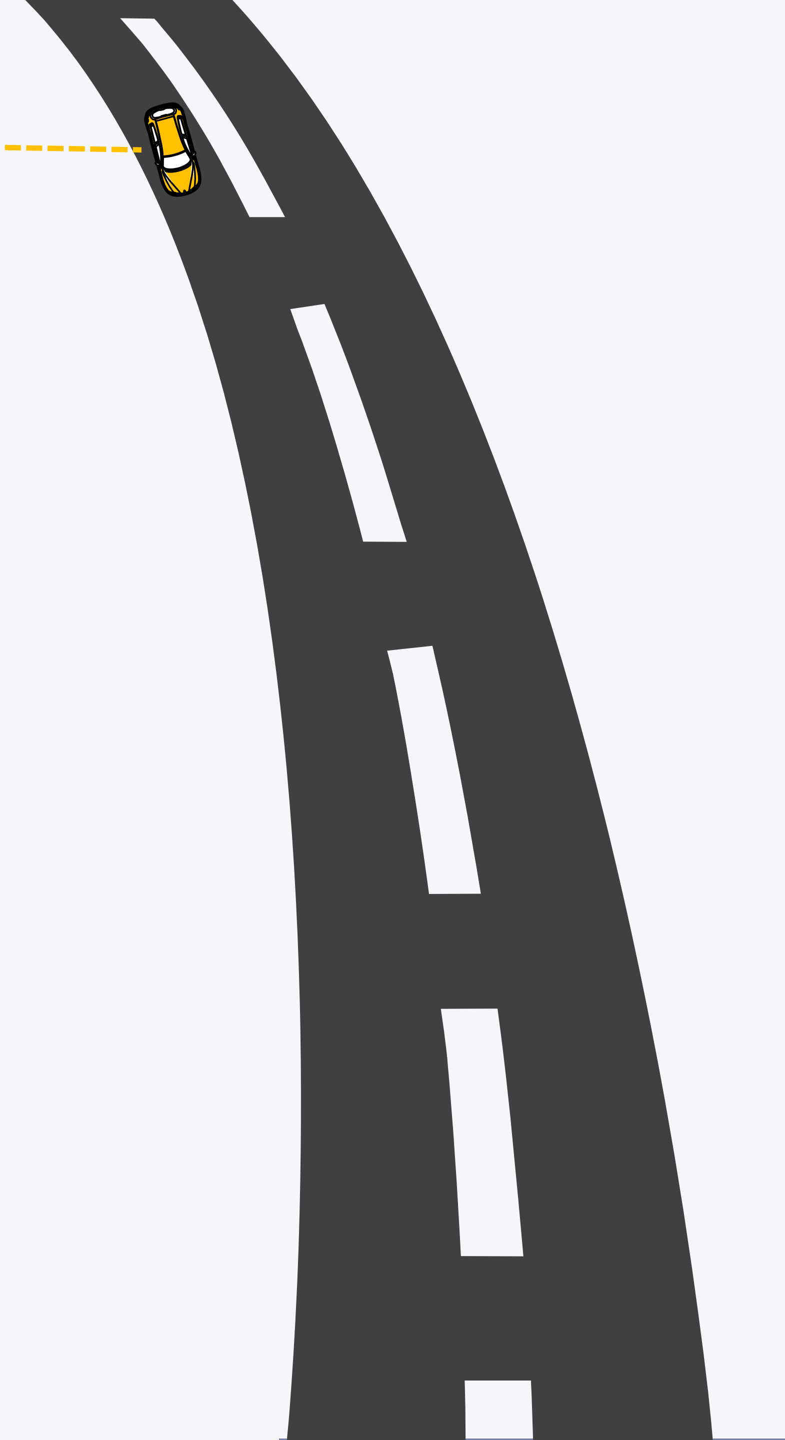
深度之眼
deepshare.net

数学基础—概率论

导师：Johnson

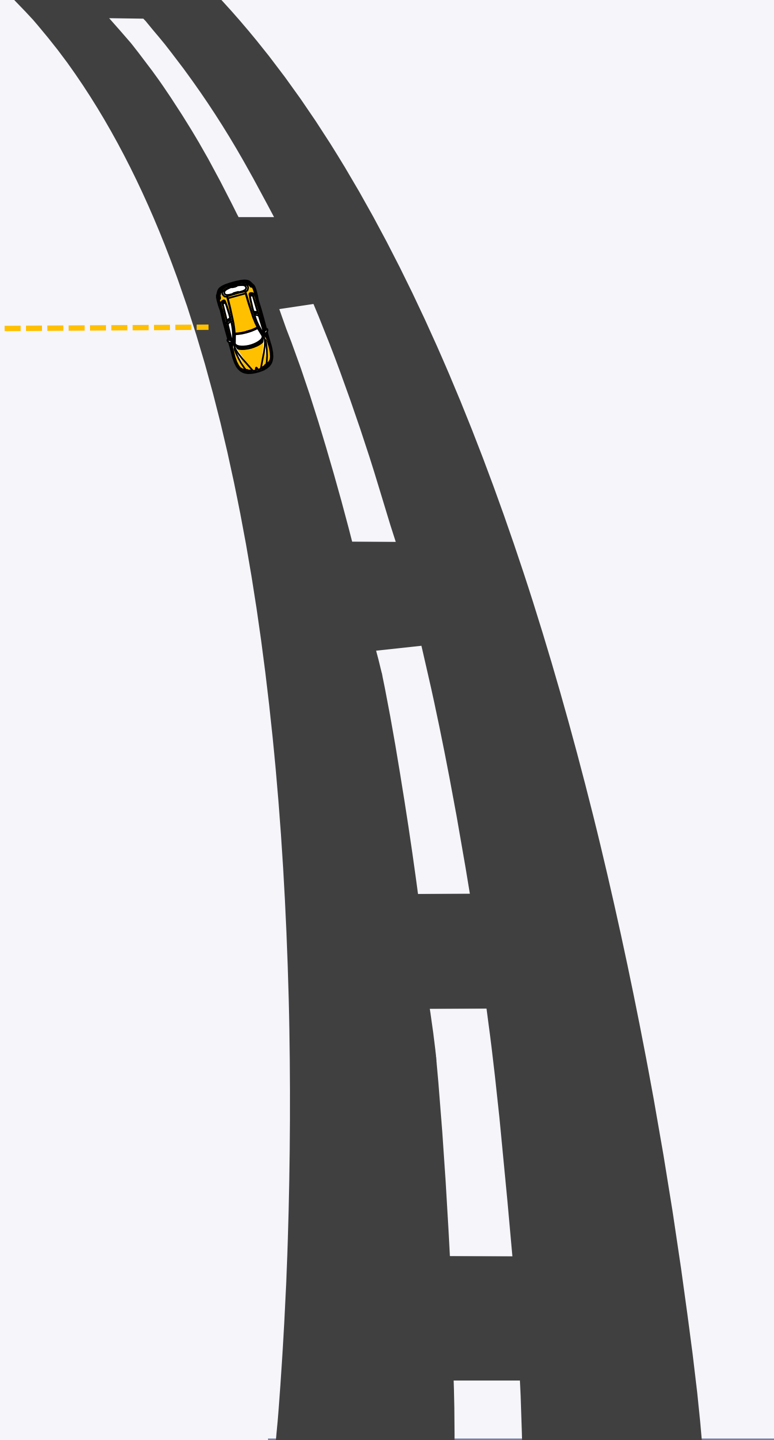
主要内容

- 概率论
  - 概率基础
    - 1.随机试验样本空间和随机事件
    - 2.概率的定义
    - 3.条件概率与乘法公式
    - 4.全概率公式与贝叶斯公式以及应用
    - 5.独立性
  - 随机变量与多维随机变量
    - 1.离散随机变量
    - 2.连续随机变量
    - 3.多维随机变量
    - 4.边缘分布和条件分布
    - 5.独立性
  - 期望与方差
    - 1.期望与方差的定义
    - 2.常用随机变量期望与方差的计算
    - 3.期望与方差的性质
    - 4.协方差与协方差矩阵
  - 参数的估计
    - 1.矩估计
    - 2.极大似然估计
    - 3.最大后验估计



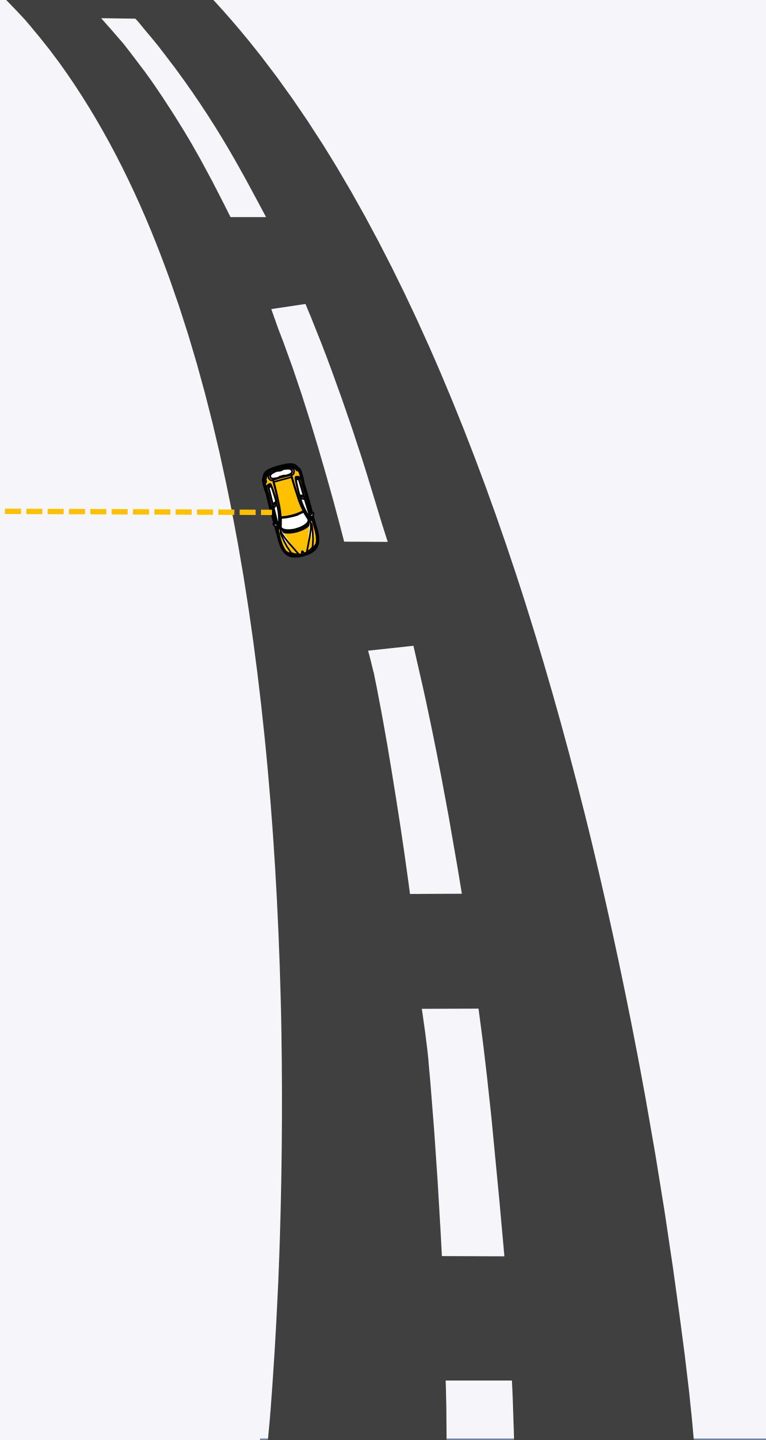
主要内容

- 概率论
  - 概率基础
    - 1.随机试验样本空间和随机事件
    - 2.概率的定义
    - 3.条件概率与乘法公式
    - 4.全概率公式与贝叶斯公式以及应用
    - 5.独立性
  - 随机变量与多维随机变量
    - 1.离散随机变量
    - 2.连续随机变量
    - 3.多维随机变量
    - 4.边缘分布和条件分布
    - 5.独立性
  - 期望与方差
    - 1.期望与方差的定义
    - 2.常用随机变量期望与方差的计算
    - 3.期望与方差的性质
    - 4.协方差与协方差矩阵
  - 参数的估计
    - 1.矩估计
    - 2.极大似然估计
    - 3.最大后验估计



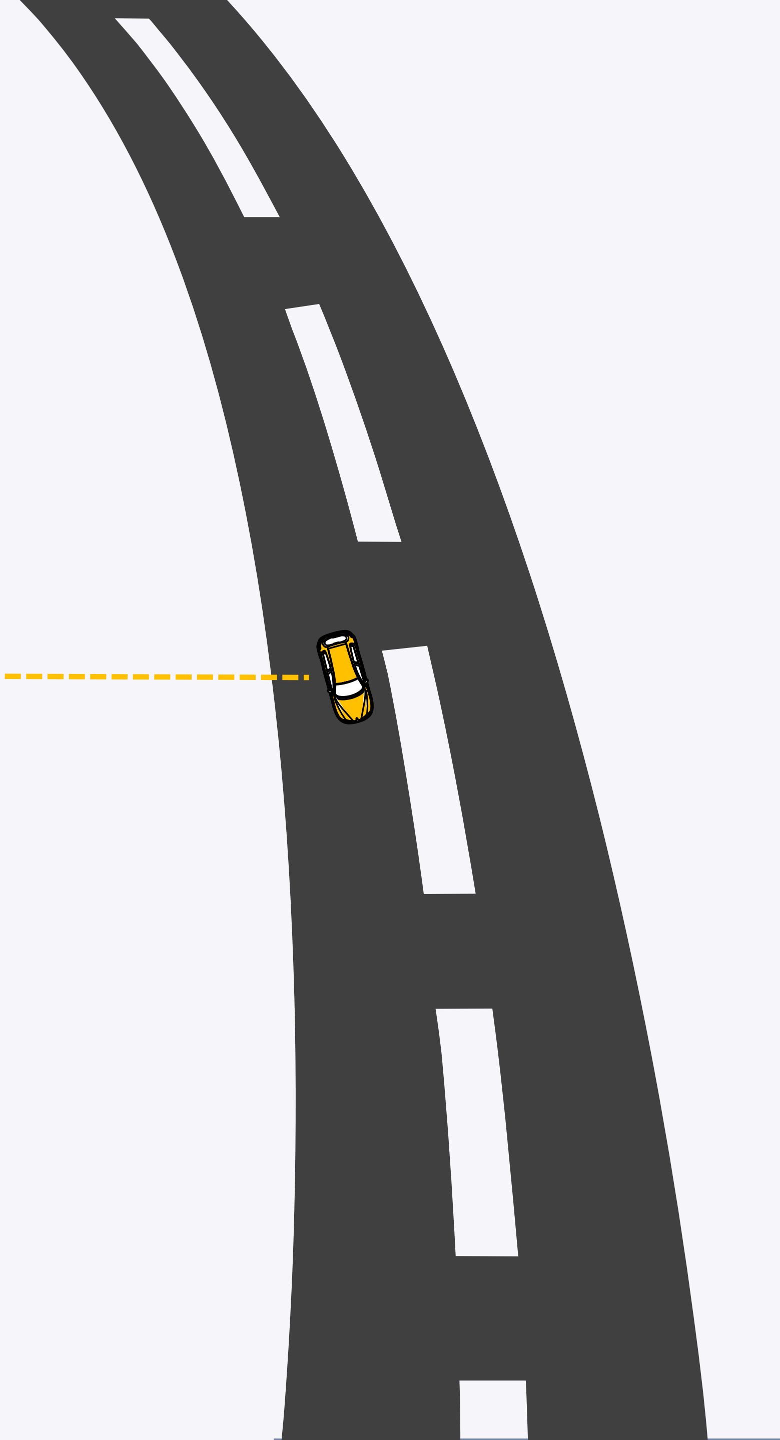
主要内容

- **概率论**
  - **概率基础**
    - 1.随机试验样本空间和随机事件
    - 2.概率的定义
    - 3.条件概率与乘法公式
    - 4.全概率公式与贝叶斯公式以及应用
    - 5.独立性
  - **随机变量与多维随机变量**
    - 1.离散随机变量
    - 2.连续随机变量
    - 3.多维随机变量
    - 4.边缘分布和条件分布
    - 5.独立性
  - **期望与方差**
    - 1.期望与方差的定义
    - 2.常用随机变量期望与方差的计算
    - 3.期望与方差的性质
    - 4.协方差与协方差矩阵
  - **参数的估计**
    - 1.矩估计
    - 2.极大似然估计
    - 3.最大后验估计



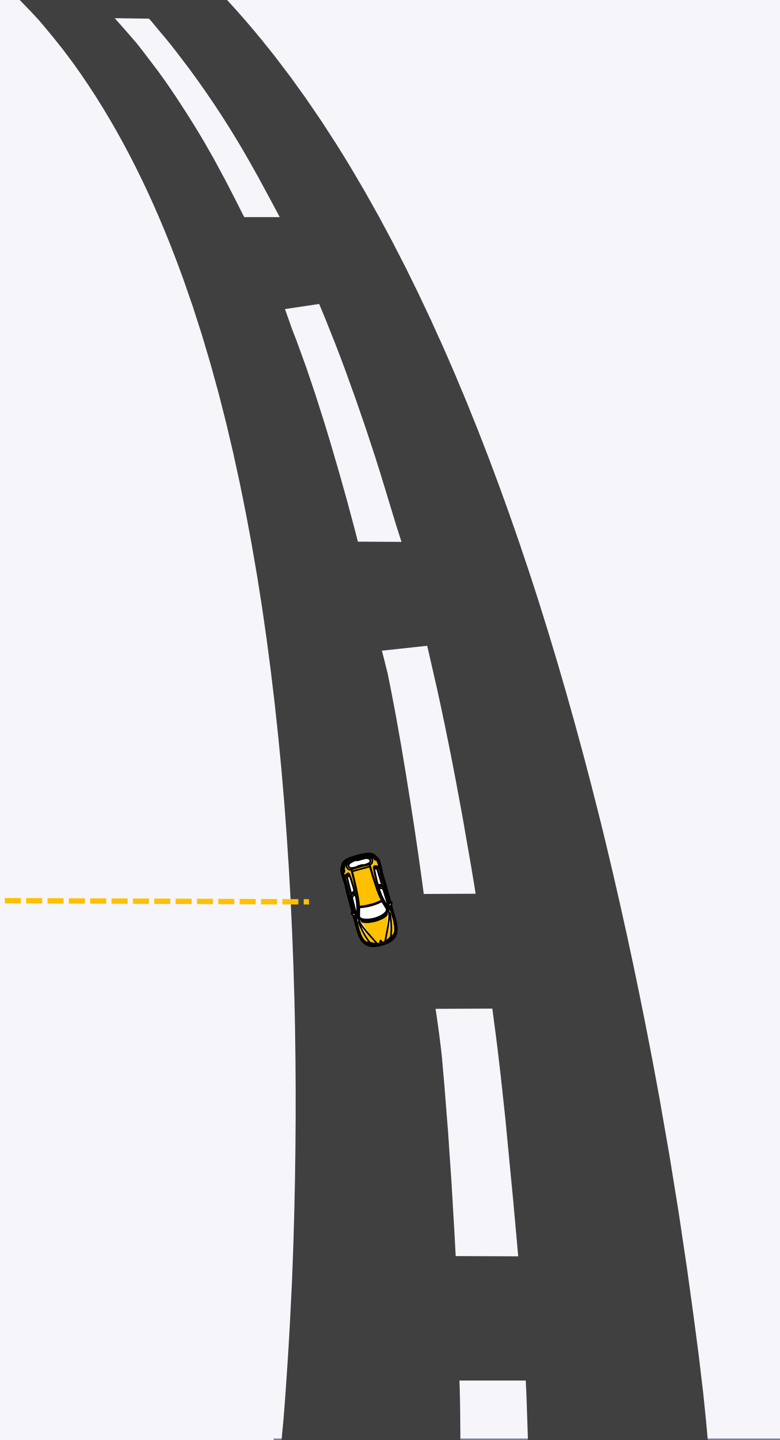
主要内容

- **概率论**
  - **概率基础**
    - 1.随机试验样本空间和随机事件
    - 2.概率的定义
    - 3.条件概率与乘法公式
    - 4.全概率公式与贝叶斯公式以及应用
    - 5.独立性
  - **随机变量与多维随机变量**
    - 1.离散随机变量
    - 2.连续随机变量
    - 3.多维随机变量
    - 4.边缘分布和条件分布
    - 5.独立性
  - **期望与方差**
    - 1.期望与方差的定义
    - 2.常用随机变量期望与方差的计算
    - 3.期望与方差的性质
    - 4.协方差与协方差矩阵
  - **参数的估计**
    - 1.矩估计
    - 2.极大似然估计
    - 3.最大后验估计



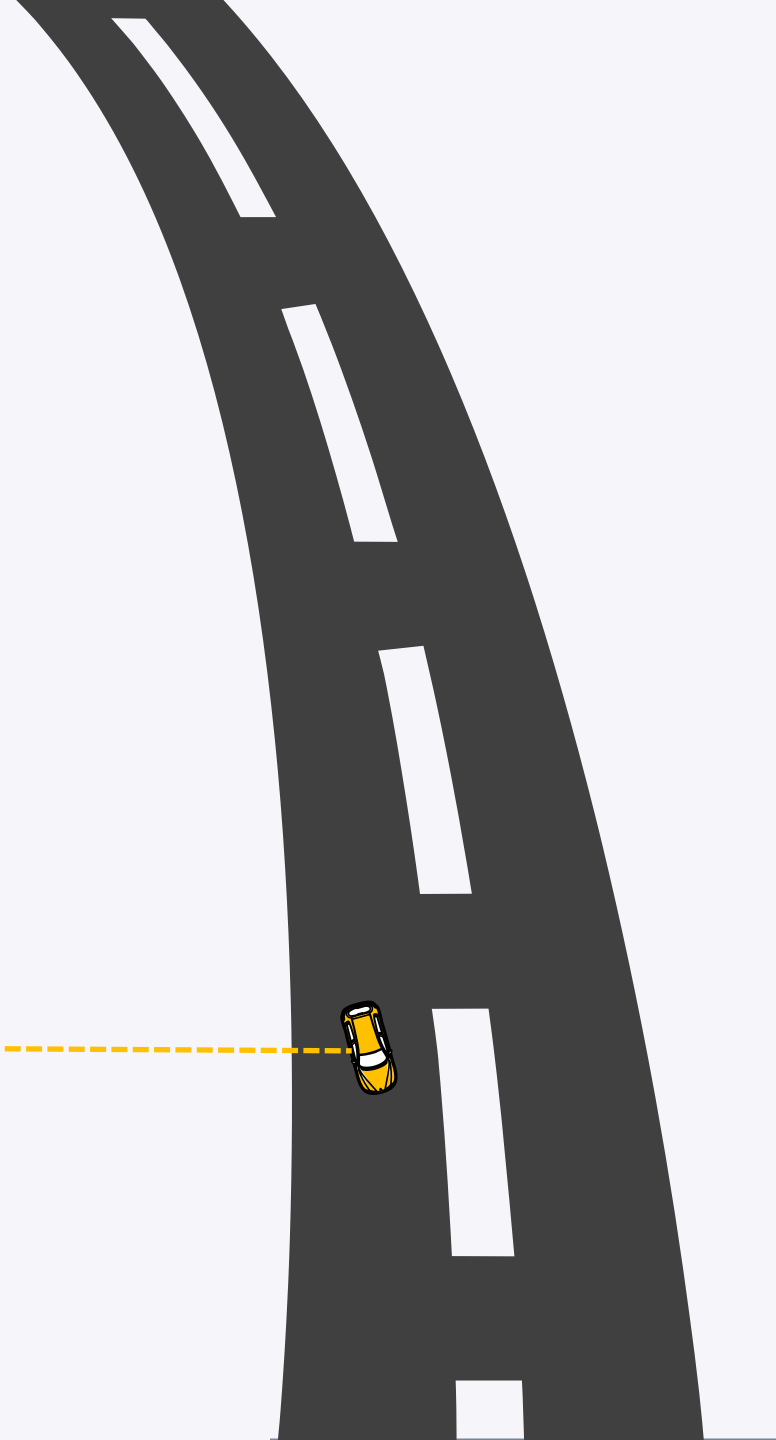
主要内容

- 概率论
  - 概率基础
    - 1.随机试验样本空间和随机事件
    - 2.概率的定义
    - 3.条件概率与乘法公式
    - 4.全概率公式与贝叶斯公式以及应用
    - 5.独立性
  - 随机变量与多维随机变量
    - 1.离散随机变量
    - 2.连续随机变量
    - 3.多维随机变量
    - 4.边缘分布和条件分布
    - 5.独立性
  - 期望与方差
    - 1.期望与方差的定义
    - 2.常用随机变量期望与方差的计算
    - 3.期望与方差的性质
    - 4.协方差与协方差矩阵
  - 参数的估计
    - 1.矩估计
    - 2.极大似然估计
    - 3.最大后验估计



主要内容

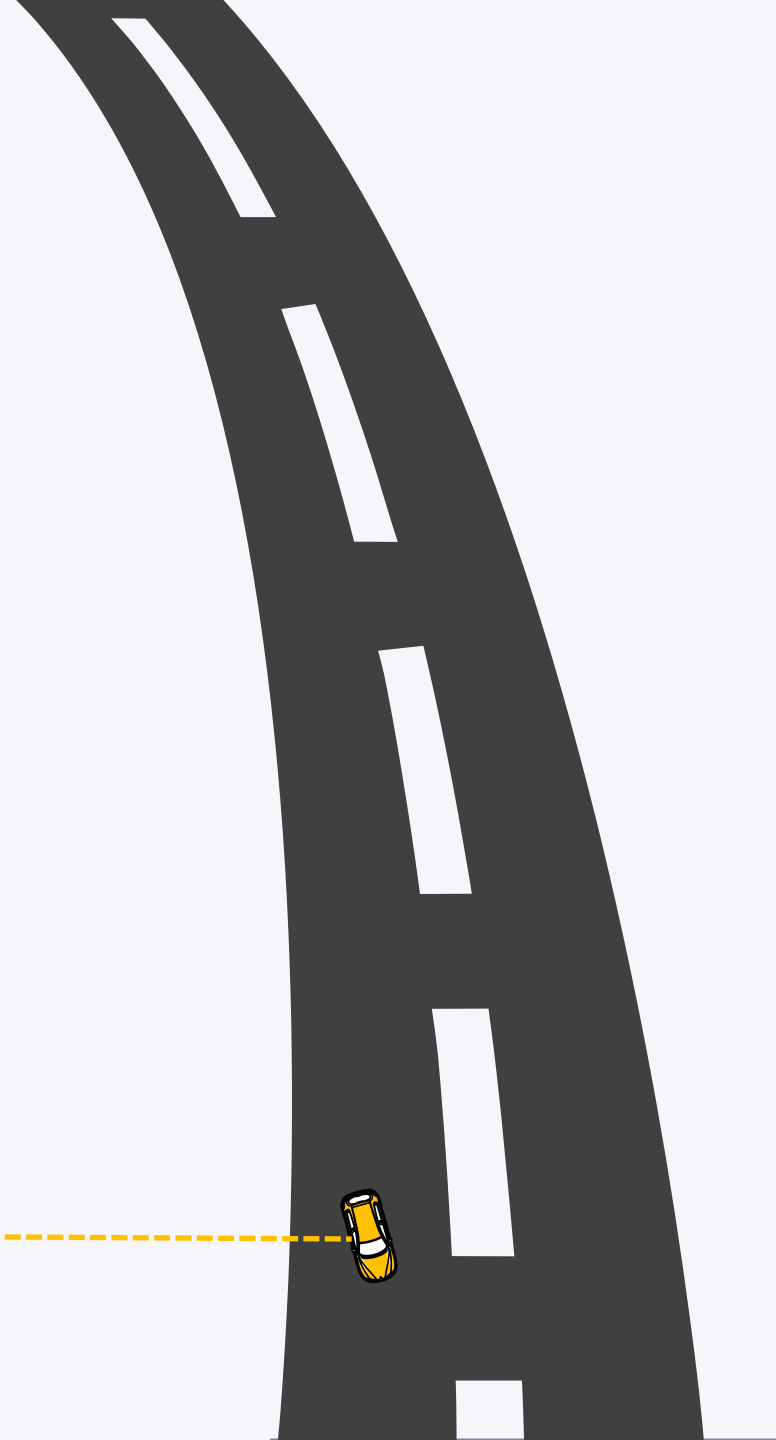
- 概率论
  - 概率基础
    - 1.随机试验样本空间和随机事件
    - 2.概率的定义
    - 3.条件概率与乘法公式
    - 4.全概率公式与贝叶斯公式以及应用
    - 5.独立性
  - 随机变量与多维随机变量
    - 1.离散随机变量
    - 2.连续随机变量
    - 3.多维随机变量
    - 4.边缘分布和条件分布
    - 5.独立性
  - 期望与方差
    - 1.期望与方差的定义
    - 2.常用随机变量期望与方差的计算
    - 3.期望与方差的性质
    - 4.协方差与协方差矩阵
  - 参数的估计
    - 1.矩估计
    - 2.极大似然估计
    - 3.最大后验估计



主要内容

概率论

- **概率基础**
  - 1.随机试验样本空间和随机事件
  - 2.概率的定义
  - 3.条件概率与乘法公式
  - 4.全概率公式与贝叶斯公式以及应用
  - 5.独立性
- **随机变量与多维随机变量**
  - 1.离散随机变量
  - 2.连续随机变量
  - 3.多维随机变量
  - 4.边缘分布和条件分布
  - 5.独立性
- **期望与方差**
  - 1.期望与方差的定义
  - 2.常用随机变量期望与方差的计算
  - 3.期望与方差的性质
  - 4.协方差与协方差矩阵
- **参数的估计**
  - 1.矩估计
  - 2.极大似然估计
  - 3.最大后验估计



主要内容

- **概率论**
  - **概率基础**
    - 1.随机试验样本空间和随机事件
    - 2.概率的定义
    - 3.条件概率与乘法公式
    - 4.全概率公式与贝叶斯公式以及应用
    - 5.独立性
  - **随机变量与多维随机变量**
    - 1.离散随机变量
    - 2.连续随机变量
    - 3.多维随机变量
    - 4.边缘分布和条件分布
    - 5.独立性
  - **期望与方差**
    - 1.期望与方差的定义
    - 2.常用随机变量期望与方差的计算
    - 3.期望与方差的性质
    - 4.协方差与协方差矩阵
  - **参数的估计**
    - 1.矩估计
    - 2.极大似然估计
    - 3.最大后验估计

随机试验，样本空间，随机事件

随机试验：
1.扔硬币
2.投筛子

$E1$：抛一枚硬币，观察正面H、反面T出现的情况
$E2$：将一枚硬币抛掷三次，观察正面H、反面T出现的情况
$E3$：将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次散
$E4$：抛一颗骰子，观察出现的点数

样本空间：

随机试验E的所有可能结果构成的集合称为E的样本空间

S_1：$\{H,T\}$
S_2：$\{HHH,HHT,HTH.THH.HTT,THT,TTH,TTT\}$；
S_3：$\{0,1,2,3\}$；
S_4：$\{1,2,3,4,5,6\}$.

随机事件：

试验E的样本空间S的任意一个子集称为E的随机事件，简称事件
必然事件和不可能事件
互斥事件和对立事件

概率

定义 设E是随机试验,S是它的样本空间。对于E的每一事件A赋予一个实数，记为$P(A)$，称为事件A的概率，如果集合函数$P(\cdot)$满足下列条件：

1. **非负性**：对于每一个事件A，有$P(A) \geq 0$；
2. **规范性**：对于必然事件S，有$P(S) = 1$；
3. **可列可加性**：设$A_1, A_2, \ldots$是两两互不相容的事件，即对于$A_iA_j = \emptyset$，$i \neq j, i, j = 1,2 \ldots$，有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$.

例1 将一枚硬币制掷三次.

（1）设事件A_1为“恰有一次出现正面”,求$P(A_1)$;

（2）设事件A_2,为“至少有一次出现正面”，求$P(A_2)$

解 (1)我们考虑§1中E_2的样本空间,

$$S_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}.$$

而 $A_1 = \{HTT, THT, TTH\}$.

S_2中包含有限个元素,且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同，得 $p(A_1) = \frac{3}{8}$.

（2）由于 $\bar{A}_2 = \{TTT\}$, 于是 $p(A_2) = 1 - p(\bar{A}_2) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

条件概率与乘法公式

例1 将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正反面的情况。设事件A为“至少有一次为H”，事件B为“两次掷出同一面”。现在来求已知事件A已经发生的条件下事件B发生的概率。

定义 设A, B是两个事件，且$P(A) > 0$,称

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件A发生的条件下事件B发生的**条件概率**.

乘法公式

$$P(AB) = P(B|A)P(A)$$

$$P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_n|A_1A_2 \ldots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2 \ldots A_{n-2}) \ldots P(A_2|A_1)P(A_1)$$

条件概率与乘法公式

例2 设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为1/2,若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为7/10,若前两次落下未打破,第三次落下打破的概率为9/10,试求透镜落下三次而未打破的概率。

解 以$A_i(i=1,2,3)$表示事件“透镜第i次落下打破”,以B表示事件“透镜落下三次而未打破”.

因为 $B=\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ ，故有

$$P(B)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)$$

$$=(1-\frac{9}{10})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{1}{2})=\frac{3}{200}.$$

全概率公式与贝叶斯公式

深度之眼 deepshare.net

定理 设试验E的样本空间为S. A为E的事件, $B_1, B_2, \ldots, Bn$,为S的一个划分, 且 $P(B_i) > 0 \ (i = 1,2, \ldots, n)$,则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots +$$

定理 设试验E的样本空间为S. A为E的事件, $B_1, B_2, \ldots, Bn$,为S的一个划分, 且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0 \ (i = l, 2, \ldots, n)$,则

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

重要! ! !

全概率公式与贝叶斯公式

例1 据美国的一份资料报导，在美国来说患肺癌的概率约为0.1%，在人群中有20%是吸烟者,他们患肺癌的率约为0.4%,求不吸者患肺癌的概率是多少?

解 以C记事件“患肺癌”，以A记事件“吸烟”.

按题意$P(C) = 0.001$,

$P(A) = 0.20, P(C|A) = 0.004$.需要求条件概率$P(C|\bar{A})$.由全概率公式有

$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|\bar{A})P(\bar{A})$.

将数据代入,得

$$0.001 = 0.004 \times 0.20 + P(C|\bar{A})P(\bar{A})$$
$$= 0.004 \times 0.20 + P(C|\bar{A}) \times 0.80,$$

$P(C|\bar{A}) = 0.00025$.

全概率公式与贝叶斯公式

例2 对以往数据分析结果表明，当机器调整得良好时，产品的合格率为 98%， 而当机器发生某种故障时，其合格率为55%。每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为95%。试求已知某日早上第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率是多少?

解 设A为事件“产品合格”，B为事件“机器调整良好”。

已知 $P(A|B)=0.98, P(A|\overline{B})=0.55, P(B)=0.95, P(\overline{B})=0.05.$

所需求的概率为 $P(B|A)$.由贝叶斯公式

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}=\frac{0.98\times0.95}{0.98\times0.95+0.55\times0.05}=0.97.$$

这就是说，当生产出第一件产品是合格品时，此时机器调整良好的概率为0.97.

这里，概率0.95是由以往的数据分析得到的，叫做**先验概率**.而在得到信息（即生产出的第一件产品是合格品）之后再重新加以修正的概率（即0.97）叫做**后验概率**.

有了后验概率我们就能对机器的情况有进一步的了解.

独立性

$P(B|A) = P(B)$ “=”是否成立?

抛两次硬币，事件A为第一次出现正面

事件B为第二次出现正面

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P(B\mid A)=\frac{1}{2}, P(AB)=\frac{1}{4}.$$

$P(AB) = P(A)P(B)$则称A与B独立

定理一 设A, B是两事件，且$P(A) > 0$.若A, B相互独立，则$P(B|A) = P(B)$.反之亦然.

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A)}{P(A)}=P(B)$$

定理二 若事件A与B相互独立，则下列各对事件也相互独立: A与$\overline{B}$, $\overline{A}$与B, $\overline{A}$与$\overline{B}$.

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(A)P(B)+P(A\overline{B})$$

$$P(A)(1-P(B))=P(A\overline{B})$$

$$P(A)P(\overline{B})=P(A\overline{B})$$

深度之眼

deepshare.net

联系我们:

电话：18001992849

邮箱：service@deepshare.net

Q Q： 2677693114

公众号

客服微信