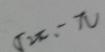
- ℝ 表示实数全体, C表示复数全体, i表示虚数单位。
- z=x+iy表示复数, 其中x,y分别是z的实部与虚部;  $\overline{z}=x-iy$ 表示z的共轭。
- 除第一题之外, 所有问题的解答要有详细过程, 直接写出答案者不得分。



一. (20分) 判断下列命题的对错, 请直接将答案写在命题左侧的下划线上, 不要解答过程,

1B. \_\_\_\_ 若函数 f(z) 在C中的区域  $\Omega$  上全纯, 在  $\Omega$  的闭包上连续, 则对任何  $z \in \Omega$ 有  $|f(z)| \leq \sup_{w \in \partial \Omega} |f(w)|$ .

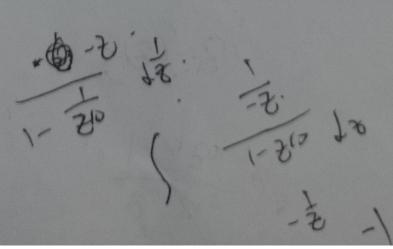
1C. \_\_\_\_\_ 设f为有理函数,且∞是f的一阶零点. 那么f在C上的所有留数之和等于零

1D. \_\_\_\_ 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径等于1, 在单位圆盘 $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ 内定义出解析函数f(z). 那么必有 $z_0$ , 使得 $|z_0| = 1$ , 并且f(z)不能解析延拓到 $z_0$ 的任何邻域上.

1E. 存在从上半平面 $\{z \in \mathbb{C}: Im z > 0\}$ 到 $\mathbb{C}$ 的共形——对应

(24分) 计算题, 要求有详细解答过程, 直接给出答案者不得分.

- 1. 求留数 Res(e<sup>1</sup>/<sub>z</sub>·z<sup>5</sup>,0).
- 2. 利用留数定理计算积分 $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+3x^2+2} dx$ .
- 3. 求  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  在 0 < |z| < 1 和  $1 < |z| < +\infty$  的 Laurent 展开。
- 4. 设γ为闭曲线  $z(t) = 4e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . 计算积分 $\int_{\gamma} \frac{z^9}{z^{10}-1} dz$ .



<1]内定义出解析函 一多 0

1 2 2

E. (6分) 设f(z)为C中的区域Ω上的解析函数, 且恒不为零. 证明: 实值函数 log | f(z)| 为 Ω上的周和函数.

四. (10分) 方程  $z^7 - 2z^5 + 2016z^3 - z + 1 = 0$  在单位开圆盘 $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ 内有多少个根? 要求详知说明理由, 直接写出得数者不得分.

五(10分)证明 Weierstrass 定理: 设解析函数列 $\{f_n\}$ 在区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上内闭一致收敛,设k 为任意正整数,那么相应的k阶导函数列 $\{f_n^{(k)}(z)\}$ 也在 $\Omega$ 上内闭一致收敛.

Q 大. (10分) 求从区域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C}: z \neq 0, 0 < \arg z < \pi/2\}$  到单位圆盘 $\{w \in \mathbb{C}: |w| < 1\}$ 的共形一一对应w = f(z),使得 $f(e^{\pi i/4}) = 0$ 且 $f'(e^{\pi i/4}) > 0$ .要求有详细解答过程,直接写出答案者不得分.

七. (10分) 设f(z)为单位开圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上的解析函数,  $|f(z)| \le 1$ , 且f 在 $\mathbb{D}$  内有两个不动点, i.e. 存在 $z_1 \ne z_2 \in \mathbb{D}$ , 使得 $f(z_1) = z_1$ ,  $f(z_2) = z_2$ . 利用 Schwarz 引理证明: 在 $\mathbb{D}$  内f(z) = z.

八. (10分) 设f(z)为上半平面 $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Im}z>0\}$ 上恒不为零的解析函数, 并且当 $z\in\mathbb{H}$  趋于实轴 $\mathbb{R}$ 上的点时,  $|f(z)|\to 1$ .

8A. 证明f(z)可以延拓为整函数, 仍然记作f(z).

8B. 在8A 的条件下, 假设∞不是f(z)的本性奇点. 证明f(z)为常值函数.

九. (10分) 设  $\Omega = \{0 < |z| < 1\}$ . 设 f 在  $\Omega$  上全纯, 且

 $\iint_{\Omega} |f(z)|^2 dxdy < +\infty.$ 

证明: z=0 是 f(z) 的可去奇点。

ZWIETV -

Shar son 1x

8(3)-3/2/ 8! 9(3)/20.