中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、证明：设E是实轴上可列集。则存在实轴上的点x，使得E与E+x的交为空集。
取A为E的差集。因E可列，故A可列。在A外取一点x即满足条件。

二、证明：Cantor函数连续，但不绝对连续。
Cantor函数单调，而且其值域为[0,1]。故连续。因为在[0,1]上f的导数=0.a.e.但f（1）不等于f(0),故不是绝对连续。

三、设F是n维欧式空间中的无限闭集，则存在可数子集E,使得E的闭包恰为F。
对任意正整数k，做B(r,k)，r取遍有理数。对B(r,k)中与F交非空的集B，取B与F交中一点。将其全体记为A（k），对A(k)取并得到的集合E即满足条件。

四、设$U(k)$是n维欧式空间上的一族开球，G为它们的并。$0 < X < m(G)$。证明存在有限个互不相交的开球，使它们的测度和$> X/3^n$.
在G内做紧集F，使其测度¿X,于是F被U(k)中开球有限覆盖，将其按大小排序后，选半径最大的开球作为第一个集B1，再从与B1不交的开球中选半径最大的作为B2⋯⋯这样得到的有限个开球有如下性质：将它们各自球心不动，而半径扩大三倍后又能覆盖F。故它们就满足题目要求

五设E是n维欧式空间中的集合。对任意x¿0,存在G，使得E包含于G，但是$G\setminus E$的外测度¡x.证明E可测。
取G（n），使得它包含G，且$G(n)\setminus E$的外测度小于1/n。令H为G(n)的交，则$H\setminus E$外测度为0，故可测。而H 是可列个开集的交，也可测。故$E = H\setminus(H\setminus E)$可测。

六证明Dirichlet函数可测

Dirichlet函数是有理数集的特征函数，而有理数集是零测集，可测。

七若定义在实直线子集E上的单调增可测函数一侧度收敛于f，证明这个收敛是几乎处处收敛。

存在f(n)的子列几乎处处收敛到f，再由f（n）的递增性即可得到。

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析(H)期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、证明：定义在（a，b）上的下凸函数在除去一个零测集外都是可微的.

二、试在坐标平面上作互不相交的圆周族，其中每个圆周均与x轴相切，切点全体包含一切有理数.

三、如果$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$的势是$\aleph$,证明必有一个$A_n$的势也是$\aleph$.

四、设$\{A_n\}$是[0,1]中互不相同的可测集合列,且存在$\varepsilon > 0$,$m(A_n) \geq \varepsilon (n = 1, 2, \cdots)$.试问是否存在子列$\{A_{n_i}\}$,使得

$$m(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{n_i}) > 0?$$

五、设$S \subset \mathbb{R}^2$是以原点(0,0)为中心的对称凸集,且m(S)>4,则S包含整数格点P=(x,y)≠(0,0). 此外,又若存在$n_0 \in \mathbb{N}$,使得m(S)>4n_0,则S至少包含2n_0个整数格点.

六、设$E \subset \mathbb{R}^n$.若对任给$\varepsilon > 0$,均存在$A \subset \mathscr{M}$,使得$m^*(E \triangle A) < \varepsilon$,则$E \subset \mathscr{M}$.

七、视$f(x) = x^3$为$(-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$的映照.证明$f(x)$把直线上零测集映射成零测集.

八、设E是勒贝格可测集,$\{f_n\}$是E上的Lebesgue可测函数序列,并且$f_n \underset{m}{\rightrightarrows} f$(有限函数).问是否有$f_n(\frac{1}{x}) \underset{m}{\rightrightarrows} f(\frac{1}{x})$?为什么?

九、设$f(x)$是$\mathbb{R}^1$上的实值可测函数,试问是否存在$g \in C(\mathbb{R}^1)$,使得

$$m(\{x \in \mathbb{R}^1 : |f(x) - g(x)| > 0\}) = 0?$$

十、(1)设有定义在$\mathbb{R}^1$上的函数$f(x)$,满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^1,$$

且在$E \subset \mathbb{R}^1 (m(E) > 0)$上有界,则$f(x) = cx (x \in \mathbb{R}^1)$,其中$c = f(1)$.

(2)设有定义在$\mathbb{R}^1$上的可测函数$f(x)$,满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^1,$$

则$f(x) = cx (x \in \mathbb{R}^1)$,其中$c = f(1)$.

(3)说明函数方程$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^1$,有非线性解.

答案

一、$f(x)$对（a，b）中任意2点$x_1, x_2, x_1 < x_2$,均有

$$f(x) \leq \frac{(x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)}{x_2 - x_1}, \quad x_1 < x < x_2.$$

将上式进行变换，有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

此外对$x < x_2' < x_2$,我们有

$$\frac{f(x_2') - f(x)}{x_2' - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

这说明存在右导数:

$$\lim_{x_2' \to x+} \frac{f(x_2') - f(x)}{x_2' - x} = f_+'(x) < +\infty.$$

类似地可知左导数存在，且有

$$-\infty < f_-'(x) \leq f_+' < +\infty$$

且左右导数存在且不相等的点集是至多可数集故是零测集，故命题得证.

二、解:设p,q,r,s皆为整数,并满足$p/q \neq r/s$.取k¿2,并且作以$(p/q, 1/(kq^2)), (r/s, 1/(ks^2))$为圆心,且切于x轴的两个圆周.它们是不相交的,否则其圆心距就小于等于两个圆半径之和:

$$(\frac{p}{q} - \frac{r}{s})^2 + (\frac{1}{kq^2} - \frac{1}{ks^2})^2 \leq (\frac{1}{pq^2} + \frac{1}{ps^2})^2,$$

即$(ps - rq)^2 \leq \frac{4}{k^2}$.但k¿2且(ps-rq)是正整数.矛盾

现在,对任意给定的有理数r=p/q(既约分数),记C_r是以点$(p/q, 1/(kq^2)$为圆心,$1/kq^2$为半径的圆周,那么C_r切x轴于点(r,0).这说明$r_1 \neq r_2$,则C_{r_1}与C_{r_2}不相交,从而圆周集族$\{C_r : r \in \mathbb{Q}\}$满足要求.

三、证明:考虑实数列$(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots)$全体,它的势为$\aleph$.令$\varphi(a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$(当$a_n \geq b_n$时,$(a_n, b_n)$理解为空集$\emptyset$).显然$\varphi$是实数列全体到开集全体的满射.所以开集全体的势$\leq \aleph$.又有开区间(a,b)全体的势为$\aleph$, 故开集全体的势$\geq \aleph$.从而开集全体的势等于$\aleph$.

四、解:不一定.例如作点集列:$A_n(n \in \mathbb{N})$,: $A_n = \{x \in [0,1]$:x的十进位小数表达式中，第n位数字$\neq 0\}$, 易知$m(\bigcap_{i=1}^k A_{n_i}) = (\frac{9}{10})^k$.

五、证明:考查点集$E = \{x/2, x \in S\}$.先证明E中至少存在$n_0 + 1$个点$L_1, L_2, \cdots, L_{n_0+1}$,使得$L_k - L_j \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. 记L=(i,j)($i, j \in \mathbb{Z}$),作点集

$$I_L = \{L + P : P = (x,y) \in [0,1) \times [0,1)\},$$

$$E_L = \{\{x\} - L : x \in E \bigcap I_L\},$$

由$\sum_L m(E_L) = \sum_L m(E \bigcap I_L) = m(E) > n_0$,又反证法易知集合族$\{E_L\}$不能每个点都最多只在$n_0$个$E_L$中,故易推出结论成立.取出这些点$L_1, L_2, \cdots, L_{n_0+1}$,易推出$\pm(L_k - L_i)(k \neq i)$是相异数组,证毕.

六、证明:依题意,对任给$\varepsilon > 0$,对$\varepsilon/2^k (k \in \mathbb{N})$,存在可测集列$\{A_k\}$,使得$m^*(E \triangle A_k) < \varepsilon/2^k (k \in \mathbb{N})$即有$m^*(E \setminus A_k)\varepsilon/2^k$,$m^*(A_k \setminus E) < \varepsilon/2^k (k \in \mathbb{N})$.现在令$A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$,则A是可测集，且有

$$E \setminus A = \bigcap_{k=1}^\infty (E \setminus A_k), \quad A \setminus E = \bigcup_{k=1}^\infty (A_k \setminus E),$$

$$m^*(E \setminus A) \leq m^*(E \setminus A_k)(k \in \mathbb{N}), \quad m^*(A \setminus E) \leq \sum_{k=1}^\infty m^*(A_k \setminus E),$$

$$m^*(E \setminus A) \leq \varepsilon/2^k (k \in \mathbb{N}), \quad m^*(A \setminus E) \leq \sum_{k=1}^\infty \varepsilon/2^k = \varepsilon.$$

由ε的任意性,可知$m^*(E \setminus A) = 0 = m^*(A \setminus E)$,即$m^*(E \triangle A)$=0.故E是可测集.

七、证明:由于f是双射,f把(a,b)映射成开区间(a^3, b^3).因而把开集映为开集.另外,对于在(-n,n)($n = 1, 2, 3, \cdots$)中的开区间(a,b),f映射成(a^3, b^3)使

$$(b^3 - a^3) = (b-a)(b^2 + ab + a^2) \leq 3n^2(b-a).$$

所以把(-n,n)中的测度为c的开集映射成测度$< 3n^2 \cdot c$的开集.从而把(-n,n)中的零测集映成零测集.这样,f把零测集映成零测集.因为可测集是开集减去一个零测集,故f把可测集映成可测集.

八、解：例如$E=(0,\infty)$.f是E上恒等于1的函数，而f_n则是在$(0,\frac{1}{n})$上取值为n,在$[\frac{1}{n},\infty)$取值为1的函数,这时$E(|f_n-f|>\varepsilon)\subset(0,\frac{1}{n}$,所以$f_n\Longrightarrow f$,但$f_n(\frac{1}{x})$不依测度收敛于$f(\frac{1}{x})$.

九、解:不一定.例如$f(x)=-1,x\in[0,1/2)\quad f(x)=+1,x\in[1/2,1]$.则对任意的$g\in C([0,1]):g(1/2)=\lambda>0$,存在$\delta_0>0$, 使得当$x\in(1/2-\delta_0,1/2+\delta_0)$时,$g(x)>\lambda/2$.类似地讨论$\lambda<0,\lambda=0$,即得证.

十、证明:(1)首先,由题意,对$r\in\mathbb{Q}$,必有$f(r)=rf(1)$.其次,由m(E)¿0可知,存在区间$I:I\subset E-E$.不妨设$|f(x)|\leq M(x\in E)$,又对任意的$x\in I$,$x',x''\in E$,使得$x=x'-x''$,则

$$|f(x)|=|f(x^{'})-f(x^{''})|\leq|f(x^{'})|+|f(x^{''})|\leq 2M.$$

记I=[a,b],并考察[0,b-a],则$x+a\in[a,b]$.从而由$f(x)=f(x+a)-f(a)$可知,$|f(x)|\leq 4M(x\in[0,b-a])$.记b-a=c,这说明

$$|f(x)|\leq 4M,\quad x\in[0,c].$$

易知$|f(x)|\leq 4M,x\in[-c,c]$.已知对任意的$x\in\mathbb{R}^1$以及自然数n,均存在有理数r,使得$|x-r|<c/n$.因此我们得到

$$|f(x)-xf(1)|=|f(x-r)+rf(1)-xf(1)|=|f(x-r)+(r-x)f(1)|\leq\frac{4M+c|f(1)|}{n}.$$

根据n的任意性(x的任意性),即得$f(x)=xf(1)$.

(2)我们只要证f在x=0处连续即可,根据lusin定理,可作有界闭集F:m(F)¿0,f(x)在F上一致连续,即对任意$\varepsilon>0$,存在$\delta_1>0$,有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,|x-y|<\delta_1,\quad x,y\in F.$$

且我们知道原点是集合F-F 的内点,故存在$\delta_2>0$,使得

$$[-\delta_2,\delta_2]\subset F-F.$$

取$\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当$z\in[-\delta,\delta]$时,由于存在$x,y\in F$,使得z=x-y,故可得

$$|f(z)|=|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

这说明$f(x)$ 在x=0处是连续的,故易知函数满足方程

(3)由选择公理的推论,任意线性空间都有基,那么在$\mathbb{Q}$上存在一个$\mathbb{R}$的基,即存在一个集合$A\subset\mathbb{R}$,使得对于任意实数z,存在唯一的有限集合$\mathbf{X}=\{x_1,\cdots,x_n\subset A\}$和有

理数数列$\{\lambda_i\}$,满足:$z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$设想函数方程在实数集的子集$x\mathbb{Q}, x \in A$上成立,即满足$f(y) = g(x)y$,其中y是x的有理数倍,运用前面推导的结论,得到对任意实数满足方程的函数:

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\lambda_i x_i$$

对于所有$g : A \to \mathbb{R}, f(z)$是函数方程的解.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析期中试卷

学生所在系:__________　　　　　　　　　　　　　　姓名______________

学号______________　　　　　　　　　　　　　　　得分______________

一、证明在$\mathbb{R}$上定义的实值函数f的连续点集是G_δ集

二、给出Cantor集的定义，并证明Cantor集是闭集，完全集，测度为0，势为$\aleph$

三、叙述可测函数的定义，并证明零测集不改变可测性，以及在几乎处处收敛下可测性保持。

四、E$\subset\mathbb{R}$可测，f可测，g连续，求证$g(f(\mathrm{x}))$为可测函数，但$f(g(\mathrm{x}))$可能不为可测函数。

五、证明不可测集的存在性，用证明的思想构造一个不可测集。

六、设E_n是可测集列，求证$\mathrm{m}(\varliminf\limits_{n\to\infty} E_n)\leq \varliminf\limits_{n\to\infty} m(E_n) \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} m(E_n) \leq\mathrm{m}(\varlimsup\limits_{n\to\infty} E_n)$

七、f可测，$f(\mathrm{x}+\mathrm{y})=f(\mathrm{x})+f(\mathrm{y})\ \forall\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}$,求证$f(\mathrm{x})=f(1)\mathrm{x},\forall\mathrm{x}\in\mathbb{R}$

八、E可测，$\mathrm{m(E)}<\infty$，求证$\lim\limits_{x\to\infty} m((x+E)\cap E)=0$

九、证明若f是E上的可测函数，则存在可测简单函数列$\varphi_k(x)$使得$|\varphi_k(x)| \leq |f(x)|$,且有$\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$ 若$f(x)$还是有界的，则上述收敛是一致的。

十、证明函数列f_n依测度收敛$\Longleftrightarrow f_n$是依测度Cauchy列

中国科学技术大学2011–2012学年第一学期

数学分析A1补考试卷

学生所在系:__________ 姓名_______________

学号_______________ 得分_______________

一、设$X=\{1,2,3,4\},\Phi$ 为X的子集族$\Phi=\{X,\phi,1,2,L,M,N,P\}$,试给出$L,M,N,P$使得$\Phi$构成$X$的$(\sigma)$代数.

二、此题判断，不需说明理由：是否存在函数列$f_n\in C[0,1]$,使得f_n的极限函数为$[0,1]$上有理数集的特征函数？

三、试问是否在$[0,1]$中存在可测集E,使得对每个区间$(a,b)\subset[0,1]$均有$m(E\bigcap(a,b))=\frac{(b-a)}{2}$,并说明理由

四、设$m(E)<+\infty$, 而且函数列f_kg_k分别依测度收敛于f,g 试证明：f_kg_k依测度收敛收敛于fg

五、将上题中题设中的$m(E)<+\infty$改为$m(E)=+\infty$结论是否仍然成立，并说明理由。

六、是否存在R的测度为正的闭子集E，使E中只包含无理数，并说明理由。

七、设A,B都是R中的可测集，且测度均有限，证明以下恒等式：$m(A\cup B)+m(A\cap B)=m(A)+m(B)$

八、设$0 < m(A) < +\infty, f(x)$是$A \subset R$上的可测函数，且有$0 < f(x) < \infty a.e. x \in A$,试证明对于任意的$0 < \delta < m(A), \exists B \subset A$以及$k_0 \in N, m(A \setminus B) < \delta, \frac{1}{k_0} \leq f(x) \leq k_0$

九、$E \subset R^n$可测并且具有正测度,证明0在$E - E = \{(x, y) | x, y \in E\}$内部.

十、

$f(x)$是R上的实值可测函数，且对任意$x, y \epsilon R$,有$f(x + y) = f(x) + f(y)$,则$f(x) = f(1)x$

中国科学技术大学2011–2012学年第一学期

数学分析A1补考试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、$\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{3,4\},\{1,2\}$

二、不存在，设此连续函数列的极限函数为f,则$f(x)<0.5$的点集为$F-\sigma$集，由于无理数集不为$F-\sigma$集，故不存在。

三、不存在，由外测度与测度的关系知，对任意$\varepsilon>0$,存在一组[0,1]中的一组开覆盖I_k，使得$\Sigma m(I_k\cap E)>m(E)>\Sigma m(I_k)-\varepsilon$由条件知，$\frac{1}{2}(\Sigma m(I_k))<\varepsilon$

四、由Riesz定理知，对f_kg_k的任一子列，存在子列的子列$f_{k_i}gk_i$几乎处处收敛于fg,又由于测度有限，故命题成立。

五、不成立。反例如下，设$E=[0,\infty)$,作函数$f_n(x)=0,x\in[0,n),f_n(x)=\frac{1}{x},x\in[n,\infty),g_n(x)=x$

六、存在，由于有理数集为可数集，将全体有理数记作r_n,对每个r_n作其$frac1n^2$邻域，将这些邻域作并，可知其为开集且由于平方级数收敛知其测度有限，对其取余，即可得到只含无理数的闭集，且此闭集的测度无限。

七、由于A,B均可测，由$Caratheodory$条件

知$m(A\bigcup B)=m(B)+m(A\bigcap B^c),m(A)=m(A\bigcap B)+m(A\bigcap B^c)$,将两式中的$m(A\bigcap B^c)$消去后即得结论

八、记$A_k=x\epsilon A|1/k\le f(x)\le k(k=1,2....),Z_1=x\in A|f(x)=0,Z_2=x\in A|f(x)=\infty$,易知$m(Z_1)=m(Z_2)=0$,且有$\bigcup A_k$与$Z_1$跟$Z_2$的并为$A$,且$A_k\subset A_{k+1}$,由此可知$m(A_k)\uparrow m(A)$,从而存在$k_0$,使得$m(A\setminus A_{k0})<\delta$. 取$B=A_{k0}$即可

九、

即$\exists\delta_0>0$，使得$B(0,\delta_0)\subset E-E$

取λ满足$1-2^{-(n+1)}<\lambda<1$，则存在矩体I使得$\lambda|I|<m(I\cap E)$.

记I的最短边长为δ，作$J=\{x=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n)||\zeta_i|<\frac{\delta}{2}\}$

下证$x_0\in J,(E\cap I)\cap((E\cap I)+\{x_0\})$非空

由J的作法，有$m(I\cap(I+\{x_0\}))>2^{-n}|I|$

所以$m(I\cup(I+\{x_0\}))=|I|+m(I+\{x_0\})-m(I\cap(I+\{x_0\}))<2|I|-2^{-n}|I|<2\lambda|I|$

但$E\cap I,E\cap I+\{x_0\}$测度都大于$\lambda|I|$，从而必相交.矛盾!

十

. 我们只需证明$f(x)$在0点连续。根据$lusin$定理知，可作有界闭集F,使得$m(F)>0$,且$f(x)$在F上连续，即对任意$\varepsilon>0$存在$\delta_1>0$,有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,|x-y|<\delta_1,x,y\in F$.现在研究$F-F\supset[-\delta_2,\delta_2]$取$\delta=min\delta_1,\delta_2$, 则当$z\in[-\delta,\delta]$时,由于存在$x,y\in F$,使得$z=x-y$,故$|f(z)|<\varepsilon$,故$f(x)$在0点连续。

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析A1期中考试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、证明存在R上的递增函数$f(x)$，它在有理数点上是间断的，在无理数点上连续的。

二、设$f \in C([a,b])$，E是$[a,b]$中的可数集。若有$f'(x) = 0(x \in [a,b] - E)$，则$f(x)$是递增的。

三、若G是R^n中的开集且$f(x)$定义在G上，则对任意的$t \in R^1$，点集$H = \{x \in G : w_f(x) < t\}$为开集。

四、设定义在R^1上的函数$f(x)$满足$|f(x) = f(y)| <= e^{|x|+|y|}|x-y|, (x, y \in R^1)$.若E是R1的子集且$m(E) = 0$，则$m(f(E)) = 0$.

五、设T是R^n到R^n的一一映射；

（1）若T保持点集的外侧度不变，则对于可测集E，$T(E)$必是可测集。

（2）若对任意矩体I含于R^n，均有$|I| >= m^*(T(I)), |I| >= m^*(T^{-1}(I))$,则$T$是保测映射。

六、记F为$(0,1)$上的连续函数族，则函数$(0 < x < 1)g(x) = supF, h(x) = infF$是$(0,1)$上的可测函数。

七、设$f(x)$是定义在$(0,1]$上的实值函数，则必存在可测函数$g(x)$与$h(x)$，使得：$f(x)=g(h(x)),x\in(0,1]$

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析A1期中考试卷

学生所在系:__________　　　　姓名______________

学号______________　　　　得分______________

一、证明存在R上的递增函数$f(x)$，它在有理数点上是间断的，在无理数点上连续的。
证明：记(a,b)上的有理数全体为$\{r_n\}$,并作正项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} C_n$，现定义函数$f(x)=\sum_{r_n<x} C_n$ (即对$r_n<x$的指标n求和)，易知$f(x)$递增，
且$f(r_n+)-f(r_n-)=C_i(i=1,2,...)$

二、设$f\in C([a,b])$，E是$[a,b]$中的可数集。若有$f'(x)=0(x\in[a,b]-E)$，则$f(x)$是递增的。
证明：设$C=\{x:f'(x)<0\}$,所以C含于E。若C非空，则存在x_0有$f'(x_0)<0$，又知存在x_1有$f'(x_1)>0$，所以$f'(x)$ 可以取到$(f'(x_0),0)$中的所有值，故C不可数，矛盾！
即C空，故对$x\in[a,b]$恒有$f'(x)>=0,f(x)$递增。

三、若G是R^n中的开集且$f(x)$定义在G上，则对任意的$t\in R^1$，点集$H=\{x\in G:w_f(x)<t\}$为开集。
证明：不妨设H非空。对于H中的任意一点x_0，因为$f(x_0)<t$,所以存在$r_0>0$，使得$B(x_0,r_0)$含于G且$sup\{|f(x)-f(x')|:x',x''\in B(x_0,r_0)\}<t$. 现在对于$x\in B(x_0,r_0)$，可选取$r_1>r$使得$B(x,r_1)$含于$B(x_0,r_0)$. 显然有$sup\{|f(x')-f(x'')|:x',x''\in B(x,r_0)\}<t$.
从而可知$w(x)<t$,即$B(x_0,r_0)\in H$,故H为开集。

四、设定义在R^1上的函数$f(x)$满足$|f(x)=f(y)|<=e^{|x|+|y|}|x-y|,(x,y\in R^1)$.若E是R1的子集且$m(E)=0$，则$m(f(E))=0$.
证明：不妨假设E为有界集：E含于$(-r,r)$，则对任给的$t>0$,存在G满足G为$(-r,r)$的子集，E为G的子集且$m(G-E)<t$.现在计$G=\cup_{i>=1}(a_i,b_i)$(构成区间之并)，我们有$f((a_i,b_i))$含于$(f(a_i)-e^{2r}|b_i-a_i|,f(a_i)+e^{2r}|b_i-a_i|)$. 故知$m(f(G))<=\sum_{i>=1}Ce^{2r}|b_i-a_i|<Ce^2rt$. 从而$m(f(E))=0$.

五、设T是R^n到R^n的一一映射；
（1）若T保持点集的外侧度不变，则对于可测集E，$T(E)$必是可测集。
（2）若对任意矩体I含于R^n，均有$|I| >= m^*(T(I)), |I| >= m^*(T^{-1}(I))$,则$T$是保测映射。
证明：
（1）对任意的A含于R^n，我们有$m^*(T^{-1}(A)) = m^*(T^{-1}(A \cap E) + m^*(T^{-1}(A \cap E^c)$. 从而由题设知$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.这说明$T(E)$是可测集。
(2)设E含于R^n.对任给的$t > 0$,作$G = \cup_{i>=1} I_i(I_i$是矩形$)$:E含于G且$m^*(E) > m(G) - t = \sum_{i>=1} |I_i| - t$, 我们有$T(E)$含于$G = \cup_{i>=1} T(I_i), m^*(T(E)) <= \sum_{i>=1} m^*(T(I_i)) <= \sum_{i>=1} |I_i| < m^*(E) + t$ 此外，对任给的$t > 0$，又作$H = \cup_{i>=1} J_i(J_i$是矩形$)$:$T(E)$含于H且$m^*T((E)) > \sum_{i>=1} |J_i| - t$. 类似的有E含于$\cup_{i>=1} T^{-1}(J_i), m*(E) < m*(T(E)) + t$. 令$t$趋于0便知$m^*(E) = m^*(T(E))$.再利用（1）的结论立即得证。

六、记F为$(0,1)$上的连续函数族，则函数$(0 < x < 1) g(x) = supF, h(x) = infF$是$(0,1)$上的可测函数。
证明：对$g(x)$，设$t \in R^1$.若$x_0 \in E_t = \{x \in (0,1) : g(x) > t\}$,则存在$f \in F : f(x_0) > t$.因为$f(x)$连续，故存在$h > 0$, 使得$f(x) > t(x \in (x_0 - h, x_0 + h))$.由此又知$g(x) > t(x \in (x_0 - h, x_0 + h))$.这说明$x_0$是$E_t$的内点，即$E_t$ 是开集，$g(x)$是可测函数。同理可得$h(x)$为可测函数。

七、设$f(x)$是定义在$(0,1]$上的实值函数，则必存在可测函数$g(x)$与$h(x)$，使得：$f(x) = g(h(x)), x \in (0,1]$
证明：把$(0,1]$中的点作2进制无尽小数表示：$x \in (0,1], x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n/2^n, a_n \in \{0,1\}$. 并定义$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_n/3^n, h(0) = 0$，则$h(x)$在$(0,1]$上严格递增。易知$h((0,1])$是$Cantor$集的子集，$m(h((0,1])) = 0$. 再定义函数：$g(x) = f(h^{-1}(x))(x \in h((0,1]))$，否则$g(x) = 0$ 则有$f(x) = g(h(x))$，其中$g(x), h(x)$为$(0,1]$上的$L-$可测函数。

中国科学技术大学2011–2012学年第一学期

实分析(H)期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、设card$(A_\alpha)=\aleph$，$\alpha\in\Gamma$，且card$(\Gamma)=\aleph$，则card$(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)=\aleph$.

证明:由$\aleph=$card$(A_1)\leqslant$card$(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\leqslant$card$(\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}}\{x\}\times\mathbb{R})=$card$(\mathbb{R}^2)=\aleph$即得.

二、设$E\subset\mathbb{R}$，$m(E)>0$，则$\exists x_0,x_1\in E$，s.t. x_1-x_0 为无理数.

证明：m(E)>0，E为不可数集.

$\forall x_0\in E$，令G=$\{x-x_0|x\in E\}$，则card(G)=card(E)$\neq\aleph_0$，故G为不可数集.

因此，G中数$x-x_0$不可能都是有理数，即至少$\exists x_1\in E$，s.t. x_1-x_0为无理数.

三、设$E\subset\mathbb{R}^n$且$m^*(E)<+\infty$，若有

$$m^*(E)=\sup\{m(F)|F\subset E\text{是有界闭集}\},$$

则E是可测集.

证明:对$\forall\varepsilon>0$，取开集$G:G\supset E$，且$m(G)<m^*(E)+\frac{\varepsilon}{2}$.此外，又选闭集$F:F\supset E$且$m(F)>m^*(E)-\frac{\varepsilon}{2}$.从而知$F\subset E\subset G$，且$m(G\backslash F)<\varepsilon$，即$E$是可测集.

四、设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为实值函数，则

$\forall a\in\mathbb{R},f^{-1}((a,+\infty))$为Lebesgue可测集$\Leftrightarrow\mathbb{R}$中任意开集$G,f^{-1}(G)$为Lebesgue可测集.

证明:($\Leftarrow$)对$\forall a\in\mathbb{R}$，由右边条件知

$$\{x\in\mathbb{R}|f(x)>a\}=f^{-1}((a,+\infty))$$

为Lebesgue可测集.

($\Rightarrow$)设f为$\mathbb{R}^n$上的Lebesgue可测函数，故对$\forall(a,b)\subset(-\infty,+\infty)$，有

$$f^{-1}((a,+\infty))=\{x\in\mathbb{R}^n|f(x)>a\}$$

和

$$f^{-1}([b,+\infty))=\{x\in\mathbb{R}^n|f(x)\geqslant b\}$$

都为Lebesgue可测集.从而

$$f^{-1}((a,b))=f^{-1}((a,+\infty))-f^{-1}([b,+\infty))$$

为Lebesgue可测集.如果$G\subset\mathbb{R}$为开集，记$G=\bigcup\limits_k(a_k,b_k)$，其中$(a_k,b_k)$为$G$的构成区间.于是

$$f^{-1}(G)=f^{-1}(\bigcup_k(a_k,b_k))=\bigcup_k f^{-1}(a_k,b_k)$$

也为Lebesgue可测集.

五、设$f_n(x)$是$[0,1]$上的递增函数$(n=1,2,\cdots)$，且$f_n(x)$在$[0,1]$上依测度收敛于$f(x)$，则在$f(x)$的连续点$x=x_0$上，必有

$$f_n(x_0)\to f(x_0),a.e.x\in E.$$

证明:反证法.假定$f_n(x_0)$当$n\to\infty$时不收敛于$f(x_0)$，则$\exists\varepsilon_0>0$，以及$\{f_{n_k}(x_0)\}$，使得

$$f_{n_k}(x_0)\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0 \quad 或 \quad f_{n_k}(x_0)\leqslant f(x_0)-\varepsilon_0.$$

若前一情形成立，则由x_0是f的连续点可知，$\exists\delta>0$，使得

$$f(x)<f(x_0)+\frac{\varepsilon_0}{2}(x_0)\leqslant x<x_0+\delta.$$

由于$f_{n_k}(x)\geqslant f_{n_k}(x_0)\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0>f(x)$，故得

$$m(\{x\in[0,1]|f_{n_k}(x)>f(x)\})\geqslant\delta \quad (k\in\mathbb{N}).$$

但这与$f_n(x)$在$[0,1]$上依测度收敛于$f(x)$矛盾.
后一种情况同理.

六、设$z=f(u,v)$是$\mathbb{R}^2$上的连续函数，$g_1(x),g_2(x)$是$I=[a,b]\subset\mathbb{R}^1$上的实值可测函数，则$F(x)=f(g_1(x),g_2(x))$是$[a,b]$上的可测函数.
证明:对$\forall t\in\mathbb{R}$，令$G_t=\{(u,v)|F(u,v)>t\}=F^{-1}((t,+\infty))$，则

$$\{x\in I|F(x)>t\}=\{x\in I|(g_1(x),g_2(x))\in G_t\}.$$

若G_t是开矩形:$G_t=(a_1,b_1)\times(c_1,d_1)$，则

$$\{x\in I|F(x)>t\}=\{x\in I|(g_1(x),g_2(x))\in G_t\}=\{x\in I|g_1(x)\in(a_1,b_1)\}\cap\{x\in I|g_2(x)\in(c_1,d_1)\}.$$

对开集G_t，将其分解为可数个开矩形的并:$G_t = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} J_n$，$J_n = (a_n, b_n)\times(c_n, d_n)$，我们有

$$\{x\in I|F(x)>t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\{x\in I|g_1(x)\in(a_n,b_n)\}\cap\{x\in I|g_2(x)\in(c_n,d_n)\}).$$

由此知$F(x)$在I上可测.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析(H)期中试卷

学生所在系:__________　　　　　　　　　　　　　　　　　　姓名______________

学号______________　　　　　　　　　　　　　　　　　　　得分______________

一、设$E \subset \mathbb{R}^n$是有界非空点集.若E中任一子集皆为闭集, 试问E是有限集吗？

二、$A, B \subset \mathbb{R}^n$,证明: $m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) \leq m^*(A) + m^*(B)$.

三、设$E \subset \mathbb{R}^n$ 可测且$m(E) > 0$, 作点集$E - E = x - y : x, y \in E$,
则$\exists \delta_0 > 0, s.t. B\left(0, \delta_0\right) \subset$ E-E .

四、设$\{E_n\}$是$[0, 1]$ 中的可测集列, 而且满足$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} m\left(E_n\right) = 1$,
证明: $\forall 0 < a < 1, \exists \left\{E_{n_k}\right\}, s.t. m\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\right) > a$.

五、设$E \subset \mathbb{R}^1$上可测函数列$\{f_k(x)\}$满足$f_k(x) \geq f_{k+1}(x) (k = 1, 2, \ldots)$.
若$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛到0, 问$\{f_k(x)\}$在E上是否几乎处处收敛?

六、设f (x) 是$E \subset \mathbb{R}^1$上的正值可测函数，$a > 1$, 证明:
$a^{f(x)}$在E上可积当且仅当$\sum_{k=1}^{\infty} a^k m(\{x \in E : f(x) \geq k\}) < \infty$

七、设f (x) 是[a, b] 上的正值可积函数，$\{E_n\}$是[a, b] 中的可测子集列.
若有$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)dx = 0$,
证明: $\lim_{n\to\infty} m\,(E_n) = 0$.

八、若f (x, y) 是定义在$\mathbb{R}^2$上的实值函数，且对固定的$x \in \mathbb{R}$ $f(x, y)$是连续函数；对固定的$y \in \mathbb{R}$，f (x, y) 是可测函数，则f (x, y) 是$\mathbb{R}^2$上的可测函数.

1. 设$E\subset\mathbb{R}^n$是有界非空点集.若E中任一子集皆为闭集，试问E是有限集吗?

是，不妨设$E\subset B(0,R)$，

若E为无限集，$B(0,R)$中必有E的极限点z_0，则存在点列$\left\{z_k\in E: z_k\neq z_0, \lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0\right\}$

易知这也是E的一个子集，但其导集z_0不被自身包含，与题设矛盾，故E必为有限集。

2. 试证：$m^*(A\bigcup B)+m^*(A\bigcap B)\le m^*(A)+m^*(B)$

证明：存在A的等测包H_1和B的等测包H_2使得$m^*(A)=m(H_1)$，$m^*(B)=m(H_2)$

$m^*(A)+m^*(B)=m(H_1)+m(H_2)=m(H_1\bigcup H_2)+m(H_1\bigcap H_2)\ge m^*(A\bigcup B)+m^*(A\bigcap B)$

(因为$A\subset H_1$，$B\subset H_2$，$A\bigcup B\subset H_1\bigcup H_2$，$A\bigcap B\subset H_1\bigcap H_2$)

命题得证。

3. 设$E\subset\mathbb{R}^n$可测且$m(E)>0$，作点集$E-E=\{x-y: x, y\in E\}$，则$\exists\,\delta_0>0$, s.t. $B(0,\delta_0)\subset E-E$.

证明：取λ满足$1-2^{-(n+1)}<\lambda<1$，由引理：存在矩体I，

使得$\lambda|I|<m(I\bigcap E)$，现在记I的最短边长为δ，并作开矩体$J=$

$\{x=(\xi_1,\xi_2,\ldots\ldots,\xi_n): |\xi_i|<\delta/2, (i=1,2,\ldots\ldots,n)\}$.从而只需证$J\subset E-E$即可，亦即$\forall\, x_0\in J$，

$E\bigcap I$必与$(E\bigcap I)+\{x_0\}$相交.由x_0的取法知，I平移x_0后仍包含I的中心，$m(I\bigcap(I+\{x_0\}))>2^{-n}|I|$，

此时可得$m(I\bigcup(I+\{x_0\}))=|I|+m(I+\{x_0\})-m(I\bigcap(I+\{x_0\}))<2|I|-2^{-n}|I|<2\lambda|I|$，

故$E\bigcap I$必与$(E\bigcap I)+\{x_0\}$相交，命题得证。

4. 设$\{E_n\}$是$[0,1]$中的可测集列，且满足$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} m(E_n)=1$，

试证明：$\forall\, 0<a<1$，必存在$\{E_{n_k}\}$，使得$m\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\right)>a$.

证明：记$F_k=[0,1]\setminus E_k$，由$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} m(E_n)=1$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} m(F_n)=0$，即$\forall\,\epsilon>0$，

$n=1,2,\ldots\ldots\ \exists\, k(n)$，$m(F_{k(n)})<\epsilon/2^n$.则$m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{k(n)}\right)<\epsilon$，

取$\epsilon=1-a$可得$m\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_{k(n)}\right)\ge 1-m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{k(n)}\right)>a$.

5. 设$E\subset\mathbb{R}^1$上可测函数列$\{f_k(x)\}$满足$f_k(x)\ge f_{k+1}(x)$ $(k=1,2,\ldots\ldots)$

若$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛到0，试问在E上是否几乎处处收敛？

是，由$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛到0，且$f_k(x)\ge f_{k+1}(x)$，$[|f_{k+1}(x)|>\epsilon]\supset[|f_k(x)|>\epsilon]$，

$$m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}[|f_n(x)|>\epsilon]\right)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}[|f_n(x)|>\epsilon]\right)=$$

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}[|f_k(x)|>\epsilon]\right)\le m\left(\lim_{n\to\infty}[|f_n(x)|>\epsilon]\right)=\lim_{n\to\infty} m([|f_n(x)|>\epsilon])=0$$

$\Leftrightarrow\{f_k(x)\}$在$E$上几乎处处收敛到$0$，

命题得证。

6. 设$f(x)$是$E\subset\mathbb{R}^1$上的正值可测函数，$a>1$，试证明$a^{f(x)}$在E上可积当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k m(\{x\in E: f(x)\ge k\})<\infty.$$

证明：令$E_n=\{x\in E: f(x)\ge n\}$，我们有

$$a^{n-1}\,m\,(E_{n-1}\setminus E_n)\le\int_{E_{n-1}\setminus E_n}a^{f(x)}\,dx\le a^n\,m\,(E_{n-1}\setminus E_n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}\,m\,(E_{n-1}\setminus E_n)\le\int_E a^{f(x)}\,dx\le\sum_{n=1}^{\infty}a^n\,m\,(E_{n-1}\setminus E_n)$$

再对不等式两端的级数用**Abel**求和：

$$\sum_{n=1}^{N}a^n\,m\,(E_{n-1}\setminus E_n)=\sum_{n=1}^{N-1}\left(a^n-a^{n+1}\right)m\,(E\setminus E_n)+a^N\,m\,(E)=$$

$$a^N\,m\,(E)-(a-1)\sum_{n=1}^{N-1}a^n\,(m\,(E)-m\,(E_n))=(a-1)\sum_{n=1}^{N-1}a^n\,m\,(E_n)+m\,(E)$$

$$\sum_{n=1}^{N}a^{n-1}\,m\,(E_{n-1}\setminus E_n)=\frac{1}{a}\left[(a-1)\sum_{n=1}^{N-1}a^n\,m\,(E_n)+m\,(E)\right]$$

故 $\int_E a^{f(x)}\,dx$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a^n\,m\,(E_n)$ 收敛，命题得证。

7. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的正值可积函数， $\{E_n\}$ 是 $[a, b]$ 中的可测子集列 **.** 若有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)\,dx=0$$

试证明：$\lim_{n\to\infty}m\,(E_n)=0$

证明：假设结论不真，则 存在 $\epsilon_0>0$，以及 $\{E_{n_k}\}:m\,(E_{n_k})\ \ge\ \epsilon_0$。而 $\inf\left\{\int_{E_{n_k}}f(x)\,dx\right\}=0$，

则 $\forall\ k\in\mathbb{N}$，存在 $E_{j(k)}\subset[a, b]:m\left(E_{j(k)}\right)\ge\epsilon_0$，使得 $\int_{E_{j(k)}}f(x)\,dx<\frac{1}{2^k}$。令 $S=$

$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_{j(k)}$，易知 $m\,(S)\ge\epsilon_0$。

$$\int_S f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,\chi_S(x)\,dx\le\int_a^b f(x)\,\chi_{\bigcup_{k=n}^{\infty}E_{j(k)}}(x)\,dx\le\sum_{k=n}^{\infty}\int_{E_{j(k)}}f(x)\,dx\le\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}=$$

$\frac{1}{2^{n+1}}\ (n\in\mathbb{N})$ 由此又得 $(n\to\infty)$ $\int_S f(x)\,dx=0$，

即知 $f(x)=0$, a.e. $x\in S$。这与题设矛盾，从而必有 $\lim_{n\to\infty}m\,(E_n)=0$，命题得证。

8. 若 $f(x, y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的实值函数，且对固定的 $x\in\mathbb{R}$， $f(x, y)$ 是连续函数；对固定的 $y\in\mathbb{R}$， $f(x, y)$ 是上的可测函数，则 $f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的可测函数 **.**

证明：对每个 $n=1, 2, \ldots\ldots$，作函数 $f_n(x, y)=f\left(x, \frac{k}{n}\right)$，$\frac{k-1}{n}<y\le\frac{k}{n}\ k\in\mathbb{Z}$

因为 $\forall\ t\in\mathbb{R}$，有 $\left\{(x, y)\in\mathbb{R}^2:f\left(x, \frac{k}{n}\right)<t\right\}=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left\{x\in\mathbb{R}:f\left(x, \frac{k}{n}\right)<t\right\}\times\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$,

所以$f_n(x, y)$是$\mathbb{R}^2$上的可测函数。而由题设易知

$\lim_{n\to\infty} f_n(x, y) = f(x, y)$,

故$f(x, y)$也是$\mathbb{R}^2$上的可测函数，命题得证。

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、构造一个Borel集,使得其既不是G_δ 集,也不是F_γ 集.

二.叙述依侧度收敛,几乎处处收敛,几乎一致收敛的定义

三.E$\subset$ $\mathbb{R}$,E可测且$m(E) < +\infty$ 证明:

$$lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)(a.e. x \in E) \Longleftrightarrow f_n(x)$$

几乎一致收敛于f(x)

四,给出一个集合其势为c,但其测度为0,并证明.

五,构造一个函数列f[n] ,该函数列依测度收敛于f[x] ,但

$$lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)(a.e. x \in E)$$

不成立

六,设f(x)是$\mathbb{R}$上的实值可测函数，且

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

则f(x)是连续函数.

七.设$E[k]$ 是$\mathbb{R}$上的可测集列,$m(E[k]) = 1 \quad \forall k\mathbb{N}$ 证明$m(\bigcap_1^i nfty) = 1$

八,设$E[k] \quad \forall k\mathbb{N}$是$subset[0,1]$ 中的可测集,且有$\sum_1^k m[E[i]] > k-1 \quad \forall k\mathbb{N}$,证明$m(\bigcap_1^k E) > 0$

九,设A,B,C是$\mathbb{R}$中的可测集,若有$m(A\Delta B) = 0$ 且$m(B\Delta C) = 0$,证明$m(A\Delta C) = 0$

十,设f(x,y)是定义在$[0,1]^2$ 上的函数,当固定y时,它是x的可测函数;当固定x时,它是y的连续函数,证明:f(x,y) 是$[0,1]^2$上的二元可测函数.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

1.如所有正的有理数和所有负的无理数的集合

2.略(见书上定义)

3.$f_n(x)$几乎一致收敛于f[x]

$$\Longleftrightarrow$$

$\lim n \to +\infty m(\bigcup_k^+ infty[|f[n](x)-f|] > \epsilon) = 0/forall\epsilon > 0.$ 而$f_n(x)$几乎处处收敛与f(x) $\Longleftrightarrow m(\bigcap_(k=1)^\infty \bigcup_(n=k)^\infty [|f_n[x]-f[x]|] > \epsilon) = 0$ 而

$$\Longleftrightarrow m(\bigcap_(k=1)^\infty \bigcup_(n=k)^\infty [|f_n[x]-f[x]|] > \epsilon) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\lim k \to +\infty m(\bigcup_{n=k}^{+\infty} [|f[n](x)-f|] > \epsilon) = 0/forall\epsilon > 0.$$

所以几乎一致收敛导出几乎处处收敛. 而又有叶罗夫定理知当$m(E) < +\infty$时几乎处处收敛导出几乎一致收敛.证毕

§1

4.如Cantor集,熟知Cantor集的势与[0,1]上二进制数对应,故势为c,但$m(Cantor) < (\frac{2}{3})^n \forall n \in \mathbb{N}$ 所以有m(Cantor集)=0.

5.如$n = 2^k + i 0 < i < 2^k, k \in \mathbb{N}$ 在[0,1]上做函数$f_n[x] = \chi_{[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}]}(x)$即可

6.因为f(x+h)-f(x)=f(h)以及f(0)=0,所以只需证明f(x)在x=0处连续即可。根据卢津定理，可作有界闭集$F:m(F)>0$,使f(x)在F上一致连续，即对任意的$\varepsilon>0$,存在$\delta_1>0$有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,|x-y|<\delta_1,x,y\in F$ 又存在$\delta_2>0,s.t.F-F\supset[-\delta_2,\delta_2]$.
取$\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当$z\in[-\delta,\delta]$时，由于存在$x,y\in F$,使得z=x-y,所以$|f(z)|=|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ 这说明f(x)在x=0处是连续的。

7.原命题$\Longleftrightarrow m(\bigcup_(k=1)^infty E[k]^c)=0$
而$m(\bigcup_(k=1)^infty E[k]^c)<=\sum_(k=1)^infty m(E[k]^c)=$可数个0相加=0

8.若$m(\bigcap_1^k E)=0$可知除了一个侧度为零的集合外,每一点至多能被取到k-1次,所以

$$\sum_1^k <=(k-1)*m(A)+k*(1-m(A)),m(A)=0$$

,所以$\sum_(i=1)^k m(E[i])<=k-1,矛盾$.

9.利用集合间运算即可.

10.令$f_n[x,y]=f[x,k/(2^n)]k/(2^n)<=y<(k+1)/(2^n)$ 由f的连续性知收敛于$f[x,y]$,而每个$f_n[x,y]$均可测,由极限的保连续性,所以$f[x,y]$可测.

1. 证明下列命题：

(1)全体超越数（即不是整系数方程$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$的根）的基数是$c$。（7分）

(2)定义在$[a,b]$的单调函数全体形成的集合X的基数是c。（7分）

证明:

(1) 因为整系数方程$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$的根（$n\in N$即代数数）之全体为可列集，所以超越数全体是不可数的且是连续基数。

(2) 任给$f\in X$，且设其在$[a,b]$内的间断点为x,则f在间断点上的值形成一个数列$f(x_n)$；若$x_0\in[a,b]$是$f(x)$的连续点，则取$r_k\in\mathbf{Q}:r_k\to x_0(k\to\infty)$.易知$f(x_0)$对应于数列$\{f(r_k)\}$。从而可推$\bar{X}=c$.

2. 证明下列命题：

设$E_1,E_2,\cdots,E_k$是$[0,1]$中的可测集，且有$\sum\limits_{i=1}^{k}m(E_i)>k-1$,则$m(\bigcap\limits_{i=1}^{k}E_i)>0$.（14分）

证明：

令$A_i=[0,1]\setminus E_i(i=1,2,...,k)$，则可得

$\bigcap\limits_{i=1}^{k}E_i=[0,1]\setminus\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i$，$m(\bigcap\limits_{i=1}^{k}E_i)=1-m(\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i)$。

注意到$m(\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i)\le\sum_{i=1}^{k}m(A_i)=\sum_{i=1}^{k}(1-m(E_i))=k-\sum_{i=1}^{k}m(E_i)<k-(k-1)=1$,

即知$m(\bigcap\limits_{i=1}^{k}E_i)>0$.

3.证明下列命题：

设E_1，$E_2\subset R^n$，$E1\cup E2$是可测集且$m(E_1\cup E_2)<+\infty$。若有$m(E_1\cup E_2)=m*(E_1)+m*(E_2)$，则$E_1$ 与E_2 皆可测。（14分）

证明：

作E_1，E_2的等测包H_1，H_2，我们有

$m(H_1)+m(H_2)\ge m(H_1\cup H_2)\ge m(E_1\cup E_2)$

$=m*(E_1)+m*(E_2)=m(H_1)+m(H_2)$。

从而可知$m(H_1\cap H_2)=0$，且有$m*(H_1\setminus E_1)=0$。注意到$H_1=E_1\cup(H_1\setminus E_1)$，即得$E_1\in\mu$。同理有$E_2\in\mu$。

4.证明下列命题：

设有定义在R^1上的函数$f(x)$，满足

$f(x+y)=f(x)+f(y)$，$x,y\in R^1$，

且在$E\subset R^1(m(E)>0)$上有界，则$f(x)=cx(x\in R^1)$，其中$c=f(1)$。（14分）

证明：

(i)首先，由题设知，对$r\in Q$，必有$f(r)=rf(1)$。

(ii)其次，由$m(E)>0$可知，存在区间$I:T\subset E-E$。不妨设$|f(x)\le M(x\in E)|$。又对任意的$x\in I$，有$x',x''\in E$，使得$x=x'-x''$，则

$|f(x)| = |f(x') - f(x'')| \leq |f(x')| + |f(x'')| \leq 2M$。

记$I = [a, b]$，并考察$[0, b-a]$。若$x \in [0, b-a]$，则$x + a \in [a + b]$。从而由$f(x) = f(x+a) - f(a)$可知，$|f(x)| \leq 4M$。记$b - a = c$，这说明。

$f(x) \leq 4M, x \in [0, c]$.

易知$|f(x)| \leq 4Mx \in [-c, c]$。

已知对任意的$x \in R_1$以及自然数n，均存在有理数r，使得$|x - r| < c/n$。因此我们得到

$$|f(x) - xf(1)| = |f(x-r) + rf(1) - xf(1)| = |f(x-r) + (r-x)f(1)| \leq \frac{4M + c|f(1)|}{n}$$

根据n的任意性（x的任意性），即得$f(x) = xf(1)$。

5.证明下列命题：

设$f(x)$，$f_n(x)(n \in N)$是$(0,1)$上几乎处处有限的可测函数，则存在$\{\varepsilon\}: \varepsilon \to 0 (n \to \infty)$，以及$(0,1)$上的可测函数$F(x$，使得

$|f_n(x) - f(x| \leq \varepsilon_n F(x), a.e. x \in (0,1)$.（15分）

证明：

不妨假定E是有界集，且$f_n(x)(n \in N)$皆为实值。因为

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E : \sup_{n \geq 1} |f_n(x)| \leq k\},$$

$$\lim_{k \to \infty} m(\{x \in E : \sup_{n \geq 1} |f_n(x) \leq k\}) = m(E),$$

所以存在k_0，使得

$$m(\{x \in E : \sup_{n \geq 1} |f_n(x) \leq k_0\}) > m(E) - \varepsilon.$$

从而令

$$E_0 = \{x \in E : \sup_{n \geq 1} |f_n(x) \leq k_0\}, M = k_0,$$

则$m(E \setminus E_0) < \varepsilon, |f_n(x)| \leq M (n \in N, x \in E_0)$,使得$\lim_{n \to \infty} a_n[f_n(x) - f(x)] = 0, a.e. x \in (0,1)$.

从而取$F(x) = \sup_{n \geq 1} \{|a_n[f_n(x) - f(x)]|$即满足要求。

6.证明下列命题：

设$f(x)$是R^1上的有界函数，则$f(x$在R^1上几乎处处等于一个几乎处处连续的函数当且仅当存在$Z \subset R^1 : m(Z) = 0$，且$f(x)$在$R^1 \setminus Z$上连续。(15分)

证明：

必要性显然，为证充分性，做函数

$$g(x) = \lim_{0 < \delta \to 0} \sup\{f(y) : y \in R^1 \setminus Z, |y - z| < \delta\},$$

显然$f(x)=g(x),x\in R^1\setminus Z$。对$x\in R^1\setminus Z$，任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得
$f(x)-\varepsilon\le f(y)\le f(x)+\varepsilon,y\in R^1\setminus Z$且$|y-x|<\delta$。
而对$x':|x-x'|<\delta$，有$y\in R^1\setminus Z$且$|y-x|<\delta$使得
$|y-x'|<\delta'=\delta-|x-x'|$。
由此知$g(x)-\varepsilon\le g(x')\le g(x)+\varepsilon$

7.证明下列命题：
(1)若$\{f_n(x)\}$是$E\subset R^1$上依测度函数收敛列，且有
$|f_n('x')-f_n(x'')|\le M|x'-x''|,x',x''\in E$，
则$\{f_n(x)\}$是E上几乎处处收敛列。
(2)设$e\subset R^1$且$m(E)<+\infty,\{f_n(x)\}$，是E上适值可测函数列，则$f_n(x)$在E上依测度收敛于$f(x)$的充分必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}=0,a.e.x\in E$$

（14分）
证明：
(1)由依测度收敛知，对$\varepsilon>0,\sigma>0$，存在N，使得
$m(\{x\in E:|f_n(x)-f_m(x)|\ge\varepsilon/3\})<\sigma(n,m\ge N)$
假定$x_0\in E$满足：
$m(E\cap:(x_0-\varepsilon/3M,x_0+\varepsilon/3M))=2\varepsilon>0$
从而知存在点$x_{n,m}\in E\cap(x_0-\varepsilon/3M,x_0+\varepsilon/3M)$，以及$n_i,m_i$，使得$|f_{n_i}(x_{n,m})-f_{m_i}(x_(n,m))|<\sigma/3$。因此，当$n,m\ge N$时，有

$$f_n(x_0)-f_m(x_0)\le|f_n(x_0)-f_{n_i}(x_{n,m})|+|f_{n_i}(x_{n,m})-f_{m_i}(x_{n,m})|+|f_{m_i}(x_{n,m})-f_m(x_0)|$$

这说明$f_n(x)$在$x=x_0$处收敛。
若对$x_0\in E$，存在$\varepsilon>0$，使得$m(E\cap(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0))=0$，则$f_n(x)$不一定在$x=x_0$处收敛。由此易知命题结论成立。
(2)必要性依题设知，对任给$\varepsilon>0,\sigma>0$，存在N，当$n\ge N$时有$m(\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\ge\varepsilon\})<\delta$。因为在点$x\in E$满足$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$时，必有$0\le F_n(x)<\varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=0,a.e.x\in E.$$

充分性由题设知，对任给$\varepsilon>0,\sigma>0$，存在$E_\delta\subset E$以及N，使得
$m(E\setminus E_\delta)<\delta,|f_n(x)|<\varepsilon(n\ge N,x\in E_\delta)$
由此易知$f_n(x)$在E上依测度收敛于$f(x)$。

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析(H)期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、设A,B,C为集合.证明:

(1)若$A\backslash B\sim B\backslash A$,则$A\sim B$. (2)若$A\subset B$,且$A\sim A\cup C$,则$B\sim B\cup C$.

二、证明:$\mathbb{R}^n$中每个闭集为G_δ集,每个开集为F_σ集.

三、设$E\subset\mathbb{R}^1,m^*(E)>0$.证明$\forall q\in[0,m^*(E))$,必$\exists E_1\subset E,s.t.m^*(E_1)=q$.

四、设$(\mathbb{R}^2,\mathscr{L},m)$为Lebesgue测度空间,令

$$E=\{(x,y)\in[0,1]^2||\sin x|<\frac{1}{2},\cos(x+y)\text{为无理数}\}.$$

证明:$m(E)=\frac{\pi}{6}$.

五、设$f:[a,b]\to\mathbb{R}^1$为实函数,如果$\forall[\alpha,\beta]\subset(a,b)$,$f$为$[\alpha,\beta]$上的Lebesgue可测函数.
证明:f为$[a,b]$上的Lebesgue可测函数.

六、设$(X,\mathscr{R},\mu)$为测度空间,f为$E\in\mathbb{R}^1$上的几乎处处有限的可测函数,$\mu(E)<+\infty$.
证明:$\forall\epsilon>0$,存在E上的有界可测函数$g(x)$,使得

$$\mu(\{x\in E||f(x)-g(x)|>0\})<\epsilon.$$

七、设$F(x),f_n(x)(n\in\mathbb{N})$是$\mathbb{R}^1$上的可测函数,且有$|f_n(x)|\leqslant F(x),a.e.x\in\mathbb{R}^1$; 又$\forall\epsilon>0$,均有

$$m(\{x\in\mathbb{R}_1|F(x)>\epsilon\})<+\infty.$$

若$f_n(x)$在$\mathbb{R}^1$上几乎处处收敛于0, 则$f_n(x)$在$\mathbb{R}^1$上依测度收敛于0.

八、设C为$[0,1]$中的Cantor集，证明：

$$C+C=\{x+y|x\in C,y\in C\}=[0,2]$$

.

九、设$A\in\mathscr{M}$,证明:$\forall B\subset\mathbb{R}^n$,必有

$$m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B)=m^*(A)+m^*(B)$$

.

十、记$\mathscr{F}$为$(0,1)$上的一个连续函数族,则函数$(0<x<1)$

$$\Phi(x)=\sup_{f\in\mathscr{F}}\{f(x)\},\qquad\Psi(x)=\inf_{f\in\mathscr{F}}\{f(x)\}.$$

是$(0,1)$上的可测函数.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析(H)期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、设A,B,C为集合.证明:

(1)若$A\backslash B\sim B\backslash A$,则$A\sim B$. (2)若$A\subset B$,且$A\sim A\cup C$,则$B\sim B\cup C$.

证明:(1)因为$A\backslash B\sim B\backslash A$,故存在一一映射$\phi: A\backslash B\sim B\backslash A$,于是

$$f:A\to B$$

,

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & x\in A\backslash B\\ x & x\in A\cap B\end{cases}$$

为一一映射，从而$A\sim B$.

(2)因

为$A\subset B$,$A\sim A\cup C$,故$B\cup C=(B\backslash A)\cup A\cup C=(B\backslash A\cup C)\cup(A\cup C)\sim(B\backslash A\cup C)\cup A\subset B$,另一方面,$B\sim B\subset B\cup C$.根据Cantor-Bernstein定理，推得$B\sim B\cup C$.

二、证明:$\mathbb{R}^n$中每个闭集为G_δ集,每个开集为F_σ集.

证明:设F是闭集,做$G_n=\{x\in\mathbb{R}^n|\rho_0^n(x\in F)<1/n\}$,显然$G_n$为开集.易知,$F\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$.又若$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$,则对$\forall n\in N$,有$x\in G_n$,即$\rho_0^n(x,F)<1/n$,从而,$\rho_0^n(x,F)=0$.注意到F为闭集,故$\exists y\in F$,s.t.$\rho_0^n(x,y)=\rho_0^n(x,F)=0$,由此知$x=y\in F$.这说明$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n\subset F$.综上所述,有$F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$,即知闭集F为$G_\delta$集.

设G为开集,则$F=\mathbb{R}^n\backslash G$为闭集,由上知,$F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$,$G_n$,$(n\in N)$为开集,从而$G_n^c$为闭集,且有$G=F^c=(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n)^c=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n^c$,即开集G为$F_\sigma$集。

三、设$E\subset\mathbb{R}^1, m^*(E)>0$.证明$\forall q\in[0,m^*(E))$,必$\exists E_1\subset E, s.t. m^*(E_1)=q$.

证:令$f(x)=m^*(E\cap(-x,x))$,$x\in[o,\infty)$.易见$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=m^*(E)$.下证f为连续函数。

事实上,对$\forall h>0$,有

$$|f(x+h)-f(x)|=|m^*(E\cap(-x-h,x+h))-m^*(E\cap(-x,x))|\leqslant m^*((-x-h,x])+m^*([x,x+h))\leqslant 2h$$

,故f在x有连续。同理，f在x左连续。从而，f在区间$[0,\infty)$上连续。

由$f(0)=0\leqslant q<m^*(E)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和连续函数的介值定理，$\exists a\in[0,\infty)$,s.t.

$$q=f(a)=m^*(E\cap(-a,a))=m^*(E_1)$$

,其中,$E_1=E\cap(-a,a)\subset E$.

四、设$(\mathbb{R}^2,\mathscr{L},m)$为Lebesgue测度空间,令

$$E=\{(x,y)\in[0,1]^2||\text{sin}x|<\frac{1}{2},\cos(x+y)\text{为无理数}\}.$$

证明:$m(E)=\frac{\pi}{6}$.
证:令

$$E_1=\{(x,y)\in[0,1]^2||sinx|<1/2\}=[0,\frac{\pi}{6}]\times[0,1]$$

,

$$E_2=\{(x,y)\in[0,1]^2||cos(x+y)\text{为有理数}\}$$

,显然$E=E_1\backslash E_2$,$m(E_1)=\frac{\pi}{6}$.
记$Q\cap[-1,1]=\{r_1,r_2,...\}$,

$$E_{2,i}=\{(x,y)\in[0,1]^2|cos(x+y)=r_i\}=\{(x,y)\in[0,1]^2|x+y=arccosr_i\}$$

为直线段,
则$E_2=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_{2,i}$,$m(E_{2,i})=0$,$m(E_2)=0$,$m(E)=m(E_1\backslash E_2)=m(E_1)-m(E_2)=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}$.

五、设$f:[a,b]\to\mathbb{R}^1$为实函数,如果$\forall[\alpha,\beta]\subset(a,b)$,$f$为$[\alpha,\beta]$上的Lebesgue可测函数.
证明:f为$[a,b]$上的Lebesgue可测函数.
证:$\forall c\in R$因为f在$[a+\frac{b-a}{4n},b-\frac{b-a}{4n}]$,$n\in N$上为Lebesgue可测函数,故$\{x\in[a+\frac{b-a}{4n},b-\frac{b-a}{4n}]|c\leqslant f(x)\}$为Lebesgue可测集.于是$\{x\in[a,b]|c\leqslant f(x)\}=(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\in[a+\frac{b-a}{4n},b-\frac{b-a}{4n}]|c\leqslant f(x)\})\cup E$,其中E为二点集$\{a,b\}$的子集。此式表明$\{x\in[a,b]|c\leqslant f(x)\}$为Lebesgue可测集,从而,f为$[a,b]$上的Lebesgue可测集。

六、设$(X,\mathscr{R},\mu)$为测度空间,f为$E\in\mathbb{R}^1$上的几乎处处有限的可测函数,$\mu(E)<+\infty$.
证明:$\forall\epsilon>0$,存在E上的有界可测函数$g(x)$,使得

$$\mu(\{x\in E||f(x)-g(x)|>0\})<\epsilon.$$

证:因为f为$E\in\mathscr{R}$上的几乎处处有限的可测函数,故$F=\{x\in E||f(x)|=+\infty\}$与

$$F_n=\{x\in E||f(x)|>n\}=\{x\in E|f(x)<-n\}\cup\{x\in E|f(x)>n\}$$

为可测集,且$\mu(F)=0$,F_n关于n单调减,$F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$,再由$\mu(F_n)\leqslant\mu(E)<+\infty$,所以

$$0=\mu(F)=\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n)=\mu(\lim_{x\to+\infty}F_n)=\lim_{x\to+\infty}\mu(F_n)$$

因此,对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in N$当$n>N$时,$\mu(F_n)<\varepsilon$.令

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & x\in E\backslash F_n\\ 0 & x\in F_n\end{cases}$$

则$g(x)$为有界可测函数，且

$$\mu(\{x \in E||f(x)-g(x)|>0\}) = m(F_n) < \varepsilon$$

.

七、设$F(x), f_n(x)(n \in \mathbb{N})$是$\mathbb{R}^1$上的可测函数,且有$|f_n(x)| \leqslant F(x), a.e. x \in \mathbb{R}^1$; 又$\forall \epsilon > 0$,均有

$$m(\{x \in \mathbb{R}_1 | F(x) > \epsilon\}) < +\infty.$$

若$f_n(x)$在$\mathbb{R}^1$上几乎处处收敛于0, 则$f_n(x)$在$\mathbb{R}^1$上依测度收敛于0.
证：由于$\{x \in R_1 : |f_n(x)| > \varepsilon\} \subset \{x \in R_1 : F(x) > \varepsilon\}$,因此推理在有穷测度点集上进行即可。

八、设C为$[0,1]$中的Cantor集，证明：

$$C + C = \{x+y | x \in C, y \in C\} = [0,2]$$

.

证：首先显然有$C+C \subset [0,2]$.另一方面,对$\forall z \in [0,2]$,有：

$$z = 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\beta_i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma_i}{3^i} = x+y \in C+C$$

,其中,

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_i & \alpha_i = 0,2 \\ 2 & \alpha_i = 1 \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} \alpha_i & \alpha_i = 0,2 \\ 0 & \alpha_i = 1 \end{cases}$$

则$[0,2] \subset C+C$.
综上所述，$C+C=[0,2]$.

九、设$A \in \mathscr{M}$,证明:$\forall B \subset \mathbb{R}^n$,必有

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B)$$

.

证：因为A可测，所以我们有(不妨假定$m^*(A) < +\infty$)
$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c)$,
$m^*(B \cup A) = m^*((B \cup A) \cap A) + m^*((B \cup A) \cap A^c) = m^*(A) + m^*(B \cap A^c)$. 由此可知，$m^*(B \cap A^c) = m^*(B \cap A) - m^*(A)$,从而：
$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \cup A) - m^*(A)$
移项既得。

十、记$\mathscr{F}$为$(0,1)$上的一个连续函数族,则函数$(0<x<1)$

$$\Phi(x)=\sup_{f\in\mathscr{F}}\{f(x)\},\qquad \Psi(x)=\inf_{f\in\mathscr{F}}\{f(x)\}.$$

是$(0,1)$上的可测函数.
证：对$\Phi(x)$,设$t\in R^1$,若$x_0\in\{x\in(0,1):\Phi(x)>t\}\doteq E_t$,则存在$f\in\mathscr{F}$,$f(x_0)>t$.因为f连续，所以存在$\delta_0>0$使得：

$$f(x)>t(x-\delta_0<x<x+\delta_0)$$

.由此知$\Phi(x)>t(x-\delta_0<x<x+\delta_0)$
这表明x_0为E_t内点，即E_t为开集，$\Phi(x)$为可测函数。同理，$\Psi(x)$为可测函数。

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析期中考试试卷

学生所在系:__________ 姓名:______________

学号:______________ 得分:______________

一、判断题:

(1)$\mathbb{R}^1$中互不相交的开区间族是可数集;

(2)一族可测集的交集必是可测集;

(3)设$f_k(x)$在E上依测度收敛于0,则极限$\lim_{k\to\infty} m(x\in E:|f_k(x)|>0)=0$;

(4)$f_n(x)=(cosx)^n\,(n=1,2,\dots)$是$[0,\pi]$上的依测度收敛列.

二、设有集合A与B,若存在一个从A到B的一一映射,则称$A\sim B$. 试证:

(1)$(-1,1)\sim\mathbb{R}^1$; (2)$[-1,1]\sim\mathbb{R}^1$.

三、设A是$\mathbb{R}^n$的子集,并且设$\{E_n\}$是互不相交的可测集列. 证明:

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap E_n))=\sum_{n=1}^{\infty}m^*(A\cap E_n)$$

四、设$E\subset\mathbb{R}^n$,试证明存在G_δ集$\widetilde{G}$: $G\supset E$ 且$m^*(\widetilde{G})=m^*(E)$.

五、设$E_1,E_2\subset\mathbb{R}^n, E_1\cup E_2$是可测集且$m(E_1\cup E_2)<+\infty$.若有$m(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$,则$E_1$与$E_2$皆可测.

六、设$m(E)<\infty$,$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$,$\{g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$g(x)$,则$\{f_k(x)\cdot g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)\cdot g(x)$.

七、试证明下列命题:

(1)设$f(x)$是定义在[a,b]上的单调函数,则$f(x)$是[a,b]上的可测函数;

(2)设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微函数,证明$f'(x)$是Lebesgue可测的.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析期中考试试卷答案

一、判断题：

(1)$\mathbb{R}^1$中互不相交的开区间族是可数集；

(2)一族可测集的交集必是可测集；

(3)设$f_k(x)$在E上依测度收敛于0，则极限$\lim_{k\to\infty} m(x\in E: |f_k(x)|>0)=0$;

(4)$f_n(x)=(cosx)^n\,(n=1,2,\dots)$是$[0,\pi]$上的依测度收敛列.

Keys:(1)正确.易由“有理数集$\mathbb{Q}$是可列集”推出；

(2)错误.例如记W是$\mathbb{R}^1$中的不可测集，则由$\cap_{a\in W}\{a\}^c=(\cup_{a\in W}a)^c=W^c$可知（可测集$\{a\}^c=\mathbb{R}^1-a$),对$a\in W$，作交是不可测集；

(3)错误.例如在[0,1]上定义$f_k(x)=1/k(k\in\mathbb{N})$，易知$f_k(x)$在[0,1]上依测度收敛于0，但我们有$m(\{x\in[0,1]:|f_k(x)|>0\})=1$;

(4)注意$\{(cosx)^n\}$是几乎处处收敛于0的（此系作业题）.

二、设有集合A与B，若存在一个从A到B的一一映射，则称$A\sim B$. 试证:

(1)$(-1,1)\sim\mathbb{R}^1$;　　　　(2)$[-1,1]\sim\mathbb{R}^1$.

Keys:(1)$f(x)=x/(1-x^2)$是(-1,1)与$\mathbb{R}^1$之间的一一映射；

(2)由(1)以及$(-1,1)\subset[-1,1]\subset\mathbb{R}^1$，故根据Cantor-Bernstein定理即得所证.

三、设A是$\mathbb{R}^n$的子集，并且设$\{E_n\}$是互不相交的可测集列.证明：

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap E_n))=\sum_{n=1}^{\infty}m^*(A\cap E_n)$$

Keys:由外测度的σ次可加性，我们看到

$$m^*(A\cap[\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n])=m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap E_n))\le\sum_{n=1}^{\infty}m^*(A\cap E_n)$$

另一方面，由于$E_1,E_2,\dots,E_n$是互不相交的可测集，则对X的每个子集A有

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap E_i))=\sum_{i=1}^{n}m^*(A\cap E_i)$$

所以对一切k,$\sum_{n=1}^{k}m^*(A\cap E_n)=m^*(A\cap[\bigcup_{n=1}^{k}E_n])\le m^*(A\cap[\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n])$,
从而$\sum_{n=1}^{\infty}m^*(A\cap E_n)\le m^*(A\cap[\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n])$也成立.

四、设$E\subset\mathbb{R}^n$，试证明存在G_δ集$\widetilde{G}$:　$G\supset E$ 且$m^*(\widetilde{G})=m^*(E)$.

Keys:依定义，对$k\in\mathbb{N}$，存在矩体列$\{I_{k,i}\}$，使得$\bigcup_{i=1}^{\infty}I_{k,i}\supset E$，且有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_{k,i}|\le m^*(E)+1/k\quad(k=1,2,\dots)$$

. 令$\widetilde{G}_k=\bigcup_{i=1}^{\infty}I_{k,i}\,(k\in\mathbb{N}),\widetilde{G}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\widetilde{G}_k$，易知$\widetilde{G}\subset E$且$\widetilde{G}$是$G_\delta$集.我们有（对$k\in\mathbb{N}$）

$$m^*(E)\le m^*(\widetilde{G})\le m^*(\widetilde{G}_k)\le\sum_{i=1}^{\infty}|I_{k,i}|\le m^*(E)+1/k,$$

令$k\to\infty$ 即得$m^*(\widetilde{G})=m^*(E)$.

五、设$E_1,E_2\subset\mathbb{R}^n,E_1\cup E_2$是可测集且$m(E_1\cup E_2)<+\infty$.若有$m(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$，则$E_1$与$E_2$皆可测.

Keys:作E_1,E_2的等测包H_1,H_2，我们有

$$m(H_1)+m(H_2)\ge m(H_1\cup H_2)\ge m(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)=m(H_1)+m(H_2).$$

从而可知$m(H_1\cap H_2)=0$，且有$m^*(H_1\backslash E_1)=0$.注意到$H_1=E_1\cup(H_1\backslash E_1)$，
即得E_1 可测.同理有E_2可测.

六、设$m(E)<\infty$，$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$，$\{g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$g(x)$，则$\{f_k(x)\cdot g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)\cdot g(x)$.

Keys:对任一子列$\{f_{k_i}(x)g_{k_i}(x)\}$，由题设知，存在$f_{k_{i_j}}(x)$在E上a.e.收敛于$f(x)$，也存在$g_{k_{i_{j_l}}}(x)$在E上a.e.收敛于$g(x)$.从而知$f_{k_{i_{j_l}}}(x)g_{k_{i_{j_l}}}(x)$在E上a.e.收敛于$f(x)g(x)$.这说明命题结论成立.

七、试证明下列命题：
(1)设$f(x)$是定义在[a,b]上的单调函数，则$f(x)$是[a,b]上的可测函数；
(2)设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可微函数，证明$f'(x)$是Lebesgue可测的.

Keys:(1)事实上，对于任意的$t\in\mathbb{R}^1$，点集$\{x\in[a,b]:f(x)>t\}$定属于下述三种情况之一：区间，单点集或空集.从而可知

$$\{x\in[a,b]:f(x)>t\}$$

是可测集.这说明$f(x)$是[a,b]上的可测函数.
(2)对每个n定义

$$g_n(x)=n[f(x+i/n)-f(x)]=\frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n},$$

并且注意到每个g_n是可测的（因为它是连续的）.由于对一切$x\in\mathbb{R},g_n(x)\to f'(x)$，从而$f'$是可测函数.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析期中考试试卷

学生所在系:__________　　　　　　　　　　姓名______________

学号______________　　　　　　　　　　得分______________

一、设$f(x)$在$\mathbb{R}$上单调递增，证明它的不连续点集D为至多可数的。

二、设A是$[0,1]$上所有十进小数表示中不含数码4的实数的集合，求$m(A)$。

三、设E是$[0,1]$上不可测集N的一个可测子集，证明$m(E)=0$。

四、若$E\subset\mathbb{R}^n$，则存在包含E的G_δ集H，使得$m(H)=m^*(E)$。

五、设E_1，E_2，⋯⋯，E_n是$[0,1]$的可测子集，且$[0,1]$上的每个点至少在其中的k个子集中出现。证明$\exists i_0$，使得$m(E_{i_0})\geq k/n$。

六、设$f(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的实值函数。对于固定的$x\in\mathbb{R}$，f对y连续；对固定的$y\in\mathbb{R}$，f是x 的可测函数。求证$f(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的可测函数。

七、若$f(x)$是$\mathbb{R}$上的实值可测函数，且对任意的$x,y\in\mathbb{R}$，有$f(x+y)=f(x)+f(y)$。证明f是连续函数。

八、举例说明存在可测实函数序列f_n，它处处收敛于f但不依测度收敛。

九、举例说明存在非$Borel$的可测集。

十、设$A \subset \mathbb{R}$，且对于$x \in A$，存在存在无数多个数组$(p,q)(p,q \in \mathbb{Z}, q \geq 1)$，使得$|x - p/q| \leq 1/q^3$，则$m(A) = 0$。

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析期中考试试卷及答案

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、设$f(x)$在$\mathbb{R}$上单调递增，证明它的不连续点集D为至多可数的。

证：不失一般性，可设f为单调增函数，
则$x_0 \in D \Longleftrightarrow f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) < \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \Longleftrightarrow (f(x_0^-), f(x_0^+))$为开区间。
易见当$x_1, x_2 \in D$且$x_1 \neq x_2$时，有$(f(x_1^-), f(x_1^+)) \bigcap (f(x_2^-), f(x_2^+)) = \emptyset$ 于是$B = \{(f(x^-), f(x^+)) | x \in D\}$是$y$轴上两两不交的开区间族，且它的基数和$D$的相同，显然$B$是至多可数的，从而$D$ 是至多可数的。

二、设A是$[0,1]$上所有十进小数表示中不含数码4的实数的集合，求$m(A)$。

解：将4换成1，问题是等价的。题述的集合可以如下生成：在区间$[0,1]$ 中挖去左端的十分之一（取左闭右开区间）$[0,1/10)$，将余下的集合九等分，再挖去每一部分左端的十分之一，再对余下的每个连通集合重复如上操作。如此进行的极限情形即为A。每一次操作得到的集合测度都是操作前的$9/10$，故$m(A) = \lim_{n\to\infty}(9/10)^n = 0$。

三、设E是$[0,1]$上不可测集N的一个可测子集，证明$m(E) = 0$。

证：按照N的构造定义等价关系"$\sim$"。设$\{r_n\}$是$[0,1]$中所有有理数的一个排列。考虑每个$E_k = E + \{r_k\}$，由测度的平移不变性，$m(E_k) = m(E), \forall k$。首先证明各E_k要么相同，要么互不相交。假设$E_k \bigcap E_{k'} \neq \emptyset$，则存在有理数$r_k$以及$r_{k'}$，以及$\alpha$和$\beta$，使得$x_\alpha + r_k = x_\beta + r_{k'}$，即$x_\alpha - x_\beta = r_{k'} - r_k$。于是$x_\alpha \sim x_\beta$，从而$E_k = E_{k'}$。显然所有的$E_k$都包含于区间$[-1,2]$。于是有$0 \leq \Sigma_{k=1}^{\infty} m(E_k) \leq \Sigma_{k=1}^{\infty} m(E) \leq 3$。因此$m(E) = 0$。

四、若$E \subset \mathbb{R}^n$，则存在包含E的G_δ集H，使得$m(H) = m^*(E)$。

证：对于每个自然数k，存在包含E的开集G_k，使得$m(G_k) \le m^*(E) + 1/k$。作点集$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$，则它是$G_\delta$集并且$H \supset E$。因为$m^*(E) \le m(H) \le m(G_k) \le m^*(E) + 1/k$，所以$m(H) = m^*(E)$。

五、设E_1，E_2，⋯⋯，E_n是$[0,1]$的可测子集，且$[0,1]$上的每个点至少在其中的k个子集中出现。证明$\exists i_0$，使得$m(E_{i_0}) \ge k/n$。

证：记$f_i(x) = \chi_{E_i}(x)$，$f = \Sigma_{i=1}^{n} f_i$。则由题意，$\forall x \in [0,1]$，$f(x) \ge k$。从而积分$\int_{[0,1]} f \ge k$。假设$\forall i$，$m(E_i) < k/n$。则$\int_{[0,1]} f = \Sigma_{i=1}^{n} \int_{E_i} 1dx < k$，矛盾。因此$\exists i_0$，使得$m(E_{i_0}) \ge k/n$。

六、设$f(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的实值函数。对于固定的$x \in \mathbb{R}$，f对y连续；对固定的$y \in \mathbb{R}$，f是x 的可测函数。求证$f(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的可测函数。

证：对每个$n = 1, 2...$作函数$f_n(x,y) = f(x, k/n), (k-1)/n < y \le k/n, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$。因为对任意的$t \in \mathbb{R}$，
有$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f_n(x,y) < t\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} | f(x, k/n) < t\} \times ((k-1)/n, k/n]$，所以$f_n(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的可测函数。而且$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$。
故$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上可测。

七、若$f(x)$是$\mathbb{R}$上的实值可测函数，且对任意的$x, y \in \mathbb{R}$，有$f(x+y) = f(x) + f(y)$。证明f是连续函数。

证：因为$f(x+h) - f(x) = f(h)$以及$f(0) = 0$，只需证明$f(x)$在$x = 0$处连续即可。作有界闭集F使得$m(F) > 0$，且$f(x)$在F上一致连续，即对任意的$\epsilon > 0$，存在$\delta_1 > 0$，使得当$x, y \in F, |x - y| < \delta_1$时，$|f(x) - f(y)| < \epsilon$。又，存在$\delta_2 > 0$，使得$F - F \supset [-\delta_2, \delta_2]$。
取$\delta = min \delta_1, \delta_2$，则当$z \in [-\delta, \delta]$时，由于存在$x, y \in F$，使得$z = x - y$，
故$|f(z)| = |f(x-y)| = |f(x) - f(y)| < \epsilon$。即$f(x)$在$x = 0$处连续，证毕。

八、举例说明存在可测实函数序列f_n，它处处收敛于f但不依测度收敛。

证：设$E = (0, +\infty) \subset (R)$，函数$f_n = \chi_{(0,n]}, n = 1, 2, ...$ 显然，在E上，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$，即$\{f_n\}$在$E$上处处收敛于$f = 1$，但是

当$0<\epsilon<1$时，$m(E(|f_n-1|>\epsilon))=m((n,+\infty))=+\infty$。因此$f_n$在$E=(0,+\infty)$上不依测度收敛于$f=1$。

九、举例说明存在非$Borel$的可测集。

解：考虑$\mathbb{R}$上的$[0,1]$区间，$\Phi(x)$是$[0,1]$上的$Cantor$函数，
令$\Psi(x)=(x+\Phi(x))/2, x\in[0,1]$。显然$\Psi$是$[0,1]$上严格递增的连续函数，
且$\Psi(0)=0,\Psi(1)=1$。记其反函数为Ψ^{-1}，它是一一对应的连续函数。现在取$[0,1]$中的$Cantor$集C，令在其构造过程中每步挖去的中央三分开区间
为$I_{n,k}(n=1,2,...;k=1,2...,2^{n-1})$，其长度为$|I_{n,k}|$，那么$\Psi(I_{n,k})$是长度为$|I_{n,k}|/2$的开区间。点集$\Psi(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}I_{n,k})$的测度为$1/2$。令$\Psi(C)=A$，有$m(A)=1/2$。令$B$是$H$中的不可测集，记$\Psi^{-1}(B)=S$，则由于$S\subset C$，$S$可测。但$S$不是$Borel$集，否则$B$也
是$Borel$集，从而可测，矛盾。

十、设$A\subset\mathbb{R}$，且对于$x\in A$，存在存在无数多个数组$(p,q)(p,q\in\mathbb{Z},q\geq 1)$，使得$|x-p/q|\leq 1/q^3$，则$m(A)=0$。

证：令$B=[0,1]\bigcap A$，注意到$x+n-(p+qn)/q=x-p/q$，故$A=\bigcup_{n=-\infty}^{infty}(B+\{n\})$，从而只需证明$m(B)=0$。令$I_{p,q}=[p/q-1/q^3,p/q+1/q^3]$，则$x\in I_{p,q}$等价
于$qx-1/q^2\leq p\leq qx+1/q^2$。对于$q\geq 2$或者$q=1$，在长度为$2/q^2$的区间里至多有一至三个整数，故$x\in B$当且仅当$x$属于无穷多个$B_q$，其中$B_q=[0,1]\bigcap(\bigcup_p I_{p,q})$。从而又只需指出$\Sigma_q m(B_q)<+\infty$。由$qx-1/q^2\leq p\leq qx+1/q^2$知，对于整数$q$，使$I_{p,q}\bigcap[0,1]\neq\emptyset$就是$-1/q^2\leq p\leq q+1/q^2$。在$q\geq 2$时，这相当于$0\leq p\leq q$。因此有$m(B_q)\leq 2(q+1)/q^3$，即得所证。

中国科学技术大学 2012–2013 学年第二学期
实分析 (H) 期中考试

学生所在系:__________　　　　姓名______________

学号______________　　　　得分______________

一、作 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 之间的一一映射

二、(1) 证明：若有 $f: X \to Y, g: Y \to X$ 则存在分解

$$X = A \bigsqcup A', Y = B \bigsqcup B',$$

$$A \bigcap A' = \emptyset, B \bigcap B' = \emptyset$$

s.t.$f(A) = B, g(A') = B'$.

(2) 证明：集合 X 和 Y 的某个真子集对等，Y 和 X 的某个真子集对等，则 $X \sim Y$.

三、(1)$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ 的左右导数存在.

则 $A = \{x \epsilon (a,b) : f'_+(x) \neq f'_-(x)\}$ 为之多可数集

(2) 证明：(a,b) 上的凸函数至多除去一个可数集外的点都是可微的.

四、写出 Cantor 集的定义，以及 Cantor 集的三进制表示，并证明 Cantor 集是紧集，无孤立点，测度为 0，势为 $\aleph$

五、构造一个不可测集.

六、A_n 为可测集，$n \in \mathbb{N}$，求证:

(1) 若 A_n 单调增，则

$$m(\lim_{n\to+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} m(A_n)$$

(2) 证明：

$$m(\underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n) \le \underline{\lim}_{n\to+\infty} m(A_n)$$

七、$m(E) < +\infty, E \in L(\mathbb{R}^n)$ 证明：

$$\lim_{x\to+\infty} m((x+E)\bigcap E) = \emptyset$$

八、设 $E \subset L(\mathbb{R}^n), f_k : E \to \overline{R}, f_k$ 为可测函数,$\forall k \in \mathbb{N}$

求证:$\overline{\lim}_{k\to+\infty} f_k$ 是 Lebesgue 可测函数

九、证明：函数列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 依测度收敛 $\Leftrightarrow \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 依测度 Cauchy

十、集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n, d(A,B) > 0$, 证明：

当 δ 充分小时, 有：

$$m_\delta^*(A\bigcup B) = m_\delta^*(A)\bigcup m_\delta^*(B)$$

其中,

$m_\delta^* = inf\{\sum_{k=1}^{+\infty} |J_k| : E \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} J_k, J_k$ 为闭矩体，其边长 $< \delta, \delta > 0\}$

$d(A,B) = inf\{|x-y| : x \in A, y \in B\}$

解答:

一、解：设 $\mathbb{Q}=\{a_1,a_2\cdots\}$ $\mathbb{Q}+\sqrt{2}=\{a_1+\sqrt{2},a_2+\sqrt{2}\cdots\}$, 则

$$f:\mathbb{R}\to(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$$

$$x\mapsto f(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\bigcup\mathbb{Q}+\sqrt{2})\\ a_{2n-1}+\sqrt{2}, & x=a_n+\sqrt{2}\\ a_{2n}+\sqrt{2}, & x=a_n,n=1,2,\cdots\end{cases}\tag{1}$$

为一一映射

二、证:

(1) 记

$$\Gamma=\{E:E\bigcap g(Y\backslash f(E))=\emptyset\},$$

令 $A=\bigcup_{E\in\Gamma}E$ 则 $E\in\Gamma$, 且 E 为 Γ 中最大元 (即 $\forall E\in\Gamma$, 有 $E\subset A$),

$B=f(A),B'=Y\backslash B,A'=g(B')$

现证 $A\bigcup A'=\emptyset$, 反证法:

假设不然, 设 $x_0\in X\backslash(A\bigcup A')$, 记 $A_0=A\bigcup\{x_0\}$,

则 $B=f(A)\subset f(A_0)\Rightarrow(Y\backslash f(A_0))\subset B'\Rightarrow g(Y\backslash f(A_0))\subset A'\Rightarrow$ $A\bigcap g(Y\backslash f(A_0))=\emptyset\Rightarrow A_0\bigcap g(Y\backslash f(A_0))=\emptyset\Rightarrow A_0\subset\Gamma$ 与 A 为 Γ 最大元矛盾. 故假设不成立,$A\bigcup A'=X$

(2) 由 (1) 知：$X=A\bigsqcup A',Y=B\bigsqcup B',B=f(A),B'=f(A')$ 且 f,g 为一一映射.

故可作 $F:X\to Y$,

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in A\\ g^{-1}(x), & x\in A'\end{cases}\tag{2}$$

所以 $X\sim Y$

□

三、证：令

$$A=\{x\in(a,b):f'_+(x)<f'_-(x)\},$$

$$B=\{x\in(a,b):f'_+(x)>f'_-(x)\}.$$

只需证明 A,B 为可数集即可. 下证 A 为可数集 (B 同理可证):

$\forall x\in A$, 取 $r_1,s_1,t_1\in\mathbb{Q}$, 其中

$f'_+(x)<r_1<f'_-(x),a<s_1<t_1<b$

且

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}>r_1,\quad \forall s_1<y<x,$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<r_1,\quad \forall x<y<t_1,$$

$\Rightarrow f(y)-f(x)<r_1(y-x),\quad \forall y\in(s_1,t_1),\quad y\neq x$

$\Rightarrow x\to(r_1,s_1,t_1)$ 为 $A\to\mathbb{Q}^3$ 的一个映射, 下证这个映射为单射.

反证法，假设 $\exists x_1,x_2\in A,\quad s.t.\quad r_1=r_2,\quad s_1=s_2,\quad t_1=t_2$ 不妨设 $x_1<x_2$

则 $x_1,x_2\in(s_1,t_1)=(s_2,t_2)$

$$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)<r_1(x_2-x_1),\quad f(x_1)-f(x_2)<r_2(x_1-x_2),$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<r_1=r_2<\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

矛盾, 故假设不成立. 所以此映射为单射.

$\Rightarrow \overline{\overline{A}}=\overline{\overline{\mathbb{Q}^3}}=\aleph_0$

$\Rightarrow A$ 为可数集

□

四、证：Cantor 集：

(1)$C_0=[0,1],C_1=[0,\frac{1}{3}]\bigcup[\frac{2}{3},1]$, 为 C_0 中挖去长度为 $\frac{1}{3}$ 的同心开区间.

C_n 为 C_{n-1} 中每个区间挖去长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的同心开区间所构成.$C=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 既为 Cantor 集

$(2)\{x : x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \quad a_i = 0 or 2\}$

有界闭：记 $I_n = C_{n+1} \backslash C_n, I_n$ 为开集,$\forall n = 0, 1, \cdots$

$C = \lim_{n\to\infty} C_n = [0,1] \backslash (\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n) \Rightarrow C$ 为有界闭集，在 $\mathbb{R}$ 中即为紧集

无孤立点: $\forall x \in C, x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_x i}{3^i}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t \frac{1}{3^N} < \varepsilon.$ 取 $y = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_x i}{3^i} \in X$ 则 $|x - y| = \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{a_x i}{3^i} < \frac{1}{3^N} < \varepsilon.$ 故 Cantor 集无孤立点.

测度为 0：$m(C) = m([0,1] \backslash \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = 1 - 1 = 0$

基数为 $\aleph$:

$$f : x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \to \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} a_i}{2^i}, \quad a_i = 0 or 2$$

$$C \to [0,1]$$

而 $\overline{[0,1]} = \aleph$

$\Rightarrow \overline{C} = \overline{[0,1]} = \aleph$

□

五、解：将 $[0,1]$ 区间中的数划分成无穷个等价类，每个等价类作为一个集合，从每个集合中抽取一个元素，所组成的集合即为不可测集。

现证明此集合为不可测集：反证法：记此集合为 A, 若为可测集，则 $m(A) \geq 0$ 显然,$[0,1]$ 中有可列个这种集合 (因为 $[0,1]$ 中有理数为可列集), 记这些集合列为 $\{A_i\}, i = 1, 2, \cdots$

若 $m(A) = 0$ 则 $1 = m([0,1]) = \sum_{i=1}^{\infty} = 0$, 矛盾

所以 $m(A) > 0$, 记 $m(A) = \delta$ 则 $1 = m([0,1]) = \sum_{i=1}^{\infty} = \infty$, 矛盾

故 A 为不可测集.

六、证：(1) 记 $B_1=A_1, B_n=A_n\backslash A_{n-1} \quad n=1,2,\cdots$

$$m(\lim_{n\to\infty}A_n)=m(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m(B_n)=$$

$$m(A_1)+\sum_{n=2}^{\infty}(m(A_n)-m(A_{n-1}))=\lim_{n\to\infty}m(A_n)$$

$$(2)m(\varliminf_{n\to+\infty}A_n)=m(\lim_{n\to\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k)=\lim_{n\to\infty}m(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k)\le\varliminf_{n\to+\infty}m(A_n)$$

□

七、证：

(1) 若 E 有界: 则当 $x\gg 0$ 时, 有 $(x+E)\bigcap E=\emptyset$

(2) 当 E 无界时:$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k, E_k=E\bigcap B(0,k)\nearrow E, m(E_k)\nearrow m(E)$

$E((x+E)\bigcap E)=$

$m([(x+E)\bigcap E]\backslash[(x+E_k)\bigcap E])+m((x+E_k)\bigcap E)=: I_1+I_2,$

其中 $I_1=m([(x+E)\bigcap E]\backslash[(x+E_k)\bigcap E]), I_2=m((x+E_k)\bigcap E)$

$I_1=m([(x+E)\bigcap E]\backslash[(x+E_k)\bigcap E])\le m((x+E)\backslash(x+E_k))=$

$m(E\backslash E_k)=m(E)-m(E_k)$

对于任意固定的 k, $\quad x\gg 0$ 时, 有 $((x+E_k)\bigcap E)\subset(E\backslash E_k)$,

$\Rightarrow I_2=m((x+E_k)\bigcap E)\le m(E\backslash E_k)=m(E)-m(E_k)$(对固定的 $k, \quad x\gg 0$ 时)

$$\Rightarrow \varlimsup_{x\to\infty}m((x+E)\bigcap E)\le 2(m(E)-m(E_k))\to 0, \quad k\to\infty$$

□

八、证明：令 $g=\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}f_k$, 则 $\forall a\in\mathbb{R}, g^{-1}(a,+\infty]=\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}f_k^{-1}(a,+\infty]$

$\Rightarrow g$ 可测, 同理可证 $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}}$ 可测

$\varlimsup\limits_{k\to+\infty}f_k=\lim\limits_{k\to+\infty}\sup\limits_{n\ge k}f_k=\inf\limits_{k\in\mathbb{N}}(\sup\limits_{n\ge k}f_k)$ 可测

□

九、证明：$"\Rightarrow":\{x\in E:|f_n(x)-f_m(x)|\geq\varepsilon\}\subset\{x\in E:$
$|f_n(x)-f(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}\bigcup\{x\in E:|f_m(x)-f(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}$
$\Rightarrow":m(\{x\in E:|f_n(x)-f_m(x)|\geq\varepsilon\})\geq m(\{x\in E:$
$|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}\}\bigcup\{x\in E:|f_m(x)-f(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\})=0,\quad \epsilon\to 0$
$"\leftarrow":\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 依测度 Cauchy.
$\Rightarrow\exists$ 子列 $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}, s.t.$

$$m(\{x\in E:|g_k(x)-g_{k+1}(x)|\geq\frac{1}{2^k}\})\leq\frac{1}{2^k}$$

$E_k=\{x\in E:|g_k(x)-g_{k+1}(x)|\geq\frac{1}{2^k}\}$
$\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}E_k=\lim\limits_{k\to+\infty}\bigcup\limits_{j=k}^{\infty}E_j=\lim\limits_{k\to+\infty}F_k=F,\quad F_k=\bigcup\limits_{j=k}^{\infty}E_j\searrow F$
$m(F)=m(\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}E_k)=\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}m(E_k)=0$
$F_k^c\nearrow F^c,\quad F_k^c=\bigcap\limits_{j=k}^{\infty}E_j^c$
$E_j^c=\{x\in E:|g_k(x)-g_{k+1}(x)|\leq\frac{1}{2^k}\},\quad j\geq k$
$\{g_j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 为在 F_k^c 上的逐点 Cauchy 序列.
$i>j\geq k$ 时:
$|g_i(x)-g_j(x)|\leq|g_i(x)-g_{i-1}(x)|+\cdots+|g_{j+1}(x)-g_j(x)|\leq\frac{1}{2^{j-1}}<\frac{1}{2^k}$

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{j\to\infty}g_j(x), & x\in F^c=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k^c\\ 0, & x\in F\end{cases}\tag{3}$$

令 $i\to\infty$, 则 $g_i(x)=f(x)$,
在 F_k^c 中, 有:

$$\begin{aligned}&|g_j(x)-f(x)|\leq\tfrac{1}{2^{j-1}},\quad j\geq k\\&g_j\ \xrightarrow{u.n.}f\quad inF_k^c\nearrow F^c\\&\Rightarrow g_j\ \xrightarrow{a.u.n.}f\quad inF^c\\&\Rightarrow g_j\ \xrightarrow{m}f\quad inE\\&\Rightarrow f_j\ \xrightarrow{m}f\end{aligned}$$

□

十、证:
先证 $m_\delta^*(E) = m^*(E):$
显然有 $m_\delta^*(E) \geq m^*(E)$,
而对于 $m^*(E)$ 中，大的矩体总可以裁剪成小的矩体的并, 故有
$m_\delta * (E) \leq m^*(E) + \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$
令 $\epsilon \to 0$ 即得 $m_\delta^*(E) = m^*(E) :.$
现证原题:
由外测度的次可加性知:$m^*(A \bigcup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$.
故只需证 $m^*(A \bigcup B) \geq m^*(A) + m^*(B)$ 即可
当 δ 充分小时,$s.t.\forall$ 一个矩体只与 A, B 中的一个相交.
$\forall \epsilon > 0, \exists$ 一列开矩体 $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 使得 $\sum\limits_{\alpha \in \Gamma} |I_\alpha| \leq m_\delta^*(A \bigcup B) + \epsilon$
记 $E_1 = \bigcup\limits_{I_\alpha \bigcap A \neq \emptyset} I_\alpha, \quad E_2 = \bigcup\limits_{I_\alpha \bigcap B \neq \emptyset} I_\alpha$
$m_\delta^*(A \bigcup B) + \epsilon \geq \sum\limits_{\alpha \in \Gamma} |I_\alpha| = |E_1| + |E_2| \geq m^*(A) + m^*(B) =$
$m_\delta^*(A) + m_\delta^*(B)$
令 $\epsilon \to 0$, 得 $m_\delta^*(A \bigcup B) \geq m_\delta^*(A) + m_\delta^*(B)$
$\Rightarrow m_\delta^*(A \bigcup B) = m_\delta^*(A) + m_\delta^*(B)$

$\square$

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、叙述并证明无最大基数定理

二、给出Cantor集的定义，并证明Cantor集是闭集，完全集，测度为0，势为$\aleph$

三、设E$\subset\mathbb{R}$Lebesgue可测$\Rightarrow\exists$Borel集B ,C ,B $\subset$ E $\subset$ C,m(C\B)=0.

四、E$\subset\mathbb{R}$可测，f可测，g连续，求证$g(f(\mathrm{x}))$为可测函数，但$f(g(\mathrm{x}))$可能不为可测函数。

五、构造一个不可测集。

六、设E_n是可测集列，求证m($\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n$)$\leq \underline{\lim}_{n\to\infty} m(E_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} m(E_n) \leq$m($\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n$)

七、f可测，$f(\mathrm{x+y})=f(\mathrm{x})+f(\mathrm{y})$ $\forall$x,y$\in\mathbb{R}$,求证$f(\mathrm{x})=f(1)\mathrm{x}$,$\forall$x$\in\mathbb{R}$

八、m(E)$<\infty$,f_n几乎处处收敛到f,求证f依测度收敛到f,举例说明逆命题不成立。

九、$f(x)$是$\mathbb{R}$上几乎处处连续的函数，问是否存在$g \in C(\mathbb{R})$使得$g(x) = f(x)$ a.e $x \in \mathbb{R}$

十、证明函数列f_n依测度收敛$\Longleftrightarrow f_n$是依测度Cauchy列

中国科学技术大学

2012–2013学年第二学期

实分析

学生所在系:_________ 姓名_____________

学号_____________ 得分_____________

一（1）请在$\mathbf{R}^1$中作闭集F_1与F_2，使得$d(F_1,F_2)=0$，但对任意的$P_1\in F_1$，$P_2\in F_2$,有$d(P_1,P_2)>0$。
（2）请在$\mathbf{R}^2$中作连通闭集F_1与F_2，使得$d(F_1,F_2)=0$，但对任意的$P_1\in F_1$，$P_2\in F_2$,有$d(P_1,P_2)>0$。

二、(1）若采用这样的取法：首先取出一个有理数q_1,并取闭区间$I_1=[a_1,b_1],a_1<b_1,q_1\in I_1$，然后取有理数$q_2\notin I_1$，作闭区间$I_2=[a_2,b_2],a_2<b_2,q_2\in I_2,I_2\cap I_1=\emptyset$,然后取有理数$q_3$,$q_3\in I_3$,$I_3$与$I_1,I_2$不交，类似的找$I_4,I_5,\cdots$, 显然有理数集$\mathbf{Q}\subseteq\cup_{n=1}^{\infty}I_n$,但$\mathbf{R}\subseteq\cup_{n=1}^{\infty}I_n$么？一定不是?一定是?可能是(取决于区间的取法）?
（2）试问$\mathbf{R}^1$可表为可数个互不相交的有界闭区间的并集么？

三、若集合A的外测度为正，是否一定存在有界子集$B\subseteq A$,且B的外测度为正。

四、对于$\mathbf{R}^d$中的集合A,B，定义$A+B=\{x+y:x\in A,y\in B\}$
(1)若A或B是开集，则$A+B$是开集，
(2)若A和B是闭集，则$A+B$是可测集。

五、若$\{f_k(x)\}$是E上的可测函数列，证明函数

$$\sup_{k\geq 1}\{f_k(x)\}\text{与}\varlimsup_{k\to\infty}f_k(x)$$

为E上的可测函数。

六、若$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$E\subseteq\mathbf{R}^1$上依测度收敛于$f(x)\equiv 0$，请问是否有

$$\lim_{n\to\infty}m(\{x\in E:|f_n(x)|>0\})=0?$$

七、设$\{f_k(x)\}$是$[a,b]$上的实值可测函数列，试证明存在正数列$\{a_k\}$,使得

$$\lim_{k\to\infty} a_k \cdot f_k(x) = 0 \quad a.e. \quad x \in [a,b]$$

答案或提示

一、(1)$F_1=\cup_{n=2}^{\infty}\{n+\frac{1}{n}\},F_1=\cup_{n=2}^{\infty}\{n+\frac{1}{n^2}\}$

(2)$F_1=\{(x,y):y\geq\frac{1}{x},x\geq 0\},F_1=\{(x,y):y=0\}$

二、见周民强P69

三、$E=\cup_{n=1}^{\infty}E\cap B(0,n)$利用反证法与外测度的次可加性

四、(1)$\forall z\in A+B,z=x+y$,if A is an open set, $\exists\delta>0,B(x,\delta)\subset A$

$B(x,\delta)+y=B(x+y,\delta)\subset A+B$,so $A+B$ is an open set.

(2)$A+B=\cup_{n=1}^{\infty}(A+(B\cap Q_n))$,

Q_n是以原点为中心2n为边长的正方体，故只需证明闭集+紧集是可测集，

而若证明闭集+紧集为闭集，则证明就完成了。

不妨设B是紧集，故$z_n\in A+B,z_n\to z$,要证$z\in A+B$

$z_n=x_n+y_n$,由于B是紧集，存在$\{y_n\}$的子列$\{y_{k_n}\}$趋于$y\in B$,

$x_{k_n}=z_{k_n}-y_{k_n}\to x$

由于A是闭集，所以$x\in A,z=x+y\in A+B$,

所以A+B是闭集。

五、$\{x:sup_{k\geq 1}\{f_k(x)>t\}=\cup_{k=1}^{\infty}\{x:f_k(x)>t\},t\in\mathbf{R}^1$

然后证明对应inf的情况，并注意到

$\overline{\lim}_{k\to\infty}f_k(x)=inf_{i\geq 1}(sup_{k\geq i}[f_k(x)])$

六、见周民强P140

令$E=(0,1),f_n(x)=x^n$

七、见周民强P150

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析(H)期中考试试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、设$f(x)$为(a,b)上的实值函数，证明(a,b)上第一类间断点所构成的集合为可数集。

二、设E是$\mathbb{R}^n$中的可测集合且$m(E)>0$。作点集

$$E-E=\{x-y:x,y\in E\}$$

则存在$\delta_0>0$，使得$E-E\supset B(0,\delta_0)$。

三、记Λ为$(0,1)$上的一个连续函数族，则函数

$$g(x)=\sup_{f\in\Lambda}\{f(x)\}$$

是$(0,1)$上的可测函数。

四、证明直线上开集全体所成的集合的势为$\aleph$.

五、若$\{E_k\}$是递增集合列，则$\lim\limits_{k\to\infty}m^*(E_k)=m^*(\lim\limits_{k\to\infty}E_k)$

六、解答下列问题：

(1)设$f \in C([a,b])$，若有定义在$[a,b]$上的函数

$$g(x): g(x) = f(x), \qquad a.e.\ x \in [a,b]$$

试问$g(x)$在[a,b]上必是几乎处处连续的吗？

(2)设$f(x)$是$\mathbb{R}^1$上几乎处处连续的函数，试问是否存在$g \in C(\mathbb{R}^1)$，使得

$$g(x) = f(x), \qquad a.e.\ x \in \mathbb{R}^1.$$

七、设f是$(-\infty, +\infty)$上$Lebesgue$可测函数，而且对一切$t_1, t_2 \in (-\infty, +\infty)$，

$$f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2)$$

证明必有常数c，使得$f(t) = ct$。

八、设$\{E_k\}$是$\mathbb{R}^n$中可测集合列。试证明$\{\mathcal{X}_{E_k}(x)\}$是依测度$Cauchy$列，当且仅当

$$\lim_{k,j \to \infty} m(E_k \triangle E_j) = 0$$

九、若$f(x)$是定义在开集$G \subset \mathbb{R}^n$上的实值函数，则f的连续点集是G_δ集。

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析(H)期中考试参考答案

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、设$f(x)$为(a,b)上的实值函数，证明(a,b)上第一类间断点所构成的集合为可数集。

证明：令

$$A = \{x \in (a,b) : f'_+(x) < f'_-(x)\}$$

$$B = \{x \in (a,b) : f'_+(x) > f'_-(x)\}$$

只需证A,B为可数集即可。对任意$x \in A$，选有理数r_x，使得$f'_+(x) < r_x < f'_-(x)$。再选有理数s_x及t_x：

$$a < s_x < t_x < b$$

使得

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > r_x, \qquad s_x < y < x$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < r_x, \qquad x < y < t_x$$

合并得

$$f(y) - f(x) < r_x(y-x)$$

其中$y \neq x$且$s_x < y < t_x$。因此，对应规则$x \to (r_x, s_x, t_x)$是从A到$\mathbb{Q}^3$的一个映射，而且是一个单射。这是因为若有$x_1, x_2 \in A$，使

$$r_{x_1} = r_{x_2}, \qquad s_{x_1} = s_{x_2}, \qquad t_{x_1} = t_{x_2},$$

则$(s_{x_1}, t_{x_1}) = (s_{x_2}, t_{x_2})$且均含$x_1$及$x_2$，于是同时有：

$$f(x_2) - f(x_1) < r_{x_1}(x_2 - x_1)$$

$$f(x_1) - f(x_2) < r_{x_2}(x_1 - x_2)$$

而$r_{x_1} = r_{x_2}$，故得矛盾，这说明A与$\mathbb{Q}^3$之一子集对等，而$\mathbb{Q}^3$的基数是$\aleph_0$，即知为A可数集。同理可证B是可数集，故原命题得证。

二、设E是$\mathbb{R}^n$中的可测集合且$m(E) > 0$。作点集

$$E - E = \{x - y : x, y \in E\}$$

则存在$\delta_0 > 0$，使得$E - E \supset B(0, \delta_0)$。

证明：取λ满足$1 - 2^{-(n+1)} < \lambda < 1$，则存在矩体$I$，使得

$$\lambda |I| < m(I \bigcap E)$$

现在记I的最短边为δ，并作开矩体

$$J = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) : |\xi_i| < \frac{\delta}{2}\ (i = 1, \ldots, n)\}$$

从而只需证明$J \subset E - E$即可，也就是证明对每个$x_0 \in J$，点集$E \bigcap I$必与点集$(E \bigcap I) + \{x_0\}$相交。因为J是以原点为中心、边长为δ的开矩体，所以I的平移矩体$I + \{x_0\}$仍含有I的中心。从而知

$$m(I \bigcap (I + \{x_0\})) > 2^{-n} |I|$$

由此可得

$$m(I \bigcup (I + \{x_0\})) = |I| + m(I + x_0) - m(I \bigcap (I + \{x_0\})) < 2|I| - 2^{-n}|I|$$

即

$$m(I \bigcup (I + \{x_0\})) < 2\lambda |I|$$

但由于$E \bigcap I$与$(E \bigcap I) + \{x_0\}$有着相同的测度并且都大于$\lambda |I|$，同时有都含于$I \bigcup (I + \{x_0\})$之中，故它们必定相交，否则其并集测度要大于$2\lambda |I|$，从而引起矛盾。

三、记Λ为$(0,1)$上的一个连续函数族，则函数

$$g(x) = \sup_{f \in \Lambda} \{f(x)\}$$

是$(0,1)$上的可测函数。

证明：对$g(x)$，设$t \in \mathbb{R}$。若$x_0 \in \{x \in (0,1) : g(x) > t\} := E_t$，则存在$f \in \Lambda : f(x_0) > t$。因为$f(x)$连续，所以存在$\delta_0 > 0$，使得

$$f(x) > t \qquad (x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0)$$

由此又知$g(x) > t\ (x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0)$。这说明$x_0$是点集$E_t$的内点，即$E_t$是开集，故$g(x)$是可测函数。

四、证明直线上开集全体所成的集合的势为$\aleph$.

证明：考虑实数列$(a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,\dots)$全体，它的势为$\aleph$。
令$\varphi(a_1,b_1,a_2,b_2,\dots)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 显然φ是实数列全体到开集全体的满射。所以开集全体的势$\leq\aleph$。又开区间$(a,b)(a<b)$全体的势为$\aleph$，故开集全体的势$\geq\aleph$。从而开集全体的势为$\aleph$.

五、若$\{E_k\}$是递增集合列，则$\lim\limits_{k\to\infty}m^*(E_k)=m^*(\lim\limits_{k\to\infty}E_k)$

证明：对每个E_k均作等测包H_k：

$$H_k\supset E_k\qquad m(H_k)=m^*(E_k)\qquad (k=1,2,\dots)$$

则可得

$$m^*(\lim_{k\to\infty}E_k)\leq m(\lim_{k\to\infty}H_k)=\lim_{k\to\infty}m(H_k)=\lim_{k\to\infty}m^*(E_k)$$

显然，有

$$\lim_{k\to\infty}m^*(E_k)\leq m^*(\lim_{k\to\infty}E_k)$$

综上可得原等式成立。

六、解答下列问题：

(1)设$f\in C([a,b])$，若有定义在$[a,b]$上的函数

$$g(x):g(x)=f(x),\qquad a.e.\ x\in[a,b]$$

试问$g(x)$在[a,b]上必是几乎处处连续的吗？

(2)设$f(x)$是$\mathbb{R}^1$上几乎处处连续的函数，试问是否存在$g\in C(\mathbb{R}^1)$，使得

$$g(x)=f(x),\qquad a.e.\ x\in\mathbb{R}^1.$$

解:(1)不一定，取$f(x)=0$，$g(x)=\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x)$，则$g(x)$不是处处连续的。
(2)不一定存在，取$f(x)=sign(x)$，则不存在连续函数$g(x)$满足条件，若存在，则在$x=0$附近必定存在振幅大于$\frac{1}{2}$的点，于是存在一个开集，使得上面所有点的振幅都大于$\frac{1}{4}$，从而不可能使得f,g几乎处处相等，矛盾！

七、设f是$(-\infty,+\infty)$上$Lebesgue$可测函数，而且对一切$t_1,t_2\in(-\infty,+\infty)$，

$$f(t_1+t_2)=f(t_1)+f(t_2)$$

证明必有常数c，使得$f(t)=ct$。

证明：易证，对任意有理数r及实数t，均成立$f(rt)=rf(t)$。
故要证原命题成立，只需证明f连续。又由于$f(x+h)-f(x)=f(h)$ 以及$f(0)=0$，所以只需证明$f(x)$在$x=0$处连续即可。
可作有界闭集F：$m(F)>0$，使$f(x)$在F上一致连续，即对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta_1>0$，使得

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \qquad |x-y|<\delta_1 \qquad x,y\in F$$

又存在$\delta_2>0$，使得

$$F-F\supset[-\delta_2,\delta_2]$$

取$\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}$，且当$z\in[-\delta,\delta]$时，由于存在$x,y\in F$，使得$z=x-y$，故可得

$$|f(z)|=|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

这说明$f(x)$在$x=0$处连续，故原命题得证。

八、设$\{E_k\}$是$\mathbb{R}^n$中可测集合列。试证明$\{\mathcal{X}_{E_k}(x)\}$是依测度$Cauchy$列，当且仅当

$$\lim_{k,j\to\infty} m(E_k\bigtriangleup E_j)=0$$

证明：$\lim\limits_{k,j\to\infty} m(E_k\bigtriangleup E_j)=0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{j,k\to\infty} m(\{x:|\mathcal{X}_{E_k}(x)-\mathcal{X}_{E_j}(x)|>\varepsilon\})=0 \Longleftrightarrow \{\mathcal{X}_{E_k}(x)\}$是依测度$Cauchy$列。

九、若$f(x)$是定义在开集$G\subset\mathbb{R}^n$上的实值函数，则f的连续点集是G_δ集。

证明：令$\omega_f(x)$为f在点x的振幅，易知$f(x)$在$x=x_0$处连续的充分必要条件是$\omega_f(x_0)=0$，由此可知$f(x)$的连续点集可以表示为

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x\in G:\omega_f(x)<\frac{1}{k}\}$$

因为$\{x\in G:\omega_f(x)<\frac{1}{k}\}$是开集，所以$f(x)$的连续点集是$G_\delta$集。

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析期中考试试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、设$A_n = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{R}\}$, $B_n = (\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ $(n = 1, 2, \cdots)$,则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \mathbb{Q}. \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \mathbb{Z}. \qquad \lim_{n\to\infty} B_n = (0, 1].$$

二、若$f(x)$是定义在开集$G \subset \mathbb{R}^n$上的实值函数，则f的连续点集是G_δ集.

三、设E是线段$[a, b]$上的具有正测度的可测集，证明：在该集中至少可以找到一对点，它们之间的距离是有理数.

四、设$A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$,$A_1 \subset A_2, A_1$可测，且$m(A_1) = m^*(A_2)$，则$A_2$为可测集.

五、设E是$\mathbb{R}^1$上的可测集，且$m(E) > 0$,则$\forall\ c\ (0 < c < m(E))$,$\exists$有界可测集$E_0 \subset E$,使$m(E_0) = c$.

六、设有定义在$\mathbb{R}^1$上的函数$f(x)$，满足

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}^1,$$

且在$E \subset \mathbb{R}^1 (m(E) > 0)$上有界，则$f(x) = cx\ (x \in \mathbb{R}^1)$,其中$c = f(1)$.

七、设$m(E)<+\infty, f(x)$是E上几乎处处有限的可测函数，则$\forall\varepsilon>0, \exists$有界可测函数$g(x)$,使

$$m(\{x\in E: f(x)\neq g(x)\})<\varepsilon.$$

八、设f_n依测度收敛于E,且$f_n=g_n\ a.e.$于$E\ (n=1,2,\cdots)$则有

$$g_n\to f\ in\ measures\text{于}E(E\text{为可测集}).$$

九、若$f(x,y)$是定义在$\mathbb{R}^2$上的实值函数，且对固定的$x\in\mathbb{R}^1, f(x,y)$是$y\in\mathbb{R}^1$上的连续函数，对固定的$y\in\mathbb{R}^1, f(x,y)$是$x\in\mathbb{R}^1$上的可测函数，则$f(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的可测函数.

十、设$f(x), f_k(x)(k\in\mathbb{N})$是$E\subset\mathbb{R}^1$上实值可测函数，$m(E)<+\infty$.
(1)若在任一子列$\{f_{k_i}(x)\}$中均有子列$\{f_{k_{i_j}}(x)\}$在E上收敛于$f(x)$，则$f_k(x)$在E上依测度收敛于$f(x)$.
(2)若$f_k(x)>0(k\in\mathbb{N})$，且$f_k(x)$在E上依测度收敛于$f(x)$,则对$p>0, {f_k}^p(x)$在E上依测度收敛于$f^p(x)$.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析期中考试试卷答案

一：(1)因为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\{x:$对任一自然数$j$，存在$k(k\geq j),x\in A_k\}$;
对任意的$\frac{m}{n}\in\mathbb{Q},\frac{m}{n}\in A_n$,有$\frac{km}{kn}\in A_{kn}$,
所以$\mathbb{Q}\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$
又因为显然无理数不在A_n内，所以$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\mathbb{Q}$.
(2) 因为对任意的$k\in\mathbb{Z},\frac{kn}{n}=n\in A_n,\forall n\in\mathbb{Z}$ 所以$\mathbb{Z}\subset\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$
又因为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$,
且对于任意的$q=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z},(m,n)=1,\exists A_{n+1},\frac{m}{n}\notin A_{n+1}$,
所以$q\notin\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$
所以$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\mathbb{Z}$.
(3)显然

二、令$\omega_f(x)$为f在x点的振幅，易知$f(x)$在$x=x_0$处连续的充分必要条件是$\omega_f(x)=0$,由此可知$f(x)$的连续点集可表示为

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x\in G:\omega_f(x)<\frac{1}{k}\}.$$

因为$\{x\in G:\omega_f(x)<\frac{1}{k}\}$是开集，所以$f(x)$的连续点集是$G_\delta$集.

三、设E是$[a,b]$上的可测集，且使$m(E)=\mu>0$,将开区间$(0,1)$上全部有理数编号：

$$r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots$$

用E_k表示E经平移r_k得到的集合，这些集合的并是$[a,b+1]$上某一子集H,易知E_k中至少有两个集合交非空，否则我们有

$$m(H)=m(E_1)+m(E_2)+\cdots=\mu+\mu+\cdots=\infty.$$

这是不可能的，所以存在两个集合$E_i,E_j(i\neq j),E_i\cap E_j\neq\phi$.设$a\in E_i\cap E_j$，那么，$a=x+r_i=y+r_j\ (x,y\in E)$，由此，$|\ x-y\ |=|\ r_i-r_j\ |\neq 0$,则$\rho(x,y)$是有理数。

四、$A_2=A_1\cap(A_2-A_1)$,而A_1可测，所以只需证A_2-A_1可测.
$\forall\,\epsilon>0$,由于

$$m^*(A_2)=inf\{m(G)\mid A\subset G,G\text{为开集}\};$$

由下确界定义，$\exists$开集$G\supset A_2(\supset A_1)$,使得

$$m(G)<m^*(A_2)+\epsilon.$$

又因G,A_1可测，及$A_2-A_1\subset G-A_1$得

$$0\le m^*(A_2-A_1)\le m^*(G-A_1)=m(G-A_1)<\epsilon$$

又ϵ任意性可知，$m^*(A_2-A_1)=0$则A_2-A_1可测，则A_2可测，且

$$m(A_2)=m(A_1)+m(A_2-A_1)=m(A_1).$$

五、由于E不一定有界，令$E_n=E\cup[-n,n]\ (n=1,2,\cdots)$,则$E_n$可测，$E_1\subset E_2\subset\cdots$,且有

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

由定理知，$\lim_{n\to\infty}m(E_n)=m(E)>c>0$,且$\exists n_0>0$,使得$m(E_{n_0})>c$,且$E_{n_0}$是有界可测集，我们不妨记$m(E_{n_0})=c_0>c$,$E_{n_0}=E\cup[-n_0,n_0]\subset[-n_0,n_0]$,作函数$f(x)=m(E_{n_0}\cup[-n_0,x])$,则$0\le f(x)\le c$，且$f(x)$是$[-n_0,n_0]$上连续函数，由介值定理，可知$\exists n\in[-n_0,n_0]$,s.t.$f(n)=m(E_{n_0}\cup[-n_0,n])=c,E_{n_0}\cup[-n_0,n]$是符合要求的有界可测集。

六、由题设知，对$r\in\mathbb{Q}$,必有$f(r)=rf(1)$
其次，由$m(E)>0$可知，存在区间$I:I\subset E-E$.不妨设$|\ f(x)\ |\le M(x\in E)$,又对任意的$x\in I$,有$x',x''\in E$,使得$x=x'-x''$,则

$$|\ f(x)\ |=|\ f(x^{'})-f(x^{''})\ |\le|\ f(x^{'})\ |+|\ f(x^{''})\ |\le 2M$$

记$I=[a,b]$,并考察$[0,b-a]$.若$x\in[0,b-a]$,则$x+a\in[a,b]$.从而由$f(x)=f(x+a)-f(a)$可知，$|\ f(x)\ |\le 4M,x\in[0,b-a]$.记$b-a=c$,这说明

$$|\ f(x)\le 4M,\quad x\in[0,c]$$

易知$|\ f(x)\ |\le 4M.x\in[-c,c]$.
已知对任意的$x\in\mathbb{R}^1$以及自然数n,均存在有理数r,使得$|\ x-r\ |<\frac{c}{n}$.因此，我们得到

$$\begin{aligned}&|\ f(x)-xf(1)\ |=|\ f(x-r)+rf(1)-xf(1)\ |\\&=|\ f(x-r)+(r-x)f(1)\ |\le\frac{4M+c\ |\ f(1)\ |}{n}\end{aligned}$$

根据n的任意性，即得$f(x)=xf(1)$.

七、令$E_0=\{x:f(x)=\infty\}$，则$m(E_0)=0$,设$E_n=\{x:\mid f(x)\mid\geq n\}(n=1,2,\cdots)$,则有$E\supset E_1\supset E_2\supset\cdots$且$\lim_{n\to\infty}E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=E_0$.又因为$m(E_0)=0$, 因此$\lim_{n\to\infty}m(E_n)=0$. 所以$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},m(E_N)=m(\{x:\mid f(x)\mid\geq N\})<\epsilon$
做函数

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{if } x\in E-E_N\\ 0 & \text{if } x\in E_N\end{cases}$$

由g的定义知$\mid g(x)\mid< N(x\in E)$,即g在E上有界，
而$\{x:f(x)\neq g(x)\}\subset E_N, m(\{x:f(x)\neq g(x)\})\leq m(E_N)<\epsilon.g$就是符合要求的可测函数。

八、我们记$\{x:x$满足的条件$\}=E[x$满足的条件$]$,则

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}E[f_n\neq g_n]$$

对$\forall\epsilon>0$,因$f_n=g_n,a.e.$于E,所以有

$$mE[f_n\neq g_n]<\frac{\epsilon}{2^n}\ (n=1,2,\cdots)$$

于是

$$m(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}mE[f_n\neq g_n]<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^n}=\epsilon$$

所以$m(A)=0$
故，对于任意的正数σ，由于

$$E[\mid g_n-f\mid\geq\sigma]\subset E[\mid f_n-f\mid\geq\sigma]\cup A.$$

则

$$mE[\mid g_n-f\mid\geq\sigma]\leq mE[\mid f_n-f\mid\geq\sigma]+mA=mE[\mid f_n-f\mid\geq\sigma]$$

而由f_n依测度收敛于f,得

$$\lim_{n\to\infty}mE[\mid f_n-f\mid\geq\sigma]=0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}mE[\mid g_n-f\mid\geq\sigma]=0$$

即 g_n依测度收敛于f在E中。

九、对每个$n=1,2,\cdots$,作函数

$$f_n(x,y)=f(x,\frac{k}{n}),\ \frac{k-1}{n}<y\leq\frac{k}{n}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

因为对任意的$t\in\mathbb{R}^1$,有

$$\begin{aligned}&\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: f_n(x,y)<t\}\\ &=\bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty}\{x\in\mathbb{R}^1: f(x,\frac{k}{n})<t\}\times(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}],\end{aligned}$$

所以$f_n(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的可测函数，而由题设易知

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y)=f(x,y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

即得所证。

十、(1)反证法，假设结论不成立，则存在$\epsilon_0>0,\sigma_0>0,\{k_i\}$,使得

$$m(\{x\in E:\mid f_{k_i}(x)-f(x)\mid>\epsilon_0\})\geq\sigma_0. \tag{1}$$

依题设知，存在$\{k_{ij}\}$,使得$f_{k_{ij}}(x)\to f(x)(j\to\infty)$.由此知$f_{k_{ij}}$在$E$上依测度收敛于$f(x)$,这与(1)矛盾。

(2)由题设知，任何子列$\{f_{k_i}(x)\}$中必有子列$\{f_{k_{ij}}(x)\}$在E上收敛于$f(x)$。即$\{f^p_{k_i}(x)\}$中必有子列$\{f^p_{k_{ij}}(x)\}$在E上收敛于$f^p(x)$.因此，根据(1)即得所证。

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

拟实分析试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、说出依测度收敛与几乎处处收敛的定义

二。设E={cos n}，则$\overline{E}$=[-1,1]

答案：设A=$\{n+2m\pi$:$n,m\in Z,\}$,易知对任给的$t\in R^1$,以及$\delta>0$,存在$a\in A$,使得$|t-a|<\delta$,从而知道$\overline{A}=R^1$,现在设$x\in$[-1,1],以及$\epsilon>0$,则存在$t\in R^1$，使得cos$t=x$,且存在$n,m\in Z$,使得$t<n+2m\pi<t+\epsilon$,由此可得

$|x-cosn|=|cost\text{-}\cos(n+2m\pi)|\leq n+2m\pi\text{-}t<\epsilon$

三。R中存在可列个互不相交的稠密可列集答案：1.构造数集：每一个集合为有理数集加上一个素数的根号2.该集合两两相交为空（否则可推出两个不同素数乘积的根号为有理数，矛盾）3。易于验证每个集合为可数稠密集

四。设$E\subset R^n$ 为孤立点集，证明：E为至多可数集

答案：因为E为孤立点集，故对任意的$x=(x_1,x_2.......x_n)\in E$，存在开方体$(a_1^x,b_1^x)\times(a_2^x,b_2^x)\times..........(a_n^x,b_n^x)$，使得$\{x\}=[(a_1^x,b_1^x)\times(a_2^x,b_2^x)\times..........(a_n^x,b_n^x)]\cap E$, 其中，$a_i^x$,$b_i^x\in Q$,$i$=1,2,3........显然

f:$E\to Q^n$,

$x\to f(x)=(a_1^x,b_1^x)\times(a_2^x,b_2^x)\times..........(a_n^x,b_n^x)$

为单射，故

$\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{f(E)}}\leq\overline{\overline{Q}}^n=\aleph_0$.

即E为至多可数集

五。证明：可测集任何有限次的并运算后所得的集皆为可测集答案：书上基本定理证明

六。设U（k）是n维欧式空间上的一族开球，G为它们的并。0¡X¡m(G)。证明存在有限个互不相交的开球，使它们的测度和¿X/3^n.

在G内做紧集F，使其测度¿X,于是F被U(k)中开球有限覆盖，将其按大小排序后，选半径最大的开球作为第一个集B1，再从与B1不交的开球中选半径最大的作为B2……这样得到的有限个开球有如下性质：将它们各自球心不动，而半径扩大三倍后又能覆盖F。故它们就满足题目要求

七。设$E\subset R^1$,$m^*(E)>0$,则对任意的$q\in[0,m^*(E))$,必存在$E_1\subset E$,s.t.$m^*(E_1)=q$. 答案：令$f(x)=m^*(E\cap(-x,x)),x\in[0,+\infty)$ 易见，$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=m^*(E)$,下证$f$为连续函数。事实上，对任意$h>0$,有

$|f(x+h)-f(x)|=|m^*(E\cap(-x-h,x+h))-m^*(E\cap(-x,x))|$

$\leq m^*((-x-h,-x])+m^*([x,x+h))$
$\leq 2h$. 故f在x右连续，同理故f在x左连续，从而，f在区间$[0,\infty)$上连续，
由$f(0)=0\leq q<m^*(E)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和连续函数的介值定理，存在
$\xi\in[0,+infty)$,s.t.$q=f(\xi)=m^*(E\cap(-\xi,\xi))=m*(E_1)$
其中$E_1=E\cap(-\xi,\xi)\subset E$
八。证明R中开集是可数个互不相交的开区间的并集答案：书上基本定理证明
九.存在(0,1)的函数$f(x)$,其$D^+f(x)$在(0,1)上不是可测函数（若$f\in C(0,1)$)且递增，则$D^+f(x)$在(0,1)上可测）设W是(0,1)中不含有理点的不可测集，作
当$f(x)$=0,$x\in W$,
当$f(x)$=1,$x\in(0,1)\backslash W$. 若$x_0\in W$,
我们会有（取$x_0\in Q$）

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1-0}{x-x_0}\to D^+f(x_0)=+\infty(x\to x_0^+)$$

若$x_0\in$(0,1)$\backslash W$,我们有

$$D^+f(x_0)=lim_{\delta\to0}sup_{0<x-x_0<\delta}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\bar{l}im_{x\to x_0^+}\frac{1-1}{x-x_0}=0$$

由此即得到所证，$\{x\in(0,1):D^+f(x)\geq t\}=\bigcap\limits_{i,k=1}^{\infty}\{x\in(0,1)$:存在$0<h<1/i,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>t-1/k\}$

十。试问直线上所有开区间的全体形成的集合的基数是什么？
答案：对于直线上所有开区间,不妨取该直线为数轴(坐标轴旋转).则任意开区间I可表示为(a,b),$a,b\in\mathbb{R}$
则考虑

$$f:\to I\mapsto(a,b)$$

且由R^2的基数是c知,直线上所有开区间的全体形成的集合的基数是c.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

拟实分析试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、f(x)可测⇔任意Borel集A满足$f^{-1}(A)$可测。

二、求证Cantor-Bernstain定理。

三、若F⊂ ℝ是非空可数闭集，则必有孤立点。

四、$E = x \in \mathbb{R} : \lim_{t \to x} f(t) = +\infty$是可数集.

五、设$f_n(x)$是定义在闭集$F \subset \mathbb{R}$上的实值函数列.若每个$f_n(x)$的连续点集在F中稠密，试证明存在$x_0 \in F$,使得每个$f_n(x)$都在$x = x_0$处连续.

六、设$A_1, A_2 \subset R^n, A_1 \subset A_2, A_1$是可测集且有$m(A_1) = m^*(A_2) < \infty$,
则A_2是可测集。

七。设$E \subset R^n$,试证明存在G_δ集$\widetilde{G} : E \subset \widetilde{G}$
且$m^*(\widetilde{G}) = m^*(E)$.

八、设$E \subset R^n, H \supset E$且H是可测集。若$H \setminus E$中任何一可测集皆为零测集，试问H是E的等测包吗？

九、试问：是否存在闭集$F \subset [a, b], F \neq [a, b]$,而$m(F) = b - a$？

十、设f(x)是(a,b)上的实值函数，则

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \underline{D}f(x) = \liminf_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

是(a,b)上的可测函数.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

拟实分析试卷

学生所在系:__________ 姓名_______________

学号_______________ 得分_______________

一、f(x)可测⇔任意Borel集A满足$f^{-1}(A)$可测。
证：充分性显然. 必要性：由于f^{-1}(开集)可测，f^{-1}(闭集)可测，又可测集为σ-代数,故f^{-1}(Borel集)可测.

二、求证Cantor-Bernstain定理。
证：由题设知存在单射$f: X \to Y$与单射$g: Y \to X$,根据映射分解定理知

$$X = A \bigcup A \ , Y = B \bigcup B \ , f(A) = B, g(B \ ) = A$$

注意到这里的$f: A \to B$以及$g^{-1}: A \ \to B$ 是一一映射，因而可作X到Y上的一一映射如下：

$$F[x] = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g^{-1}(x) & x \in A \end{cases}$$

这说明$X \sim Y$.

三、若F$\subset \mathbb{R}$是非空可数闭集，则必有孤立点。
证：用反证法。假定$F = \{x_1, x_2, ..., x_k, ...\}$中无孤立点，则对每个$x_n$,点集$(\mathbb{R} \setminus \{x_n\}) \bigcap F$在F中稠密，因为对每个n,$\mathbb{R} \setminus \{x_n\}$是开集，所以$(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \{x_n\}) \bigcap F)$在F中也稠密. 但是$(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \{x_n\})) \bigcap F = \varnothing$,矛盾，证毕.

四、$E = x \in \mathbb{R} : \lim_{t \to x} f(t) = +\infty$是可数集.
证：已知若f(x)定义在[a,b]上，则f(x)的严格极小值点是可数的.
令$g(x) = arctan f(x) (x \in \mathbb{R})$,且作点集,

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{y \to x} g(y) = \frac{\pi}{2}\}$$

从而易知E是可数集.

五、设$f_n(x)$是定义在闭集$F\subset\mathbb{R}$上的实值函数列.若每个$f_n(x)$的连续点集在F中稠密，试证明存在$x_0\in F$,使得每个$f_n(x)$都在$x=x_0$处连续.
证: (i)若x_0为F的孤立点，则结论自然成立. (ii)设F无孤立点,且
令$\varepsilon_1>\varepsilon_2>...>\varepsilon_n>...\to 0(n\to\infty)$ 首先，取$a_1\in F$是$f_1(x)$的连续点，则存在$\delta_1>0$,使得$f_1(x)$在$A_1[a_1-\delta_1,a_1+\delta_1]\cap F$上的振幅$w_{A_1}(f)<\varepsilon_1$. 注意到$A_1$中存在$f_1(x)$的连续点b,故有$\eta>0 s.t. f_1(x)$在$B=[b-\eta,b+\eta]\cap F\subset A_1$上的振幅小于$\varepsilon_2$. 其次，在B中取$f_2(x)$的连续点$a_2$,则存在$\delta_2>0$,使得$f_2(x)$在$A_2=[a_2-\delta_2,a_2+\delta_2]\cap F\subset B\subset A_1$上的振幅$w_{A_2}(f_2)<\varepsilon_1$.自然也有$w_{A_2}(f_1)<\varepsilon_2$..依次又
有a_3和δ_3,使$f_3(x)$在$A_3=[a_3-\delta_3,a_3+\delta_3]\cap F\subset A_2$上的振幅$w_{A_3}(f_3)<\varepsilon_1$.，同时又有$w_{A_3}(f_1)<\varepsilon_3$.和$w_{A_3}(f_2)<\varepsilon_2$. 继续这一过程，可得一列有界闭集$A_n$,在$A_n$上有

$$w_{A_n}(f_n)<\varepsilon_1,w_{A_n}(f_{n-1})<\varepsilon_2,...,w_{A_n}(f_1)<\varepsilon_n.$$

注意到$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$非空，易知每个$f_n(x)$在$x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$处连续.

六、设$A_1,A_2\subset R^n,A_1\subset A_2,A_1$是可测集且有$m(A_1)=m^*(A_2)<\infty$,
则A_2是可测集。
证:由题设知$m^*(A_1)=m^*(A_2)=m^*(A_1\cup(A_2\setminus A_1))=m^*(A_1)+m^*(A_2\setminus A_1)$,
故可得$m(A_2\setminus A_1)=0$.从而$A_2\setminus A_1$是可测集，即A_2是可测集。

七。设$E\subset R^n$,试证明存在G_δ集$\widetilde{G}:E\subset\widetilde{G}$
且$m^*(\widetilde{G})=m^*(E)$.
证:依定义，对$k\in\mathbb{N}$,存在矩体列$\{I_{k,i}\}$,使得$\bigcup_{i=1}^{\infty}\supset E$,且
有
$\sum_{i=1}^{\infty}|I_{k,i}|\le m^*(E)+\frac{1}{k}\quad(k=1,2...)$.
令$\tilde{G}_k=\bigcup_{i=1}^{\infty}I_{k,i}\quad(k\in\mathbb{N}),\tilde{G}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\tilde{G}_k$,易知$\tilde{G}\supset E$且$\tilde{G}$是$G_\delta$集。我们有(对$k\in\mathbb{N}$)
$m^*(E)\le m^*(\tilde{G})\le m^*(\tilde{G}_k)\le\sum_{i=1}^{\infty}|I_{k,i}|\le m^*(E)+\frac{1}{k}$,
令$k\to\infty$即得$m^*(E)=m^*(\tilde{G})$。

八、设$E\subset R^n,H\supset E$且H是可测集。若$H\setminus E$中任何一可测集皆为零测集，试问H是E的等测包吗？

证:作E的等测包G，因为$H\setminus G\subset H\setminus E$且$H\setminus G$是可测集，所以$m(H\setminus G)=0$.由此知$m^*(E)=m(H)$,即H是E的等测包。

九、试问：是否存在闭集$F\subset[a,b],F\neq[a,b]$,而$m(F)=b-a$？
证:不存在。因为$F\neq[a,b]$,所以存在$x_0\in(a,b)$,但$x_0\notin F$。注意到F是闭集，故存在$\delta_0>0,(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\cap F=\Phi$且$(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\subset(a,b)$.
因此，$F\subset[a,b]\setminus(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$,即$m(F)<b-a$.

十、设f(x)是(a,b)上的实值函数，则

$$\overline{D}f(x)=\limsup_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\underline{D}f(x)=\liminf_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

是(a,b)上的可测函数.
证:以$\overline{D}f(x)$为例，考察点集（假设非空）

$$D=x\in(a,b):\overline{D}f(x)>t,t\in\mathbb{R}.$$

设对m,n,作区间$[x_1,x_2]\subset(a,b)$,使得

$$|x_2-x_1|<\frac{1}{m},\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>t+\frac{1}{n}$$

且记一切如此的区间的并集为$E_{m,n}$.. 可以证明：

$$E:=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}E_{m,n}=D.$$

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析(H)期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、设$E=A\bigcup B$,且$Card(E)=c$,则$Card(A)=c$或$Card(B)=c$.
证明：可以将E视为$\mathbf{R}^2$中的单位正方形：

$$E=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$$

(已知$Card(E)=c$),如果存在$x_0:0<x_0<1$,使得

$$A\supset E_0=\{(x_0,y):0<y<1\},$$

则$Card(A)=c$.否则，对任意的x,$0<x<1$,有

$$B\bigcap\{(x,y):0<y<1\}\neq\emptyset,$$

则$Card(B)=c$.

二、写出几乎处处收敛、几乎一致收敛、依测度收敛的定义.
解：设$f,f_k(k\in\mathbf{N}^*)$是定义在可测集$E\subset\mathbf{R}^n$上的实值可测函数.
(i)若存在E中的子集Z，有$m(Z)=0$及

$$\lim_{k\to+\infty}f_k(x)=f(x),x\in E\setminus Z,$$

则称$\{f_k(x)\}$在E上几乎处处收敛于f(x).
(ii)若对任给的$\delta>0$,存在E中的可测子集$E_\delta,m(E_\delta)\leqslant\delta$,使得$\{f_k(x)\}$在$E\setminus E_\delta$上一致收敛于f(x),则称$\{f_k(x)\}$在E上几乎一致收敛于f(x).
(iii)若对任给的$\varepsilon>0$,有

$$\lim_{k\to+\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0,$$

则称$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于f(x).

三、(1)Cantor集C是完全集.

(2)Cantor集C没有内点.
证明: (1)设$x \in C$,则$x \in F_n(n = 1, 2, ...)$（F_n是第n次移去中央三分开区间后剩余部分）,即$\forall n$,x属于长度为$\frac{1}{3^n}$的2^n个闭区间中的一个.于是$\forall \delta > 0, \exists n, s.t. \frac{1}{3^n} < \delta$,且$F_n$中包含x的闭区间含于$(x - \delta, x + \delta)$.此闭区间有两个端点，它们是C的点且至少有一个不是x,这就说明$x \in C'$,所以$C' \supset C$.由Cantor集是闭集知$C = C'$.
(2)设$x \in C$,对任意给定的区间$(x - \delta, x + \delta)$，取$\frac{2}{3^n} < \delta$，因为$x \in F_n$，故F_n中必有某个长度为$\frac{1}{3^n}$的闭区间$F_{n,k}$含于$(x - \delta, x + \delta)$.但在构造Cantor集的第n+1步时，将移去$F_{n,k}$的中央三分开区间.这说明$(x - \delta, x + \delta)$不含于C.

四、设有定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$,满足

$$f(x + y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbf{R},$$

且在$E \subset \mathbf{R}(m(E) > 0)$上有界，则$f(x) = cx(x \in \mathbf{R})$,其中$c = f(1)$.
证明: (i)首先，由题可知，$\forall r \in \mathbf{Q}, f(r) = rf(1)$.
(ii)其次，由$(m(E) > 0)$及Steinhaus定理可知，$\exists c > 0, s.t. [-c, c] \subset E - E$.由f在E上有界，知f在$[-c, c]$上有界,记为M.
$\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \exists r \in \mathbf{Q}, s.t. |x - r| < \frac{c}{n}$.因此

$$|f(x) - xf(1)| = |f(x - r) + rf(1) - xf(1)| = |f(x - r) + (r - x)f(1)| \le \frac{M + c|f(1)|}{n}.$$

由n的任意性，即得$f(x) = xf(1)$.

五、记Γ为$(0, 1)$上的一个连续函数族，则函数

$$g(x) = \sup_{f \in \Gamma}\{f(x)\}$$

是(0,1)上的可测函数.
证明: 设$t \in \mathbf{R}$.若$x_0 \in \{x \in (0, 1) : g(x) > t\} \triangleq E_t$,则存在$f \in \Gamma : f(x_0) > t$.因为f(x)连续，所以$\exists \delta_0 > 0, s.t.$

$$f(x) > t(x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0).$$

由此可知，$g(x) > t(x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0)$.这说明$x_0$是点集$E_t$之内点，即$E_t$是开集，g(x)是可测函数.

六、(1)可测集E上的可测函数列$\{f_n\}$几乎处处收敛于f

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, m(\overline{\lim_{n\to\infty}}\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=0$

(2)可测集E上的可测函数列$\{f_n\}$几乎一致收敛于f

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \lim\limits_{n\to+\infty} m(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty}\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=0$

证明：(1)$\{f_n\}$几乎处处收敛于f

$\Leftrightarrow m[f_n\nrightarrow f]=0$

$\Leftrightarrow m(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}\bigcap\limits_{j=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{n=j}^{+\infty}[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{2^k}])=0$

$\Leftrightarrow m(\bigcap\limits_{j=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{n=j}^{+\infty}[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{2^k}])=0, \forall k\in\mathbf{N}$

$\Leftrightarrow m(\bigcap\limits_{j=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{n=j}^{+\infty}[|f_n-f|\geqslant\varepsilon])=0, \forall\varepsilon\in\mathbf{N}$

(2)(i)"$\Rightarrow$":

$\{f_n\}$几乎一致收敛于f

$\Leftrightarrow \forall\delta>0, \exists$可测集$E_\delta\subset E, m(E_\delta)<\delta, f_n$在$E\setminus E_\delta$上一致收敛于$f(x)$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists n\in\mathbf{N},$当$k\geqslant n$时，$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon, \forall x\in E\setminus E_\delta$

$\Rightarrow \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty}[|f_k-f|\geqslant\varepsilon]\subset E_\delta$

$\Rightarrow m(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty}[|f_k-f|\geqslant\varepsilon])\leqslant\delta$

$n\to\infty,$得$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} m(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty}\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=0$

(ii)"$\Leftarrow$":

$\forall\varepsilon>0, \lim\limits_{n\to+\infty} m(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty}\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=0$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \forall j\in\mathbf{N}, \exists n=n(j)\in\mathbf{N}, m(\bigcup\limits_{k=n(j)}^{+\infty}\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{2^j}\})\leqslant\frac{\delta}{2^j}$

得$m(\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{k=n(j)}^{+\infty}\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{2^j}\})\leqslant\delta$

记$\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{k=n(j)}^{+\infty}\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{2^j}\}=E_\delta,$

$E\setminus E_\delta=\bigcap\limits_{j=1}^{+\infty}\bigcap\limits_{k=n(j)}^{+\infty}\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{2^j}\}$

在$E\setminus E_\delta$上，f_k一致收敛于f.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析(H)期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、设$E = A\bigcup B$,且$Card(E) = c$,则$Card(A) = c$或$Card(B) = c$.

二、写出几乎处处收敛、几乎一致收敛、依测度收敛的定义.

三、(1)Cantor集C是完全集.
(2)Cantor集C没有内点.

四、设有定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$,满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y), x, y \in \mathbf{R},$$

且在$E \subset \mathbf{R}(m(E) > 0)$上有界，则$f(x) = cx(x \in \mathbf{R})$,其中$c = f(1)$.

五、记Γ为$(0,1)$上的一个连续函数族，则函数

$$g(x) = \sup_{f\in\Gamma}\{f(x)\}$$

是(0,1)上的可测函数.

六、(1)可测集E上的可测函数列$\{f_n\}$几乎处处收敛于f
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, m(\overline{\lim_{n\to\infty}}\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0$

(2)可测集E上的可测函数列$\{f_n\}$几乎一致收敛于f

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\bigcup_{k=n}^{+\infty}\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|\geqslant \varepsilon\})=0$$

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、设E=$\{\cos n\}$，则$\overline{E}$=[-1,1]

二、设$E \subset R^n$ 为孤立点集，证明：E为至多可数集。

三、设A=$\{n+1/2$:n=0,1,-1,2,-2...$\}$,B=$\{m\sqrt{2}$:m=0,1,-1,2,-2...$\}$, 试求$d(A,B)$

四、设$A \subset R^n$,且$m^*(A)=0$,则对任意的$B \subset R^n$,$C=A \cup B$，$D=B \backslash A$,则
$m^*(C)=m^*(B)=m^*(D)$

五、设$E_1, E_2 \subset R^n$, $E=E_1 \cup E_2$ 则
$m^*(E)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$的充要条件是：存在可测集M_1, M_2: $E_1 \subset M_1$, $E_2 \subset M_2$,
$M=M_1 \cap M_2$, $m^*(M)=0$.

六、存在(0,1)的函数$f(x)$,其$D^+f(x)$在(0,1)上不是可测函数（若$f \in C(0,1)$)且递增，则$D^+f(x)$在(0,1)上可测）

七、设$E \subset R^1$是可测集，$f_n(x)(n \in N)$是E上几乎处处有限的可测函数，则对任给$\epsilon>0$,
存在$M>0$,$E_0 \subset E$:对$E_1=E \backslash E_0$,$m(E_1)<\epsilon$,使得$|f_n(x)| \leq M$,($n \in N$，$x \in E_0$)

八、设$\{f_k(x)\}$是[a,b]上的实值可测函数列，试证明存在正数列$\{a_k\}$,使得
$\lim\limits_{k\to+\infty} a_k\cdot f_k(x)=0,\ a.e.\ x\in$[a,b]

九、设$E\subset R^1$,$m^*(E)>0$,则对任意的$q\in[0,m^*(E))$,必存在$E_1\subset E$,s.t.$m^*(E_1)=q$.

十、设$E\subset[0,1]$为[0,1]中的Lebesegue可测集，如果存在$\alpha>0$,s.t.对任意的$0\le a<b\le 1$,有:
对$E_1=E\cap$[a,b],$m(E_1)\ge\alpha(b-a)$,
证明$m(E)=1$

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析答案

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、设A=$\{n+2m\pi$:n, m∈$Z,\}$,易知对任给的t∈R^1,以及δ>0,存在a∈A,使得$|t-a|$<δ,从而知道$\overline{A}$=R^1,现在设x∈[-1,1],以及ϵ>0,则存在t∈R^1，使得cos$t$=x,且存在n, m∈Z,使得t<$n+2m\pi$<t+ϵ,由此可得

$|x-cosn|$=$|cost$-$\cos(n+2m\pi)|$≤$n+2m\pi$-t<ϵ

二、因为E为孤立点集，故对任意的$\boldsymbol{x}$=$(x_1, x_2 ....x_n)$∈E，存在开方体$(a_1^x, b_1^x)\times(a_2^x, b_2^x)\times..........(a_n^x, b_n^x)$，使得$\{\boldsymbol{x}\}$=$[(a_1^x, b_1^x)\times(a_2^x, b_2^x)\times..........(a_n^x, b_n^x)]\cap E$, 其中，$a_i^x$,$b_i^x$∈$Q$,$i$=1,2,3........显然

f:E→Q^n,

$\boldsymbol{x}$→$f(x)$=$(a_1^x, b_1^x)\times(a_2^x, b_2^x)\times..........(a_n^x, b_n^x)$

为单射，故

$\overline{\overline{E}}$=$\overline{\overline{f(E)}}$≤$\overline{\overline{Q}}^n$=$\aleph_0$.

即E为至多可数集

三、对任给ϵ>0,因为$\sqrt{2}\overline{\in}Q$,所以存在自然数p, q,整数m:q>$|m|$,使得$|\sqrt{2}-p/q|$<$\epsilon/2|m|$,注意到对m≠0,有

$|x-y|$=$|n+1/2-m\sqrt{2}|$=$|m||(2n+1)/2m-\sqrt{2}|(x$∈$A$, y∈$B)$,

可选n, m,使得$|(2n+1)/2m-p/q|$<$\epsilon/|2m|$,从而知道$|\sqrt{2}-(2n+1)/2m|$<$\epsilon/|m|$,$|m||(2n+1)/2m-\sqrt{2}|$<ϵ

这说明$d(A, B)=0$.证毕

四、注意,我们有不等式:$m^*(C)$≤$m^*(A)$+$m^*(B)$=$m^*(B)$≤$m^*(C)$, 设E=$B\cap A$

$m^*(B)$≤$m^*(D)$+$m^*(E)$

≤$m^*(D)$+$m^*(A)$

$=m^*(D)$
$\leq m^*(B)$

五、充分性:不妨假定$m^*(E)<+\infty$,对任给的$\epsilon>0$,做开集G,使得
$E\subset G,m(G)<m^*(E)+\epsilon,$
因为$E_1\subset M_1\cap G,E_2\subset M_2\cap G$,且$m[(M_1\cap G)\cap(M_2\cap G)]=0$,所以可得
到$m^*(E_1)+m^*(E_2)\leq m(M_1\cap G)+m(M_2\cap G)$
$=m((M_1\cap G)\cup(M_2\cap G))$
$\leq m(G)$
$\leq m^*(E)+\epsilon$
由ϵ的任意性可以知道,$m^*(E)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$
必要性:作E_1,E_2的等测包M_1,M_2:$m(M_1)=m^*(E_1)$,$m(M_2)=m^*(E_2)$.如果$m(M)>0$,那么就会有
$m^*(E)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$
$=m(M_1)+m(M_2)$
$=m(M_1\cup M_2)+m(M_1\cap M_2)$
$>m(M_1\cup M_2)$
$\geq m^*(E).$
导出矛盾,所以$m(M_1\cap M_2)=0$

六、设W是(0,1)中不含有理点的不可测集，作
当$f(x)=0,x\in W,$
当$f(x)=1,x\in(0,1)\backslash W$. 若$x_0\in W$,
我们会有（取$x_0\in Q$）

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1-0}{x-x_0}\rightarrow D^+f(x_0)=+\infty(x\rightarrow x_0^+)$$

若$x_0\in(0,1)\backslash W$,我们有

$$D^+f(x_0)=lim_{\delta\rightarrow 0}sup_{0<x-x_0<\delta}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\bar{l}im_{x\rightarrow x_0^+}\frac{1-1}{x-x_0}=0$$

由此即得到所证，$\{x\in(0,1){:}D^+f(x)\geq t\}=\bigcap\limits_{i,k=1}^{\infty}\{x\in(0,1)$:存在$0<h<1/i,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>t-1/k\}$

七、不妨假定E是有界集，且$f_n(x)$ $(n\in N)$都为实值，因为$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x\in E:\sup\limits_{n\geq 1}|f_n(x)|\leq k\}$，

$\lim\limits_{k\to+\infty} m(\{x\in E:\sup\limits_{n\geq 1}|f_n(x)|\leq k\})=m(E)$

所以存在k_0,使得$m(\{x\in E:\sup\limits_{n\geq 1}|f_n(x)|\leq k_0\})>m(E)-\epsilon$

从而令$E_0=\{x\in E:\sup\limits_{n\geq 1}|f_n(x)|\leq k_0\}, M=k_0$

则$m(E\backslash E_0)<\epsilon, |f_n(x)|\leq M, (n\in N, x\in E_0)$

八、选数列$\{b_n\}$,且令$E_n=\{x\in[a,b]:|f_n(x)|\leq b_n\}$,还满足$m([a,b]\backslash E_n)<1/2^{n+1}$，

令$a_n=1/(nb_n)(n\in N)$,并考察$\underline{\lim}\limits_{n\to+\infty} E_n$

对$x_0\in\underline{\lim}\limits_{n\to+\infty} E_n$,存在$N$,使得

$x_0\in E_n, |f_n(x_0)|\leq b_n, (n\in N)$，从而知道$|a_nf_n(x_0)|\leq 1/n\to 0(n\to\infty)$,又有

$m([a,b]\backslash\underline{\lim}\limits_{n\to+\infty} E_n)=m(\overline{\lim}\limits_{n\to+\infty}([a,b]\backslash E_n)$

$\leq\sum\limits_{n=k}^{\infty}m([a,b]\backslash E_n)$

$\leq 1/2^k\to 0(k\to\infty)$

九、令$f(x)=m^*(E\cap(-x,x))$,$x\in[0,+\infty)$ 易见，$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=m^*(E)$,下证$f$为连续函数。事实上，对任意$h>0$,有

$|f(x+h)-f(x)|=|m^*(E\cap(-x-h,x+h))-m^*(E\cap(-x,x))|$

$\leq m^*((-x-h,-x])+m^*([x,x+h))$

$\leq 2h$. 故f在x右连续，同理故f在x左连续，从而，f在区间$[0,\infty)$上连续，

由$f(0)=0\leq q<m^*(E)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和连续函数的介值定理，存在

$\xi\in[0,+infty)$,s.t.$q=f(\xi)=m^*(E\cap(-\xi,\xi))=m*(E_1)$

其中$E_1=E\cap(-\xi,\xi)\subset E$

十、如果$\alpha\geq 1$,则由

$$1=m([0,1])\geq m(E)=m(E\cap[0,1])\geq\alpha(1-0)=\alpha\geq 1$$

推得：$m(E)=1$

如果$0<\alpha<1$,则对任意的$0\leq a<b\leq 1$,有

$m(E^c\cap[a,b])=(b-a)-m(E\cap[a,b])$

$\leq(b-a)-\alpha(b-a)$

$=(1-\alpha)(b-a)$

其中$0<1-\alpha<1$,下证$m(E^c)=0$,从

而$m(E) = m([0,1] - E^c) = m([0,1]) - m(E^c) = 1 - 0 = 1$

下反证法，假设$m(E) \neq 0$,取$1 - \alpha < \lambda < 1$,又

$(1-\alpha)(b-a) < \lambda(b-a) < m(E^* \cap [a,b]) \leq (1-\alpha)(b-a)$

矛盾。

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

拟实分析试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、叙述f(x)可测的定义。

二、求证可测集的势等于$2^{\mathbb{R}}$.

三、求证f(x)的连续点集是G_δ集.

四、$E \subset R^1$且$m(E) > 0$,试证明$\overline{\overline{E}} = c$。

五、设$E \subset R^n$.若存在R^n中可测集A，使得$m^*(E \triangle A) = 0$,则E是可测集，且有$m(E) = m(A)$.

六、设f(x)是[0,1]上的有界函数，求证：f(x)在[0,1]上几乎处处等于一个几乎处处连续的函数，当且仅当$\exists Z \subset [0,1], m(Z) = 0, f(x)$在[0,1]\Z 上连续.

七.设$E \subset R^n, H \supset E$且H是可测集。若$H \setminus E$中任何一可测集皆为零测集，试问H是E的等测包吗？

八、设$f_n(x)$是[0,1]上的实值可测函数列.若对$\forall \varepsilon > 0, \exists N, s.t.$

$$m(x \in [0,1] : |f_n(x)| < \varepsilon, n > N) = 1$$

则存在$E \subset [0,1]$且m(E)=1,使得$\{f_n(x)\}$在E上一致收敛于0.

九、设$f \in C(\mathbb{R})$且为一一映射，又有$x_0 \in \mathbb{R}$,使得$f(x_0) = x_0$.若成立等式

$$f(2x - f(x)) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

则$f(x) \equiv x$.

十.设f(x)是定义在(0,1]上的实值函数，则必存在可测函数g(x)与h(x),使得

$$f(x) = g[h(x)], x \in (0,1]$$

.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

拟实分析试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、叙述f(x)可测的定义。
证:略。

二、求证可测集的势等于$2^{\mathbb{R}}$.
证：因为可测集的势$\leq 2^{\mathbb{R}}$,同时因为存在势为c的零测集，故可测集的势$\geq 2^{\mathbb{R}}$,证毕.

三、求证f(x)的连续点集是G_δ集.
证:令$w_f(x)$为f在x点的振幅，易知f(x)在$x = x_0$处连续的充分必要条件是$w_f(x) = 0$
由此可知f(x)的连续点集可表示为

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x \in G : w_f(x) < \frac{1}{k}\}$$

因为$\{x \in G : w_f(x) < \frac{1}{k}\}$是开集，所以f(x)的连续点集是$G_\delta$集.

四、$E \subset R^1$且$m(E) > 0$,试证明$\overline{\overline{E}} = c$。
证:取E中闭集F，使得$m(F) > 0$.由于F是不可数集，故有表示$F = P \cup Z$,其中P是完全集，Z是可数集，且P的势是c。

五、设$E \subset R^n$.若存在R^n中可测集A，使得$m^*(E \triangle A) = 0$,则
E是可测集，且有$m(E) = m(A)$.
证:依题意知$m^*(E \setminus A) = m^*(A \setminus E) = 0$,而我们有$E = [A \setminus (E \setminus A)] \cup (A \setminus E)$,
即所得证。

六、设f(x)是[0,1]上的有界函数，
求证：f(x)在[0,1]上几乎处处等于一个几乎处处连续的函数，当且仅当$\exists Z \subset [0,1], m(Z)=0, f(x)$在[0,1]\Z 上连续.
证:必要性显然。为证充分性，作函数$g(x)=\lim_{0<\delta\to 0} supf(y): y\in\mathbb{R}\setminus Z, |y-x|<\delta$, 显然$f(x)=g(x), x\in\mathbb{R}\setminus Z$. 对$x\in\mathbb{R}\setminus Z$,任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$,使得而对$x':|x-x'|<\delta$,有$y\in\mathbb{R}\setminus Z$且$|y-x|<\delta$,使得$|y-x'|<\delta'=\delta-|x-x'|$ 由此知$g(x)-\varepsilon\le g(x')\le g(x)+\varepsilon$.

七.设$E\subset R^n, H\supset E$且H是可测集。若$H\setminus E$中任何一可测集皆为零测集，试问H是E的等测包吗？
证:作E的等测包G，因为$H\setminus G\subset H\setminus E$且$H\setminus G$是可测集，所以$m(H\setminus G)=0$.由此知$m^*(E)=m(H)$,即H是E的等测包。

八、设$f_n(x)$是[0,1]上的实值可测函数列.若对$\forall\varepsilon>0, \exists N, s.t.$

$$m(x\in[0,1]:|f_n(x)|<\varepsilon, n>N)=1$$

则存在$E\subset[0,1]$且m(E)=1,使得$\{f_n(x)\}$在E上一致收敛于0.
证:对$k\in\mathbb{N}$,存在严格递增自然数子列n_k,使得

$$m(\bigcup_{n=n_k+1}^{\infty}\{x\in[0,1]:|f_n(x)|<1/k\})=1$$

由此知

$$m(\bigcap_{n>n_k}^{\infty}\{x\in[0,1]:|f_n(x)|\ge 1/k\})=0$$

令

$$E^c=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=n_k}^{\infty}\{x\in[0,1]:|f_n(x)|\ge 1/k\}$$

则$m(E^c)=0$,现在对任给的$\varepsilon>0$ 取$k:1/k<\varepsilon$,则知$f_n(x)$在E上一致收敛于0.

九、设$f\in C(\mathbb{R})$且为一一映射，又有$x_0\in\mathbb{R}$,使得$f(x_0)=x_0$.若成立等式

$$f(2x-f(x))=x \quad (x\in\mathbb{R})$$

则$f(x)\equiv x$.

证：首先，作点集$F=x\in\mathbb{R}:f(x)=x$,且假定$F\neq\mathbb{R}$,则设$t\notin F$，则存在$r\neq 0$,使得f(t)=t+r.
因为f是一一映射，且有f[2x-f(x)]=x,所以得到

$$f[2(t+r)-f(t+r)]=t+r=f(t)$$

$$2t+2r-f(t+r)=t,f(t+r)=(t+r)+r.$$

假定对$k\in\mathbb{N}$,有f(t+kr)=(t+kr)+r,则根据

$$f[2(t+(k+1)r)-f(t+(k+1)r)]=t+(k+1)r=f(t+kr)$$

可知(注意一一对应性质),

$$2t+2(k+1)r-f[t+(k+1)r]=t+kr$$

$$f[t+(k+1)r]=t+(k+1)r+r.$$

依归纳法，这说明对任意n均有

$$f(t+nr)=(t+nr)+r$$

其次，因为F为闭集，所以可设$x_0\in F$是F的边界点.如果存在$x\in\mathbb{R},f(x)\neq x$, 那么令$\varepsilon=|f(x)-x|>0$,存在$\varepsilon/4\geq\delta>0$，使得

$$|f(s)-f(x)|<\varepsilon/4(|s-x|<\delta)$$

此外又存在$\eta:0<\eta<\delta s.t.|f(w)-f(x_0)|<\delta(|w-x_0|<\eta)$ 现在
取$t\in(x_0-\eta,x_0+\eta)s.t.f(t)\neq t$则有

$$0<|f(t)-t|\leq|f(t)-f(x_0)|+|f(x_0)-t|=|f(t)-f(x_0)|+|x_0-t|<\delta+\eta<2\delta.$$

令r=f(t)-t,由于$0<|r|<2\delta$,故存在n，使得$t+nr\in(x-\delta,x+\delta)$.
但是f(t+nr)=(t+nr)+r.因此有

$$\epsilon=|f(x)-x|\leq|f(x)-f(t+nr)|+|f(t+nr)-x|<\varepsilon/4+|(t+nr)+r-x|\leq\varepsilon/4+|(t+nr)-x|+|r|$$

$$<\varepsilon/4+\delta+2\delta<\varepsilon/4+\varepsilon/4+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

导致矛盾.即必有$f(x)\equiv x$.

十.设f(x)是定义在(0,1]上的实值函数，则必存在可测函数g(x)与h(x),使得

$$f(x)=g[h(x)],x\in(0,1]$$

.

证:把(0,1]中的点作二进位无尽小数表示:$x \in (0,1]$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}, a_n=0,1$$

并定义

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}, h(0)=0$$

则h(x)在(0,1]上严格递增，易知h((0,1])是Cantor集的子集，m(h((0,1]))=0.
现在，再定义函数

$$g[x]=\begin{cases} f(h^{-1}(x)) & x\in h((0,1]) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则f(x)=g(h(x)),其中g(x),h(x)为(0,1]上的L-可测函数.

中国科学技术大学2011–2012学年第一学期

数学分析A1补考试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、写出康托集的两种定义,并证明它紧、零测度、无孤立点、具有连续统的势.

二、证明无限集的最小势是$\#N$,并证明$\#2^N = c$,以及无最大势.

三、陈述外测度m^*定义,并证明外测度的次可加性; 陈述m^*_δ的定义,并证明它与m^*相等.

四、证明可测集序列$A_1 \subset A_2 \subset \dots$满足$\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n) = m(\lim\limits_{n\to\infty} A_n)$.
并由此推出:
若$A_1 \supset A_2 \supset \dots$且$m(A_1) < \infty$,那么$\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n) = m(\lim\limits_{n\to\infty} A_n)$.

五、$E \subset R^n$可测并且具有正测度,证明0在$E - E = \{(x,y)|x, y \in E\}$内部.

六、$f : R \to R$,$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x \in R$,且$\exists E \subset R, m(E) > 0, f|_E$有界,则$f(x) = f(1)x$.

七、(1)陈述$L-$可测函数定义,并证明连续函数一定是可测函数.
(2)证明A是可测集当仅当χ_A是可测函数.

八、证明: 设$E\subset R^n$是可测,$f:E\to R$是$L-$可测函数,且f非负,定义

$$\varphi_k=\sum_{j=1}^{k2^k}\frac{j-1}{2^k}\chi_{f^{-1}[\frac{j-1}{2^k},\frac{j}{2^k})}(x)+k\chi_{f^{-1}[k,+\infty)}(x)$$

则φ_k单调递增趋于f,若f有界,则收敛是一致的.

九、证明:

$f_n\to f(a.un)\Longleftrightarrow\forall\epsilon>0,\lim\limits_{n\to\infty}m(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\{[|f_k-f|\geq\epsilon]\})=0$

十、$\{f_k\}$依测度$Caychy\Longleftrightarrow\{f_k\}$依测度收敛。

习题解答： 一、$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{3^n},k_n=0$或$1.$

(1)紧：欧式空间的子集紧等价于有界闭，现证余集开.$C^c=\cup_{n=1}^{\infty}C_n^c$,注意到$C_n^c$开,故紧性成立

(2)无孤立点：只要说明$C'=C$,注意到C是闭集,故说明C的导集包含C即可.

$\forall x\in C=\cap_{n=1}^{\infty}C_n$，故$x\in C_n,\forall n.$

注意到C_n的端点在C中，且C_n的区间长度趋于0，故$\forall n,\forall x\in C$,x的邻域有$C_k,k\geq n$中的点，进而是C的极限点.

(3)由于$C\subset C_n$,由测度的单调性及$m(C_n)=\frac{2^n}{3^n}$知$m(C)=0.$

(4)势为阿列夫

已知区间$[0,1]$的势为阿列夫,故只要建立康托集到$[0,1]$的一一对应.

$\forall x\in C$,x有表达式$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{3^n},k=0$或$1$,故$f:C\to[0,1],f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{2^n}$给出一一对应,由此即证.

二、(1)设X是无限集,则任取$x_1\in X,X\{x_1\}$是无限集.

任取$x_2\in X\{x_1\}$，则$X\{x_1,x_2\}$是无限集.

依次类推即得.

(2)最大势不存在.

不然,设X有最大势.

则$\exists f:X\to 2^X,x\to\{x\in X|x\overline{\in}f(x)\}$,记$A=\{x\in X|x\overline{\in}f(x)\}$, 则

$$(1)x\in A\Longleftarrow x\overline{\in}A$$

$$(2)x\overline{\in}A\Longleftarrow x\in A$$

矛盾!

(3)建立$f:2^N\to R,A\subset N,A\to\sum_{n\in A}\frac{1}{3*n}$是单射.

故$\#2^N\leq\#R.$

建立$f:2^Z\to R,A\subset N,A\to\ln\sum_{n\in A}\frac{1}{2*n}$,$A$有界,$A\to 0,A$无界.

故$\#2^N\geq\#R.$

三、次可加性,设$\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)<\infty.$

$\forall\epsilon>0,\forall k\in N,\exists E_k$的$L-$覆盖$\{I_{k,l}\}$使

得$E_k\subset\cup_{l=1}^{\infty}I_{k,l},\sum_{l=1}^{\infty}|I_{k,l}|<m^*(E_k)+\frac{\epsilon}{2^k}$

于是$\cup_{k=1}^{\infty}E_k\subset\cup_{k,l=1}^{\infty}I_{k,l}$

并且$\sum_{k=1}^{\infty}|E_k|<\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)+\epsilon$

由此即证.

$m^*(E)=m^*_\delta(E)$,由定义，只要证明左边不小于右边.设$m^*(E)<\infty$
$\forall\epsilon>0,\exists E$的$L-$覆盖$\{I_k\}$使$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\le m^*(E)+\epsilon$
对每个k,将I_k分为$l(k)$个开矩体$I_{k,1},\ldots,I_{k,l(k)}$,它们互不相交且每个开矩体的边长都小于$\frac{\delta}{2}$.
现在保持每个$I_{k,i}$的中心不懂，边长扩大$1<\lambda<2$倍作出开矩体，记为$\lambda I_{k,i}$,显然对每个k有

$$I_k\subset\cup_{i=1}^{l*(k)}\lambda I_{k,i},\sum_{i=1}^{l(k)}|\lambda I_{k,i}|=\lambda^n|I_k|$$

现作出一个边长小于δ的$L-$覆盖,且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{l(k)}=\lambda^n\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\le\lambda^n(m^*(E)+\epsilon)$$

即$m^*_\delta(E)\le\lambda^n(m^*(E)+\epsilon)$,令$\lambda\to 1$.
四、设$m(E_k)<\infty,\forall k$
由测度的可加性有$m(E_k)-m(E_{k-1})=m(E_k\ E_{k-1})$，约定$E_0$为空集.
那么$\lim\limits_{k\to\infty}E_k=\cup_{k=1}^{\infty}E_k=\cup_{k=1}^{\infty}(E_k\ E_{k-1})$
由可列可加性，有$m(\lim\limits_{k\to\infty}E_k)=m(\cup_{k=1}^{\infty}(E_k\ E_{k-1}))=$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(m(E_k)-m(E_{k-1}))=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(m(E_i)-m(E_{i-1})=\lim_{k\to\infty}m(E_k)$$

至于递减集合列有$E_1\ E_k$递增，应用上一问的结论.
五、即$\exists\delta_0>0$，使得$B(0,\delta_0)\subset E-E$
取λ满足$1-2^{-(n+1)}<\lambda<1$，则存在矩体I使得$\lambda|I|<m(I\cap E)$.
记I的最短边长为δ，作$J=\{x=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n)||\zeta_i|<\frac{\delta}{2}\}$
下证$x_0\in J,(E\cap I)\cap((E\cap I)+\{x_0\})$非空
由J的作法，有$m(I\cap(I+\{x_0\}))>2^{-n}|I|$
所以$m(I\cup(I+\{x_0\}))=|I|+m(I+\{x_0\})-m(I\cap(I+\{x_0\}))<2|I|-2^{-n}|I|<2\lambda|I|$
但$E\cap I,E\cap I+\{x_0\}$测度都大于$\lambda|I|$，从而必相交.矛盾！
六、显然对于有理数命题成立.
其次，$m(E)>0$可知，存在$I:I\subset E-E$.
不妨设$|f(x)|\le M$,又$\forall x\in I,\exists x',x"\in E$使$x=x'-x"$
从而$|f(x)|\ge|f(x')|+|f(x")|\le 2M$
记$I=[a,b]$,考查$[0,b-a]$.
若$x\in[0,b-a]$,则$x+a\in[a,b]$，从而
由$f(x)=f(x+a)-f(a)$知$|f(x)|\le 4M$
记$c=b-a$，则$|f(x)|\le 4M,\forall x\in[-c,c]$
$\forall x\in R$,取$r\in Q$使$|x-r|<\frac{c}{n}$
从而$|f(x)-xf(1)|=|f(x-r)+rf(1)-xf(1)|\le\frac{4M+c|f(1)|}{n}$

由此即证

七、连续函数即开集的原像开，由于开集可测，故连续函数可测.

八、九略

十、证明依测度柯西蕴含依测度收敛即可

$\exists subsequent\{g_k\}, m(\{x \in E||g_k(x) - g_{k+1}(x)| \geq \frac{1}{2^k}\}) \leq \frac{1}{2^k}$

于是$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} E_k = \lim\limits_{k\to\infty} \bigcup\limits_{j=k}^{\infty} E_j = \lim\limits_{j\to\infty} F_j = F$

从而$m(F) = 0$,进一步可以看出$\{g_j(x)\}$在F_k^c上逐点柯西序列

$i > j \geq k$时,有$|g_j - g_i| \leq |g_j - g_{j+1}| + \cdots \leq \frac{1}{2^{j-1}}$

定义$f(x) = 0, x \in F, f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} g_j(x), x \in F^c$

从而F可测，再注意到$|g_j - f| \leq \frac{1}{2^{j-1}}$即证.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析(H)期中考试试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

本试卷共8道大题，满分105分，其中5分为附加分，得分超过100按100记.

一、(4'×4)请回答下列问题

1、请写出F_σ集, G_δ集以及Borel集的定义.

2、请写出Lebesgue外测度和抽象测度的定义.

3、请写出依测度Cauchy列的定义.

4、设G是$\mathbf{R}^1$中的开集, 试问$m(\partial G)$=0成立吗? 为什么?

二、(9')在$\mathbf{R}^1$中是否存在集合E, 满足

$$m^*(E)=0\text{且}, \overline{\overline{E}}=\aleph.$$

如果存在, 请试举一例, 并说明理由; 如果不存在, 请证明.

三、(10')设$E\subset\mathbf{R}^n$, 若对任意$\varepsilon>0$, 存在开集G: $G\supset E$, 闭集F: $E\supset F$, 且有$m(G\backslash F)<\varepsilon$, 证明: E是可测集.

四、(5'+10')解答下列问题

1、$[0,1]$中是否存在正测集E，使得对于$[0,1]$中任一开区间I, 有

$$0 < m(E \cap I) < m(I).$$

2、$[0,1]$中是否存在正测集E，使得对于$[0,1]$中任一开区间I, 有

$$m(E \cap I) = m(I)/2.$$

五、(3'+6'+6')设$E \times (0,1]$上$f(x,y)$满足: $f(x,y)$是$x \in E$(y固定)的可测函数, 且$f(x,y)$是$y \in (0,1]$(x 固定)的连续函数, 试证明:

(1)$f(x,y)$是$E \times (0,1]$上可测函数.

(2)$N(x)= min\{f(x,y) : 0 < y \leq 1\}$是$E$上可测函数.

(3)$h(x) = \varliminf\limits_{y \to 0^+} f(x,y)$是$E$上可测函数.

六、(15')设$m(E) < +\infty$, $\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$, $\{g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$g(x)$, 试证明: $\{f_k(x) \cdot g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x) \cdot g(x)$. 如果把题目改成$m(E) = +\infty$, 上述结论还成立吗?

七、(3'+3'+9')解答下列问题

1、设$f(x)$是$E \subset \mathbf{R}^n$上的几乎处处有限的可测函数, 试问是否存在$g \in C(\mathbf{R}^n)$, 存在E中闭集F, $m(G \backslash F) = 0$, 使得$f \mid_F = g \mid_F$.

2、设$f(x)$是$E \subset \mathbf{R}^n$上的几乎处处有限的可测函数, 试问是否存在多项式$g \in C(\mathbf{R}^n)$, 对任给的$\varepsilon > 0$, 存在E中闭集F, $m(G \backslash F) < \varepsilon$, 使得$f \mid_F = g \mid_F$.

3、设$f(x)$是$E \subset \mathbf{R}^n$上的几乎处处有限的可测函数, 试问是否存在多项式列$\{g_n(x)\}$, 使得$\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x) = f(x)$, $a.e.\ x \in E$.

八、(10')证明: $\{f_n(x)\}$在$E \subset \mathbf{R}^n$近乎一致收敛于$f(x)$的充分必要条件是: 对任给$\delta > 0$, 有

$$\lim_{k \to \infty} m(E_k(\delta)) = 0,$$

其中

$$E_k(\delta) = \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x \in E : \mid f_n(x) - f(x) \mid\} > \delta\}.$$

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析(H)期中考试试卷解答

一、请回答下列问题

1、请写出F_σ集, G_δ集以及Borel集的定义.

略

2、请写出Lebesgue外测度和抽象测度的定义.

略

3、请写出依测度Cauchy列的定义.

略

4、设G是$\mathbf{R}^1$中的开集, 试问$m(\partial G)$=0一定成立吗? 为什么?

不一定. 令$\mathbf{Q} = \{r_k\}$, 取$G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(r_k, 1/2^k)$.

二、在$\mathbf{R}^1$中是否存在集合E, 满足

$$m^*(E)=0\text{且}, \overline{\overline{E}}=\aleph.$$

如果存在, 请试举一例, 并说明理由; 如果不存在, 请证明.

存在. E取$[0,1]$中的$Cantor$集. 理由略.

三、设$E \subset \mathbf{R}^n$, 若对任意$\varepsilon > 0$, 存在开集G: $G \supset E$, 闭集F: $E \supset F$, 且有$m(G \backslash F) < \varepsilon$, 证明: E是可测集.

依题设知，对$n \in \mathbf{N}$, 存在G_n: $G_n \supset E$, $m^*(G_n \backslash E) < 1/n$. 令$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$,
则$H \supset E$且$M^*(H \backslash E) \le m^*(H \backslash E) \le m^*(G_n \backslash E) < 1/n$. 从而知$m^*(H \backslash E) = 0$,
而$E = H \backslash (H \backslash E)$，故$E$可测.

四、解答下列问题

1、$[0,1]$中是否存在正测集E，使得对于$[0,1]$中任一开区间I, 有

$$0 < m(E \cap I) < m(I).$$

存在.首先在$[0,1]$中作类Cantor集H_1: $m(H_1) = 1/2$. 其次在$[0,1]$中H_1的邻接区间$\{I_{1j}\}$内的每个I_{1j} 作类Cantor 集H_{1j}: $m(H_{1j}) =| I_{1j} | /2^2$, 并记$H_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_{1j}$. 然后, 对$H_1 \bigcup H_2$的邻接区间$\{I_{2j}\}$内的每个$I_{1j}$, 又作类Cantor 集$H_{2j}$: $m(H_{2j}) =| I_{2j} | /2^3$. 再记$H_3 = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_{2j}$, • • •, 依次继续进行, 则可得$\{H_m\}$. 令$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, 即可得证.

2、$[0,1]$中是否存在正测集E，使得对于$[0,1]$中任一开区间I, 有

$$m(E \cap I) = m(I)/2.$$

不存在. 假设存在，容易证明$m(E) = 0$(证明过程略)，显然不可能，得证.

五、设$E \times (0,1]$上$f(x,y)$满足: $f(x,y)$是$x \in E$(y固定)的可测函数, 且$f(x,y)$是$y \in (0,1]$(x固定)的连续函数, 试证明:
(1)$f(x,y)$是$E \times (0,1]$上可测函数.

将$[0,1]2^n$等分: 分点$k/2^n$, 作$f_n(x,y) = f(x, k/2^n)$, 则由f对y的连续性可知，$f_n(x,y) \to f(x,y)$, 而$f_n(x,y)$在$E \times (0,1]$上可测，故得证.

(2)$N(x)= min\{f(x,y) : 0 < y \le 1\}$是$E$上可测函数.

记$[0,1]$中的有理数为$\{r_n\}$, 则$N(x) \le inf\{f(x,r_n)\}$. 又存在$y_x \in [0,1]$, 使得$N(x) = f(x,y_x)$.对任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得当$| y_x - y |< \delta$时,
有$f(x,y_x) > f(x,y) + \varepsilon \ge inf\{f(x,r_n)\} + \varepsilon$, 由此得$N(x) = inf\{f(x,r_n)\}$. 根据$\{f(x,r_n)\}$在E上可测性, 可知M(x) 在E上可测.

(3)$h(x)=\varliminf\limits_{y\to 0^+} f(x,y)$是$E$上可测函数.

令$h_n(x)=inf\{f(x,y),0<y\le 1/n\}$, 我们有$\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)$=$\varliminf\limits_{y\to 0^+} f(x,y)$. 又令记$[0,1/n]$中的有理数为$\{r_k\}$, 则得$h_n(x)=inf\{f(x,y),0<y\le 1/n\}=inf\{f(x,r_k),k\ge 1\}$. 由*(2)*知, $h(x)=$是E上可测函数.

六、设$m(E)<+\infty$, $\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$, $\{g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$g(x)$, 试证明: $\{f_k(x)\cdot g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)\cdot g(x)$. 如果把题目改成$m(E)=+\infty$, 上述结论还成立吗?

对任意子列$\{f_{k_i}(x)g_{k_i}(x)\}$, 由题设知, 存在$\{f_{k_{i_j}}(x)\}$在E上$a.e.$收敛于$f(x)$, 也存在$\{g_{k_{i_j}}(x)\}$在E上$a.e.$收敛于$g(x)$. 从而$\{f_{k_{i_j}}(x)\}\{g_{k_{i_j}}(x)\}$在$E$上$a.e.$收敛于$f(x)g(x)$.结论成立.

$m(E)=+\infty$时不成立. $f_n(x)$=$1/x$, $x\in[n,\infty)$, 其余为*0*. $g_n(x)=x$, 即为反例.

七、解答下列问题

1、设$f(x)$是$E\subset\mathbf{R}^n$上的几乎处处有限的可测函数, 试问是否存在$g\in C(\mathbf{R}^n)$, 存在E中闭集F, $m(G\backslash F)=0$, 使得$f\mid_F=g\mid_F$.

不一定.$f(x)=-1,x\in[0,1/2)$, $f(x)=1,x\in[1/2,1]$

2、设$f(x)$是$E\subset\mathbf{R}^n$上的几乎处处有限的可测函数, 试问是否存在多项式$g\in C(\mathbf{R}^n)$, 对任给的$\varepsilon>0$, 存在E中闭集F, $m(G\backslash F)<\varepsilon$, 使得$f\mid_F=g\mid_F$.

不一定. 取$f=\chi_{[0,1]}$, $\{x\in[0,1]:f(x)=P_n(x)\}$是有限集.

3、设$f(x)$是$E\subset\mathbf{R}^n$上的几乎处处有限的可测函数, 试问是否存在多项式列$\{g_n(x)\}$, 使得$\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)=f(x)$, $a.e.\ x\in E$.

存在. 根据*Lusin*定理, 对任意$n\in\mathbf{N}$, 存在闭集$F_n\subset[a,b]$, 使得$F_n\subset F_{n+1}$, $m([a,b]\setminus F_n)<1/n$, 且f在$F_n$上连续.从而知存在$[a,b]$上连续函数g在$[a,b]$上连续, 使得$f(x)=g(x)(x\in F_n,n\in\mathbf{N})$. 由此又知, 存在多项式$P_n(x)$, 使得$\mid g(x)-P_n(x)\mid<1/n(n\in\mathbf{N},x\in[a,b])$, 即$\mid f(x)-P_n(x)\mid<1/n(n\in\mathbf{N},x\in F_n)$.
令$F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$, 则$m([a,b]\setminus F_n)=0$. 从而得证.

八、证明: $\{f_n(x)\}$在$E\subset\mathbf{R}^n$近乎一致收敛于$f(x)$的充分必要条件是: 对任给$\delta>0$, 有

$$\lim_{k\to\infty} m(E_k(\delta))=0,$$

其中

$$E_k(\delta)=\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x\in E:| f_n(x)-f(x) |\}>\delta\}.$$

必要性: 依题意, 对任给$\varepsilon>0$, 存在$e_\varepsilon\subset E: m(e_\varepsilon)<\varepsilon$, 使得$f_n$在$E\setminus e_\varepsilon$ 上一致收敛于$f(x)$. 因此对任给$\delta>0$, 存在K, 使得$E_k(\delta)\subset e_\varepsilon$. 故$m(E_k(\delta))<\varepsilon$, 这说明$\lim\limits_{k\to\infty} m(E_k(\delta))=0$.

充分性: 对任给$\varepsilon>0, k\in\mathbf{N}$, 存在$n_k$, 使得$m(E_{n_k}(1/k))<\varepsilon/2^k$. 令$A_\varepsilon=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_{n_k}(1/k)$, 则$m(A_\varepsilon)<\varepsilon$. 若$j\geq n_k$, 则

$$| f_j(x)-f(x) |\leq 1/k(x\overline{\in}E_{n_k}(1/k)).$$

从而当$x\overline{\in}A_\varepsilon$时, 上式成立, 即$f_n(x)$在$E\setminus A_\varepsilon$上一致收敛于$f(x)$, 证毕.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析(H)期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、证明:$\mathbb{C}$中代数数全体为可数集;超越数全体的势为$\aleph$.

二、设$E \in \mathbb{R}^n$为孤立点集,证明:E为至多可数集.

三、设$(\mathbb{R}^1, \mathscr{L}, m)$为Lebesgue测度空间,$E \subset \mathbb{R}^1$.如果$0 < a < m(E)$,
证明:存在无内点的有界闭集$F \subset E, s.t. m(F) = a$.

四、设$f : [a, b] \to \mathbb{R}^1$.若$[a, b]$中任一Lebesgue可测集$E$,$f(E)$必为$\mathbb{R}^1$中的Lebesgue可测集.
证明:$[a, b]$中任一Lebesgue零测集Z,必有$f(Z)$为$\mathbb{R}^1$中的Lebegue零测集,即$m^*(f(Z)) = 0$.

五、设$E \times [0, 1]$上$f(x, y)$满足:$f(x, y)$是$x \in E$上的可测函数,且$f(x, y)$是$y \in [0, 1]$上的连续函数,证明:
(i)$f(x, y)$是$E \times [0, 1]$可测函数.
(ii)$M(x) = \max\{f(x, y) | 0 \leqslant y \leqslant 1\}$是$E$上的可测函数.

六、设$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}, m)$为Lebesgue测度空间,$G \subset \mathbb{R}^n$为开集,$f : G \to \mathbb{R}^1$为实函数.
证明:f在G上几乎处处连续 $\iff$ $\forall t \in \mathbb{R}^1$,点集

$$E_1 = E_1(t) = \{x \in G | f(x) > t\}, \qquad E_2 = E_2(t) = \{x \in G | f(x) < t\}$$

中几乎处处是内点.

七、证明下列命题:

(1)设$\{f_k(x)\}$在$E\subset\mathbb{R}^n$上依测度收敛于$f(x)$，$\{g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$g(x)$,则$\{f_k(x)+g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)+g(x)$.

(2)设$m(E)<+\infty$,$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$,$\{g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$g(x)$,则$\{f_k(x)\cdot g_k(x)\}$ 在E上依测度收敛于$f(x)\cdot g(x)$.若$m(E)=+\infty$,则结论不一定真.

八、设$f(x)$为定义在$[0,1]$区间上的实函数,且存在常数M,使$\forall n\in\mathbb{N}$及$\forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in[0,1],x_i\neq x_j(i\neq j)$,均有

$$|f(x_1)+\cdots+f(x_n)|\leqslant M.$$

证明:$E=\{x\in[0,1]|f(x)\neq 0\}$为至多可数集.

九、设有$\mathbb{R}^1$中的可测集列$\{E_k\}$,且当$k\geqslant k_0$时,$E_k\subset[a,b]$.若存在$\lim\limits_{k\to\infty}E_k=E$,证明:$m(E)=\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)$.

十、设$f(x),f_1(x),\ldots,f_k(x),\ldots$是$[a,b]$上几乎处处有限的可测函数,且有$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),a.e.x\in[a,b]$,证明:存在$E_n\subset[a,b](n=1,2,\ldots)$,使得

$$m([a,b]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=0,$$

而$\{f_k(x)\}$在每个E_n上一致收敛于$f(x)$.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析(H)期中试卷解答

一、证明:$\mathbb{C}$中代数数全体为可数集;超越数全体的势为$\aleph$.

证明:根据代数基本定理，当$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0$时,代数方程

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

的根按重数记恰为n个.由于$\{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 | a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0\}$与$(\mathbb{Z} - \{0\}) \times \mathbb{Z}^n$一一对应,故整系数代数方程共有$\aleph_0$个,而每个这样的方程至少有1个至多个n个相异的根.因此,代数数全体为可数集.又$\mathbb{C}$的势为$\aleph$,从而超越数全体的势为$\aleph$.

二、设$E \in \mathbb{R}^n$为孤立点集,证明:E为至多可数集.

证明:由E为孤立点集,故$\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$，存在开方体$(a_1^x, b_1^x) \times (a_2^x, b_2^x) \times \dots (a_n^x, b_n^x)$,使得

$$\{\boldsymbol{x}\} = [(a_1^x, b_1^x) \times (a_2^x, b_2^x) \times \dots (a_n^x, b_n^x)] \cap E,$$

其中,$a_i^x, b_i^x \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, 3 \dots n$.显然

$$f : E \to \mathbb{Q}^n,$$

$$\boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}) = (a_1^x, b_1^x) \times (a_2^x, b_2^x) \times \dots (a_n^x, b_n^x)$$

为单射,故

$$\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{f(E)}} \leqslant \overline{\overline{\mathbb{Q}^n}} = \aleph_0$$

即E 为至多可数集.

三、设$(\mathbb{R}^1, \mathscr{L}, m)$为Lebesgue测度空间,$E \subset \mathbb{R}^1$.如果$0 < a < m(E)$,
证明:存在无内点的有界闭集$F \subset E, s.t. m(F) = a$.

证明:令$E_1 = E \backslash \mathbb{Q}$,则$E_1$无内点,且$m(E_1) = m(E)$.可取有界集

$$E_2 \subset E_1, \qquad s.t. \qquad m(E_2) = \frac{a + m(E)}{2}$$

可再取

$$E_3 \subset E_2, \qquad s.t. \qquad m(E_3) = a$$

从而有闭集

$$E_4 \subset E_3, \qquad s.t. \qquad m(E_4) = m(E_3) = a$$

则E_4满足条件.

四、设$f : [a,b] \to \mathbb{R}^1$.若$[a,b]$中任一Lebesgue可测集$E$,$f(E)$必为$\mathbb{R}^1$中的Lebesgue可测集.
证明:$[a,b]$中任一Lebesgue零测集Z,必有$f(Z)$为$\mathbb{R}^1$中的Lebegue零测集,即$m^*(f(Z)) = 0$.

证明:反设$\exists Z \subset [a,b]$为零测集,$s.t. m^*(f(Z)) \neq 0$,则$m^*(f(Z)) > 0$,故$\exists$不可测集$A \subset f(Z)$,则$f^{-1}(A) \cap Z \subset Z$为零测集故可测,但$f(f^{-1}(A) \cap Z) = A$为不可测集,与题设矛盾,故反设不成立.

五、设$E \times [0,1]$上$f(x,y)$满足:$f(x,y)$是$x \in E$上的可测函数,且$f(x,y)$是$y \in [0,1]$上的连续函数,证明:
(i)$f(x,y)$是$E \times [0,1]$可测函数.
(ii)$M(x) = \max\{f(x,y) | 0 \leqslant y \leqslant 1\}$是$E$上的可测函数.

证明:(i)将$[0,1]2^n$等分:分点$\frac{k}{2^n}(k = 0,1,2,\ldots,2^n-1)$,作

$$f_n(x,y) = f(x, \frac{k}{2^n}), \qquad (\frac{k}{2^n} \leqslant y < \frac{k+1}{2^n}, k = 0,1,2,\ldots,2^n-1),$$

则由f对y的连续性，$f_n(x,y) \to f(x,y)(n \to +\infty)$,而$f_n(x,y)$在$E \times [0,1]$上可测,故$f(x,y)$在$E \times [0,1]$上可测.
(ii)记$[0,1]$中的有理数为$\{r_n\}$,则$M(x) \geqslant \underset{n}{sup}\{f(x,r_n)\}$.又存在$y_x \in [0,1]$,使得$M(x) = f(x,y_x)(x \in E)$.$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. |y_x - y| < \delta$时,有

$$f(x,y_x) < f(x,y) + \epsilon \leqslant \underset{n}{sup}\{f(x,r_n)\} + \epsilon.$$

故$M(x) \leqslant \underset{n}{sup}\{f(x,r_n)\}$.综上有$M(x) = \underset{n}{sup}\{f(x,r_n)\}$.由$f(x,r_n)$可测性知$M(x)$在$E$上可测.

六、设$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}, m)$为Lebesgue测度空间,$G \subset \mathbb{R}^n$为开集,$f : G \to \mathbb{R}^1$为实函数.
证明:f在G上几乎处处连续$\iff \forall t \in \mathbb{R}^1$,点集

$$E_1 = E_1(t) = \{x \in G | f(x) > t\}, \qquad E_2 = E_2(t) = \{x \in G | f(x) < t\}$$

中几乎处处是内点.
证明:$(\Rightarrow)$设$D_f = \{x \in G | f\text{在}x\text{不连续}\}$,由于$f$在$G$上几乎处处连续,故$m(D_f) = 0$.于是

$$m(E_1 \cap D_f) = 0.$$

$\forall x_0 \in E_1 \backslash D_f$,由$f$在$x_0$连续知,$\exists \delta(x_0) > 0, s.t.$

$$f(x) > t, \qquad \forall x \in B(x_0; \delta(x_0)).$$

故$B(x_0;\delta(x_0))\subset E_1$,即$x_0$为$E_1$的内点,$E_1\backslash D_f$中的点都为$E_1$的内点.由$E_1=(E_1\backslash D_f)\cup(E_1\cap D_f)$ 及$m(E_1\cap D_f)=0$ 知E_1 几乎处处都是内点.
($\Leftarrow$)因为$E_1(t),E_2(t)$几乎处处都是内点,故他们的非内点集$A_1(t),A_2(t)$皆为零测集.记

$$D=\bigcup_{t\in\mathbb{Q}}[A_1(t)\cup A_2(t)],$$

则$m(D)=0$.
下证$D_f\subset D.\forall x\notin D,\forall\epsilon>0$,取$t_1,t_2\in\mathbb{Q},s.t.$

$$f(x)-\epsilon<t_1<f(x)<t_2<f(x)+\epsilon.$$

则$x\in\mathring{E}_1(t_1)\cap\mathring{E}_2(t_2)$.从而$\exists\delta>0,s.t.$

$$(x-\delta,x+\delta)\subset E_1(t_1)\cap E_2(t_2).$$

即

$$f((x-\delta,x+\delta))\subset(t_1,t_2)\subset(f(x)-\epsilon,f(x)+\epsilon).$$

所以f在x连续,$x\notin D_f$.故$D_f\subset D.m(D_f)=0,f$在G上几乎处处连续.

七、证明下列命题:
(1)设$\{f_k(x)\}$在$E\subset\mathbb{R}^n$上依测度收敛于$f(x)$,$\{g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$g(x)$,则$\{f_k(x)+g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)+g(x)$.
(2)设$m(E)<+\infty,\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$,$\{g_k(x)\}$在E上依测度收敛于$g(x)$,则$\{f_k(x)\cdot g_k(x)\}$ 在E上依测度收敛于$f(x)\cdot g(x)$.若$m(E)=+\infty$,则结论不一定真.

证明:(1)由

$$\begin{aligned}&\{x\in E||(f_k(x)+g_k(x))-(f(x)+g(x))|>\sigma\}\\ \subset&\{x\in E||f_k(x)-f(x)|>\frac{\sigma}{2}\}\cup\{x\in E||g_k(x)-g(x)|>\frac{\sigma}{2}\}.\end{aligned}$$

及依测度收敛定义即得.
(2)对$\{f_k(x)+g_k(x)\}$中的任一子列$\{f_{k_i}(x)+g_{k_i}(x)\}$,存在$f_{k_{i_j}}(x)$在$E$上a.e.收敛于$f(x)$,也存在$g_{k_{i_{j_l}}}(x)$在$E$上a.e.收敛于$g(x)$.从而知$f_{k_{i_{j_l}}}(x)g_{k_{i_{j_l}}}(x)$在$E$上a.e.收敛于$f(x)g(x)$.
由$m(E)<+\infty$,知$\{f_k(x)\cdot g_k(x)\}$ 在E上依测度收敛于$f(x)\cdot g(x)$.
若$m(E)=+\infty$,可举反例

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,n)\\ \frac{1}{x} & x\in[n,+\infty)\end{cases}$$

$$g_n(x)=x(n\in\mathbb{N})$$

八、设$f(x)$为定义在$[0,1]$区间上的实函数,且存在常数M,

使$\forall n\in\mathbb{N}$及$\forall x_1,x_2,\dots,x_n\in[0,1],x_i\neq x_j(i\neq j)$,均有

$$|f(x_1)+\cdots+f(x_n)|\leqslant M.$$

证明:$E=\{x\in[0,1]|f(x)\neq 0\}$为至多可数集.

证明:设$E_m=\{x\in[0,1]||f(x)|\in[\frac{1}{m},+\infty)m=1,2,\dots\}$,则$E_n$为有限集.否则,反设$E_m$为无限集,且$\forall x\in E_m$,必有$|f(x)|\geqslant\frac{1}{m}$,可取$n(>mM)$个不同的点$x_1,x_2,\dots,x_n\in[0,1]$,使得$f(x_1)\geqslant\frac{1}{m},f(x_2)\geqslant\frac{1}{m},\dots,f(x_n)\geqslant\frac{1}{m}$,或$f(x_1)\leqslant-\frac{1}{m},f(x_2)\leqslant-\frac{1}{m},\dots,f(x_1)\leqslant-\frac{1}{m}$.于是

$$|f(x_1)+\cdots+f(x_n)|\geqslant n\cdot\frac{1}{m}>mM\cdot\frac{1}{m}=M,$$

与题设$|f(x_1)+\cdots+f(x_n)|\leqslant M$矛盾.从而有

$$E=\{x\in[0,1]|f(x)\neq 0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$$

为至多可数集.

九、设有$\mathbb{R}^1$中的可测集列$\{E_k\}$,且当$k\geqslant k_0$时,$E_k\subset[a,b]$.
若存在$\lim\limits_{k\to\infty}E_k=E$,证明:$m(E)=\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)$.

证明:注意到

$$m(\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k)\geqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}m(E_k)\geqslant\underline{\lim_{k\to\infty}}m(E_k)\geqslant m(\underline{\lim_{k\to\infty}}E_k)$$

及

$$m(E)=m(\lim_{k\to\infty}E_k)=m(\overline{\lim_{k\to\infty}}E_k)=m(\underline{\lim_{k\to\infty}}E_k)$$

即得.

十、设$f(x),f_1(x),\dots,f_k(x),\dots$是$[a,b]$上几乎处处有限的可测函数,且有$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),a.e.x\in[a,b]$,证明:存在$E_n\subset[a,b](n=1,2,\dots)$,使得

$$m([a,b]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=0,$$

而$\{f_k(x)\}$在每个E_n上一致收敛于$f(x)$.

证明:$m([a,b])=b-a<+\infty$,故$\exists E_n\subset[a,b](n\in\mathbb{N}),s.t.m([a,b]\setminus E_n)<\frac{1}{n},\{f_k(x)\}$在$E_k$ 上一致收敛于$f(x)$.而显然有$m([a,b]\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)=0$.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

拟实分析试卷

学生所在系:__________　　　　　　　　　　　　　　　　　姓名______________

学号______________　　　　　　　　　　　　　　　　　　得分______________

一、证明: $\mathbb{Q}$ 不是G_δ 集.

二、叙述几乎一致收敛和依测度收敛的定义.

三、

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \supset E$$

$$\Sigma(b_n - a_n) < m(E) + \frac{\delta}{2}$$

四、(1). 是否存在$\mathbb{R}$上的实值函数f, s.t.

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \quad \forall x \neq y$$

且$f(x) \neq x, \forall x \in \mathbb{R}$.

(2). $f(\vec{x})$是$[0,1]^2 \to [0,1]^2$的映射，且

$$\| f(\vec{x}) - f(\vec{y}) \| < \| \vec{x} - \vec{y} \| \quad \forall \vec{x} \neq \vec{y}$$

证明:

$$\exists \vec{x}, f(\vec{x}) = \vec{x}.$$

五、设f(x)是[0,1]上的递增函数，则存在$f_n \in C([0,1])(n \in \mathbb{N})$ 使得

$$lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)(0 \leq x \leq 1)$$

六、试作$g \in C([0,1])$, f(x)在$\mathbb{R}$上可测，但f[g(x)]不是可测函数.

七、设f(x)是$\mathbb{R}$上的实值可测函数，且

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

则f(x)是连续函数.

八、设f(x)是[0,1]上的有界函数，
求证：f(x)在[0,1]上几乎处处等于一个几乎处处连续的函数，当且仅当$\exists Z \subset [0,1], m(Z)=0, f(x)$在[0,1]\Z 上连续.

九、设$f_n(x)$是[0,1]上的实值可测函数列.若对$\forall \varepsilon > 0, \exists N, s.t.$

$$m(x \in [0,1] : |f_n(x)| < \varepsilon, n > N) = 1$$

则存在$E \subset [0,1]$且m(E)=1,使得$\{f_n(x)\}$在E上一致收敛于0.

十、设f(x)是(a,b)上的实值函数，则

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \underline{D}f(x) = \liminf_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

是(a,b)上的可测函数.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

拟实分析试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、证明: $\mathbb{Q}$ 不是G_δ 集.

证：反设$\mathbb{Q}=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$,$G_n$为开集，$G_n$在$\mathbb{R}$上稠密

$\mathbb{Q}=\{r_1,r_2,...\}$

G_1必含开区间$(a_1,b1)$,$r1\notin(a_1,b_1)$ 取$[c_1,d_1]\subset[a_1,b_1]$ $G_2\bigcap(c_1,d_1)$不空

G_2必含开区间(a_2,b_2).

$r2\notin(a_2,b_2)$

取$[c_2,d_2]\subset(a_2,b_2)$ 继续上述操作，

得$[c_1,d_1]\supsetneq[c_2,d_2]\supsetneq...G_n\supsetneq[c_n,d_n]\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[c_n,d_n]\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ 但$r_n\neq\in[c_n,d_n]$ 故$\xi\in\mathbb{Q}$

二、叙述几乎一致收敛和依测度收敛的定义. 略。

三、

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\supset E$$

$$\Sigma(b_n-a_n)<m(E)+\frac{\delta}{2}$$

$$\Sigma_{m+1}^{\infty}(b_n-a_n)<\frac{\delta}{2}$$

从而

$$(E\Delta\bigcap_{n=1}^{m}(a_n,b_n))\subset(E/\bigcup_{n=1}^{m}(a_n,b_n))\bigcup(\bigcup_{n=1}^{m}(a_n,b_n))/E$$

从而

$$m(E\Delta\bigcap_{n=1}^{m}(a_n,b_n))<\delta.$$

四、(1). 是否存在$\mathbb{R}$上的实值函数f, s.t.

$$|f(x)-f(y)|<|x-y| \quad \forall x\neq y$$

且$f(x)\neq x, \forall x\in\mathbb{R}$.
(2). $f(\vec{x})$是$[0,1]^2\to[0,1]^2$的映射，且

$$\| f(\vec{x})-f(\vec{y}) \|<\| \vec{x}-\vec{y} \| \quad \forall \vec{x}\neq\vec{y}$$

证明:

$$\exists\vec{x}, f(\vec{x})=\vec{x}.$$

证:(1). $f(x)=x-\frac{e^x}{1+e^x}$ (2). 由于$[0,1]^2$是紧集，$g(\vec{x})=|f(\vec{x})-\vec{x}|$在$[0,1]^2$上连续故存在$\vec{x_0}, |f(\vec{x_0})-\vec{x_0}|$最小，又若$f(\vec{x_0})\neq\vec{x_0}$ $|f\circ f(\vec{x_0})-f(\vec{x_0})|<|f(\vec{x_0})-\vec{x_0}|$矛盾故$f(\vec{x})=\vec{x}$

五、设f(x)是[0,1]上的递增函数，则存在$f_n\in C([0,1])(n\in\mathbb{N})$ 使得

$$lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)(0\leq x\leq 1)$$

不妨假定f(0)=0,f(1)=1.作函数$n\in\mathbb{N}$ $g_n(x)=\Sigma_{k=0}^{n-2}\frac{k}{n}\chi_{f^{-1}}(x)+\frac{n-1}{n}\chi_{f^{-1}((n-1)/n,1])}(x)$
则$max_{[0,1]}|g_n(x)-f(x)|\leq 1/n(n\in\mathbb{N})$.而由

$$|g_{2^{k+1}}(x)-g_{2^k}(x)|\leq|g_{2^{k+1}}(x)-f(x)|+|g_{2^k}(x)-f(x)|\leq 1/2^{k-1}$$

可知$\Sigma_{k=1}^{\infty}[g_{2^{k+1}}(x)-g_{2^k}(x)]=f(x)-g_2(x)$是连续列的点极限。

六、试作$g\in C([0,1])$, f(x)在$\mathbb{R}$上可测，但f[g(x)]不是可测函数.
证: 设$\Phi(x)$是$[0,1]$上的Cantor函数，令
$\Psi(x)=(x+\Phi(x))/2 \quad (0\leq x\leq 1)$,
则$\Psi(x)$是$[0,1]$上的严格单调递增函数。记C是$[0,1]$中的Cantor集，
W是$\Psi(C)$中的不可测子集。
现在令$f(x)$是点集$\Psi^{-1}(W)$上的的特征函数，作
$g(x)=\Psi^{-1}(x), \quad x\in[0,1]$.
显然，$f(x)=0, a.e \quad x\in[0,1]$,g(x)是[0,1]上的严格单调上升的连续函数。
易知$f[g(x)]$在[0,1]上不是可测函数。

七、设f(x)是$\mathbb{R}$上的实值可测函数，且

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

则f(x)是连续函数.
证：因为f(x+h)-f(x)=f(h)以及f(0)=0,所以只需证明f(x)在x=0处连续即可。根据卢津定理，可作有界闭集$F:m(F)>0$,使f(x)在F上一致连续，即对任意的$\varepsilon>0$,存在$\delta_1>0$ 有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,|x-y|<\delta_1,x,y\in F$ 又存在$\delta_2>0,s.t.F-F\supset[-\delta_2,\delta_2]$.
取$\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当$z\in[-\delta,\delta]$时，由于存在$x,y\in F$,使得z=x-y,所以$|f(z)|=|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ 这说明f(x)在x=0处是连续的。

八、设f(x)是[0,1]上的有界函数，
求证：f(x)在[0,1]上几乎处处等于一个几乎处处连续的函数，当且仅当$\exists Z\subset[0,1],m(Z)=0,f(x)$在[0,1]\Z 上连续.
证:必要性显然。为证充分性，作函数$g(x)=\lim_{0<\delta\to 0}supf(y):y\in\mathbb{R}\setminus Z,|y-x|<\delta$, 显然$f(x)=g(x),x\in\mathbb{R}\setminus Z$. 对$x\in\mathbb{R}\setminus Z$,任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$,使得而对$x':|x-x'|<\delta$,有$y\in\mathbb{R}\setminus Z$且$|y-x|<\delta$,使得$|y-x'|<\delta'=\delta-|x-x'|$ 由此知$g(x)-\varepsilon\le g(x')\le g(x)+\varepsilon$.

九、设$f_n(x)$是[0,1]上的实值可测函数列.若对$\forall\varepsilon>0,\exists N,s.t.$

$$m(x\in[0,1]:|f_n(x)|<\varepsilon,n>N)=1$$

则存在$E\subset[0,1]$且m(E)=1,使得$\{f_n(x)\}$在E上一致收敛于0.
证:对$k\in\mathbb{N}$,存在严格递增自然数子列n_k,使得

$$m(\bigcup_{n=n_k+1}^{\infty}\{x\in[0,1]:|f_n(x)|<1/k\})=1$$

由此知

$$m(\bigcap_{n>n_k}^{\infty}\{x\in[0,1]:|f_n(x)|\ge 1/k\})=0$$

令

$$E^c=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=n_k}^{\infty}\{x\in[0,1]:|f_n(x)|\ge 1/k\}$$

则$m(E^c)=0$,现在对任给的$\varepsilon>0$ 取$k:1/k<\varepsilon$,则知$f_n(x)$在E上一致收敛于0.

十、设f(x)是(a,b)上的实值函数，则

$$\overline{D}f(x)=\limsup_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x},\underline{D}f(x)=\liminf_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

是(a,b)上的可测函数.
证:以$\overline{D}f(x)$为例，考察点集（假设非空）

$$D = x \in (a,b) : \overline{D}f(x) > t, t \in \mathbb{R}.$$

设对m,n,作区间$[x_1, x_2] \subset (a,b)$,使得

$$|x_2 - x_1| < \frac{1}{m}, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > t + \frac{1}{n}$$

且记一切如此的区间的并集为$E_{m,n}$.. 可以证明：

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{m,n} = D.$$

中国科学技术大学2013–2014学年第一学期

实分析A1试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、叙述函数列f_k在集合E上与依测度收敛于f的定义

二、

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

若E具有连续统的势，则存在A_k其势为连续统的势

三、证明cantor函数是0,1闭区间的连续函数

四、设$E \subset R^n$则E可测的充分必要条件为对$\forall \varepsilon > 0$存在可测集合A，B$\subset R^n$满足$A \subset E \subset B$使$m(B/A) < \varepsilon$

五、设E$\subset R$,E度测度大于零，证明E中有不可测子集

六、设f是R上的实可测函数，且有$f(x+y) = f(x) + f(y)$,证明f是线性函数

七、函数列依测度收敛是否一定几乎处处收敛，几乎处处收敛是否一定测度收敛举出反例或者证明

八、f将(a,b)区间映到R的子集且具有左右导数，证明$(x\in(a,b)\mid f'_+(x)\neq f'_-(x))$为至多可数集

九设f是$(0,1)$上的实值可测函数则存在数列$h_n\to 0$ 当$n\to\infty$使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x+h_n)=f(x)$$

a.e $x\in(0,1)$

实分析

一、叙述Haine-Borel定理并给出证明.

二、(Baire)设$E \subset R^n$是F_σ集，即

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

$F_k (k = 1, 2, ...)$是闭集.若每个F_k皆无内点，则E也无内点.

三、(Riesz)若$f_k(x)$在E上依测度收敛于$f(x)$,则存在子列$f_{k_i}(x)$,使得

$$\lim_{i \to \infty} f_{k_i}(x) = f(x), a.e. x \in E.$$

四、证明阶梯函数可以用连续函数几乎处处逼近.

五、叙述Lusin定理并证明.

六、举例说明存在一连续函数与可测函数的复合，其为不可测函数

七、证明若$f_n(x)$是$E \subset R^1$上依测度收敛列，且有

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leq M |x' - x''|, x'x'' \in E,$$

则$f_n(x)$是E上几乎处处收敛列.

实分析

一、叙述Borel集和$\sigma-$代数的定义，并证明若$f(x)$是定义在开集$G \subset R^n$上的实值函数，则f的连续点集是G_δ集.

二、定义一个集合的内测度是所有含于这个集合的闭集的测度的下极限.证明一集合的内、外测度相等则该集合可测.

三、设$E \subset R^1$且$m(E) < +\infty, f_n(x)$是E上实值可测函数列，则$f_n(x)$在E上依测度收敛于$f(x)$的充分必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} = 0, \qquad a.e.x \in E.$$

四、设W是不可测集，E是可测集.试证明$E \triangle W$是不可测集.

五、叙述Egorov定理并证明.

六、定义在$(0,1] \times (0,1]$上的函数$f(x,y)$满足：$f(x,y)$是x的（y固定）可测函数，又是y在$(0,1]$上（x固定）的递增函数，试证明$f(x,y)$在$(0,1] \times (0,1]$上可测.

七、设$f(x)$在$[a,b]$上可测，则存在多项式列$P_n(x)$,使得$lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x), a.e.x \in [a,b]$.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、设$f_n(x)$ $(\forall\ n \in \mathbb{N})$以及$f(x)$是定义在$\mathbb{R}^1$上的实值函数，且有$f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty, x \in \mathbb{R}^1)$, 则

$$\{x \in \mathbb{R}^1 : f(x) \leq t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^1 : f_n(x) < t + 1/k\}(t \in \mathbb{R}^1).$$

二、试问直线上所有开区间的全体形成的集合的基数是什么？

三、设$E \subset \mathbb{R}^1$,对$\lambda \subset \mathbb{R}^1$,记$\lambda E$=$\{\lambda x : x \in E\}$,则

$$m^*(\lambda E) = |\lambda| m^*(E).$$

四、设$A, B \subset R^n$都是可测集,试证明

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B).$$

五、[0,1]中存在正测集E,使得对于[0,1]中任一开区间I,有

$$0 < m(E \cap I) < m(I)$$

.

六、设$E \subset \mathbb{R}^1$是可测集,$f_n(x)$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$是$E$上几乎处处有限的可测函数,则对任给$\epsilon > 0$,存在$M > 0, E_0 \subset E : m(E \backslash E_0) < \epsilon$,使得$|f_n(x)| \le M(n \in \mathbb{N}, x \in E_0)$.

七、设$f(x), f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$是(0,1)上几乎处处有限的可测函数,则存在$\{\epsilon_n\}$:$\epsilon_n \to 0(n \to \infty)$,以及(0,1)上的可测函数$F(x)$,使得

$$|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon_n F(x), a.e.\ x \in (0,1).$$

八、设$f_n(x)$ 是[0,1]上实值可测函数列.若对任给$\epsilon > 0$,存在N,使得

$$m(\{x \in [0,1] : |f_n(x)| < \epsilon, n > N\}) = 1.$$

则存在$E \subset [0,1]$且$m(E) = 1$,使得$\{f_n(x)\}$在E上一致收敛于零.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析期中试卷答案

学生所在系:__________　　　　　　　　　　　　　　　　姓名______________

学号______________　　　　　　　　　　　　　　　　　得分______________

一、记$E_{n,k}$=$\{x \in \mathbb{R}^1 : f_n(x) < t + 1/k\}$.若$x_0$属于左端，即$\underset{n\to\infty}{lim} f_n(x_0) = f(x_0) \leq t$,故对任意的$k_0 \in \mathbb{N}$,存在$n_0$, 当$n \geq n_0$时,有$f_n(x_0) < t + 1/k_0$,即$x_0 \in E_{n,k_0}$ $(n \geq n_0)$.这说明x_0属于$\{E_{n,k_0}\}$的下限集,故x_0属于右端;若x_0属于右端,则对任意给定的$k_0 \in \mathbb{N}$,$x_0 \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=m}^{\infty} E_{n,k_0}$,即$x_0$属于$\{E_{n,k_0}\}$的下限集,故存在$n_0$, $x_0 \in E_{n,k_0}$ $(n \geq n_0)$.即$f_n(x) < t + 1/k_0$ $(n \geq n_0)$.令$n \to \infty$,可知$f(x_0) \leq t + 1/k_0$.再令$k_0 \to \infty$,即得$f(x_0) \leq t$,x_0属于左端.

二、对于直线上所有开区间,不妨取该直线为数轴(坐标轴旋转).则任意开区间I可表示为(a, b),$a, b \in \mathbb{R}$
则考虑f: 开区间→ 平面上的点　　$I \mapsto (a, b)$
且由R^2的基数=c知,直线上所有开区间的全体形成的集合的基数是c.

三、因为$E \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} (a_n, b_n) \Leftrightarrow \lambda E \subset \lambda \bigcup\limits_{n\geq 1} (a_n, b_n)$,$m^*([a_n, b_n])$=$m^*((a_n, b_n))$, 且对任一区间$(\alpha, \beta)$,有

$$m^*(\lambda(\alpha, \beta)) = |\lambda| m^*((\alpha, \beta)) = |\lambda|(\beta - \alpha),$$

所以按外测度定义可得$m^*(\lambda E) = |\lambda| m^*(E)$.

四、由可测集性质得

$$m^*(A) = m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c)$$

$$m^*(A \cup B) = m^*((A \cup B) \cap B) + m^*((A \cup B) \cap B^c)$$

特别地,$(A \cup B) \cap B = B$　　$A \cap B^c = A \backslash B$　　$(A \cup B) \cap B^c = A \backslash B$ 所以得$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B)$.

五、首先在[0,1]中作类Cantor集H_1:$m(H_1)$=1/2.其次在[0,1]中H_1的邻接区间$\{I_{1j}\}$的每个I_{1j}内再作类Cantor集H_{1j}:$m(H_{1j})=|I_{1j}|/2^2$,并记$H_2=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}H_{1j}$.然后,对$H_1\cup H_2$的邻接区间$\{I_{2j}\}$的每个$I_{2j}$内再作类Cantor集$H_{2j}$:$m(H_{2j})=|I_{2j}|/2^3$.再记$H_3=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}H_{2j}$,...,依次继续进行,则可得$\{H_m\}$.令$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}H_n$,即可得证.

六、不妨假设E是有界集,且$f_n(x)(n\in\mathbb{N})$皆为实值.因为

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in E:\sup_{n\geq 1}|f_n(x)|\leq k\},$$

$$\lim_{k\to\infty}m(\{x\in E:\sup_{n\geq 1}|f_n(x)|\leq k\})=m(E),$$

所以存在k_0,使得$m(\{x\in E:\sup\limits_{n\geq 1}|f_n(x)|\leq k_0\})>m(E)-\epsilon$.从而令

$$E_0=\{x\in E:\sup_{n\geq 1}|f_n(x)|\leq k_0\},M=k_0,$$

则$m(E\backslash E_0)<\epsilon$,$|f_n(x)|\leq M(n\in\mathbb{N},x\in E_0)$.

七、易知存在$\{a_n\}$: $a_n\to+\infty(n\to\infty)$,使得

$$\lim_{n\to\infty}a_n[f_n(x)-f(x)]=0,a.e.\ x\in(0,1)$$

从而取$F(x)$=$\sup\limits_{n\geq 1}\{|a_n[f_n(x)-f(x)]|\}$即满足要求.

八、对$k\in\mathbb{N}$,存在严格递增自然数子列$\{n_k\}$,使得

$$m(\bigcup_{n=n_k+1}^{\infty}\{x\in[0,1]:|f_n(x)|<1/k\})=1.$$

由此知

$$m(\bigcap_{n>n_k}^{\infty}\{x\in[0,1]:|f_n(x)|\geq 1/k\})=1.$$

令$E^c=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=n_k}^{\infty}\{x\in[0,1]:|f_n(x)|\geq 1/k\}$, 则$m(E_c)=0$.现在对任给$\epsilon>0$,取$k:1/k<\epsilon$,则知$f_n(x)$在$E$上一致收敛于零.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析（H）期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、叙述σ–代数以及Borel集的定义。

二、证明：(1)$[-1,1]\sim\mathbb{R}$;(2)$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$。

三、证明:对Cantor集C,即$C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$,其中$F_i$为：

$$F_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]=F_{1,2}\cup F_{2,2}$$
$$F_2=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]=F_{1,2}\cup F_{2,2}$$
$$\ldots$$

(1)C是非空有界闭集；(2)C无内点；(3)C的基数是c 。

四、设A、B和C是中的点集，有$m(A\cup B)=0$、$m(B\cup C)=0$,求证：$m(A\cup C)=0$。

五、外测度的定义是否等价于：
(1)有界集E的外测度是包含E的闭集的测度的下确界；
(2)有界集E的外测度是包含E的可测集的测度的下确界。
请给出理由。

六、设G是开集，E是零测集。证明：$\overline{G} = \overline{G \setminus E}$。

七、设$W \subset [0,1]$ 是不可测集，则存在$\varepsilon_0 : 0 < \varepsilon_0 < 1$，使得对$[0,1]$中任一可测集$E : m(E) \geq \varepsilon_0$，$E \cap W$均不可测。

八、设$z = f(u,v)$是$\mathbb{R}^2$上的连续函数，$g_1(x), g_2(x)$是$I = [a,b] \subset \mathbb{R}$上的实值可测函数，则$F(x) = f(g_1(x), g_2(x))$是$[a,b]$上的可测函数.

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析（H）答案

一、设是集合中一些子集所构成的集合族且满足下述条件:
(1)$\phi\in\Gamma$;
(2)若$A\in\Gamma$，则$A^c\in\Gamma$;
(3)若$A_n\in\Gamma$，则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\Gamma$，
则称Γ是一个$\sigma-$代数。
由$\mathbb{R}^n$中所有开集构成的开集族所生成的代数称为Borel $\sigma-$代数，其中的元称为Borel集。

二、(1)$f(x)=x/(1-x^2)$为(-1,1)与$\mathbb{R}$之间的一一对应。又$(-1,1)\subset[-1,1]\subset\mathbb{R}$,根据Cantor-Bernstein定理即证。
(2) 例如存在一一对应如下：$f(i,j)=2^{i-1}\times(2j-1)$，其中$(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

三、(1).因为每个F_n都是非空有界闭集，且$F_n\supset F_{n+1}$，所以由闭区间套定理，知C不是空集（每个F_n中区间端点都在其中），显然的，C为闭集。
(2).设$x\in C$，给定任一区间$(x-\delta,x+\delta)$，取$\frac{2}{3^n}<\delta$，因为$x\in F_n$，所以F_n中必有某长度为$\frac{1}{3^n}$的闭区间$F_{n,k}$含于$(x-\delta,x+\delta)$。然而在构造集的第$n+1$步时，将移去$F_{n,k}$的中央三分开区间。即说明$(x-\delta,x+\delta)$不含于C。
(3).将$[0,1]$中实数按三进制小数展开，则Cantor集中点x与下述三进位小叔集的元

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{3^i},a_i=0,2$$

一一对应。C与$(0,1]$的二进制小数比较知为连续基数集。

四、首先可证明公式:

$$(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)=(A\bigtriangleup B)\cup(B\bigtriangleup C)$$

成立。再由$A\cup C\subset A\cup B\cup C$，$A\cap C\supset A\cap B\cap C$，
知$(A\cup C)\setminus(A\cap C)\subset(A\cup B\cup C)\setminus(A\cap B\cap C)$。从而$m(A\cup C)\le m(A\cup B)+m(B\cup C)=0$。

五、

(1)否。如设中$[0,1]$有理点集为Q，显然对任一包含Q的闭集F，一定有$F\supset\overline{Q}=[0,1]$，因此，如用题中的定义，$Q$ 的外测度为1。而易知在原定义中，Q的外测度为0，矛盾。

(2) 是。由外测度的正则性，存在包含的G_δ集为其等测包。

六、由$G\supset(G\setminus E)$，所以$\overline{G}\supset\overline{G\setminus E}$。另一方面，由于是$G$开集，有$\overline{G}=G'$。任取$x\in\overline{G}$，在$x$的任一邻域$(\alpha,\beta)$中，一定有$x_0\neq x$，而$x\in$，又$G\cap(\alpha,\beta)$为开集，必存在$x_0$的邻域，使得$(a,b)\subset G\cap(\alpha,\beta)$。由$m(E)=0$知，在$(a,b)$中有异于$x$的点$y\in G\setminus E$。$(a,b)\subset(\alpha,\beta)$，故$y\in(\alpha,\beta)$，于是$x\in(G\setminus E)'\subset\overline{G\setminus E}$，$\overline{G}\subset\overline{G\setminus E}$。综上即证。

七、反证法。若对任给的ε：$0<\varepsilon<1$，均存在$E_\varepsilon\subset[0,1]$：$m(E_\varepsilon)\geq\varepsilon$，使得$E_\varepsilon\cap W$ 是可测集，则对ε_n：$0<\varepsilon_n<1$且$\varepsilon_n\to 1(n\to\infty)$，记$E_n=E_{\varepsilon_n}(n\in\mathbb{N})$，又作$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，可知$\varepsilon_n\leq m(E_n)\leq m(E)\leq 1(n\in\mathbb{N})$。现在令$n\to\infty$，易知$m(E)=1$。因为有$m(([0,1]\setminus E)\cap W)\leq m([0,1]\setminus E)=0$，所以$m(([0,1]\setminus E)\cap W)=0$ 。这说明$([0,1]\setminus E)\cap W$可测。但另一方面又有$W=(W\cap E)\cup(W\cap([0,1]\setminus E))=(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(W\cap E_n))\cup(([0,1]\setminus E)\cap W)$。而上式右端为可测集，从而$W$是可测集。矛盾，证毕。

八、对$\forall t\in\mathbb{R}$，令$G_t=\{(u,v)|F(u,v)>t\}=F^{-1}((t,+\infty))$，则

$$\{x\in I|F(x)>t\}=\{x\in I|(g_1(x),g_2(x))\in G_t\}.$$

如果G_t是开矩形:$G_t=(a_1,b_1)\times(c_1,d_1)$，那么有

$$\{x\in I|F(x)>t\}=\{x\in I|(g_1(x),g_2(x))\in G_t\}=\{x\in I|g_1(x)\in(a_1,b_1)\}\cap\{x\in I|g_2(x)\in(c_1,d_1)\}.$$

对开集G_t，将其拆为可数个开矩形的并:$G_t=\bigcup\limits_{n\geq 1}J_n$，$J_n=(a_n,b_n)\times(c_n,d_n)$，又有

$$\{x\in I|F(x)>t\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\{x\in I|g_1(x)\in(a_n,b_n)\}\cap\{x\in I|g_2(x)\in(c_n,d_n)\}).$$

故$F(x)$在I上可测.

中国科学技术大学

实分析试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、证明无理数集不是$\mathbb{R}$的可数个闭子集的并。

二、对于任意的函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，证明集合

$$A=\{a\in\mathbb{R}:\lim_{x\to a}f(x)\text{存在，并且}\lim_{x\to a}f(x)\neq f(a)\}$$

是至多可数的。

三、(1) 证明$\mathbb{R}^2$中三角形的Lebesgue测度等于它的面积。
(2) 确定$\mathbb{R}^2$中圆的Lebesgue测度。

四、设μ是集合X上的一个外测度。假设X的子集E具有性质：对一切$\varepsilon>0$，存在可测集F 使得$\mu(E\Delta F)<\varepsilon$。证明E是可测集。

五、设I是$\mathbb{R}$的子区间，$f:I\to\mathbb{R}$有连续导数，则f将零测集映为零测集。

六、(1) 给出可测函数的定义。
(2) 设$f(x)$在$E\subseteq\mathbb{R}$上可测，G和F分别是$\mathbb{R}$中的开集和闭集，则点集

$$E_1=\{x\in E:f(x)\in G\},E_2=\{x\in E:f(x)\in F\}$$

是可测集。
(3) 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，且对任意的$\varepsilon>0$，存在开集$G\subset\mathbb{R}^n$，$m(G)<\varepsilon$，使得$f\in C(\mathbb{R}^n\setminus G)$，试证明$f(x)$是$\mathbb{R}^n$上的可测函数。

七、证伪：f为E上几乎处处有限的的可测函数，则对任意的$\delta>0$，存在闭集$F\subseteq E$，使$m(E\setminus F)<\delta$，且f在E上可表为多项式。

答案

一、设I是无理数构成的集合，$\mathbb{Q}=\{r_1,r_2...\}$。反证法：假设存在一列闭子集$\{A_n\}$，使得I是它的并，则

$$\mathbb{R}=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\}\right)$$

故存在正整数n，使$(A_n)^\circ\neq\emptyset$（否则由Baire定理，$\mathbb{R}$无内点，矛盾），因此A_n包含一个区间，但每个区间都含有有理数，矛盾！

二、对每个有理数r，设

$$A_r=\{a\in A: f(a)<r<\lim_{x\to a}f(x)\text{或者}\lim_{x\to a}f(x)<r<f(a)\}$$

则$A=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}A_r$，故只需证明$A_r$是至多可数的。
若$a\in A_r$，不妨设$f(a)<r<\lim_{x\to a}f(x)$，则存在$\delta>0$使得当$a-\delta<y<a+\delta$并且$y\neq a$时$f(y)>r$. 然后，去一个以有理数为端点的开区间I_a使得$a\in I_a$并且$I_a\subseteq(a-\delta,a+\delta)$。此时对一切$y\in I_a\setminus\{a\}$ 有$y\notin A_r$。于是$A_r\bigcap I_a=\{a\}$。
这样得到一个A_r到以有理数为端点的开区间全体的一个单射：$a\mapsto I_a$，而后者可数，故A_r至多可数。

三、(1) 考虑两个相同三角形拼成的平行四边形，再部分平移使之成为矩形，由测度可加性及平移不变性即得。
(2) 由 (1) 知任意多边形的测度等于它的面积，考虑圆的内接和外切正n边形，令n趋于无穷大可得。

四、先证明E是可测的等价于对一切$\varepsilon>0$存在一个可测集F使得$F\subseteq E,\mu(E\setminus F)<\varepsilon$。设$\varepsilon>0$，只要找到符合上述的G即可。对每个正整数n，取可测集F_n使得$\mu(E\Delta F_n)<2^{-n}\varepsilon$。则$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$可测，且对一切n有：

$$\mu(F\setminus E)\leq\mu(F_n\setminus E)<2^{-n}\varepsilon$$

从而$\mu(F\setminus E)=0$，$F\setminus E$是零测集，由此$F\bigcap E=F\setminus(F\setminus E)$也是可测集，且

$$\mu(E\setminus(F\bigcap E))=\mu(E\setminus F)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\setminus F_n))\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E\setminus F_n)<\varepsilon$$

五、由于导数连续，设$[a,b]\subseteq I,\exists M>0,\forall t\in[a,b],|f'(t)|\leq M$，由中值定理，$\forall x,y\in[a,b],|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)(x-y)|\leq M|x-y|$。

此时，如果J是$[a,b]$的子区间，$f(J)$是$\mathbb{R}$的子区间，且$\mathrm{m}^*(f(J))\leq M\mathrm{m}^*(J)$。而对于$[a,b]$中的任一零测集A，对任意$\varepsilon>0$，取区间序列$\{[a_n,b_n)\}$，使得

$$A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n),\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{m}^*([a_n,b_n))=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)<\varepsilon.$$

因此$f(A)\subseteq f(\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n)\cap[a,b])=\bigcup_{n=1}^{\infty}f([a_n,b_n)\cap[a,b])$，从而有

$$\mathrm{m}^*(f(A))\leq\mathrm{m}^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}f([a_n,b_n)\cap[a,b]))\leq\sum_{n=1}^{\infty}M(b_n-a_n)<M\varepsilon$$

由ε的任意性，我们证明了f将$[a,b]$中的零测集映为零测集。
于是，固定I的一个闭子区间列$\{[c_n,d_n\}$使得$I=\bigcup_{n=1}^{\infty}[c_n,d_n)$并设B是I中的零测集，那么$A\cap[c_n,d_n]$是$c_n,d_n]$中的零测集，从而$f(A\cap[c_n,d_n])$是$\mathbb{R}$中的零测集，由等式

$$f(A)=f(\bigcup_{n=1}^{\infty}A\cap[c_n,d_n])=\bigcup_{n=1}^{\infty}f(A\cap[c_n,d_n])$$

知$f(A)$是零测集，证毕。

六、(1) 略（可测函数的定义）
(2) 不妨设$G=\bigcup_{n\geq1}(a_n,b_n)$，则由

$$\{x\in E:f(x)\in G\}=\bigcup_{n\geq1}(\{x\in E:f(x)>a_n\}\cap\{x\in E:f(x)<b_n\})$$

可知，上式左端是可测集。对于闭集F，只需注意

$$\{x\in E:f(x)\in F\}=E\setminus\{x\in E:f(x)\in F^c\}$$

(3) 取$\varepsilon=\frac{1}{k}$，则存在开集列$\{G_k\}:textrmm(G_k)<\frac{1}{k}(k\in\mathbb{N})$，且$f\in C(\mathbb{R}^n\setminus G)$。
令$f_k(x)=f(x)\cdot\chi_{\mathbb{R}^n\setminus G}$，则对任给$\varepsilon>0$，有

$$\mathrm{m}^*(\{x\in\mathbb{R}^n:|f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})=\mathrm{m}^*(\{x\in G_k:|f(x)|\geq\varepsilon\})<\frac{1}{k}$$

令$k\to\infty$即知$f_k(x)$在$\mathbb{R}$上依测度收敛于$f(x)$，故$f(x)$在$\mathbb{R}$上可测。

七、取$E=[0,1],f(x)=e^x,f$显然是E上的有限可测函数。假定对于$\delta_0=\frac{1}{2}>0$，存在闭集$F\subseteq E,\mathrm{m}(E\setminus F)<\frac{1}{2}$，即$\mathrm{m}(F)>\frac{1}{2}$，且$f(x)\equiv P_n(x)(x\in F)$，其中$P_n(x)$是n次多项式。此式说明F的每个点（有无穷个）都是$f(x)-P_n(x)$的零点。
另一方面，对$f(x)-P_n(x)$求$n+1$次导数知其至多有$n+1$个零点，矛盾！

中国科学技术大学2012–2013学年第二学期

实分析(H)期中试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、阐述几乎处处收敛的定义.

设$f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是E上的广义实值函数函数,若存在E中的点集Z,$m(Z)=0$及$\forall x \in E\backslash Z$,使得$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$,则称$\{f_k(x)\}$在$E$上几乎处处收敛于$f(x)$.

二、$\mathbb{R}^1$中互不相交的开区间族是至多可数集

证明:由选择公理,在每个开区间中取一个有理数构成的集合A与开区间族等势,而A为有理数集的子集, 或为有限集或为可数集故原开区间族是至多可数集. $\square$

三、$F\subset\mathbb{R}^1$是有界闭集,$f: F\to F$.若有

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|, \forall x, y\in F,$$

则存在$x_0\in F$,使得$f(x_0)=x_0$.(不动点)

证明:作函数$g(x)=|x-f(x)|$,易知$g\in C(F)$,从而问题归结为阐明存在$x_0\in F$,使得$g(x_0)=0$. 采用反证法,假定$g(x)>0(\forall x\in F)$,则存在$\xi\in F$,使得

$$0<g(\xi)=l=\inf_{x\in F} g(x),$$

但我们有

$$g(f(\xi))=|f(\xi)-f(f(\xi))|<|\xi-f(\xi)|=l,$$

其中$f(\xi)\in F$.这一矛盾说明$f(x)$在F中存在不动点. $\square$

四、设$E\subset\mathbb{R}^1$,且存在$q:0<q<1$,使得对任一开区间(a,b),都有开区间列I_n:

$$E\bigcap(a,b)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}m(I_n)<(b-a)q.$$

则$m(E)=0$.

证明:因为$m^*(E)=m^*(E\bigcap\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}m^*(E\bigcap I_n)$, 所以只需指出对任意的$(a,b)$,有$m^*(E\bigcap(a,b))=0$.由题设知,存在$I_n=(a_n,b_n)(n\in\mathbb{N})$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n\supset E\bigcap(a,b)$,使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\le q(b-a)$.再对每个$(a_n,b_n)$作覆盖,其总长度小于$q(b_n-a_n)$.依此继续进行下去,可得$\forall k\in\mathbb{N}_+$

$$m^*(E\bigcap(a,b))\le q\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\le q^2(b-a)\le\cdots\le q^k(b-a).$$

由此易知$m^*(E\bigcap(a,b))=0$. $\square$

五、(1)设$G\subset\mathbb{R}^1$是开集,试问等式$m(G)=m(\overline{G})$成立吗?
(2)设$E\subset\mathbb{R}^1$且$m(E)>0$,试证明$\overline{\overline{E}}=\aleph$

证明:(1)不一定,如取$\mathbb{Q}=r_k$,取$G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B(r_k,1/2^k)$.
(2)取E中闭集F,使得$m(F)>0$.由于F是不可数集,故有表示$F=P\bigcup Z$,其中P是完全集,Z是可数集,且$\overline{\overline{P}}=\aleph$ $\square$

六、若$\{f_n(x)\}$是$E\subset\mathbb{R}^1$上依测度收敛列,且有$\forall n\in\mathbb{N}_+,x',x''\in E,\exists M>0$,使得

$$|f_n(x')-f_n(x'')|\le M|x'-x''|$$

则$\{f_n(x)\}$是E上几乎处处收敛列.

证明:由依测度收敛知,对$\forall\varepsilon>0,\sigma>0,\exists N>0$,使得

$$m(\{x\in E:|f_n(x)-f_m(x)|\ge\varepsilon/3\})<\sigma\quad(\forall m,n\ge N).$$

假定$x_0\in E$满足:

$$m(E\bigcap(x_0-\varepsilon/3M,x_0+\varepsilon/3M))=2\sigma>0.$$

从而知存在点$x_{n,m}\in E\bigcap(x_0-\varepsilon/3M,x_0+\varepsilon/3M)$,以及$n_i,m_i$,使得

$$|f_{n_i}(x_{n,m})-f_{m_i}(x_{n,m})|<\epsilon/3$$

因此,当$n,m\geq N$时,有

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|\leq|f_n(x_0)-f_{n_i}(x_{n,m})|+|f_{n_i}(x_{n,m})-f_{m_i}(x_{n,m})|+|f_{m_i}(x_{n,m})-f_m(x_0)|$$

$$<2M|x_0-x_{n,m}|+\epsilon/3<2\epsilon/3+\epsilon/3=\epsilon$$

这说明$f_n(x)$在$x=x_0$收敛.
若对$x_0\in E,\exists\delta_0>0$,使得

$$m(E\bigcap(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0))=0$$

则$f_n(x)$不一定在$x=x_0$收敛.由此易知命题结论成立. □

中国科学技术大学2011–2012学年第一学期

数学分析A1补考试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、设E_1, E_2是$[0,1]$中两个互不相交的可列集，则$\exists[0,1]$上连续函数$f(x)$,使得$f(x)$在E_1上左连续，在E_2上右连续，其余点连续。

二、设$C\subset[0,1]$是$Cantor$集，则$\exists x_0\in\mathbb{R}, s.t. C+\{x_0\}$不含有理数。

三、设点集B满足：$\forall\varepsilon>0, \exists$可测集$A, s.t. m^*(A\triangle B)<\epsilon$。试证$B$是可测集。

四、设μ为紧致$Hausdorff$空间X上的正则$Borel$测度，设$\mu(X)=1$。试证$\exists$紧致集$K\subset X, s.t. \mu(K)=1$，但对$K$的每个紧致真子集$H$，有$\mu(H)<1$。

五、证明不存在这样的映照$\mu: 2^{\mathbb{R}}\to[0,+\infty]$，使得

$i)\mu(\Phi)=0$

$ii)\mu(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n)$

$iii)\mu(x+A)=\mu(A)$

$iv)\mu[0,k]=k$

六、设$\{E_n\}$是$[0,1]$中的可测集列，满足$\overline{\lim}_{n\to+\infty}m(E_n)=1$。试证$\forall\alpha, 0<\alpha<1, \exists\{E_{n_k}\}, s.t. m(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k})>\alpha)$。

中国科学技术大学2011–2012学年第一学期

数学分析A1补考试卷

学生所在系:__________ 姓名______________

学号______________ 得分______________

一、设E_1, E_2是$[0,1]$中两个互不相交的可列集，则$\exists[0,1]$上连续函数$f(x)$,使得$f(x)$在E_1上左连续，在E_2上右连续，其余点连续。

令$\varphi(x) = 0, x \leq 0; 1, x > 0 \qquad \psi(x) = 0, x < 0; 1, x \geq 0.$
$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}[\varphi(x - r_n) - \psi(x - s_n)]/2^n, \quad r_n \in E_1, s_n \in E_2(n = 1, 2, ...)$

二、设$C \subset [0,1]$是$Cantor$集，则$\exists x_0 \in \mathbb{R}, s.t. C + \{x_0\}$不含有理数。

$x_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n^2}}$

三、设点集B满足：$\forall \varepsilon > 0, \exists$可测集$A, s.t. \quad m^*(A \triangle B) < \epsilon$。试证$B$是可测集。

引理：若A是可测集且$m^*(A \triangle B) = 0$则B是可测集且$m(B) = m(A)$。证明略。
证：$\forall \epsilon > 0, \exists A$可测，使得$m^*(A \triangle B) < \epsilon$。取$\{\epsilon_n\} \to 0$则存在$\{A_n\}, s.t. \quad m^*(A_n \triangle B) < \epsilon_n$，从而$\lim_{n\to\infty} m^*(A_n \triangle B) = 0$。现令$A'_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$，则$A'_n$为递减的可测集列且$m^*(A'_n \triangle B) < \epsilon_n$。因$\bigcap_{k=1}^{\infty} A'_k \triangle B \subset A'_n \triangle B, \forall n$，所以$m^*(\bigcap A'_n \triangle B) \leq \lim_{n\to\infty} m^*(A'_n \triangle B) = 0$。所以$m^*((\bigcap A'_n) \triangle B) = 0$。$\bigcap_{n=1}^{\infty} A'_n$是可测集，由引理知$B$是可测集且$m(B) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A'_n)$。

四、设μ为紧致$Hausdorff$空间X上的正则$Borel$测度，设$\mu(X) = 1$。试证$\exists$紧致集$K \subset X, s.t. \mu(K) = 1$，但对$K$的每个紧致真子集$H$，有$\mu(H) < 1$。

证：定义集合$\Omega = \{K_\alpha \subset X : \quad K_\alpha$是紧致集，$\mu(K_\alpha) = 1\}$，则$X \in \Omega$。
令$K = \bigcap_{K_\alpha \in \Omega} K_\alpha$。$K$为紧致子集。设$V \subset X$是包含$K$的一个开集。因$X$紧致，$V^c$紧

致。又因$V^c\subset\bigcup_{K_\alpha\in\Omega}K_\alpha$,∃有限集合列$K_{\alpha 1},K_{\alpha 2},...,K_{\alpha n},s.t.\quad V^c\subset\bigcup_{k=1}^{n}K_{\alpha k}^c$。因$\mu(X)=1=\mu(K_\alpha),\mu(K_{\alpha k}^c)=0,\quad k=1,2,...,n$。故有$\mu(V^c)=0$。从而$\mu(V)=1$。又$\mu$是正则的，故$\mu(K)=1$。由$K$的构造可知$\mu(H)<1,\forall H\subset K$，$H$为$K$的紧致真子集。

五、证明不存在这样的映照$\mu:2^{\mathbb{R}}\to[0,+\infty]$，使得

$i)\mu(\Phi)=0$

$ii)\mu(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n)$

$iii)\mu(x+A)=\mu(A)$

$iv)\mu[0,k]=k$

证：反证。假设存在这样的映照。考虑$[0,1]/\mathbb{Q}\cong K$。

令$K_r=r+K,r\in[-1,1]\bigcap\mathbb{Q}=\{r_1,r_2,...\}.$

$[0,1]\subset\bigsqcup_{j=1}^{+\infty}K_{r_j}\subset[-1,2].$

由可加性与非负性可得单调性。故

有$1=\mu[0,1]\le\mu(\bigsqcup_{j=1}^{+\infty}K_{r_j})\le\mu[-1,2]=3$。$\mu[0,1]\le\mu(\bigsqcup_{j=1}^{+\infty}K_{r_j})=\sum_{j=1}^{+\infty}\mu(K_{r_j})$，

而$\mu(K_{r_j})=\mu(K)$。矛盾。

六、设$\{E_n\}$是$[0,1]$中的可测集列，满足$\overline{\lim}_{n\to+\infty}m(E_n)=1$。试证$\forall\alpha,0<\alpha<1,\exists\{E_{n_k}\},s.t.m(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k})>\alpha)$。

证：$\forall k\in\mathbb{N},\exists\{E_k\},s.t.\quad m(E_{n_k})>1-(1-\alpha)/2^k,k\in\mathbb{N}$。因此$1-m(E_{n_k})<(1-\alpha)/2^k,k\in mathbbN$。而$[0,1]-\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{[0,1]-E_{n_k}\}$。于是$m([0,1]-\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k})\le\sum m([0,1]-E_{n_k})=\sum(1-m(E_{n_k})<\sum(1-\alpha)/2^k=1-\alpha$。所以$m(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k})>\alpha$

七.设f(x)是定义在(0,1]上的实值函数，则必存在可测函数g(x)与h(x),使得

$$f(x)=g[h(x)],x\in(0,1]$$

.

证:把(0,1]中的点作二进位无尽小数表示:$x\in(0,1]$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},a_n=0,1$$

并定义

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}, h(0)=0$$

则h(x)在(0,1]上严格递增，易知h((0,1])是Cantor集的子集，m(h((0,1]))=0.
现在，再定义函数

$$g[x]=\begin{cases} f(h^{-1}(x)) & x\in h((0,1]) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则f(x)=g(h(x)),其中g(x),h(x)为(0,1]上的L-可测函数.

八、求值：$\lim_{n\to\infty}\int_0^n(1-\frac{x}{n})^n e^{x/2}dx$　　　$\lim_{n\to\infty}\int_0^n(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}dx$。

证：定义$f_n(x)=\chi_{[0,n]}(1-\frac{x}{n})^n e^{x/2},\quad g_n(x)=\chi_{[0,n]}(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}, n\in\mathbb{N}$。
易见$|f_n(x)|\le e^{-x/2},\quad f_n(x)\to e^{-x/2}$
$|g_n(x)|\le e^{-x},\quad f_n(x)\to e^{-x}$
由控制收敛定理，
$\lim_{n\to\infty}\int_0^n(1-\frac{x}{n})^n e^{x/2}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^n f_n(x)dx=\int_0^n e^{-x/2}dx=2$
$\lim_{n\to\infty}\int_0^n(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^n g_n(x)dx=\int_0^n e^{-x}dx=1$

九、证明：若$\{f_n(x)\}$是$E\subset\mathbb{R}^1$上依测度收敛列，且有
$|f_n(x')-f_n(x'')|\le M|x'-x''|, x\,x''\in E$，则$\{f_n(x)\}$是$E$上几乎处处收敛列。

证：由题意，对$\epsilon>0,\sigma>0,\exists N, s.t.$
$m(\{x\in E:|f_n(x)-f_m(x)|\ge\epsilon/3\}<\sigma,\forall n,m\ge N$。
若$x_0\in E$满足：$m(E\bigcap(x_0-\epsilon/3M,x_0+\epsilon/3M)=2\sigma>0$，从
而$\exists x_n,m\in E\bigcap(x_0-\epsilon/3M,x_0+\epsilon/3M)$以及$n_i,m_i,s.t.$
$|f_{n_i}(x_n,m)-f_{m_i}(x_n,m)|<\epsilon/3.$
因此当$n,m\ge N$时
有$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|\le|f_n(x_0)-f_{n_i}(x_n,m)|+|f_{n_i}(x_n,m)-f_{m_i}(x_n,m)+|f_{m_i}(x_n,m)-f_m(x_0)|<2M|x_0-x_n,m|+\epsilon/3<2\epsilon/3+\epsilon/3=\epsilon$

十、设$f(x)$在$[a,b]$上可测，则存在多项式列$\{P_n(x)\}$，使得：
$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x),\quad a.e.x\in[a,b]$。

由Lusin定理，$\forall n \in \mathbb{N}, \exists$闭集$F_n \subset [a,b], (n \in \mathbb{N}), s.t. F_n \subset F_{n+1}. m([a,b]-F_n) < \frac{1}{n}$.且$f \in C(F_n), (n \in \mathbb{N})$ 从而$\exists g \in C[a,b],\ s.t.\ g(x) = f(x)\ (x \in F_n)$,

故存在多项式$P_n(x), \mid g(x) - P_n(x) \mid < \frac{1}{n}\ (n \in \mathbb{N}, x \in [a,b])$

即$\mid f(x) - P_n(x) \mid < \frac{1}{n}\ (x \in F_n, n \in \mathbb{N})$.

令$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$,则$m([a,b]-F) = 0$.对$x_0 \in F, \exists n_0, x_0 \in F_n (n \geq n_0)$

从而$\forall \epsilon > 0$取$n_1 > n_0$且$\frac{1}{n_1} < \epsilon$ 则有 $\mid f(x_0) - P_n(x_0) \mid < \frac{1}{n} < \epsilon\ (n > n_1)$.

七、设$f(x)$是(a,b)上的实值函数，试证$\underline{D}f(x)=\underline{\lim}_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$是$(a,b)$上可测函数。

八、求值：$\lim_{n\to\infty}\int_0^n(1-\frac{x}{n})^n e^{x/2}dx$ $\qquad\lim_{n\to\infty}\int_0^n(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}dx$。

九、证明：若$\{f_n(x)\}$是$E\subset\mathbb{R}^1$上依测度收敛列，且有
$|f_n(x')-f_n(x'')|\le M|x'-x''|, x\,x''\in E$，则$\{f_n(x)\}$是$E$上几乎处处收敛列。

十、设$f(x)$在$[a,b]$上可测，则存在多项式列$\{P_n(x)\}$，使得：
$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x),\quad a.e. x\in[a,b]$。