דף נוסחאות - סטתרמית

1 מכניקה סטטיסטית - צברים ואנטרופיה

גדלים תרמודינמיים:
גדלים אקסטנסיביים - גדלים שפרופורציונלי לגודל המערכת.
לדוגמה: E, V, N, S
$S(\lambda E, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(E, V, N)$
גדלים אינטנסיביים - גדלים שלא תלויים בגודל המערכת. לדוגמה:
T, P, μ
$T(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = T(S, V, N)$

ספירת מצבים בדידים למערכת עם אנרגיה קבועה:

1. נכתוב את האנרגיה כתלות במצבים:

$$E(n_1, \cdots, n_N) = E_0$$

2. נחשב את הנפח שהמשטח חוסם, נחלק ביחידת נפח של מצב אחד — ונקבל את מספר המצבים בתוך המשטח $\Sigma(E, N)$

3. נגזור לפי E ונכפול ב-ε (יחידת אנרגיה קטנה של הבעיה):

$$\Omega(E, N) = \underbrace{\frac{d\Sigma(E, N)}{dE}}_{g} \cdot \varepsilon$$

ונקבל את מספר המצבים המותרים בתחום $\left[E - \frac{\varepsilon}{2},\, E + \frac{\varepsilon}{2}\right]$

אנטרופיה: $S(E,\, V,\, N) \;=\; k_B \,\ln \Omega(E, V, N)$

טמפרטורה: $\beta = \frac{1}{k_B\, T}$ $\qquad \frac{1}{T} \;=\; \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}$

הגבול התרמודינמי:

$$E \to \infty, \quad V \to \infty, \quad N \to \infty$$
$$\frac{E}{V} \to \text{const}, \quad \frac{N}{V} \to \text{const}, \quad \frac{E}{N} \to \text{const}$$

דיפרנציאלים:
דיפרנציאל שלם אם ורק אם $\left(\frac{\partial f_x}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f_y}{\partial x}\right)$

$$dE = \underbrace{TdS}_{đQ} + \underbrace{(-PdV + \mu dN)}_{đW}$$

* בתהליך התפשטות איטי, האנטרופיה לא משתנה, אז $dS = 0$.

2 הצבר המיקרוקנוני - E, V, N

מערכת מבודדת עם אנרגיה, נפח, ומספר חלקיקים קבועים
ההסתברות למצוא מיקרו-מצב μ:

$$P(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega(E,V,N)} & E(\mu) = E, V(\mu) = V, N(\mu) = N \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

חישוב גדלים תרמודינמיים בצבר המיקרוקנוני:

1. נכתוב את האנרגיה כתלות במיקרו-מצבי המערכת
2. נחשב את $\Omega(E, V, N)$ ע"י ספירת המצבים כתלות בגדלים
3. נחשב את הקשר היסודי $S(E, V, N) = k_B \ln \Omega(E, V, N)$
4. נגזור כל גודל תרמודינמי

3 אנרגיות חופשית / פוטנציאלים תרמודינמיים

* כל האנרגיות החופשיות הן פונקציות אקסטנסיביות ואדיטיביות.
שיווי משקל תרמודינמי:
במערכת מבודדת ש-α גודל משתנה בה

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)_{E,V,N,\cdots} = 0$$

אנרגיה פנימית: הקשר היסודי

$$E = E(S,\, V,\, N)$$

האנרגיה החופשית של הלמהולץ: T קבועה בשיווי משקל תרמודינמי F מינימלי

$$F(T,\, V,\, N) \;=\; E \;-\; T\,S$$

אנתלפיה: P קבוע

$$H(S,\, P,\, N) \;=\; E \;+\; P\,V$$

האנרגיה החופשית של גיבס: T, P קבועים

$$G(T,\, P,\, N) \;=\; E \;-\; T\,S \;+\; P\,V$$

הפוטנציאל הגרנד-קנוני: T, μ קבועים

$$\Omega(T,\, V,\, \mu) \;=\; E \;-\; T\,S \;-\; \mu\,N$$

(נכון גם לערכים ממוצעים)

4 גז אידאלי ואנרגיה קינטית

חוק הגז האידאלי:

$[P] = 1\,\text{atm} = 1.013 \times 10^5\,\text{Pa}$
$[V] = 10^3\,\text{L} = 1\,\text{m}^3$
$[T] = \text{K}$

$$P\,V = N\,k_B\,T$$

אנרגיה קינטית ממוצעת של חלקיק גז אידאלי: $\langle E \rangle \;=\; \frac{3}{2}\,k_B\,T$

קשר יסודי של גז אידאלי:

$$S(E,\, V,\, N) \;=\; Nk_B \ln\left[a\frac{V}{N^{\frac{5}{2}}}E^{\frac{3}{2}}\right] \qquad a = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi m\right)^{\frac{3}{2}}}{h^3}e^{\frac{5}{2}}$$

אוסילטור הרמוני: אנרגיה

$$E \;=\; \frac{p_0^2}{2\,m} \;+\; \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x_0^2$$

האנרגיה הקינטית הממוצעת

$$\langle E_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0\,dp_0}{2\pi\hbar}\,\left(\frac{p_0^2}{2\,m}\right)\,P(x_0,\,p_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0\,dp_0}{h}\,\left(\frac{p_0^2}{2\,m}\right)\,P(x_0,\,p_0)$$

5 גדלים תרמודינמיים והתמרת לז'נדר

לחץ:

$$P\;=\;T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N}\;=\;-\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N}$$

פוטנציאל כימי:

$$\mu\;=\;-T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{E,V}\;=\;\left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V}$$

התמרת לז'נדר:

במשתנה יחיד $Y(X)\to\psi(P)$

1. נוודא ש- $Y(X)$ קעורה ממש או קמורה ממש בקטע
2. נגזור $P(X)=\frac{dY}{dX}$
3. נהפוך את הקשר ונקבל $X(P)$
4. נציב את הקשר ההפוך בביטוי $\psi(P)=Y(X(P))-PX(P)$

ב- n משתנים $Y(\vec{X})\to\psi(\vec{P})$

1. נוודא שהפונקציה $Y(\vec{X})$ קמורה ממש או קעורה ממש בתחום בו מתבצעת הטרנספורמציה.
2. נגזור: עבור כל משתנה X_i, נגדיר את $P_i=\frac{\partial Y}{\partial X_i}$.
3. נהפוך את מערכת הקשרים ונקבל את $\vec{X}(\vec{P})$ — כלומר, מבטאים את כל X_i כפונקציה של המשתנים P_i.
4. נגדיר את הפונקציה החדשה:

$$\psi(\vec{P})=\left[\sum_{i=1}^{n}P_iX_i(\vec{P})\right]-Y\left(\vec{X}(\vec{P})\right)$$

יחסי מקסוול:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N}&=-\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,N} &&=\left(\frac{\partial^2 E}{\partial S\partial V}\right)\\
*\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N}&=\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} &&=-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\right)\\
\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,N}&=\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{P,N} &&=\left(\frac{\partial^2 H}{\partial S\partial P}\right)\\
\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N}&=-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N} &&=\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T\partial P}\right)\\
\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_{S,N}&=\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_{S,P} &&=\left(\frac{\partial^2 H}{\partial P\partial N}\right)
\end{aligned}$$

* ראינו בתירגול (מה שלא ראינו בתירגול מומלץ להראות את החישוב)

חישוב יחסים בין דיפרנציאלים: דוגמה עם אנתלפיה:

$$dH=\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N}dT+\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{T,N}dP+\left(\frac{\partial H}{\partial N}\right)_{T,P}dN$$

אם H ו-N קבועים, אז

$$0=\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N}dT+\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{T,N}dP$$

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)=\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{T,N}}{\left(\frac{\partial H}{\partial N}\right)_{T,P}}$$

6 הצבר הקנוני - T,V,N

מערכת סגורה שמבודדת מהסביבה, אבל יכולה להחליף אנרגיה עם הסביבה. למשל, מערכת שצמודה לאמבט חום.
ההסתברות למצוא מיקרו-מצב μ:

$$P(\mu)=\begin{cases}\frac{1}{Z(T,V,N)}e^{-\beta E(\mu)} & V(\mu)=V,N(\mu)=N\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

פונקציית החלוקה:

$$Z(T,V,N)=\sum_{\text{מצבים}}e^{-\beta E_{\text{מצב}}}$$

האנרגיה החופשית של הלמהולץ:

$$F=-k_BT\ln Z$$

האנרגיה הממוצעת של מערכת:

$$\langle E(T,V,N)\rangle=-\left(\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta}\right)_{V,N}=k_BT^2\left(\frac{\partial\ln Z}{\partial T}\right)_{V,N}$$

הפלקטואציה של אנרגיה:

$$(\Delta E(T,V,N))^2=-\left(\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta}\right)_{V,N}=k_BT^2\left(\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}\right)_{V,N}$$

משפט החלוקה השווה: כל איבר ריבועי בקואורדינטות בביטוי לאנרגיה של אופני תנודה תורם $\frac{1}{2}k_BT$ לאנרגיה של המערכת

חישוב גדלים תרמודינמיים בצבר הקנוני:

1. נכתוב את האנרגיה של המערכת כתלות במצבים
2. נחשב את $Z(T,V,N)=\sum_{\hat{\mu}}e^{-\beta E(\hat{\mu})}$ לשים לב אם אנחנו רוצים להבחין בין חלקיקים. אם לא אז נרצה להוסיף את התיקון של גיבס.
3. נחשב את האנרגיה החופשית של הלמהולץ
4. נגזור גדלים תרמודינמיים.
לדוגמה כדי לחשב אנטרופיה נחשב את הדיפרנציאל:

$$dF=dE-SdT-TdS$$

נציב את דיפרנציאל האנרגיה:

$$dF=(TdS-PdV+\mu dN)-SdT-TdS$$

נשים לב אילו גדלים לא משתנים ונאפס את הדיפרנציאל שלהם: $dF=-SdT+\mu\underbrace{dN}_{0}$ ונקבל את הקשר:

$$\langle S(T,N)\rangle=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_N$$

7 פונקציות תגובה

קיבול חום בנפח קבוע:
תגובה של טמפרטורה T במערכת כאשר נכנסת כמות מסוימת של חום Q ככל שקיבול החום גדול יותר, נדרש יותר חום כדי להעלות את הטמפרטורה.

$$C_V\left(T,V,N\right)=\left(\frac{đQ}{dT}\right)_{V,N}=\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N}=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N}$$

פלקטואציה באנרגיה במערכת סגורה

$$\Delta E\left(T,V,N\right)=\sqrt{-\left(\frac{\partial\left\langle E\right\rangle}{\partial\beta}\right)_{V,N}}=\sqrt{k_BT^2C_V\left(T,V,N\right)}$$

קיבול חום בלחץ קבוע:

$$\begin{aligned}C_P\left(T,P,N\right)&=\left(\frac{đQ}{dT}\right)_{P,N}=\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{P,N}+P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}\\&=\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N}=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N}\end{aligned}$$

קומפרסביליות איזותרמית:
כיצד מגיב הלחץ P כאשר משנים נפח V בטמפרטורה T קבועה

$$\kappa_T\left(T,P,N\right)=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N}$$

קומפרסביליות אדיאבטית:
תהליך דחיסה במערכת מבודדת, לא נכנס חום למערכת. התהליך איטי ובלי חיכוך.

$$\kappa_S\left(T,P,N\right)=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S,N}$$

מקדם התפשטות תרמית:
כיצד מגיב הנפח V כאשר משנים טמפרטורה

$$\alpha_P\left(T,P,N\right)=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}$$

קשרים בין פונקציות תגובה:

$$C_P=C_V+\frac{TV}{\kappa_T}\alpha_P^2\qquad\qquad\kappa_T=\kappa_S+\frac{TV}{C_P}\alpha_P^2$$

$$\frac{C_P}{C_V}=\frac{\kappa_T}{\kappa_S}\qquad\qquad\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N}=\frac{\alpha_P}{\kappa_T}$$

$$\begin{aligned}V\left(T,P,N\right)=f(N)\cdot\exp\bigg(&\int_{T_0,P_0}^{T,P_0}\alpha_P\left(T,P,N\right)\,dT\\&-\int_{T,P_0}^{T,P}\kappa_T\left(T,P,N\right)\,dP\bigg)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S\left(T,V,N\right)=&\int_{T_0,V_0}^{T,V_0}\frac{C_V\left(T,V,N\right)}{T}\,dT\\&+\int_{T,V_0}^{T,V}\frac{\alpha_P\left(T,V,N\right)}{\kappa_T\left(T,V,N\right)}\,dV+g(N)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\left(T,V,N\right)=&\int_{T_0,V_0}^{T,V_0}C_V\left(T,V,N\right)\,dT\\&+\int_{T,V_0}^{T,V}\left(T\frac{\alpha_P\left(T,V,N\right)}{\kappa_T\left(T,V,N\right)}-P\left(T,V,N\right)\right)dV+h(N)\end{aligned}$$

8 קרינת גוף שחור

ביטוי כללי לאנרגיה אלקטרומגנטית:

$$E=\frac{1}{2}\int_V\left(\epsilon_0\left|\vec{E}(x,y,z,t)\right|^2+\frac{1}{\mu_0}\left|\vec{B}(x,y,z,t)\right|^2\right)dV$$

משוואות מקסוול:

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\qquad\qquad\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\qquad\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

משוואות הגלים:

$$\nabla^2\vec{E}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$$

$$\nabla^2\vec{B}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

פתרון עם תנאי שפה מתאפסים (יש לנו חופש לבחור תנאי שפה):

$$\vec{E}=\sum_{n_x,n_y,n_z}\vec{E}_{\vec{n}}(t)\sin\left(\frac{n_x\pi x}{L_x}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{L_y}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{L_z}\right)$$

$$\vec{B}=\sum_{n_x,n_y,n_z}\vec{B}_{\vec{n}}(t)\sin\left(\frac{n_x\pi x}{L_x}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{L_y}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{L_z}\right)$$

אופן תנודה של גל בתדירות ω:

$$\omega=c\left|\vec{k}\right|=\pi c\sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2+\left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2+\left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2}$$

צפיפות אנרגיה ספקטרלית: $u(T,\omega)=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial E}{\partial\omega}\right)_{T,V}$

חוק ריילי-ג'ינס: $u(T,\omega)=\frac{k_BT}{\pi^2c^3}\omega^2$
(מתאים רק לתדירויות מתחת לאולטרה סגול)

חוק פלאנק: $u(T,\omega)=\frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}}-1}$
כל אופן תנודה יכול לקבל אנרגיות המקיימות את המשוואה:

$$E_{n_x,n_y,n_z,p}=s_{n_x,n_y,n_z,p}\cdot\hbar\omega(n_x,n_y,n_z)$$
$$s_{n_x,n_y,n_z,p}\in\mathbb{N}\qquad p\in\{1,2\}$$

חוק סטפן-בולצמן: סך כל כמות האנרגיה שפולט גוף שחור ע"י קרינה ליחידת זמן וליחידת שטח

$$I=\frac{1}{A}\frac{E_{body}}{dt}=-\sigma T^4\qquad\sigma=\frac{\pi^2k_B^2}{60\hbar^3c^2}\approx5.67\cdot10^{-8}$$

חוק ההסחה של וין: אורך הגל $\lambda_{\max}$ שבו גוף שחור יפלוט את מירב הקרינה

$$\lambda_{\max}T=\alpha\qquad\alpha=2.90\cdot10^-3\,m$$

ניתן למצוא את α ע"י מציאת המקסימום של חוק פלאנק

פונקציית החלוקה של גוף שחור:

$$\begin{aligned} Z_{n_x,n_y,n_z,p}\left(T,V\right) &= \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\beta\epsilon_{n_x,n_y,n_z,p}(s)} \\ &= \frac{1}{1-e^{-\frac{\beta\pi\hbar c}{L}\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}}} \\ Z\left(T,V\right) &= \prod_{n_x,n_y,n_z,p} Z_{n_x,n_y,n_z,p}\left(T,V\right) \\ &= \prod_{n_x,n_y,n_z}\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{\beta\pi\hbar c}{L}\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}}}\right)^2 \end{aligned}$$

9 הצבר הגרנד-קנוני - T,V,μ

הצבר שמתאר מערכות **פתוחות** בשיווי-משקל תרמודינמי. נפח תחום, אבל אנרגיה ומספר חלקיקים שלא נשמרים. רק V גודל שמור, T,μ קבועים בגבול התרמודינמי יש בדיוק $\langle N\rangle$ חלקיקים.

ההסתברות למצוא מיקרו-מצב μ:

$$P\left(\bar{\mu}\right)=\begin{cases}\frac{1}{\mathcal{Z}(T,V,\mu)}e^{-\beta\left(E(\bar{\mu})-\mu N(\bar{\mu})\right)} & V\left(\bar{\mu}\right)=V\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

** שימו לב שאם יש כמה מיקרומצבים שנותנים את אותו גודל צריך לסכום אותם, לדוגמה:

$$P\left(N=N_0\right)=\sum_{\bar{\mu}_{N_0}}\frac{1}{\mathcal{Z}\left(T,\mu\right)}e^{-\beta\left(E\left(\bar{\mu}_{N_0}\right)-\mu N_0\right)}$$

פונקציית החלוקה הגרנד-קנונית:

$$\mathcal{Z}\left(T,V,\mu\right)=\sum_{\bar{\mu}}e^{-\beta\left(E(\bar{\mu})-\mu N(\bar{\mu})\right)}$$

לפעמים אפשר לחשב מתוך פונקציית החלוקה של הצבר הקנוני:

$$\mathcal{Z}\left(T,V,\mu\right)=\sum_{N}Z\left(T,V,N\right)e^{\beta\mu N}$$

$$P\left(N=N_0\right)=\frac{Z\left(T,V,N_0\right)}{\mathcal{Z}\left(T,V,\mu\right)}e^{-\beta\mu N_0}$$

הפוטנציאל הגרנד-קנוני:

$$\Omega\left(T,V,\mu\right)=-k_BT\ln\mathcal{Z}\left(T,V,\mu\right)$$

קשרים חשובים:

$$\langle E\left(T,V,\mu\right)\rangle=-\left(\frac{\partial\ln\mathcal{Z}}{\partial\beta}\right)_{V,e^{\beta\mu}}\qquad\left(\Delta E\right)^2=-\left(\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta}\right)_{V,e^{\beta\mu}}$$

$$\langle N\left(T,V,\mu\right)\rangle=\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial\ln\mathcal{Z}}{\partial\mu}\right)_{V,T}\qquad\left(\Delta N\right)^2=\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial\mu}\right)_{V,T}$$

חישוב גדלים תרמודינמיים בצבר הגרנד-קנוני: הצבר הגרנד-קנוני רלוונטי בעיקר בבעיות שיש אתרים (מצבים, מדפים, רמות אנרגיה)

1. נחשב את האנרגיה ומספר החלקיקים כתלות במצבי המערכת
2. נחשב את פונקציית החלוקה הגרנד-קנונית $\mathcal{Z}\left(T,V,\mu\right)$
3. נחשב את הפוטנציאל הגרנד-קנוני $\Omega\left(T,V,\mu\right)$
4. (לרוב) נחשב את $\langle N\left(T,V,\mu\right)\rangle$ וננסה לחלץ את $\mu\left(T,V,\langle N\rangle\right)$
5. נגזור מפונקציית החלוקה כל גודל תרמודינמי

התיקון של גיבס: בטמפרטורה גבוהה לחלקיקים יש מספר מאוד גדול של מיקרו-מצבים. אז אנחנו רוצים להזניח את הסיכוי ששני חלקיקים יהיו באותו מיקרו מצב

$$Z\left(T,N\right)\approx\frac{1}{N!}\prod_{i=1}^{N}Z_i\left(T\right)=\frac{1}{N!}Z_1\left(\left(T\right)\right)^N$$

לא נשתמש בקירוב במערכות עם טמפרטורות נמוכות או צפיפויות גבוהות.

** עצה: כשמחשבים גדלים כדאי לבדוק גבולות, לדוגמה: $\lim_{T\to0}S=0$

10 פרמיונים

חלקיקים המחויבים לחוק פאולי. הספין הכולל הוא בחצאי שלמים $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \cdots$.
דוגמאות: אלקטרונים, פרוטונים וניוטרונים.
חוק האיסור של פאולי: לא יתכן ששני פרמיונים מאותו סוג יהיו באותו מצב קוונטי

פונקציית החלוקה הגרנד קנונית של פרמיונים:

$$\mathcal{Z}_\alpha (T,V,\mu) = \sum_{N_\alpha=0}^{1} e^{-\beta(E_\alpha N_\alpha - \mu N_\alpha)} = 1 + e^{-\beta(E_\alpha - \mu)}$$

$$\mathcal{Z} (T,V,\mu) = \prod_\alpha \mathcal{Z}_\alpha (T,V,\mu) = \prod_\alpha \left(1 + e^{-\beta(E_\alpha - \mu)}\right)$$

התפלגות פרמי-דיראק: מספר הפרמיונים הממוצע מאותו סוג במצב α:

$$\langle N_\alpha \rangle^{FD} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} + 1}$$

מספר חלקיקים במערכת:

$$N = \sum_\alpha \langle N_\alpha \rangle^{FD} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \langle N_{n,s} \rangle^{FD}$$

מעבר מסכום לאינטגרל: כאשר ההפרש בין איברים רצופים קטן מספיק:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{\beta\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)-\beta\mu} + 1} \approx \int_{n=1}^{\infty} \frac{2\,dn}{e^{\beta\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)-\beta\mu} + 1}$$

התנאי: $\beta\hbar\omega \ll 1$

צפיפות מצבים: כאשר מסכמים על מספר משתנים, נגדיר $\varepsilon(n_x, n_y, n_z)$ ונחשב את צפיפות המצבים $g(\varepsilon)$:

$$N = \sum_s \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{g(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}\, d\varepsilon$$

אנרגיית פרמי: בטמפרטורה $T = 0$, התפלגות פרמי-דיראק הופכת לפונקציית מדרגה:

$$\langle N_{T=0}(\varepsilon) \rangle^{FD} = \begin{cases} 1 & \varepsilon < \varepsilon_F \\ 0 & \varepsilon > \varepsilon_F \end{cases}$$

החלקיקים ממלאים את רמות האנרגיה עד **אנרגיית פרמי:**

$$\varepsilon_F = \mu\,(T = 0, V, N)$$

ולכן:

$$N = \sum_s \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

טמפרטורת פרמי:

$$T_F = \frac{\varepsilon_F}{k_B}$$

אנרגיית המערכת:

$$E\,(T,V,N) = \sum_n \sum_s \langle N_{n,s} \rangle^{FD} \cdot \varepsilon_{n,s}$$
$$\approx \sum_s \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \varepsilon g\,(\varepsilon)\, \langle N(\varepsilon) \rangle^{FD}\, d\varepsilon$$

קירוב זומרפלד: עבור טמפרטורות נמוכות ($T \ll T_F$):

$$\int_{\varepsilon_0}^{\infty} H(\varepsilon) \left\langle N(\varepsilon) \right\rangle^{\mathrm{FD}} d\varepsilon \approx \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_F} H(\varepsilon)\, d\varepsilon +$$
$$+ \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left(\left.\frac{dH}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} - H(\varepsilon_F) \left.\frac{d \ln g_{\mathrm{tot}}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} \right)$$

כאשר $g_{\mathrm{tot}}\,(\varepsilon) = \sum_s g_s\,(\varepsilon)$

גבולות קלאסי וקוונטי: **גבול קלאסי:** $T \gg T_F$ (כלומר $k_B T \gg \varepsilon_F$)
במקרה זה המערכת מתנהגת קלאסית.
חשוב: יש לקחת בחשבון את התיקון של גיבס במקרה הקלאסי.
גבול קוונטי: $T \ll T_F$
במקרה זה המערכת מתנהגת קוונטית ויש להשתמש בקירוב זומרפלד.

11 בוזונים

חלקיקים שלא מחויבים לחוק איסור מסוים. לא ניתן להבחין בני בוזונים מאותו סוג.
הספין הכולל הוא בשלמים $1,2,3,\cdots$
דוגמאות - אטומי ומולקולות מימן H_1^1 , אטומי הליום H_2^4
הפוטנציאל הכימי μ תמיד יהיה קטן מהאנרגיה של המצב היסודי ε_0.

פונקציית החלוקה הגרנד-קנונית:

$$\mathcal{Z}(T,V,\mu)=\prod_{\alpha}\mathcal{Z}_{\alpha}(T,V,\mu)=\prod_{\alpha}\frac{1}{1-e^{-\beta(\varepsilon_{\alpha}-\mu)}}$$

התפלגות בוז-אינשטיין: מספר הבוזונים הממוצע מאותו סוג תחת פוטנציאל במצב α

$$\langle N_{\alpha}\rangle^{BE}=\frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha}-\mu)}-1}$$

בטמפרטורה

עיבוי בוז-איינשטיין: כמעט כל החלקיקים יהיו יהיו במצב בו האנרגיה היא הנמוכה ביותר לכל טמפרטורה המקיימת

$$k_BT<\Delta E$$

(הפרש האנרגיות בין המצב המעורר הראשון למצב היסוד)

מספר חלקיקים במערכת בוזונים:

$$N(T,V,\mu)=\sum_{\alpha}\langle N_{\alpha}\rangle^{BE}$$

בדרך כלל ההפרש בין הרמה המעוררת הראשונה לרמת היסוד לא יהיה זניח אז נפריד את המחובר הראשון ואת שאר הסכום נהפוך לאינטגרל

$$N=\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_0-\mu)}-1}+\int_{\alpha_{\text{excited}}}\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\alpha}-\mu)}-1}$$
$$\approx\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_0-\mu)}-1}+\int_{\alpha_{\text{all}}}\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\alpha}-\mu)}-1}$$

את ההפרדה הזאת עושים רק כשהטמפרטורה נמוכה מטמפרטורת העיבוי. לכן נצטרך לפעמים לחלק את התשובה למקרה שבו יש עיבוי ולמקרה שאין.
מעבר מאינטגרל של כמה משתנים: מוצאים את צפיפות המצבים ומחשבים אינטגרל חד-מימדי

$$\int_{n_x=1}^{\infty}\int_{n_y=1}^{\infty}\int_{n_z=1}^{\infty}d^3n\approx\int_{\varepsilon_0}^{\infty}g(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

טמפרטורת עיבוי: מחשבים את האינטגרל:

$$N=\int_{\alpha_{\text{all}}}\frac{d\alpha}{e^{\beta(\varepsilon_{\alpha}-\mu)}-1}$$

מחלצים את T וזאת הטמפרטורה הקריטית. ככל שהטמפרטורה של המערכת נמוכה יותר מהטמפרטורה הקריטית, הרבה יותר חלקיקים ירדו לרמת היסוד
תנאי להתרחשות עיבוי בוז-אינשטיין:

$$\int_{\alpha_{\text{all}}}\frac{d\alpha}{e^{\beta(\varepsilon_{\alpha}-\mu)}-1}<\infty$$

כאשר $T<T_C$ הפוטנציאל הכימי מאוד קרוב לרמת היסוד אז אפשר להציב $\varepsilon_0=\mu$ באינטגרל.

פתרון בעיית בוזונים:

1. נחשב גדלים בטמפרטורות בהן אין עיבוי. נפתור את המשוואה

$$N(T,V,\mu)=\sum_{\alpha}\langle N_{\alpha}\rangle^{BE}$$

ונחלץ את μ

2. נחשב את החסם על מספר החלקיקים ברמות המעוררות

$$\int_{\alpha}\frac{d\alpha}{e^{\beta(\varepsilon_{\alpha}-\varepsilon_0)}-1}$$

נבדוק אם מתבדר

3. נשווה את החסם ל-N ונחלץ את $T_C(V,N)$

4. מספר החלקיקים ברמות המעוררות שווה לחסם

$$\langle N_{ground}\rangle=N-\langle N_{excited}\rangle$$

5. נחשב גדלים כשיש עיבוי ונציב $\mu=\varepsilon_0$

12 תהליכים הפיכים

כלל אצבע - אם תראה וידאו של תהליך כלשהו ואז מישהו יגיד לך שהוידאו היה בrevese ולא חשדת אז התהליך הפיך
תהליך הפיך:

$$dS=\frac{\text{đ}Q}{T}$$

תהליך בלתי-הפיך:

$$dS>\frac{\text{đ}Q}{T}$$

מכונת חום: חום נכנס - Q_H
חום יוצא - Q_C

$$Q_H=|Q_C|+|W|$$

נצילות של מכונת חום:

$$\eta_{eng}=\frac{|W|}{Q_H}=1-\frac{|Q_C|}{Q_H}$$

13 מתמטיקות

נוסחת סטירלינג:

$$N! \;\approx\; \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N$$
$$\ln N! \;\approx\; N\ln N \;-\; N$$

טורי טיילור:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\quad |x|<1$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots\quad |x|<1$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\quad |x|\le 1$$

$$\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

קומבינטוריקה:

	ללא חשיבות לסדר	**עם חשיבות לסדר**
בלי חזרות	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$	$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$
עם חזרות	$\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	n^k

נפחים ב-d מימדים:

$$V_{\text{פירמידה}}=\frac{a^d}{d!},\qquad V_{\text{כדור}}=\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}R^d,$$

$$V_{\text{אליפסואיד}}=\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\prod_{i=1}^{d}r_i$$

$$d=2:\quad V_{\text{משולש}}=\frac{a^2}{2},\quad V_{\text{עיגול}}=\pi R^2,\quad V_{\text{אליפסה}}=\pi ab$$

$$d=3:\quad V_{\text{טטרהדרון}}=\frac{a^3}{6},\quad V_{\text{כדור}}=\frac{4\pi R^3}{3},\quad V_{\text{אליפסואיד}}=\frac{4\pi abc}{3}$$

* שימו לב אם צריך רק את הרביע הראשון אז לחלק ב- 2^d

אינטגרלים:

$$\int x^n e^{ax}\,dx=\frac{x^n e^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx\quad\text{(by parts)}$$

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}},\quad a>0$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\,dx=\frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}},\quad a>0,\ n>-1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx=\sqrt{2\pi}\quad\text{(normalization of standard normal)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx=\sqrt{2\pi}\cdot\sigma$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx=\sqrt{2\pi}\cdot\sigma^3$$

$$\int e^{-x^2}x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx=1$$

$$\int e^{ikx}\,dx=\frac{e^{ikx}}{ik}+C,\quad k\neq 0\quad\text{(complex exponential)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{ikx}\,dx=\sqrt{\pi}\,e^{-k^2/4}\quad\text{(Fourier of Gaussian)}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi n_1 x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n_2 x}{L}\right)\,dx=\frac{L}{2}\delta_{n_1,n_2}$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{\pi n_1 x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi n_2 x}{L}\right)\,dx=\begin{cases}L & \text{if } n_1=n_2=0\\ \frac{L}{2} & \text{if } n_1=n_2\neq 0\\ 0 & \text{if } n_1\neq n_2\end{cases}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi n_1 x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi n_2 x}{L}\right)\,dx=0$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{ae^x-1}\,dx=2Li_3\left(\frac{1}{a}\right)$$

הסתברות:

תוחלת: $\langle X\rangle=\sum_i x_i P(x_i)$ או $\int_{x_i}^{x_f} xf(x)\,dx$

מומנט שני: $\langle X^2\rangle=\sum_i x_i^2 P(x_i)$ או $\int_{x_i}^{x_f} x^2 f(x)\,dx$

פלקטואציה: $\sigma=\sqrt{\langle X^2\rangle-\langle X\rangle^2}$