

数学基础—线性代数

导师: Johnson

主要内容

线性代数（上）

矩阵及其基本运算

1. 矩阵的基本概念与意义以及常见特殊矩阵
2. 矩阵的加法减法数乘以及性质
3. 矩阵的乘法以及性质 🍏
4. 矩阵运算在深度学习中的应用(初级)
5. 矩阵的迹, 矩阵的转置, 对称矩阵(协方差矩阵)

矩阵的行列式

1. 行列式的引入
2. 行列式的计算
3. 特殊矩阵的行列式与行列式的性质 🍏
4. 行列式按行(列)展开, 代数余子式 🍏
5. 行列式在线性方程组中的应用: 克莱姆法则

矩阵的逆

1. 矩阵逆的引入以及矩阵逆的定义 🍏
2. 矩阵逆的计算
3. 矩阵逆的常用性质, 以及特殊矩阵的逆
4. 矩阵逆在机器学习线性回归算法中的运用(初级)
5. 分块矩阵



行列式按行(列)展开，代数余子式

降阶处理，用低阶的行列式来算高阶的行列式

在 n 阶行列式中，把 (i, j) 元 a_{ij} 的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n - 1$ 阶行列式叫做 (i, j) 元 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij} ；记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

A_{ij} 叫做 (i, j) 元 a_{ij} 的**代数余子式**。

例如四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中 $(3, 2)$ 元 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}$$





行列式按行(列)展开，代数余子式



引理 一个n阶行列式，如果其中第i行所有元素除(i,j)元 a_{ij} 外都为0，那么行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D = a_{ij}A_{ij}$.

证明 先证 $(i, j) = (1, 1)$ 的情形，此时

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

再证一般情况：基本的思想就是对调位置，但是不能改变其他数的相对位置

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$



行列式按行(列)展开，代数余子式



定理 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

或 $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$

证：

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{i2} + \cdots + 0 & \cdots & 0 + \cdots + 0 + a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &\quad + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots
 \end{aligned}$$



推论 行列式某一行（列）的元素另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 (i \neq j),$$
$$\text{或 } a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 (i \neq j).$$

证 把行列式 $D = \det(a_{ij})$ 按第 j 行展开，有

$$a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$



深度之眼
deepshare.net

联系我们：

电话：18001992849

邮箱：service@deepshare.net

Q Q：2677693114



公众号



客服微信

