## 2022 年秋季学期<u>微分方程</u>I期末试卷

(B **卷**)

姓名:	兴早.	
江石:	子亏:	

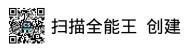
注意: 1. 计算题只写结果不写过程,不给分. 所有题目中使用的定理或者命题需要注明.

- 2. 必须用题目指定的方法计算或者证明, 否则不得分.
  - 1. (20 分) 利用分离变量法求解方程

$$egin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = Ax, & 0 < x < l \ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le l \ u(0,t) = 0, & u(l,t) = Bt, & t \ge 0, \end{cases}$$

其中, A, B 是常数.

2. 如果已知 (形式上) 有如下关系



$$u(0,t) = 0, \ u(l,t) = Bt, \ t \ge 0,$$

其中, A, B 是常数.

2. 如果已知 (形式上) 有如下关系

$$\left(e^{-i4\pi^2|\xi|^2t}\right)(x) = \frac{1}{(4i\pi t)^{n/2}}e^{-i\frac{|x|^2}{4t}}, \quad \xi, x \in \mathbb{R}^n,$$

其中  $i = \sqrt{-1}$  表示虚数单位.

(a) (10 分) 用 Fourier 变换方法求解薛定谔方程的解

$$egin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n \ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

(这里  $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$  是一个取值为复数的函数.)

- (b) (10 分) 薛定谔方程是否具有有限传播速度? 当时间  $t \to +\infty$  时,u(x,t) 会怎样? 回答并简要说明理由.
- 3. (15 分) 令 ℝ² 表示上半平面, 用格林函数法求解边值问题

$$egin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

4. (15 分) 令 B 表示  $\mathbb{R}^n$  中的球  $B_R(x_0)$ . 设  $u \in C^1(\bar{B}) \cap C^2(B)$  是调和的, 证明:

$$|Du(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_{\bar{B}} |u|.$$

5. (15 分) 用极大值原理证明: 热传导方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u - 2\partial_x u - 2u = 0, & 0 < x < l, 0 < t \le T, \\ u(0, t) = 0, & u_x(l, t) + u(l, t) = 0, & 0 \le t \le T, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

的古典解只有零解.

(提示: 考虑函数  $v = e^{-\lambda t}u(x,t)$ , 其中  $\lambda$  需要选取.)

6. 设 u(x,t) 是自由波动方程

$$egin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n \ u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

的解. 其中 f(x), g(x) 是光滑函数,并且在以原点为中心半径为 R 的球  $B_R$  外恒为零.

(a) (10 分) 定义

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x \cdot \nabla u(x,t) \partial_t u(x,t) dx.$$

证明: 对于任意的时间  $t \geq 0$ , 存在  $C = C(R, t, ||\nabla f||_2, ||g||_2)$  (即  $C = R, t, ||\nabla f||_2, ||g||_2$ ) 有关),使得  $|M(t)| < C(R, t, ||\nabla f||_2, ||g||_2) < +\infty$ .

(w), w(w, 0) = y(w).

的解. 其中 f(x), g(x) 是光滑函数,并且在以原点为中心半径为 R 的球  $B_R$  外恒为零.

(a) (10 分) 定义

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x \cdot 
abla u(x,t) \partial_t u(x,t) dx.$$

证明: 对于任意的时间  $t \geq 0$ , 存在  $C = C(R,t,\|\nabla f\|_2,\|g\|_2)$  (即  $C \subseteq R,t,\|\nabla f\|_2,\|g\|_2$  有关),使得  $|M(t)| < C(R,t,\|\nabla f\|_2,\|g\|_2) < +\infty$ .

(b) (10 分) 证明:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{n}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx.$$

## 一些可能用到的事实:

1. Fourier 变换及逆变换:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx, \quad \check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi.$$

2. 在第 6 题中,

$$\|\nabla f\|_2 = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |(\nabla f)(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \|g\|_2 = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$