中国科学技术大学数学科学学院 2023~2024 学年第一学期期中考试试卷

■ A 卷 □ B 卷

| 课程名称 | 线性代数 (A2) | 课程编号_ | MATH1005 |
|------|-------------|-------|----------|
| 考试时间 | 2023年11月18日 | 考试形式_ | 闭卷 |
| 姓名 | 学号 | | 学院 |

- 1. (14 分) 举例:
 - (1) 实方阵 A, 它的特征多项式没有重根, 但它不实相似于对角形.
 - (2) 方阵 A = B, 它们有相同的特征多项式和相同的最小多项式, 但两者并不相似.
- 2. (20 分) 求解常微分方程组 $\frac{d}{dt}X = AX$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

- 3. (21 分) 设实二次型 $Q(x,y,z) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 3x^2 4xy 2yz + 4xz$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).
 - (1) 当 λ 取何值时, Q(x, y, z) 正定?
 - (2) 当 λ 取何值时, Q(x,y,z) 半负定?
 - (3) 当 λ 取何值时, Q(x, y, z) 的惯性指数 (p, q) = (1, 0)?
- 4. (15 分) 设有理系数方阵 A 的特征多项式

$$\varphi_A(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

试求 A 的 \mathbb{Q} -有理标准形, 实相似标准形和复相似标准形.

- 5. (10 分) 求满足等式 $A^4 = A^2$ 的所有 4 阶实方阵 A.
- 6. (10 分) 设 A, B, C 是域 F 上方阵且 B 与 C 是同阶方阵. 证明: 若 diag(A, B) 与 diag(A, C) 相似, 则 B 与 C 相似.
- 7. $(10 \ \mathcal{H})$ 设 $V \in \mathbb{R}$ 维 F-线性空间. 设线性变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 在某组基下的矩阵是 Jordan 块矩阵 $J_n(\lambda)$. 证明: V 不能表示为非平凡 \mathscr{A} -不变子空间的直和.