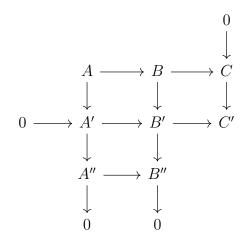
整理:周佳诺 授课教师:刘永强

代数学期中考试

(本试卷中 R 表示含幺交换环)

- 1. 求出PID上的所有有限生成投射模、内射模和平坦模并证明。
- 2. 设 $R = \mathbb{Z}_6$, R 的理想 I = (3) 作为 R-模是投射、内射、平坦的吗? 证明你的结论。
- 3. 设有 R-模组成的交换图:



其中每行每列都正合。证明 $A'' \rightarrow B''$ 为单射。

4. 设 R 为PID, M 为有限生成-R 模,证明对于任意素理想 P 有

$$\operatorname{rank}(M) = \lim_{n \to \infty} d_P(P^n M)$$
 (注: $d_P(M) = \dim_{R/P}(M/PM)$)

- 5. 设 C 为范畴, $f,g:X\to Y$ 为两个态射。称态射 $h:H\to X$ 为 f 和 g 的 equalizer,如果 fh=gh 且对任意满足 fu=gu 的态射 $u:U\to X$,唯一存在态射 $s:U\to H$ 使得 u=hs。
 - (a) 证明如果 equalizer 存在则在相差一个同构的意义下唯一。
 - (b) 证明 equalizer 必为单射。
- 6. 设 R = k[x,y],其中 k 为交换环。设有 R-模 $M_1 = k[x,y,y^{-1}]/k[x,y]$ 和 $M_2 = k[x,y,x^{-1}]/k[x,y]$ 。设 $M = M_1 \oplus M_2$,证明 $M \otimes_R M \otimes_R M = 0$ 。
- 7. 设 $A = \{(1, n), (n, 1), (n, n)\} \subset \mathbb{Z}^2$, M 为 A 生成的 \mathbb{Z}^2 的子 \mathbb{Z} -模。证明 M 是自由 \mathbb{Z} -模, $\mathbb{Z}^2/M = \mathbb{Z}_{n-1}$,且不能在 A 中选取 M 的一组基。

$$finitely-presented: \qquad R^n \longrightarrow R^m \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

8. 设 M 是有限生成 R-模, $f:R^m\to M$ 为满射。证明 $\ker(f)$ 是有限生成 R-模。