1. Уравнение Максвелла и преобразования Галилея.

1.1. Два тождества векторного анализа.

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a})-\vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b}), \tag{1}$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{b})-\vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{a})+(\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}. \tag{2}$$

1.2. Уравнения Максвелла из электростатики.

Начнём со статических уравнений Максвелла.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t}=0, \tag{3}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0, \quad \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0. \tag{4}$$

Попробуем сделать их зависимыми от времени. Пусть все источники двигаются равномерно со скоростью $\vec{v}$. Есть альтернативная СО, в которой источники покоятся. Переход в эту СО осуществляется так:

$$\frac{\partial}{\partial t}\to\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right). \tag{5}$$

Например, посмотрим, что происходит с зарядом.

$$0=\frac{\partial\rho}{\partial t}\to\frac{\partial\rho}{\partial t'}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\rho. \tag{6}$$

Так как скорость постоянна, то это можно упростить:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\left(\rho\vec{v}\right)=0. \tag{7}$$

Это — закон сохранения заряда (при этом $\vec{j}\equiv\rho\vec{v}$ — вектор тока).

Аналогичное преобразование можно проделать с условием статичности $\vec{E}$:

$$0=\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\to\frac{\partial\vec{E}}{\partial t'}=\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}. \tag{8}$$

Теперь используем тождество (2) для упрощения втрого слагаемого. При этом надо помнить, что $\vec{v}$ постоянна.

$$0=\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\mathrm{div}\vec{E}-\vec{\nabla}\times\left(\vec{v}\times\vec{E}\right)=\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{j}-\vec{\nabla}\times\left(\vec{v}\times\vec{E}\right). \tag{9}$$

Можно ввести обозначение $\vec{B}\equiv\vec{v}\times\vec{E}$, тогда это уравнение приобретёт просто вид 4-го уравнения Максвелла:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{10}$$

Коль скоро у нас появился новый вектор, надо всё про него разузнать. Например, какая у него дивергения?

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{v} \times \vec{E}\right) = -\vec{v} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = 0. \tag{11}$$

Более того, можно узнать зависимость от времени. Тут надо вспомнить, что в движущейся СО заряды и поля не зависят от времени, так что

$$0 = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t'} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B}. \tag{12}$$

Или, опять используя (2), получаем

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{v} \times \vec{B}\right). \tag{13}$$

Итак, что мы видим? Если заряды двигаются, то это приводит к факту появления дополнительного поля $\vec{B}$, которое выражается через ток и через производную электрического поля. Всё остальное почти не меняется (разве что у плотности повляется зависимость от времени).

А где же закон индукции Фарадея? Почему-то он не появился в нашем вычислении. Это связано с тем, что уравнения Максвелла без закона Фарадея инвариантны относительно преобразований Галилея, так что для его появления нужно привлечь экспериментальный факт — а именно, существование электромагнитных волн. Этот факт очевидным образом нарушает галилеевскую инвариантность.

1.3. Электромагнитная волна и закон индукции.

Потребуем, чтобы существовали электромагнитные волны. Такие волны обладают свойством

$$\vec{E} \sim f(x - ct). \tag{14}$$

То есть, для них должно выполняться уравнение вида

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \tag{15}$$

Разумеется, мы требуем, чтобы это уравнение выполнялось вдалеке от источников ($\rho = 0$), то есть, в таких областях, что $\mathrm{div}\vec{E} = 0$. В этих областях можно преобразовать левую часть:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}). \tag{16}$$

Правая же часть тоже преобразуется (помним о том, что $\vec{j} = 0$, а также используем (12)):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right]. \tag{17}$$

Таким образом, волновое уравнение (15) выполняется в том случае, если

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{B} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{18}$$

Это — как раз нужный закон Фарадея.
В итоге, всё выглядит примерно так:

1. Начинаем с электростатики;
2. Переходим к движущимся электрическим зарядам;
3. Видим, что для самосогласованности нужно новое поле $\vec{B}$;
4. Получается 4-е уравнение Максвелла;
5. Требуем, чтобы были электромагнитные волны;
6. Получается 2-е уравнение Максвелла (закон Фарадея).