

2024 年春季学期近世代数期中考试

\mathbb{Z}_n 总是表示整数模 n 加法群。以下题目，除第一题与第二题外，均需要给出计算过程与证明过程。

一、判断题，只需判断下面陈述是对还是错，无需写出证明（每小题 3 分，共 33 分）。

- (1) 27 阶群的中心一定至少有 3 个元素。
- (2) 8 阶群必为阿贝尔群。
- (3) 循环群的商群必为循环群。
- (4) 31 阶群必为循环群。
- (5) 设群 G 由元素 a 与 b 生成，且 a 与 b 的阶分别为 m 与 n 。则 $|G| \leq mn$ 。
- (6) 设 G 为有限生成自由阿贝尔群。则存在 G 的真子群 A 使得 G 与 A 同构。
- (7) 存在 48 阶非交换单群。
- (8) 100 阶群中必有 4 阶元素。
- (9) 25 阶群必为阿贝尔群。
- (10) 记 $S = \{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid \det(A) \neq 0\}$ ，即 S 是由所有行列式非零的 $n \times n$ 整系数方阵构成的集合。则 S 按照矩阵的乘法构成群。
- (11) 设 N 为群 M 的正规子群， M 为群 G 的正规子群。则 N 定为 G 的正规子群。

二、计算题，只需写出答案，无需写出计算过程（15 分）。

- (1) 设 $G = \mathbb{Z}_{30}$ 且 A 是 G 中由 $\bar{5}$ 生成的子群。计算 $[G : A]$ 。
- (2) 写出 $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{25}$ 的初等因子与不变因子。
- (3) 写出 1000 阶阿贝尔群所有可能的初等因子与对应的不变因子。

三、(10 分) 找出所有从加法群 \mathbb{Z}_{12} 到加法群 \mathbb{Z}_{20} 的群同态。

四、(8 分) 设 A 为群 G 的子群, 且 $[G : A] = 2$ 。求证对任意的 $g \in G$ 有 $g^2 \in A$ 。

五、(10 分) 设 H 与 K 均为群 G 的正规子群, 且 $G = HK$ 。求证存在群同构 $G/(H \cap K) \cong G/H \times G/K$ 。

六、(10 分) 设 $|G| = 360$ 且 G 为单群。设 G 存在阶为 60 的子群。求证 G 必同构于 A_6 。

七、(14 分) 找出 A_4 的所有正规子群与所有西罗子群, 并计算所有西罗子群的个数。