}$

当$N = n$且$X_{N\times n}$可逆时：

$a = X^{-1}Y$

一般情况：$N \neq \mathrm{n}$

$\min\|xa - Y\|^2 = J \qquad \dfrac{\partial J}{\partial a} = x^T(xa - Y) = 0$

$x^Txa = x^TY \qquad x^Tx$是否可逆？

$1. \mathrm{N} > \mathrm{n}$

如$N = 5, n = 3 \quad (x^Tx)_{3\times 3}$一般是可逆的

$a = \underbrace{(x^Tx)^{-1}x^T}_{\text{伪逆}}Y$

$2. N < n$

如$N = 3, n = 5 \quad (x^Tx)_{5\times 5}$

$R(x^Tx) \le R(x) \le 3$

故x^Tx不可逆

补充：$R(AB) \ll R(A)$ $or R(B)$

深度之眼
deepshare.net

联系我们:

电话：18001992849

邮箱：service@deepshare.net

Q Q： 2677693114

公众号

客服微信