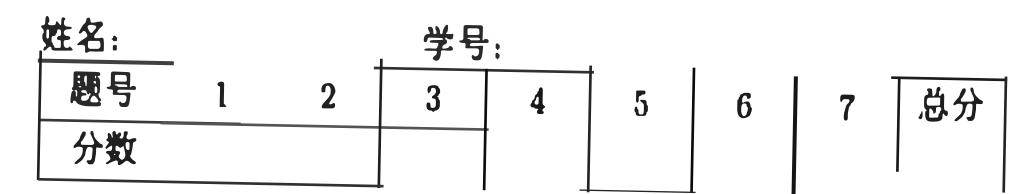
## 中国科学技术大学 2020-2021学年第2学期期末试卷

课程名称: 概率论 日期: 2021年7月11日 开课院系: 数学科学学院



1. (15分) 设 $\{X_k: 1 \le k \le n\}$ 独立同分布且方差有限的随机变量列, 记

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

求协方差 $Cov(\overline{X}, X_k - \overline{X})$ .

2. (15分) (X,Y) 联合密度为

$$f(x,y)=cx(y-x)e^{-y},\ 0\leq x\leq y<\infty.$$

求常数c,条件密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 与条件期望 $\mathbb{E}(Y|X)$ .

3. (15分)设U,V为独立地均匀地取自n维单位超立方体内部两点,Xn表示两点欧氏距离.证明

$$\mathbb{E}(X_n)/\sqrt{n}\to 1/\sqrt{6}, \quad n\to\infty.$$

条件改为

4. (15分) 设 $\{X_k\}$ 相互独立且服从指数分布,  $\mathbb{E}(X_k) = \mu_k$ . 证明若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max\{\mu_1,\ldots,\mu_n\}}{\sum_{k=1}^n\mu_k}=0.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\max\{\mu_1, \dots, \mu_n\}}{\sum_{k=1}^n \mu_k} = 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{\max\{\mu_1, \dots, \mu_n\}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \mu_k^2}} = 0,$$

则

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\mu_k^2}}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu_k)\stackrel{\mathsf{D}}{\longrightarrow} N(0,1).$$

- 5. (15分) 对所有取正整数值的随机变量X. 若给定 $\mathbb{E}(X)=1/p\ (p\in(0,1))$ , 问何时X的熵最 大?并求最大熵.
- 6. (10分) 对某概率空间上随机变量 $X, X_n$  和 $N_k$ , 其中 $N_k$ 服从参数为正整数k的Poisson分布.  $\exists X_n \xrightarrow{D} X 且\{X_n\} 与 N_k 独立, 试证明$

$$X_{N_k} \xrightarrow{D} X, \quad k \to \infty.$$

- 7. (15分) 高斯随机矩阵定义为 $A_n = (a_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^2$ , 其中 $\{a_{ij}^{(n)}: 1 \leq i,j \leq 2, n=1,2,\ldots\}$  为独立 同标椎正态分布随机变量列. |x|表示2维列向量x的标准欧氏范数, 试回答
  - (i) 若非零随机向量x(可能退化为一固定向量)与 $A_1$ 独立,则 $|A_1x|$ 与x独立;
  - (ii)任给非零2维向量x, 试证明

$$\frac{1}{n}\log\left(\frac{|A_nA_{n-1}\cdots A_1\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|}\right)$$

的极限存在且与x无关(不必求出精确的值).