

# 目 次

|                           |           |
|---------------------------|-----------|
| <b>第1章 位相的基礎概念</b>        | <b>1</b>  |
| 1.0 本書で用いる基本的な記号          | 2         |
| 1.1 距離空間の位相               | 6         |
| 1.1.1 距離空間の定義と例           | 6         |
| 1.1.2 距離空間における諸概念         | 8         |
| 1.1.3 写像の連続性              | 13        |
| 1.1.4 コンパクト性, 完備性         | 17        |
| 1.2 一般位相空間                | 27        |
| 1.2.1 一般的な位相の導入           | 27        |
| 1.2.2 写像の連続性              | 31        |
| 1.2.3 コンパクト性              | 33        |
| 1.2.4 連結性                 | 37        |
| 1.2.5 有向族による記述            | 39        |
| 1.2.6 新しい位相空間の構成          | 45        |
| 1.2.7 フィルターと超フィルター        | 49        |
| 1.2.8 一様位相空間              | 54        |
| 1.3 選択公理と Zorn の補題        | 69        |
| 1.3.1 概説                  | 69        |
| 1.3.2 選択公理と Zorn の補題の同値性  | 73        |
| <b>第2章 Banach 空間の基礎理論</b> | <b>83</b> |
| 2.1 ノルム空間                 | 83        |
| 2.1.1 定義と例                | 83        |
| 2.1.2 新しいノルム空間の構成         | 91        |
| 2.2 Banach 空間の定義と例        | 95        |

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| 2.3        | Baire のカテゴリー定理 . . . . .                    | 104        |
| 2.3.1      | Baire のカテゴリーとカテゴリー定理 . . . . .              | 104        |
| 2.3.2      | Baire のカテゴリー定理の応用 . . . . .                 | 106        |
| 2.4        | 有界線型作用素 . . . . .                           | 110        |
| 2.5        | 一様有界性定理 . . . . .                           | 116        |
| 2.6        | 開写像定理と閉グラフ定理 . . . . .                      | 121        |
| 2.7        | 共役空間とその表現 . . . . .                         | 126        |
| 2.8        | Hahn–Banach の拡張定理 . . . . .                 | 129        |
| 2.8.1      | Hahn–Banach の拡張定理 . . . . .                 | 130        |
| 2.8.2      | Hahn–Banach の拡張定理の応用 . . . . .              | 135        |
| 2.9        | Hahn–Banach の分離定理 . . . . .                 | 140        |
| 2.9.1      | 超平面, Minkowski ゲージ, 分離定理 . . . . .          | 140        |
| 2.9.2      | 簡単な応用と反例 . . . . .                          | 146        |
| 2.9.3      | 応用 : Krein–Milman の定理, Min–Max 定理 . . . . . | 148        |
| 2.10       | 弱位相, 汎弱位相 . . . . .                         | 155        |
| 2.10.1     | 弱位相, 汎弱位相の定義と基本性質 . . . . .                 | 155        |
| 2.10.2     | 反射性と弱コンパクト性 . . . . .                       | 164        |
| 2.10.3     | Banach 空間と連続関数空間 . . . . .                  | 170        |
| <b>第3章</b> | <b>Banach 空間上の作用素論</b>                      | <b>179</b> |
| 3.1        | 作用素のスペクトル . . . . .                         | 179        |
| 3.1.1      | スペクトルとリゾルベントの基本性質 . . . . .                 | 180        |
| 3.1.2      | スペクトルの分類 . . . . .                          | 189        |
| 3.1.3      | 共役作用素とスペクトル . . . . .                       | 195        |
| 3.2        | コンパクト作用素の理論 . . . . .                       | 199        |
| 3.2.1      | 有限次元ノルム空間 . . . . .                         | 199        |
| 3.2.2      | コンパクト作用素 . . . . .                          | 203        |
| 3.2.3      | Fredholm–Riesz–Schauder の理論 . . . . .       | 207        |
| 3.2.4      | コンパクト性に関する諸結果 . . . . .                     | 215        |
| 3.3        | 非有界作用素 . . . . .                            | 219        |
| 3.3.1      | 閉作用素の定義と例 . . . . .                         | 219        |
| 3.3.2      | 閉作用素のスペクトル . . . . .                        | 224        |

|   |            |
|---|------------|
| 3.3.3 擬リゾルベント (pseudo-resolvent) . . . . .          | 231        |
| 3.4 Banach 空間値の微積分と作用素論への応用 . . . . .               | 232        |
| 3.4.1 1 実変数連続関数の微積分 . . . . .                       | 232        |
| 3.4.2 Banach 空間値複素解析関数と Dunford 積分 . . . . .        | 241        |
| 3.4.3 Bochner 積分 . . . . .                          | 260        |
| <b>第 4 章 Hilbert 空間とその上の作用素</b>                     | <b>277</b> |
| 4.1 Hilbert 空間の定義と例 . . . . .                       | 277        |
| 4.1.1 内積空間とそのノルム . . . . .                          | 277        |
| 4.1.2 内積空間, Hilbert 空間の例 . . . . .                  | 282        |
| 4.1.3 ノルム空間の中での、内積空間の特徴付け . . . . .                 | 285        |
| 4.2 直交性, 射影定理 . . . . .                             | 287        |
| 4.2.1 直交性, 射影定理から直交直和分解へ . . . . .                  | 287        |
| 4.2.2 完全正規直交系の存在とその応用 . . . . .                     | 291        |
| 4.3 Riesz の表現定理とその応用 . . . . .                      | 306        |
| 4.3.1 Riesz の表現定理 . . . . .                         | 307        |
| 4.3.2 form と作用素 . . . . .                           | 309        |
| 4.3.3 変分問題への応用 . . . . .                            | 317        |
| 4.4 自己共役作用素の構造 . . . . .                            | 321        |
| 4.4.1 自己共役作用素のスペクトルとノルム . . . . .                   | 322        |
| 4.4.2 コンパクトな自己共役作用素のスペクトル分解 . . . . .               | 325        |
| 4.4.3 自己共役作用素の順序とその応用 . . . . .                     | 332        |
| 4.4.4 有界自己共役作用素のスペクトル分解 . . . . .                   | 345        |
| 4.4.5 スペクトル分解の第 2 の表現 . . . . .                     | 351        |
| 4.5 連續対称核積分作用素の Hilbert–Schmidt 理論 . . . . .        | 362        |
| <b>第 5 章 関数解析の展開</b>                                | <b>373</b> |
| 5.1 汎弱閉集合, 弱コンパクト集合に関する基本定理 . . . . .               | 373        |
| 5.1.1 凸集合の汎弱閉性の判定条件 . . . . .                       | 373        |
| 5.1.2 弱コンパクト性の判定条件 : Eberlein–Šmulian の定理 . . . . . | 378        |
| 5.1.3 弱コンパクト集合の閉凸包 : Krein の定理 . . . . .            | 383        |
| 5.2 局所凸位相線型空間 . . . . .                             | 385        |

|   |            |
|---|------------|
| 5.2.1 定義と距離付け可能性 . . . . .                    | 385        |
| 5.2.2 Fréchet 空間にに対する基本定理 . . . . .           | 392        |
| 5.2.3 ノルム空間における概念の分化と一般化 . . . . .            | 397        |
| 5.2.4 共役空間 . . . . .                          | 400        |
| 5.2.5 $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ 空間 . . . . . | 412        |
| <b>第 6 章 関数空間の基礎</b>                          | <b>421</b> |
| 6.1 $L^p$ 空間, Sobolev 空間と連続関数空間 . . . . .     | 421        |
| 6.1.1 Lebesgue 測度の正則性とその結果 . . . . .          | 421        |
| 6.1.2 合成積と軟化子 (mollifier) . . . . .           | 429        |
| 6.2 $L^p$ 空間の双対性 (duality) . . . . .          | 443        |
| 6.3 Riesz–Thorin の補間定理 . . . . .              | 456        |
| 6.4 $L^p$ 空間にに関する補足事項 . . . . .               | 465        |
| <b>第 7 章 解析学の基礎事項</b>                         | <b>469</b> |
| 7.1 Lebesgue 積分の概要 . . . . .                  | 469        |
| 7.1.1 測度の定義 . . . . .                         | 469        |
| 7.1.2 Lebesgue 積分の定義 . . . . .                | 472        |
| 7.1.3 Lebesgue 積分での諸定理 . . . . .              | 475        |
| 7.2 連続関数の存在定理: Uryson, Tietze の定理など . . . . . | 478        |
| 7.2.1 正規空間上の連続関数 . . . . .                    | 478        |
| 7.2.2 局所有限開被覆に関する 1 の分解 . . . . .             | 485        |
| 7.2.3 パラコンパクト空間 . . . . .                     | 488        |
| 7.3 Riesz–Markov–角谷の表現定理 . . . . .            | 503        |
| 7.4 Stone–Weierstrass の定理 . . . . .           | 511        |
| 7.5 Fourier 変換の基礎事項 . . . . .                 | 518        |