深度之眼
deepshare.net

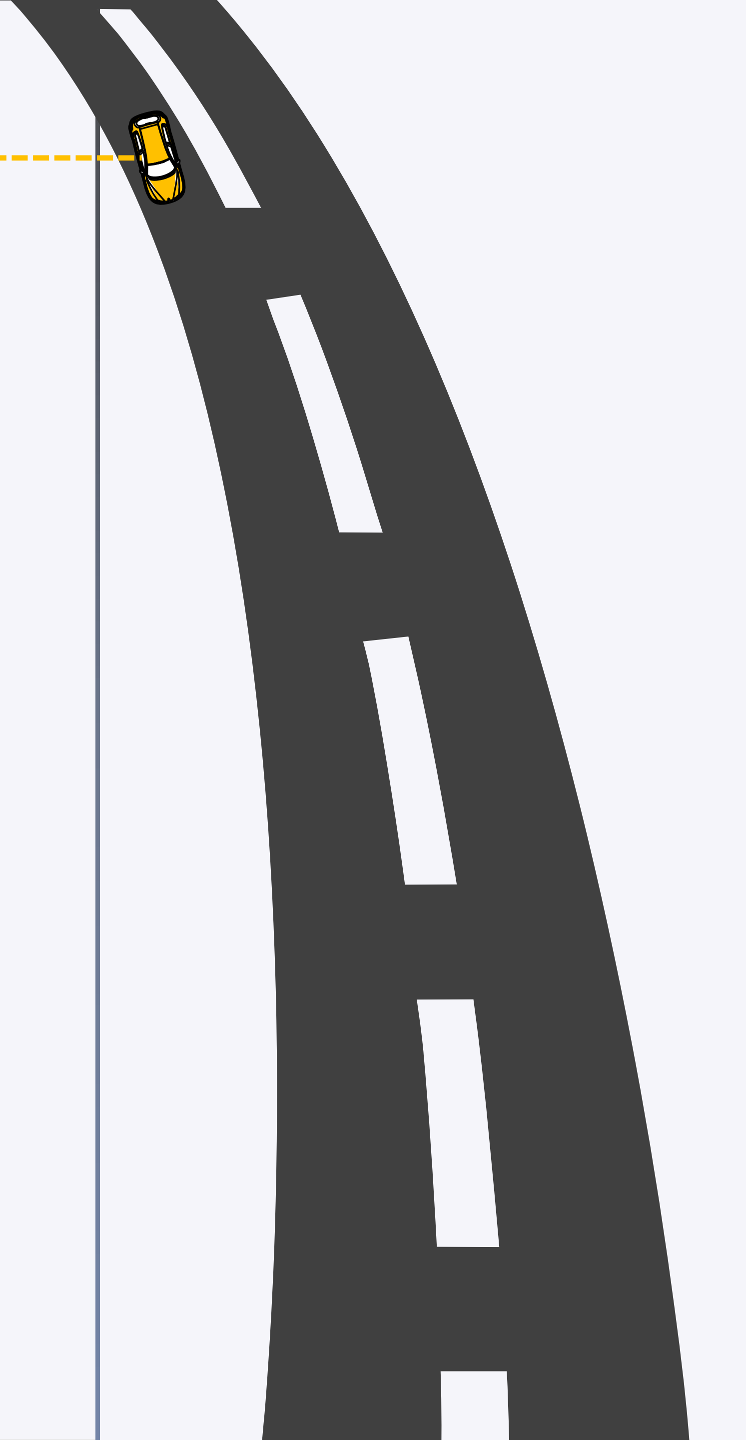
数学基础—微积分

导师：Johnson

主要内容

微积分

- P1:单变量微积分上(week3)
  - 1.导数的定义与意义
  - 2.常用函数的导数以及导数的常用公式，复合函数求导
  - 3.中值定理
  - 4.洛必达法则
  - 5.泰勒公式以及应用
- P2:单变量微积分下(week3)
  - 1.函数的凹凸性
  - 2.函数的极值
  - 3.不定积分
  - 4.定积分
- P3:多变量微积分(week3)
  - 1.偏导数
  - 2.多元复合函数的求导法则，链式求导法则
  - 3.方向导数与梯度及其应用
  - 4.多元函数泰勒公式与海森矩阵
  - 5.多元函数的极值
  - 6.矩阵的求导
  - 7.矩阵的求导在深度学习中的应用

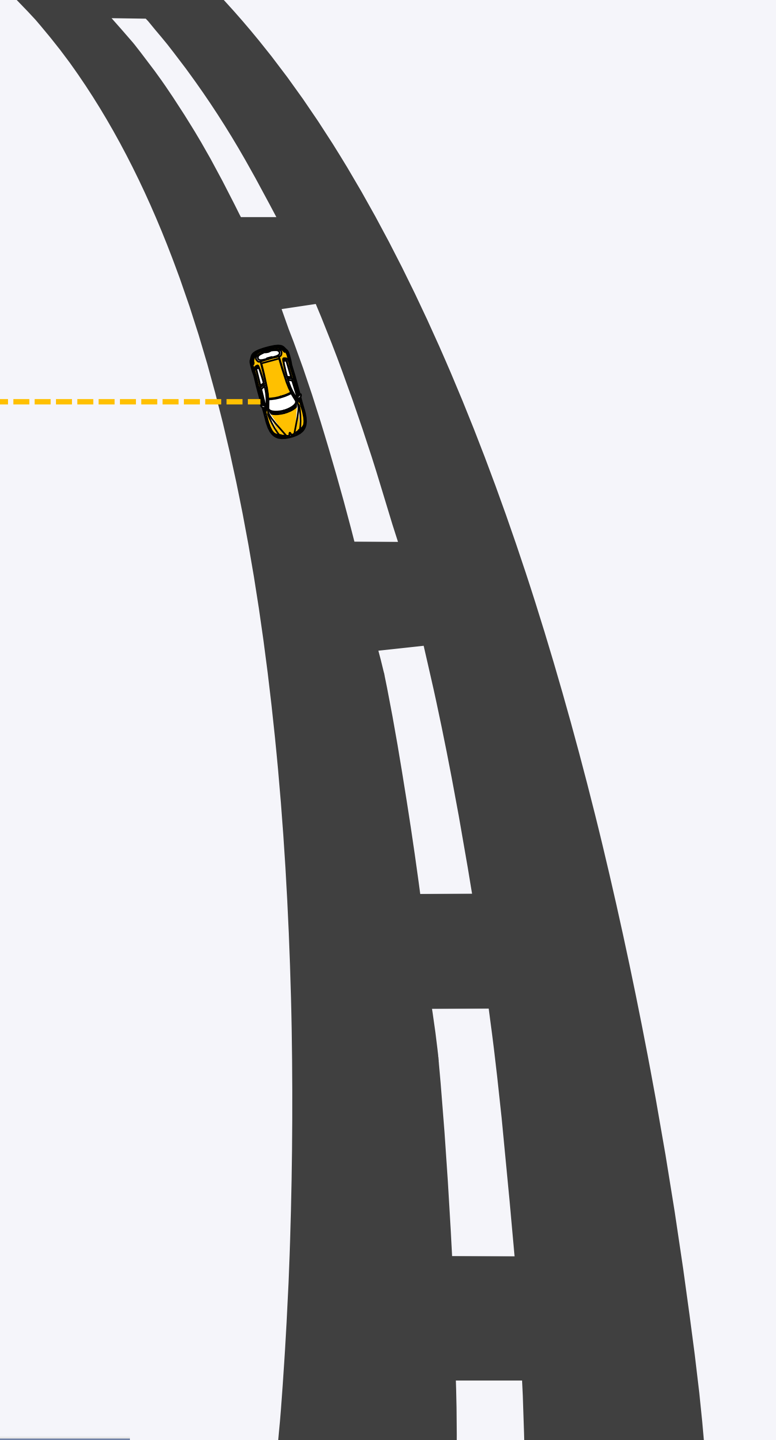


主要内容

- 微积分
  - P1:单变量微积分上(week3)
    - 1.导数的定义与意义
    - 2.常用函数的导数以及导数的常用公式，复合函数求导
    - 3.中值定理
    - 4.洛必达法则
    - 5.泰勒公式以及应用
  - P2:单变量微积分下(week3)
    - 1.函数的凹凸性
    - 2.函数的极值
    - 3.不定积分
    - 4.定积分
  - P3:多变量微积分(week3)
    - 1.偏导数
    - 2.多元复合函数的求导法则，链式求导法则
    - 3.方向导数与梯度及其应用
    - 4.多元函数泰勒公式与海森矩阵
    - 5.多元函数的极值
    - 6.矩阵的求导
    - 7.矩阵的求导在深度学习中的应用

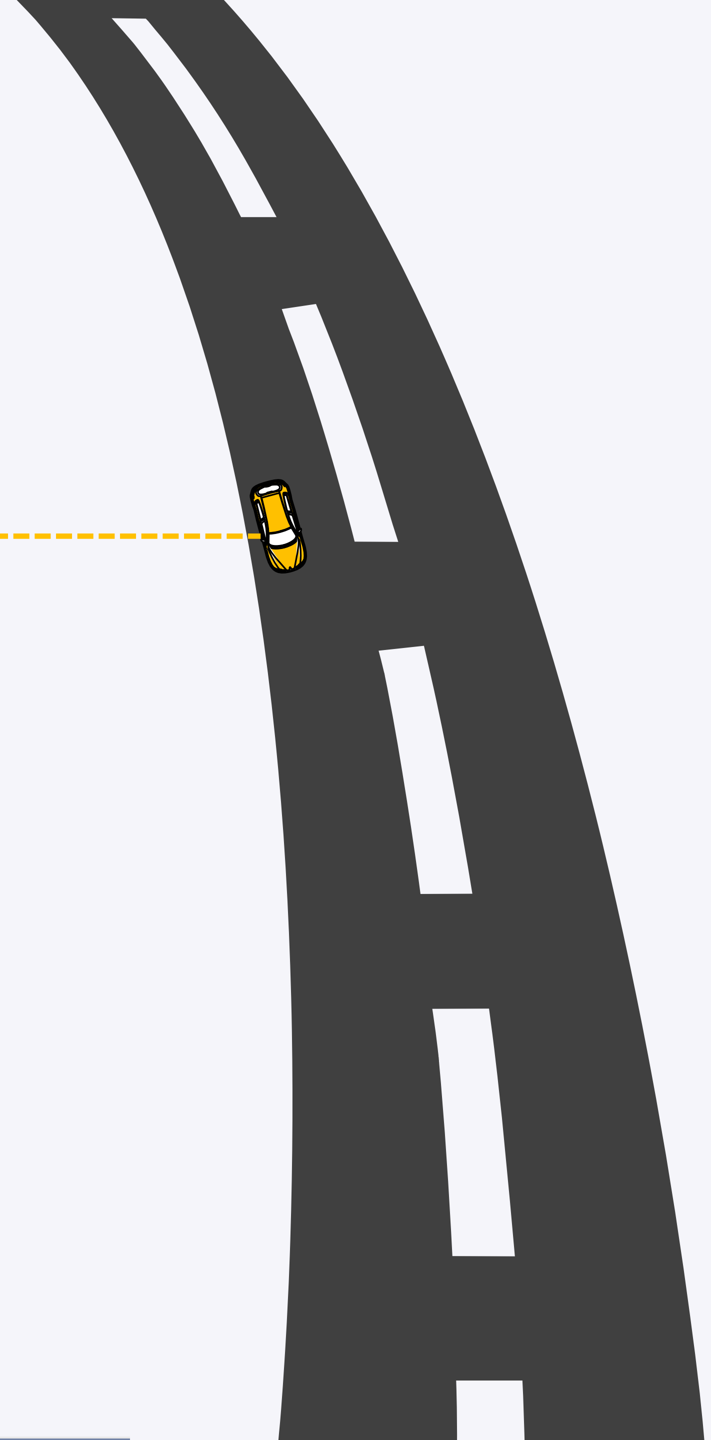
主要内容

- 微积分
  - P1:单变量微积分上(week3)
    - 1.导数的定义与意义
    - 2.常用函数的导数以及导数的常用公式，复合函数求导
    - 3.中值定理
    - 4.洛必达法则
    - 5.泰勒公式以及应用
  - P2:单变量微积分下(week3)
    - 1.函数的凹凸性
    - 2.函数的极值
    - 3.不定积分
    - 4.定积分
  - P3:多变量微积分(week3)
    - 1.偏导数
    - 2.多元复合函数的求导法则，链式求导法则
    - 3.方向导数与梯度及其应用
    - 4.多元函数泰勒公式与海森矩阵
    - 5.多元函数的极值
    - 6.矩阵的求导
    - 7.矩阵的求导在深度学习中的应用



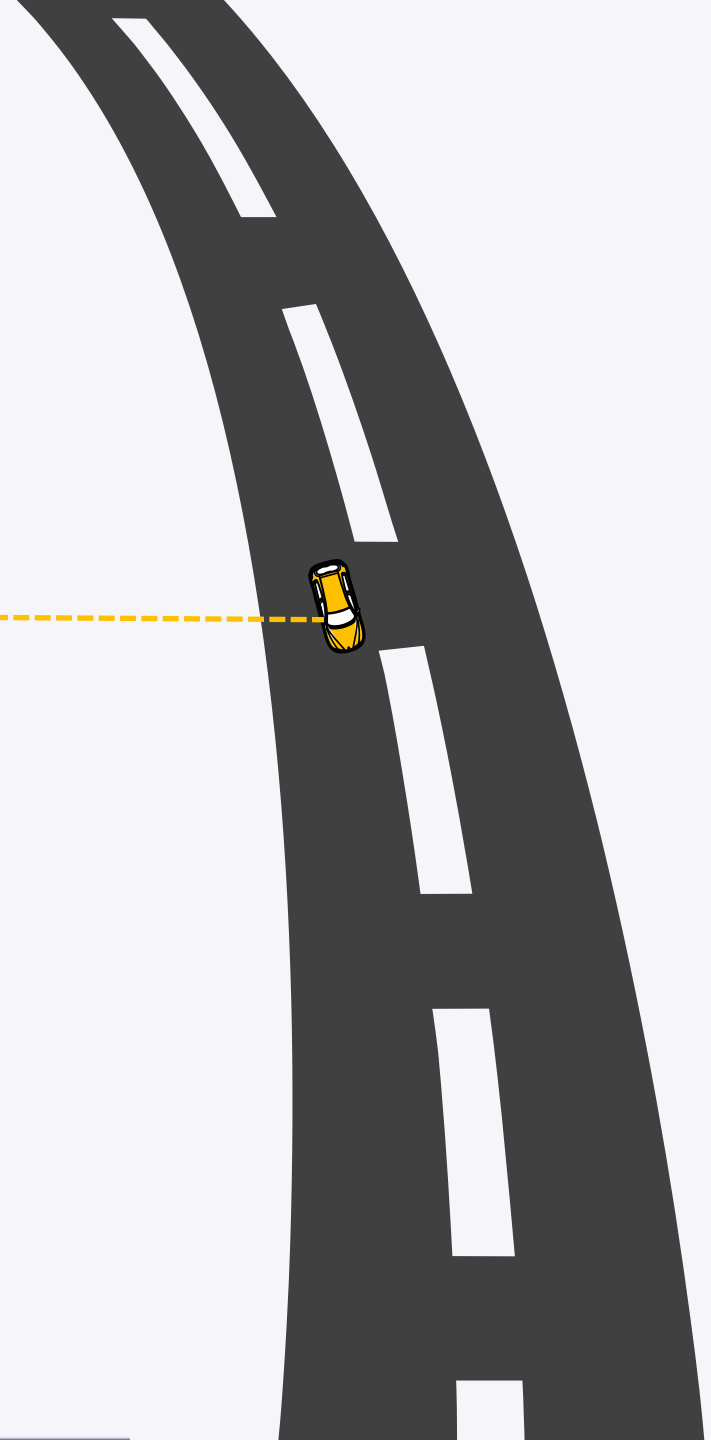
主要内容

- 微积分
  - P1:单变量微积分上(week3)
    - 1.导数的定义与意义
    - 2.常用函数的导数以及导数的常用公式，复合函数求导
    - 3.中值定理
    - 4.洛必达法则
    - 5.泰勒公式以及应用
  - P2:单变量微积分下(week3)
    - 1.函数的凹凸性
    - 2.函数的极值
    - 3.不定积分
    - 4.定积分
  - P3:多变量微积分(week3)
    - 1.偏导数
    - 2.多元复合函数的求导法则，链式求导法则
    - 3.方向导数与梯度及其应用
    - 4.多元函数泰勒公式与海森矩阵
    - 5.多元函数的极值
    - 6.矩阵的求导
    - 7.矩阵的求导在深度学习中的应用



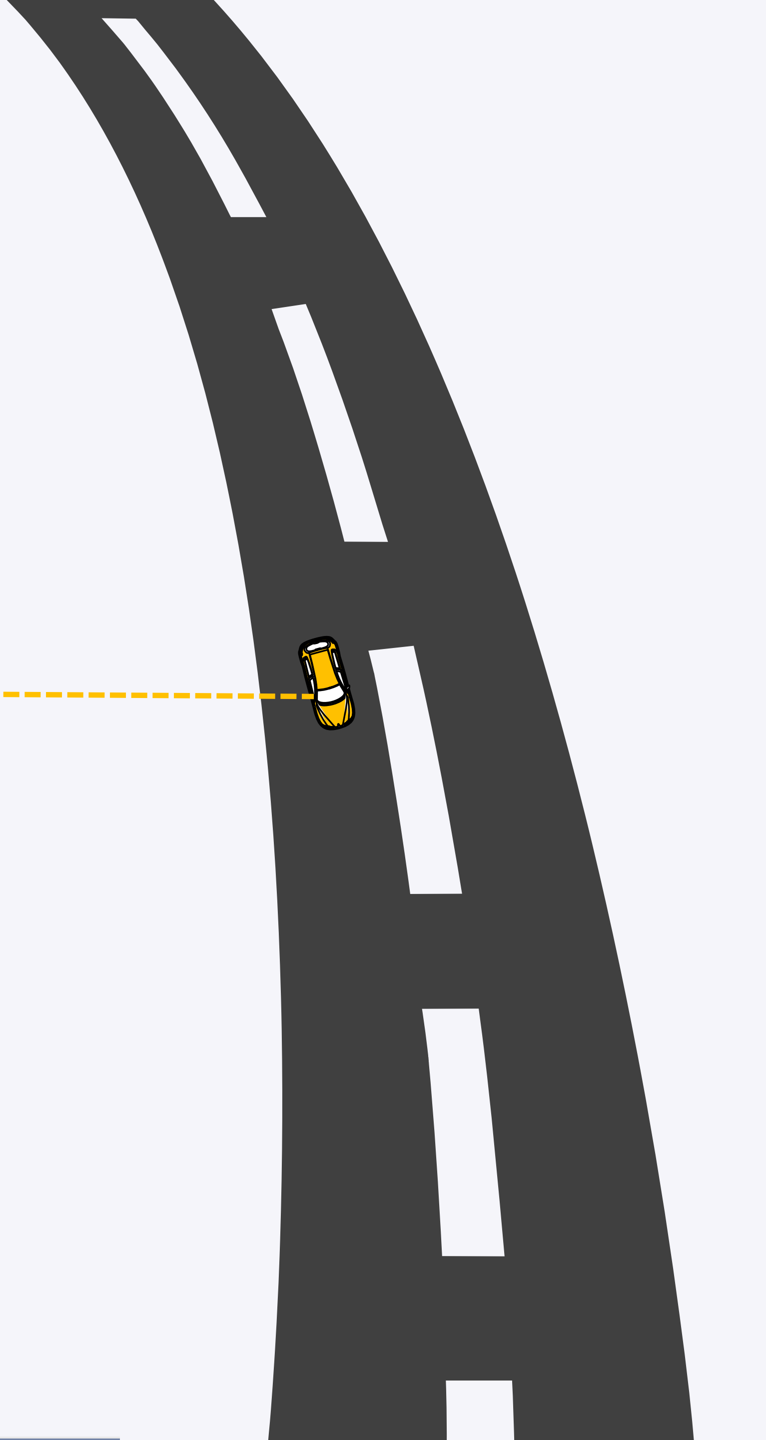
主要内容

- 微积分
  - P1:单变量微积分上(week3)
    - 1.导数的定义与意义
    - 2.常用函数的导数以及导数的常用公式，复合函数求导
    - 3.中值定理
    - 4.洛必达法则
    - 5.泰勒公式以及应用
  - P2:单变量微积分下(week3)
    - 1.函数的凹凸性
    - 2.函数的极值
    - 3.不定积分
    - 4.定积分
  - P3:多变量微积分(week3)
    - 1.偏导数
    - 2.多元复合函数的求导法则，链式求导法则
    - 3.方向导数与梯度及其应用
    - 4.多元函数泰勒公式与海森矩阵
    - 5.多元函数的极值
    - 6.矩阵的求导
    - 7.矩阵的求导在深度学习中的应用



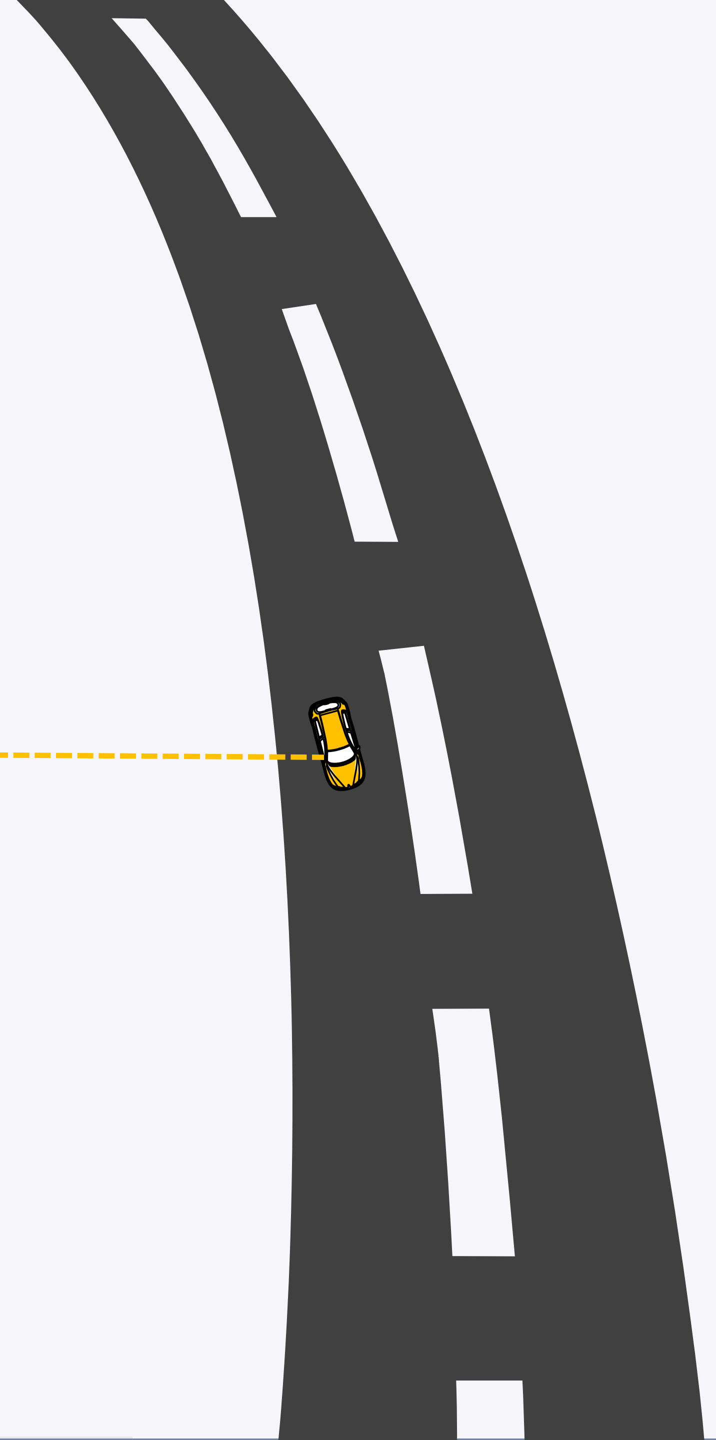
主要内容

- 微积分
  - P1:单变量微积分上(week3)
    - 1.导数的定义与意义
    - 2.常用函数的导数以及导数的常用公式，复合函数求导
    - 3.中值定理
    - 4.洛必达法则
    - 5.泰勒公式以及应用
  - P2:单变量微积分下(week3)
    - 1.函数的凹凸性
    - 2.函数的极值
    - 3.不定积分
    - 4.定积分
  - P3:多变量微积分(week3)
    - 1.偏导数
    - 2.多元复合函数的求导法则，链式求导法则
    - 3.方向导数与梯度及其应用
    - 4.多元函数泰勒公式与海森矩阵
    - 5.多元函数的极值
    - 6.矩阵的求导
    - 7.矩阵的求导在深度学习中的应用



主要内容

- 微积分
  - P1:单变量微积分上(week3)
    - 1.导数的定义与意义
    - 2.常用函数的导数以及导数的常用公式，复合函数求导
    - 3.中值定理
    - 4.洛必达法则
    - 5.泰勒公式以及应用
  - P2:单变量微积分下(week3)
    - 1.函数的凹凸性
    - 2.函数的极值
    - 3.不定积分
    - 4.定积分
  - P3:多变量微积分(week3)
    - 1.偏导数
    - 2.多元复合函数的求导法则，链式求导法则
    - 3.方向导数与梯度及其应用
    - 4.多元函数泰勒公式与海森矩阵
    - 5.多元函数的极值
    - 6.矩阵的求导
    - 7.矩阵的求导在深度学习中的应用



导数的定义与意义

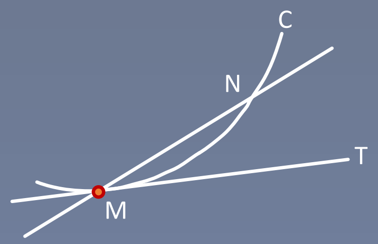
深度之眼 deepshare.net

导数的引入：

1.直线运动的速度

$$v=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

2.曲线的切线



$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

定义 设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，当自变量x在x_0处取得增量Δx（点$x_0+\Delta x$仍在该邻域内）时，相应地，因变量取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果$\Delta y$与$\Delta x$之比当$\Delta x\to 0$时的极限存在，那么称函数$y=f(x)$在点$x_0$处可导，并称这个极限为函数$y=f(x)$在点$x_0$处的导数，记为$f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \quad (1\text{-}4)$$

也可记作$y'|_{x=x_0}$，$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$或$\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$。

常用函数的导数以及到导数的常用公式，复合函数求导

例1 求函数$f(x)=C$（C为常数）的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=0,$$

即 $$(C)'=0.$$

常用函数的导数以及到导数的常用公式，复合函数求导

例2 求函数$f(x)=x^n$ （$n\in N_+$） 的导数.

解 当$n=1$时，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=1;$$

当$n>1$时，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right]=nx^{n-1}$$

即

$$(x^n)'=\begin{cases}1, & n=1.\\ nx^{n-1}, & n>1.\end{cases}$$

常用函数的导数以及到导数的常用公式，复合函数求导

例3 求幂函数$f(x) = x^{\mu}$ （$\mu \in \boldsymbol{R}$） 的导数.

解 $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$.

例4 求函数$f(x) = \sin x$的导数.

解

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x,$$

常用函数的导数以及到导数的常用公式，复合函数求导

深度之眼 deepshare.net

例5 求函数$f(x)=a^x$ （$a>0, a\neq 1$）的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}=a^x\ln a.$

令 $a^x-1=t\Rightarrow a^x=1+t$

$$x=\log_a(1+t)=\frac{\ln(1+t)}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln a}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\lim_{t\to 0}\ln a\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\ln a.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \quad or \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

两个重要极限

常用函数的导数以及到导数的常用公式，复合函数求导

例6 求函数$f(x) = log_a x$ （$a > 0, a \neq 1$） 的导数.

解 $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

常用函数的导数以及到导数的常用公式，复合函数求导

例7 求函数$f(x)=|x|$在$x=0$处的导数.

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}.$

当$h<0$时，$\dfrac{|h|}{h}=-1$，故$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}=-1$;

当$h>0$时，$\dfrac{|h|}{h}=1$，故$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}=1$;

所以，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$不存在，

即函数$f(x)=|x|$在$x=0$处不可导.

左导数和右导数

$$f'(x_0-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

导数存在<==>左右导数存在且相等

常用函数的导数以及到导数的常用公式，复合函数求导

深度之眼 deepshare.net

(1) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$;
(2) $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;
(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \ (v(x) \neq 0)$

例8 $y = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$，求y'.

解 $y' = (2x^3 - 5x^2 + 3x - 7)' = (2x^3)' - (5x^2)' + (3x)' - (7)'$

$= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 3 - 0 = 6x^2 - 10x + 3.$

例9 $f(x) = x^3 + 4\cos x - \sin\frac{\pi}{2}$，求$f'(x)$及$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

解 $f'(x) = 3x^2 - 4\sin x$,

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi^2 - 4.$

常用函数的导数以及到导数的常用公式，复合函数求导

$$(1)\ [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$(2)\ [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$(3)\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}\ (v(x) \neq 0)$$

例10 $y = e^x(\sin x + \cos x)$，求y'.

解 $$y' = (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)'$$

$$= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x.$$

例11 $y = \tan x$，求y'.

解 $$y' = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$

常用函数的导数以及到导数的常用公式，复合函数求导

非常重要!!!

如果$u = g(x)$**在点**x可导，**而**$y = f(u)$在**点**$u = g(x)$可导，**那么复合函数**$y = f[g(x)]$在**点**x**可导，且其导数为**

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \textbf{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

例12 设$y = e^{x^3}$，求$\frac{dy}{dx}$.

解 $y = e^{x^3}$可看作由$y = e^u, u = x^3$复合而成，因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}.$$

常用函数的导数以及到导数的常用公式，复合函数求导

非常重要!!!

如果$u = g(x)$在点x可导，而$y = f(u)$在点$u = g(x)$可导，那么复合函数$y = f[g(x)]$在点x可导，且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

例13 设$y = \sin\frac{2x}{1+x^2}$，求$\frac{dy}{dx}$.

解 $y = \sin\frac{2x}{1+x^2}$可看作由$y = \sin u$，$u = \frac{2x}{1+x^2}$复合而成.因

$$\frac{dy}{du} = \cos u,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2(1+x^2)-(2x)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

所以 $$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \cdot \cos\frac{2x}{1+x^2}.$$

高阶导数

一般地，函数$y=f(x)$的导数$y'=f'(x)$仍然是x的函数.我们把$y'=f'(x)$的导数叫做函数$y=f(x)$的二阶导数，记作y''或$\frac{d^2y}{dx^2}$，即

$$\boldsymbol{y''=(y')'} \quad \textbf{或} \quad \boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).}$$

相应地，把$y=f(x)$的导数$f'(x)$叫做函数$y=f(x)$的一阶导数.

类似地，二阶导数的导数，叫做三阶导数，三阶导数的导数叫做四阶导数⋯⋯
一般地，$(n-1)$阶导数的导数叫做n阶导数，分别记作

$$y^m, y^{(4)}, \cdots, y^{(n)}$$

或

$$\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}.$$

高阶导数

例1 $y = ax + b$，求y''.

解 $y' = a, y'' = 0.$

例2 $s = \sin \omega t$，求s''.

解 $s' = \omega \cos \omega t, s'' = -\omega^2 \sin \omega t.$

例3 求指数函数$y = e^x$的n阶导数.

解 $y' = e^x, y'' = e^x$，$y''' = e^x$，$y^{(4)} = e^x$.

一般地，可得

$$y^{(n)} = e^x,$$

即

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

中值定理

拉格朗日中值定理

拉格朗日中值定理 如果函数$f(x)$满足

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导，

那么在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使等式

$$\boldsymbol{f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)}$$成立.

拉格朗日定理很重要，
后面很多地方会用到!!!

柯西中值定理

柯西中值定理 如果函数$f(x)$及$F(x)$满足

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导；

（3）对任一$x\epsilon(a,b)$，$F'(x)\neq 0$，

那么在(a,b)内至少有一点ξ，使等式

$$\boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}}$$

成立.

洛必达法则

定理1 设

(1)当$x \to a$时，函数$f(x)$及$F(x)$都趋于零；

(2)在点a的某去心邻域内，$f'(x)$及$F'(x)$都存在且$F'(x) \neq 0$；

(3)$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在(或为无穷大)，

则 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x \to} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$.

洛必达法则

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}(b\neq 0)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax}{b\cos bx}=\dfrac{a}{b}$.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$.

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$.

洛必达法则

定理2 设

(1)当$x \to \infty$时，函数$f(x)$及$F(x)$都趋于零；

(2)当$|x| > N$时$f'(x)$及$F'(x)$都存在，且$F'(x) \neq 0$；

(3)$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在(或为无穷大)，

则 $$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

洛必达法则

例5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}(n>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0.$

例6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$($n$为正整数，$\lambda>0$).

解 相继应用洛必达法则n次，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0.$$

泰勒公式以及应用

泰勒（Taylor）中值定理1

如果函数$f(x)$在x_0处具有n阶导数，那么存在x_0的一个邻域，对于该邻域内的任一x，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = o\big((x - x_0)^n\big).$

佩亚诺余项，

非常重要的公式!!!

泰勒公式以及应用

深度之眼 deepshare.net

泰勒（Taylor）中值定理2

如果函数$f(x)$在x_0的某个邻域$U(x_0)$内具有$(n+1)$阶导数，那么对于任一$x \in U(x_0)$，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad \text{拉格朗日余项}$$

这里ξ是x_0与x之间的某个值.

当x0=0时，称为麦克劳林展开

泰勒公式以及应用

例1 写出函数$f(x)=e^x$的带有拉格朗日余项的n阶麦克劳林公式.

解 因为 $f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$

所以 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1.$

把这些值代入公式(3-9)，并注意到$f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$便得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1).$$

由这个公式可知，若把e^x用它的n次泰勒多项式表达为

$$e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},$$

这时所产生的误差为$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}(0<\theta<1).$

泰勒公式以及应用

例1 写出函数$f(x)=e^x$的带有拉格朗日余项的n阶麦克劳林公式.

如果取$x=1$，则得无理数e的近似式为

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},$$

其误差

$$|R_n|<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

当$n=10$时，可算出$e\approx 2.718282$，其误差不超过10^{-6}.

泰勒公式以及应用

深度之眼 deepshare.net

例2 求$f(x)=\sin x$的带有拉格朗日余项的n阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,$$
$$f^{(4)}(x)=\sin x,\cdots,f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

所以

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{(4)}(0)=0$$

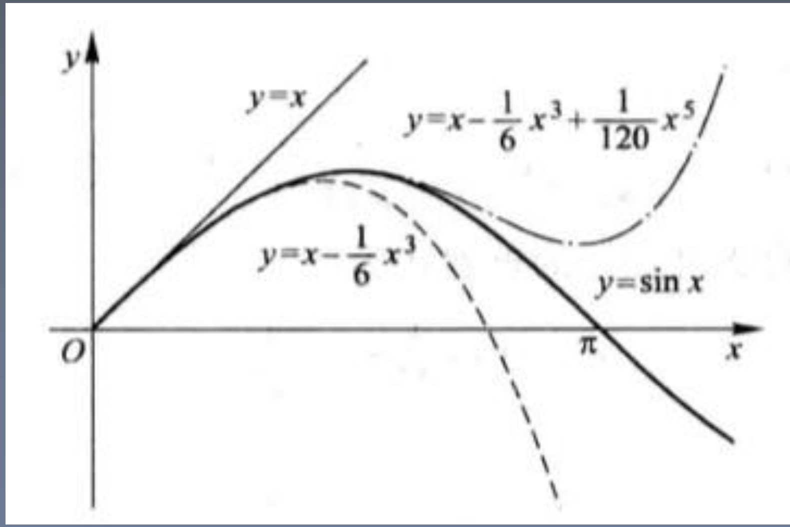
等.它们顺序循环地取四个数0,1,0,-1，于是按公式(3 − 9)得(令$n=2m$)

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m},$$

如果取$m=1$，那么得近似公式 $\sin x\approx x$.

如果m分别取2和3，那么可得$\sin x$的3次和5次泰勒多项式

$$\sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3 \text{和} \sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5,$$



泰勒公式以及应用

深度之眼 deepshare.net

类似地，还可以得到

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + R_{2m+1}(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + R_n(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x).$$

例3 利用带有佩亚诺余项的麦克劳林公式，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$.

解 由于分式的分母 $\sin^3 x \sim x^3 (x\to0)$，我们只需将分子中的 $\sin x$ 和 $x\cos x$ 分别用带有佩亚诺余项的三阶麦克劳林公式表示，即

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{2!} - o(x^3) = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

对上式作运算时，把两个比 x^3 高阶的无穷小的代数和仍记作 $o(x^3)$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

函数的凹凸性

深度之眼 deepshare.net

定义 设$f(x)$在区间I上连续，如果对I上任意两点x_1, x_2恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称$f(x)$在I上得图形是（向上）凹的（或凹弧）；如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称$f(x)$在I上得图形是（向上）凸的（或凸弧）.

如果函数$f(x)$在I内具有二阶导数，那么可以利用二阶导数的符号来判定曲线的凹凸性，这就是下面的曲线凹凸性的判定定理.

函数的凹凸性

定理 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有一阶和二阶导数，那么

（1）若在(a,b)内$f''(x)>0$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图片是凹的；

（2）若在(a,b)内$f''(x)<0$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图片是凸的.

证 在情形（1），设x_1和x_2为$[a,b]$内任意两点，且$x_1<x_2$，记$\frac{x_1+x_2}{2}=x_0$，并记$x_2-x_0=x_0-x_1=h$，则$x_1=x_0-h$，$x_2=x_0+h$，由拉格朗日中值公式，得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta_1 h)h,$$
$$f(x_0)-f(x_0-h)=f'(x_0-\theta_2 h)h,$$

其中$0<\theta_1<1$，$0<\theta_2<1$，两式相减，即得

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)=[f'(x_0+\theta_1 h)-f'(x_0-\theta_2 h)]h.$$

函数的极值与最值

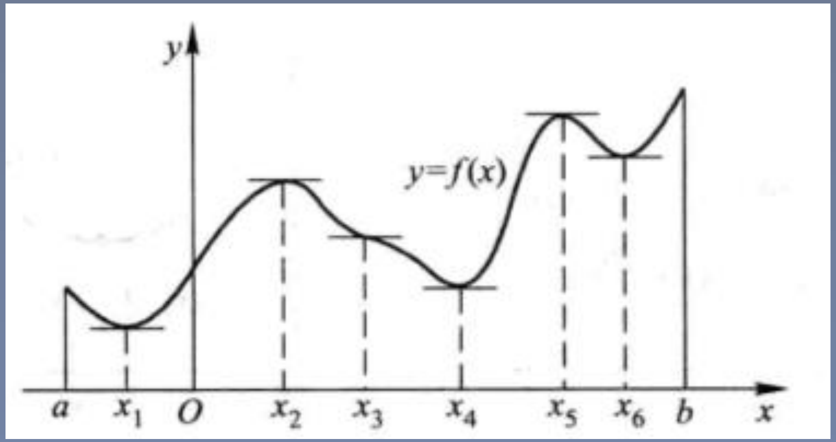
极值

定义

设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，如果对于去心邻域$\dot{U}(x_0)$内的任一x，有

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{或} f(x) > f(x_0)),$$

那么就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值（或极小值）.



函数的极值与最值

极值

定理1（必要条件） 设函数$f(x)$在x_0处可导，且在x_0处取得极值，则$f'(x_0)=0$.

定理2（第一充分条件） 设函数$f(x)$在x_0处连续，且在x_0的某去心邻域$\dot{U}(x_0,\delta)$内可导.

（1）若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)>0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值；

（2）若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)<0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值；

（3）若$x\in\dot{U}(x_0,\delta)$时，$f'(x)$的符号保持不变，则$f(x)$在x_0处没有极值.

定理3（第二充分条件） 设函数$f(x)$在x_0处具有二阶导数且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

（1）当$f''(x_0)<0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极大值；

（2）当$f''(x_0)>0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极小值.

函数的极值与最值

深度之眼
deepshare.net

最值

假定函数$f(x)$在闭区间[a, b]上连续，在开区间(a, b)内除有限个点外可导，且至多有有限个驻点.在上述条件下，我们来讨论$f(x)$在[a, b]上的最大值和最小值的求法.

(1)求出$f(x)$在(a, b)内的驻点；

(2)计算$f(x)$在上述驻点处的函数值及$f(a), f(b)$；

(3)比较(2)中诸值的大小，其中最大的便是$f(x)$在[a, b]上的最大值，

最小的便是$f(x)$在[a, b]上的最小值.

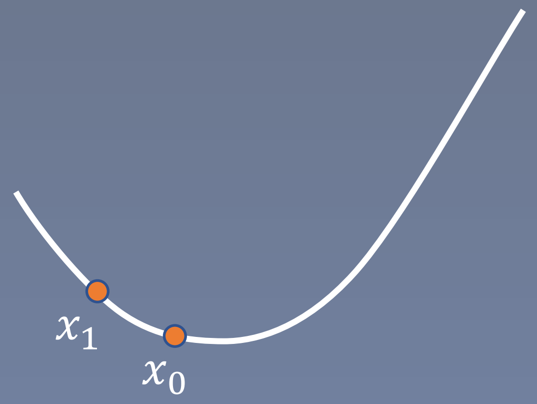
函数的极值与最值

深度之眼 deepshare.net

极值与最值的关系

如果在闭区间上是凹函数，那么在该区间上的局部极小值如果存在则一定是该区间上的最小值

如果在闭区间上是凸函数，那么在该区间上的局部极大值如果存在则一定是该区间上的最大值



$f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x) \nearrow$

$f'(x_0) = 0$

若存在$x_1 < x_0$使得$f(x_1) < f(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0) - f(x_1) = (x_0 - x_1) f'(\xi)$

$\Rightarrow f'(\xi) > 0.$

不定积分(原函数)

定义1 如果在区间I上，可导函数$F(x)$的导函数为$f(x)$，即对任一$x \in I$，都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx,$$

那么函数$F(x)$就称为$f(x)$（或$f(x)dx$）在区间I上的一个原函数.

定义2 在区间I上，函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数称为$f(x)$（或$f(x)dx$）在区间I上的不定积分，记作

$$\int f(x)\,dx.$$

其中记号$\int$称为积分号，$f(x)$称为被积函数，$f(x)dx$称为被积表达式，x称为积分变量.

由此定义及前面的说明可知，如果$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数，那么$F(x)+C$就是$f(x)$的不定积分，即

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

不定积分(原函数)

例1 求$\int x^2 dx$.

解 由于$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$，所以$\frac{x^3}{3}$是$x^2$的一个原函数.因此

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

例2 求$\int \frac{dx}{x^3}$.

解 $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$

不定积分(原函数)

例3 求$\int x^2\sqrt{x}dx$.

解 $\int x^2\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx=\dfrac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}+C=\dfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C=\dfrac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C.$

例4 求$\int\dfrac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$.

解 $\int\dfrac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=\int x^{-\frac{4}{3}}dx=\dfrac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}+C=-3x^{-\frac{1}{3}}+C=-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+C.$

不定积分(原函数)

积分表

(1) $\int k\,dx = kx + C$ (k是常数)

(2) $\int x^{\mu}\,dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C\ (\mu \neq -1)$

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(4) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

(5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(6) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(7) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

(9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

(12) $\int e^x\,dx = e^x + C$

(13) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

不定积分(原函数)

深度之眼 deepshare.net

性质1 设函数$f(x)$及$g(x)$的原函数存在，则

$$\int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$$

性质2 设函数$f(x)$的原函数存在，k为非零常数，则

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx.$$

不定积分(原函数)

例5 求$\int \sqrt{x}(x^2-5)dx$.

解 $$\int \sqrt{x}(x^2-5)dx = \int\left(x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx - \int 5x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \int x^{\frac{5}{2}}dx - 5\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.$$

例6 求$\int (e^x - 3\cos x)dx$.

解 $\int (e^x - 3\cos x)dx = \int e^x dx - 3\int \cos x\, dx = e^x - 3\sin x + C.$

不定积分(原函数)

第一类换元法(凑微分)

定理1 设$f(u)$具有原函数，$u=\varphi(x)$可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}.$$

例7 求$\int 2\cos 2x\,dx$.

解 被积函数中，$\cos 2x$是一个由$\cos 2x=\cos u, u=2x$复合而成的复合函数，常数因子恰好是中间变量u的导数.因此，作变换$u=2x$，便有

$$\int 2\cos 2x\,dx=\int \cos 2x\cdot 2dx=\int \cos 2x\,d2x=\int \cos u\,du=\sin u+C$$

再以$u=2x$代入，即得$\int 2\cos 2x\,dx=\sin 2x+C$.

不定积分(原函数)

第一类换元法(凑微分)

定理1 设$f(u)$具有原函数，$u=\varphi(x)$可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}.$$

例8 求$\int 2x\,e^{x^2}dx.$

解 被积函数中的一个因子为$e^{x^2}=e^u, u=x^2$，剩下的因子2x恰好是中间变量$u=x^2$的导数，于是有

$$\int 2xe^{x^2}dx=\int e^{x^2}d(x^2)=\int e^u du=e^u+C=e^{x^2}+C.$$

不定积分(原函数)

第二类换元法

定理2 设$x = \psi(t)$是单调的可导函数，并且$\psi'(t) \neq 0$.又设$f[\psi(t)]\psi'(t)$具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)dx = \left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\psi^{-1}(x)}, \qquad (2-2)$$

其中$\psi^{-1}(x)$是$x = \psi(t)$的反函数.

不定积分(原函数)

第二类换元法

深度之眼 deepshare.net

例 求$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\ (a > 0)$.

解 求这个积分的困难在于有根式$\sqrt{a^2 - x^2}$，但我们可以利用三角公式$sin^2 t + cos^2 t = 1$来化去根式.

设$x = a\sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$，则$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 sin^2 t} = a\cos t$，$dx = a\cos t dt$，于是根式化成了三角式，所求积分化为

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a\cos t \cdot a\cos t\, dt = a^2 \int cos^2 t\, dt.$$

利用例题结果得

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{a}\right) + C = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C.$$

由于$x = a\sin t$，$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$，所以 $t = arcsin\frac{x}{a}$，

$$\cos t = \sqrt{1 - sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

于是所求积分为

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

不定积分(原函数)

分部积分法

$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$uv' = (uv)' - u'v$$
$$\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$

例1 求$\int x\cos x\,dx$.

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d(\sin x)$$
$$= x\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= x\sin x + \cos x + C$$

例2 求$\int xe^x dx$.

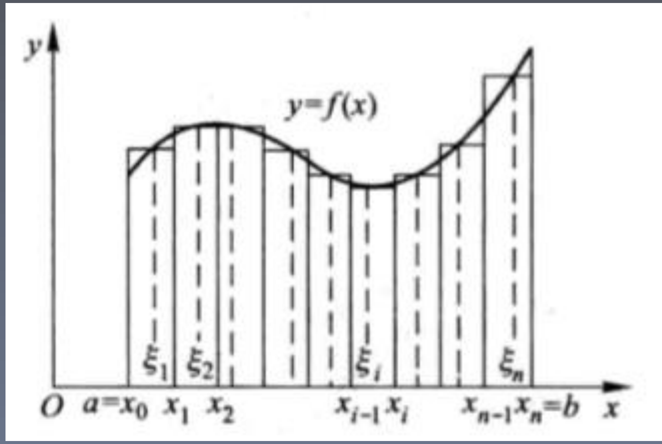
$$\int xe^x dx = \int x\,d(e^x) = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

例3 求$\int x^2 e^x dx$.

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx = x^2 e^x - 2\int x\,d(e^x)$$
$$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C$$
$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

定积分

定积分的意义：曲线的面积



在区间$[a,b]$中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

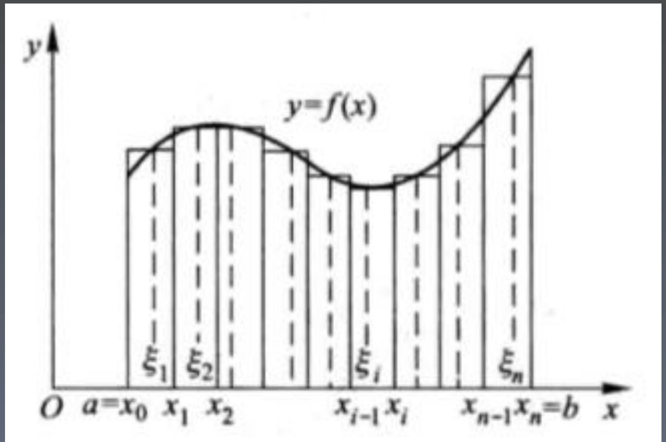
把$[a,b]$分成n个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

它们的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

定积分



定积分的意义：曲线的面积

$$A=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

为了保证所有小区间的长度都无限缩小，我们要求小区间长度中的最大者趋于零，如记$\lambda=max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，则上述条件可表示为$\lambda\to 0$.当$\lambda\to 0$时（这时分段数$n$无限增多，即$n\to\infty$），取上述和式的极限，便得曲边梯形得面积

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,.$$

$$\int_a^b f(x)dx=I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

牛顿莱布尼茨公式

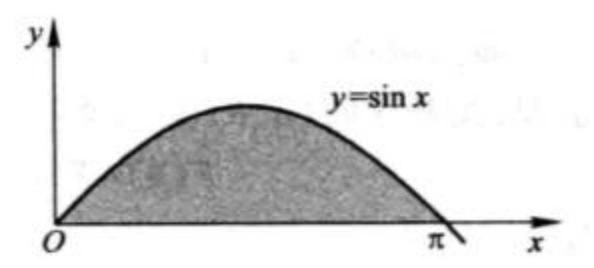
定理 （微积分基本定理） 如果函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

例1 计算第一节中的定积分$\int_0^1 x^2 dx$.

解
$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

例2 计算正弦曲线$y = \sin x$在$[0,\pi]$上与x轴所围成的平面图形(图5 − 7)的面积.



解 $A = \int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = -(-1) - (-1) = 2.$

换元法

深度之眼
deepshare.net

例1 计算$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx\ (a>0)$.

解 设$x=a\sin t$，则$dx=a\cos t\,dt$，

当$x=0$时，取$t=0$；当$x=a$时，取$t=\frac{\pi}{2}$.

于是

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

例2 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\,dx$.

解 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\,d(\cos x)=-\left[\frac{\cos^6 x}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\left(0-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}.$$

分部积分

例 计算$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$.

解 先用换元法.令$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2$，$dx=2tdt$，且

当$x=0$时，$t=0$；当$x=1$时，$t=1$.

于是

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 te^t dt=2\int_0^1 td(e^t)=2\left([te^t]_0^1-\int_0^1 e^t dt\right)$$
$$=2(e-[e^t]_0^1)=2[e-(e-1)]=2.$$

分部积分

例 证明定积分公式：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\left(=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2},n\text{为正偶数}, \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2},n\text{为大于1的正奇数}.\end{cases}$$

分部积分

证 $I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, d(\cos x) = [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx.$

右端第一项等于零；将第二项里的$\cos^2 x$写成$1-\sin^2 x$，并把积分分成两个，得

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x \, dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

由此得 $$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \cdots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0,$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \cdots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 \, (m = 1,2,\cdots),$$

而 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1,$

因此 $I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \cdots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \cdots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \, (m = 1,2,\cdots)$$

deepshare.net
深度之眼

联系我们:
电话：18001992849
邮箱：service@deepshare.net
Q Q： 2677693114

公众号

客服微信