

דף נוסחאות - סטתרמית

3 אנרגיות חופשית / פוטנציאלים תרמודינמיים

* כל האנרגיות החופשיות הן פונקציות אקסטנסיביות ואדיטיביות.
שיווי משקל תרמודינמי:
במערכת מבודדת ש- α גודל משתנה בה

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)_{E,V,N,\dots} = 0$$

אנרגיה פנימית: הקשר היסודי

$$E = E(S, V, N)$$

האנרגיה החופשית של הלמהולץ: T קבועה בשיווי משקל תרמודינמי
 F מינימלי

$$F(T, V, N) = E - TS$$

אנלפיה: P קבוע

$$H(S, P, N) = E + PV$$

האנרגיה החופשית של גיבס: T, P קבועים

$$G(T, P, N) = E - TS + PV$$

הפוטנציאל הגרנד-קנוני: T, μ קבועים

$$\Omega(T, V, \mu) = E - TS - \mu N$$

(נכון גם לערכים ממוצעים)

4 גז אידיאלי ואנרגיה קינטית

חוק הגז האידיאלי:

$$\begin{aligned} [P] &= 1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} \\ [V] &= 10^3 \text{ L} = 1 \text{ m}^3 \\ [T] &= \text{K} \end{aligned}$$

$$PV = Nk_B T$$

אנרגיה קינטית ממוצעת של חלקיק גז אידיאלי: $\langle E \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

קשר יסודי של גז אידיאלי:

$$S(E, V, N) = Nk_B \ln \left[a \frac{V}{N^{\frac{5}{2}}} E^{\frac{3}{2}} \right] \quad a = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi m\right)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{\frac{5}{2}}$$

אוסילטור הרמוני: אנרגיה

$$E = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2$$

האנרגיה הקינטית הממוצעת

$$\begin{aligned} \langle E_k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0 dp_0}{2\pi\hbar} \left(\frac{p_0^2}{2m} \right) P(x_0, p_0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0 dp_0}{h} \left(\frac{p_0^2}{2m} \right) P(x_0, p_0) \end{aligned}$$

1 מכניקה סטטיסטית - צברים ואנטרופיה

גדלים תרמודינמיים:

גדלים אקסטנסיביים - גדלים שפרופורציונלי לגודל המערכת.

לדוגמה: E, V, N, S

$$S(\lambda E, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(E, V, N)$$

גדלים אינטנסיביים - גדלים שלא תלויים בגודל המערכת. לדוגמה:

T, P, μ

$$T(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = T(S, V, N)$$

ספירת מצבים בדידים למערכת עם אנרגיה קבועה:

1. נכתוב את האנרגיה כתלות במצבים:

$$E(n_1, \dots, n_N) = E_0$$

2. נחשב את הנפח שהמשטח חוסם, נחלק ביחידת נפח של מצב

אחד - ונקבל את מספר המצבים בתוך המשטח $\Sigma(E, N)$

3. נגזור לפי E ונכפול ב- ε (יחידת אנרגיה קטנה של הבעיה):

$$\Omega(E, N) = \underbrace{\frac{d\Sigma(E, N)}{dE}}_g \cdot \varepsilon$$

ונקבל את מספר המצבים המותרים בתחום $\left[E - \frac{\varepsilon}{2}, E + \frac{\varepsilon}{2}\right]$

אנטרופיה: $S(E, V, N) = k_B \ln \Omega(E, V, N)$

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad \text{טמפרטורה:}$$

הגבול התרמודינמי:

$$E \rightarrow \infty, \quad V \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty$$

$$\frac{E}{V} \rightarrow \text{const}, \quad \frac{N}{V} \rightarrow \text{const}, \quad \frac{E}{N} \rightarrow \text{const}$$

דיפרנציאלים:

דיפרנציאל שלם אם ורק אם $\left(\frac{\partial f_x}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f_y}{\partial x}\right)$

$$dE = \underbrace{TdS}_{\text{d}Q} + \underbrace{(-PdV + \mu dN)}_{\text{d}W}$$

* בתהליך התפשטות איטי, האנטרופיה לא משתנה, אז $dS = 0$.

2 הצבר המיקרוקנוני - E, V, N

מערכת מבודדת עם אנרגיה, נפח, ומספר חלקיקים קבועים
ההסתברות למצוא מיקרו-מצב μ :

$$P(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega(E, V, N)} & E(\mu) = E, V(\mu) = V, N(\mu) = N \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

חישוב גדלים תרמודינמיים בצבר המיקרוקנוני:

1. נכתוב את האנרגיה כתלות במיקרו-מצבי המערכת

2. נחשב את $\Omega(E, V, N)$ ע"י ספירת המצבים כתלות בגדלים

3. נחשב את הקשר היסודי $S(E, V, N) = k_B \ln \Omega(E, V, N)$

4. נגזור כל גודל תרמודינמי

5 גדלים תרמודינמיים והתמרת לז'נדר

לחץ:

$$P = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{E,N} = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S,N}$$

פוטנציאל כימי:

$$\mu = -T \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{E,V} = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S,V}$$

התמרת לז'נדר:

$$Y(X) \rightarrow \psi(P)$$

1. נוודא ש- $Y(X)$ קעורה ממש או קמורה ממש בקטע

$$2. \text{נגזור } P(X) = \frac{dY}{dX}$$

3. נהפוך את הקשר ונקבל $X(P)$

4. נציב את הקשר ההפוך בביטוי $\psi(P) = Y(X(P)) - PX(P)$

$$n \text{ משתנים } Y(\vec{X}) \rightarrow \psi(\vec{P})$$

1. נוודא שהפונקציה $Y(\vec{X})$ קמורה ממש או קעורה ממש בתחום בו מתבצעת הטרינספורמציה.

2. נגזור: עבור כל משתנה X_i , נגדיר את $P_i = \frac{\partial Y}{\partial X_i}$

3. נהפוך את מערכת הקשרים ונקבל את $\vec{X}(\vec{P})$ - כלומר, מבטאים את כל X_i כפונקציה של המשתנים P_i .

4. נגדיר את הפונקציה החדשה:

$$\psi(\vec{P}) = \left[\sum_{i=1}^n P_i X_i(\vec{P}) \right] - Y(\vec{X}(\vec{P}))$$

יחסי מקסוול:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S,N} &= - \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_{V,N} &= \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S \partial V} \right) \\ * \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,N} &= \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{T,N} &= - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} \right) \\ \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_{S,N} &= \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_{P,N} &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial S \partial P} \right) \\ \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_{T,N} &= - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P,N} &= \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial P} \right) \\ \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{S,N} &= \left(\frac{\partial V}{\partial N} \right)_{S,P} &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial P \partial N} \right) \end{aligned}$$

* ראינו בתירגול (מה שלא ראינו בתירגול מומלץ להראות את החישוב)

חישוב יחסים בין דיפרנציאלים: דוגמה עם אנטלפיה:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{P,N} dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_{T,N} dP + \left(\frac{\partial H}{\partial N} \right)_{T,P} dN$$

אם H ו- N קבועים, אז

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{P,N} dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_{T,N} dP \\ &\quad - \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right) = \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_{T,N}}{\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{P,N}} \end{aligned}$$

6 הצבר הקנוני - T, V, N

מערכת סגורה שמבודדת מהסביבה, אבל יכולה להחליף אנרגיה עם הסביבה. למשל, מערכת שצמודה לאמבט חום. ההסתברות למצוא מיקרו-מצב μ :

$$P(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{Z(T,V,N)} e^{-\beta E(\mu)} & V(\mu) = V, N(\mu) = N \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

פונקציית החלוקה:

$$Z(T, V, N) = \sum_{\text{מצבים}} e^{-\beta E_{\text{מצב}}}$$

האנרגיה החופשית של הלמהולץ:

$$F = -k_B T \ln Z$$

האנרגיה הממוצעת של מערכת:

$$\langle E(T, V, N) \rangle = - \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{V,N} = k_B T^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_{V,N}$$

הפלקטואציה של אנרגיה:

$$(\Delta E(T, V, N))^2 = - \left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \right)_{V,N} = k_B T^2 \left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \right)_{V,N}$$

משפט החלוקה השווה: כל איבר ריבועי בקואורדינטות בביטוי לאנרגיה של אופני תנודה תורם $\frac{1}{2} k_B T$ לאנרגיה של המערכת

חישוב גדלים תרמודינמיים בצבר הקנוני:

1. נכתוב את האנרגיה של המערכת כתלות במצבים

2. נחשב את $Z(T, V, N) = \sum_{\hat{\mu}} e^{-\beta E(\hat{\mu})}$ לשים לב אם אנחנו רוצים להבחין בין חלקיקים. אם לא אז נרצה להוסיף את התיקון של גיבס.

3. נחשב את האנרגיה החופשית של הלמהולץ

4. נגזור גדלים תרמודינמיים. לדוגמה כדי לחשב אנטרופיה נחשב את הדיפרנציאל:

$$dF = dE - SdT - TdS$$

נציב את דיפרנציאל האנרגיה:

$$dF = (TdS - PdV + \mu dN) - SdT - TdS$$

נשים לב אילו גדלים לא משתנים ונאפס את הדיפרנציאל שלהם: $dF = -SdT + \mu \underbrace{dN}_0$ ונקבל את הקשר:

$$\langle S(T, N) \rangle = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_N$$

קיבול חום בנפח קבוע:

תגובה של טמפרטורה T במערכת כאשר נכנסת כמות מסוימת של חום Q ככל שקיבול החום גדול יותר, נדרש יותר חום כדי להעלות את הטמפרטורה.

$$C_V(T, V, N) = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{V, N} = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V, N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V, N}$$

פלקטואציה באנרגיה במערכת סגורה

$$\Delta E(T, V, N) = \sqrt{-\left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \right)_{V, N}} = \sqrt{k_B T^2 C_V(T, V, N)}$$

קיבול חום בלחץ קבוע:

$$C_P(T, P, N) = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{P, N} = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{P, N} + P \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P, N} = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{P, N} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P, N}$$

קומפרסביליות איזותרמית:

כיצד מגיב הלחץ P כאשר משנים נפח V בטמפרטורה T קבועה

$$\kappa_T(T, P, N) = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T, N}$$

קומפרסביליות אדיאבטית:

התליך דחיסה במערכת מבודדת, לא נכנס חום למערכת. התהליך איטי ובלי חיכוך.

$$\kappa_S(T, P, N) = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{S, N}$$

מקדם התפשטות תרמית:

כיצד מגיב הנפח V כאשר משנים טמפרטורה

$$\alpha_P(T, P, N) = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P, N}$$

קשרים בין פונקציות תגובה:

$$C_P = C_V + \frac{TV}{\kappa_T} \alpha_P^2 \quad \kappa_T = \kappa_S + \frac{TV}{C_P} \alpha_P^2$$

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V, N} = \frac{\alpha_P}{\kappa_T}$$

$$V(T, P, N) = f(N) \cdot \exp \left(\int_{T_0, P_0}^{T, P} \alpha_P(T, P, N) dT - \int_{T, P_0}^{T, P} \kappa_T(T, P, N) dP \right)$$

$$S(T, V, N) = \int_{T_0, V_0}^{T, V} \frac{C_V(T, V, N)}{T} dT + \int_{T, V_0}^{T, V} \frac{\alpha_P(T, V, N)}{\kappa_T(T, V, N)} dV + g(N)$$

$$E(T, V, N) = \int_{T_0, V_0}^{T, V} C_V(T, V, N) dT + \int_{T, V_0}^{T, V} \left(T \frac{\alpha_P(T, V, N)}{\kappa_T(T, V, N)} - P(T, V, N) \right) dV + h(N)$$

8 קרינת גוף שחור

ביטוי כללי לאנרגיה אלקטרומגנטית:

$$E = \frac{1}{2} \int_V \left(\epsilon_0 |\vec{E}(x, y, z, t)|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}(x, y, z, t)|^2 \right) dV$$

משוואות מקסוול:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

משוואות הגלים:

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

פתרון עם תנאי שפה מתאפסים (יש לנו חופש לבחור תנאי שפה):

$$\vec{E} = \sum_{n_x, n_y, n_z} \vec{E}_{\vec{n}}(t) \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L_z}\right)$$

$$\vec{B} = \sum_{n_x, n_y, n_z} \vec{B}_{\vec{n}}(t) \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L_z}\right)$$

אופן תנודה של גל בתדירות ω :

$$\omega = c |\vec{k}| = \pi c \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2}$$

צפיפות אנרגיה ספקטרלית: $u(T, \omega) = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial E}{\partial \omega} \right)_{T, V}$

חוק ריילי-ג'ינס: $u(T, \omega) = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2$ (מתאים רק לתדירויות מתחת לאולטרה סגול)

חוק פלאנק: $u(T, \omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1}$

כל אופן תנודה יכול לקבל אנרגיות המקיימות את המשוואה:

$$E_{n_x, n_y, n_z, p} = s_{n_x, n_y, n_z, p} \cdot \hbar \omega(n_x, n_y, n_z)$$

$$s_{n_x, n_y, n_z, p} \in \mathbb{N} \quad p \in \{1, 2\}$$

חוק סטפן-בולצמן: סך כל כמות האנרגיה שפולט גוף שחור ע"י קרינה ליחידת זמן וליחידת שטח

$$I = \frac{1}{A} \frac{E_{body}}{dt} = -\sigma T^4 \quad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^2}{60 \hbar^3 c^2} \approx 5.67 \cdot 10^{-8}$$

חוק ההסחה של וין: אורך הגל λ_{max} שבו גוף שחור יפלוט את מירב הקרינה

$$\lambda_{max} T = \alpha \quad \alpha = 2.90 \cdot 10^{-3} m$$

ניתן למצוא את α ע"י מציאת המקסימום של חוק פלאנק

$$Z_{n_x, n_y, n_z, p}(T, V) = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_{n_x, n_y, n_z, p}(s)}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta \hbar c}{L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}}$$

$$Z(T, V) = \prod_{n_x, n_y, n_z, p} Z_{n_x, n_y, n_z, p}(T, V)$$

$$= \prod_{n_x, n_y, n_z} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{\beta \hbar c}{L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}} \right)^2$$

9 הצבר הגרנד-קנוני - T, V, μ

הצבר שמתאר מערכות פתוחות בשיווי-משקל תרמודינמי. נפח תחום, אבל אנרגיה ומספר חלקיקים שלא נשמרים. רק V גודל שמור, T, μ קבועים בגבול התרמודינמי יש בדיוק $\langle N \rangle$ חלקיקים. ההסתברות למצוא מיקרו-מצב μ :

$$P(\bar{\mu}) = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{Z}(T, V, \mu)} e^{-\beta(E(\bar{\mu}) - \mu N(\bar{\mu}))} & V(\bar{\mu}) = V \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

** שימו לב שאם יש כמה מיקרומצבים שנותנים את אותו גודל צריך לסכום אותם, לדוגמה:

$$P(N = N_0) = \sum_{\bar{\mu}_{N_0}} \frac{1}{\mathcal{Z}(T, \mu)} e^{-\beta(E(\bar{\mu}_{N_0}) - \mu N_0)}$$

פונקציית החלוקה הגרנד-קנונית:

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \sum_{\bar{\mu}} e^{-\beta(E(\bar{\mu}) - \mu N(\bar{\mu}))}$$

לפעמים אפשר לחשב מתוך פונקציית החלוקה של הצבר הקנוני:

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \sum_N \mathcal{Z}(T, V, N) e^{\beta \mu N}$$

$$P(N = N_0) = \frac{\mathcal{Z}(T, V, N_0)}{\mathcal{Z}(T, V, \mu)} e^{-\beta \mu N_0}$$

הפוטנציאל הגרנד-קנוני:

$$\Omega(T, V, \mu) = -k_B T \ln \mathcal{Z}(T, V, \mu)$$

קשרים חשובים:

$$\langle E(T, V, \mu) \rangle = - \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta} \right)_{V, e^{\beta \mu}} \quad (\Delta E)^2 = - \left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \right)_{V, e^{\beta \mu}}$$

$$\langle N(T, V, \mu) \rangle = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu} \right)_{V, T} \quad (\Delta N)^2 = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu} \right)_{V, T}$$

חישוב גדלים תרמודינמיים בצבר הגרנד-קנוני: הצבר הגרנד-קנוני רלוונטי בעיקר בבעיות שיש אתרים (מצבים, מדפים, רמות אנרגיה)

1. נחשב את האנרגיה ומספר החלקיקים כתלות במצבי המערכת

2. נחשב את פונקציית החלוקה הגרנד-קנונית $\mathcal{Z}(T, V, \mu)$

3. נחשב את הפוטנציאל הגרנד-קנוני $\Omega(T, V, \mu)$

4. (לרוב) נחשב את $\langle N(T, V, \mu) \rangle$ וננסה לחלץ את $\mu(T, V, \langle N \rangle)$

5. נגזור מפונקציית החלוקה כל גודל תרמודינמי

התיקון של גיבס: בטמפרטורה גבוהה לחלקיקים יש מספר מאוד גדול של מיקרו-מצבים. אז אנחנו רוצים להזניח את הסיכוי ששני חלקיקים יהיו באותו מיקרו מצב

$$Z(T, N) \approx \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N Z_i(T) = \frac{1}{N!} Z_1(T)^N$$

לא נשתמש בקירוב במערכות עם טמפרטורות נמוכות או צפיפויות גבוהות.

**** עצה:** כשמחשבים גדלים כדאי לבדוק גבולות, לדוגמה: $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$

10 פרמיונים

חלקיקים המחויבים לחוק פאולי. כלומר לא ניתן להבחין בין פרמיונים מאותו סוג. לא יתכן ששני פרמיונים מאותו סוג יהיו באותו מצב קוונטי

הספין הכולל הוא בחצאי שלמים $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ דוגמאות - אלקטרונים, פרוטונים וניוטונים.

חוק האיסור של פאולי: לא יתכן ששני פרמיונים מאותו סוג יהיו באותו מצב קוונטי

פונקציית החלוקה הגרנד קנונית של פרמיונים:

$$\mathcal{Z}_\alpha(T, V, \mu) = \sum_{N_\alpha=0}^1 e^{-\beta(E_\alpha N_\alpha - \mu N_\alpha)} = 1 + e^{-\beta(E_\alpha - \mu)}$$

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \prod_\alpha \mathcal{Z}_\alpha(T, V, \mu) = \prod_\alpha \left(1 + e^{-\beta(E_\alpha - \mu)} \right)$$

התפלגות פרמי-דיראק: מספר הפרמיונים הממוצע מאותו סוג תחת פוטנציאל במצב α

$$\langle N_\alpha \rangle^{FD} = \frac{1}{e^{\beta(E_\alpha - \mu)} + 1}$$

בטמפרטורה $T = 0$ הפונקציה הופכת למדרגה עם קפיצה של:

$$\varepsilon_\alpha = \mu(T = 0, V, N)$$

אם $\varepsilon_\alpha < \mu(T = 0, V, N)$ אז בהכרח יש חלקיק במצב α

אם $\varepsilon_\alpha > \mu(T = 0, V, N)$ אז בהכרח אין חלקיק במצב α

החלקיקים ממלאים את רמות האנרגיה עד **אנרגיית פרמי**

$$\varepsilon_F = \mu(T = 0, V, N)$$

מספר חלקיקים במערכת פרמיונים:

$$N = \sum_\alpha \langle N_\alpha \rangle^{FD} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \langle N_{n,s} \rangle^{FD}$$

מעבר מסכום לאינטגרל: אם לא ניתן לחשב את הסכום, ניתן לעבור לאינטגרל כאשר ההפרש בין איברים רצופים קטן מספיק. לדוגמה אם המקדם של n קטן מספיק.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2}) - \beta \mu} + 1} \approx \int_{n=1}^{\infty} \frac{2 dn}{e^{\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2}) - \beta \mu} + 1}$$

התנאי: $\beta \hbar \omega \ll 1$

צפיפות מצבים: כאשר מסכמים על מספר משתנים, נגדיר $\varepsilon(n_x, n_y, n_z)$ ונחשב את צפיפות המצבים $g(\varepsilon)$.

$$N = \sum_s \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{g(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} d\varepsilon$$

עיבוי בוז-איינשטיין: כמעט כל החלקיקים יהיו יהיו במצב בו האנרגיה היא הנמוכה ביותר לכל טמפרטורה המקיימת

$$k_B T < \Delta E$$

(הפרש האנרגיות בין המצב המעורר הראשון למצב היסוד)

מספר חלקיקים במערכת בוזונים:

$$N(T, V, \mu) = \sum_{\alpha} \langle N_{\alpha} \rangle^{BE}$$

בדרך כלל ההפרש בין הרמה המעוררת הראשונה לרמת היסוד לא יהיה זניח אז נפריד את המחומר הראשון ואת שאר הסכום נהפוך לאינטגרל

$$N = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1} + \int_{\alpha_{excited}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\alpha} - \mu)} - 1} \\ \approx \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1} + \int_{\alpha_{all}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\alpha} - \mu)} - 1}$$

את ההפרדה הזאת עושים רק כשהטמפרטורה נמוכה מטמפרטורת העיבוי. לכן נצטרך לפעמים לחלק את התשובה למקרה שבו יש עיבוי ולמקרה שאין.

מעבר מאינטגרל של כמה משתנים: מוצאים את צפיפות המצבים ומחשבים אינטגרל חד-מימדי

$$\int_{n_x=1}^{\infty} \int_{n_y=1}^{\infty} \int_{n_z=1}^{\infty} d^3 n \approx \int_{\varepsilon_0}^{\infty} g(\varepsilon) d\varepsilon$$

טמפרטורת עיבוי: מחשבים את האינטגרל:

$$N = \int_{\alpha_{all}} \frac{d\alpha}{e^{\beta(\varepsilon_{\alpha} - \mu)} - 1}$$

מחלצים את T וזאת הטמפרטורה הקריטית. ככל שהטמפרטורה של המערכת נמוכה יותר מהטמפרטורה הקריטית, הרבה יותר חלקיקים ירדו לרמת היסוד

תנאי להתרחשות עיבוי בוז-איינשטיין:

$$\int_{\alpha_{all}} \frac{d\alpha}{e^{\beta(\varepsilon_{\alpha} - \mu)} - 1} < \infty$$

כאשר $T < T_C$ הפוטנציאל הכימי מאוד קרוב לרמת היסוד אז אפשר להציב $\varepsilon_0 = \mu$ באינטגרל.

פתרון בעיית בוזונים:

1. נחשב גדלים בטמפרטורות בהן אין עיבוי. נפתור את המשוואה

$$N(T, V, \mu) = \sum_{\alpha} \langle N_{\alpha} \rangle^{BE}$$

ונחלץ את μ

2. נחשב את החסם על מספר החלקיקים ברמות המעוררות

$$\int_{\alpha} \frac{d\alpha}{e^{\beta(\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_0)} - 1}$$

נבדוק אם מתבדר

3. נשווה את החסם ל- N ונחלץ את $T_C(V, N)$

4. מספר החלקיקים ברמות המעוררות שווה לחסם

$$\langle N_{ground} \rangle = N - \langle N_{excited} \rangle$$

5. נחשב גדלים כשיש עיבוי ונציב $\mu = \varepsilon_0$

חישוב אנרגיית פרמי ε_F :

בגבול $T \rightarrow 0$, התפלגות פרמי-דיראק הופכת לפונקציית מדרגה:

$$\langle N_{T=0}(\varepsilon) \rangle^{FD} = \begin{cases} 1 & \varepsilon < \varepsilon_F \\ 0 & \varepsilon > \varepsilon_F \end{cases}$$

לכן:

$$N = \sum_s \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_F} g(\varepsilon) d\varepsilon$$

צריך לבדוק ש $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ בגבול התרמודינמי ואז אפשר להציב 0 באינטגרל

מפה ניתן לחשב את אנרגיית פרמי ε_F

$$T_F = \frac{\varepsilon_F}{k_B} \quad \text{טמפרטורת פרמי:}$$

אנרגיית המערכת בטמפרטורות נמוכות:

$$E(T, V, N) = \sum_n \sum_s \langle N_{n,s} \rangle^{FD} \cdot \varepsilon_{n,s} \\ \approx \sum_s \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \varepsilon g(\varepsilon) \langle N(\varepsilon) \rangle^{FD} d\varepsilon$$

את שאר החישוב מבצעים עם קירוב זומרפלד.

גבולות: הגבול הקלאסי של גז פרמיונים הוא כאשר: $k_B T \gg \varepsilon_F$

טמפרטורת פרמי: $T_F = \frac{\varepsilon_F}{k_B}$

כאשר $T \gg T_F$ המערכת מתנהגת קלאסית. (** חשוב לקחת בחשבון את התיקון של גיבס במקרה הקלאסי) אבל כאשר $T \ll T_F$ אז המערכת מתנהגת קוונטית.

קירוב זומרפלד:

$$\int_{\varepsilon_0}^{\infty} H(\varepsilon) \langle N(\varepsilon) \rangle^{FD} d\varepsilon \approx \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_F} H(\varepsilon) d\varepsilon + \\ + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left(\left. \frac{dH}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} - H(\varepsilon_F) \frac{d \ln g_{tot}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} \right) \\ g_{tot}(\varepsilon) = \sum_s g_s(\varepsilon)$$

11 בוזונים

חלקיקים שלא מחויבים לחוק איסור מסוים. לא ניתן להבחין בני בוזונים מאותו סוג.

הספין הכולל הוא בשלמים $1, 2, 3, \dots$

דוגמאות - אטומי ומולקולות מימן H_1^1 , אטומי הליום H_2^4 **פונקציית החלוקה הגרנד-קנונית:**

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \prod_{\alpha} \mathcal{Z}_{\alpha}(T, V, \mu) = \prod_{\alpha} \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_{\alpha} - \mu)}}$$

התפלגות בוז-איינשטיין: מספר הבוזונים הממוצע מאותו סוג תחת פוטנציאל במצב α

$$\langle N_{\alpha} \rangle^{BE} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\alpha} - \mu)} - 1}$$

בטמפרטורה

12 תהליכים הפיכים

כלל אצבע - אם תראה וידאו של תהליך כלשהו ואז מישהו יגיד לך שהוידאו היה ב reverse ולא חשדת אז התהליך הפיך תהליך הפיך:

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

תהליך בלתי-הפיך:

$$dS > \frac{dQ}{T}$$

מכונת חום: חום נכנס - Q_H

חום יוצא - Q_C

$$Q_H = |Q_C| + |W|$$

נצילות של מכונת חום:

$$\eta_{eng} = \frac{|W|}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_H}$$

13 מתמטיקות

נוסחת סטירלינג:

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

טורי טיילור:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad |x| < 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad |x| \leq 1$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

קומבינטוריקה:

עם חשיבות לסדר	ללא חשיבות לסדר	
$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	בלי חזרות
n^k	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	עם חזרות

נפחים ב-d מימדים:

$$V_{\text{פירמידה}} = \frac{a^d}{d!}, \quad V_{\text{כדור}} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} R^d,$$

$$V_{\text{אליפסואיד}} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \prod_{i=1}^d r_i$$

$$d = 2: \quad V_{\text{משולש}} = \frac{a^2}{2}, \quad V_{\text{עיגול}} = \pi R^2, \quad V_{\text{אליפסה}} = \pi ab$$

$$d = 3: \quad V_{\text{סטרהדרון}} = \frac{a^3}{6}, \quad V_{\text{כדור}} = \frac{4\pi R^3}{3}, \quad V_{\text{אליפסואיד}} = \frac{4\pi abc}{3}$$

* שימו לב אם צריך רק את הרביע הראשון אז לחלק ב- 2^d

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (\text{by parts})$$

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}, \quad a > 0, \quad n > -1$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} \quad (\text{normalization of standard normal})$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma$$

$$\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma^3$$

$$\int e^{-x^2} x dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

$$\int e^{ikx} dx = \frac{e^{ikx}}{ik} + C, \quad k \neq 0 \quad (\text{complex exponential})$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} e^{ikx} dx = \sqrt{\pi} e^{-k^2/4} \quad (\text{Fourier of Gaussian})$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi n_1 x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n_2 x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{n_1, n_2}$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{\pi n_1 x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi n_2 x}{L}\right) dx = \begin{cases} L & \text{if } n_1 = n_2 = 0 \\ \frac{L}{2} & \text{if } n_1 = n_2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi n_1 x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi n_2 x}{L}\right) dx = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{ae^x - 1} dx = 2Li_3\left(\frac{1}{a}\right)$$

הסתברות:

$$\langle X \rangle = \sum_i x_i P(x_i) \quad \text{או} \quad \int_{x_i}^{x_f} x f(x) dx \quad \text{תוחלת:}$$

$$\langle X^2 \rangle = \sum_i x_i^2 P(x_i) \quad \text{או} \quad \int_{x_i}^{x_f} x^2 f(x) dx \quad \text{מומנט שני:}$$

$$\sigma = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} \quad \text{פלסטואציה:}$$