1. Уравнение Максвелла и преобразования Галилея.

1.1. Галилеевски–инвариантные уравнения Максвелла.

Рассмотрим такую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{E} &= \rho, && (1)\\
\mathrm{rot}\vec{E} &= 0, && (2)\\
\mathrm{div}\vec{B} &= 0, && (3)\\
\mathrm{rot}\vec{B} &= \vec{j} + \partial\vec{E}/\partial t. && (4)
\end{aligned}
$$

Видно, что от обычных уравнений Максвелла они отличаются только отсутствием закона Фарадея (в наших обозначениях это должно быть слагаемое $-1/c^2\partial\vec{B}/\partial t$ в правой части второго уравнения).

Из этих уравнений можно увидеть закон сохранения заряда, применив дивергенцию к последнему уравнению. Получится:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0. \tag{5}$$

То есть, это самосогласованные уравнения, даже при том, что источники зависят от времени. Кроме того, это уравнения, инвариантные относительно преобразований Галилея. Действительно, сделаем преобразование

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}t, \quad t' = t. \tag{6}$$

Что произойдёт при этом с операторами? Вот что:

$$\vec{\nabla}' = \vec{\nabla}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} - \vec{v}\cdot\vec{\nabla}. \tag{7}$$

Плотность заряда останется неизменной (это же скаляр), а вот вектор тока преобразуется:

$$\rho'(\vec{r}\,', t') = \rho(\vec{r}, t), \quad \vec{j}\,'(\vec{r}\,', t') = \vec{j}(\vec{r}, t) + \rho(\vec{r}, t)\vec{v}. \tag{8}$$

Проверим, что если поля преобразуются вот так

$$\vec{E}' = \vec{E}, \quad \vec{B}' = \vec{B} + \vec{v}\times\vec{E}, \tag{9}$$

то уравнения Максвелла инвариантны.

В самом деле, во-первых, заметим, что

$$\mathrm{div}\vec{E}' = \rho, \quad \mathrm{rot}\vec{E}' = 0. \tag{10}$$

Что касается остальных двух уравнений, то нужно вспомнить два таких тождества:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(\vec{a}\times\vec{b}) &= \vec{b}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{a} - \vec{a}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{b},\\
\mathrm{rot}(\vec{a}\times\vec{b}) &= \vec{a}\cdot\mathrm{div}\,\vec{b} - \vec{b}\cdot\mathrm{div}\,\vec{a} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}. && (11)
\end{aligned}
$$

С их помощью получается, что

$$\operatorname{div}\vec{B}' = \operatorname{div}(\vec{B} + \vec{v} \times \vec{E}) = \operatorname{div}\vec{B} - \vec{v} \cdot \operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{div}\vec{B}. \tag{12}$$

А также

$$\operatorname{rot}\vec{B}' = \operatorname{rot}(\vec{B} + \vec{v} \times \vec{E}) = \operatorname{rot}\vec{B} + \vec{v} \cdot \operatorname{div}\vec{E} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} = \operatorname{rot}\vec{B} + \rho\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}. \tag{13}$$

Вспомним теперь соотношение для вектора тока $\vec{j}$ (8). Видно, что с их помощью, а также с помощью (7), последнее уравнение можно переписать как

$$\operatorname{rot}\vec{B}' = \vec{j}' + \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'}. \tag{14}$$

Таким образом, мы получили, что все «уравнения Максвелла» остаются инвариантными при преобразованиях Галилея. То есть, закон индукции Фарадея — чисто релятивистский эффект.

Отметим, кстати, забавное свойство, которое следует из всего предыдущего:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}). \tag{15}$$

1.2. Электромагнитная волна и закон индукции.

Теперь потребуем, чтобы существовали электромагнитные волны. Такие волны обладают свойством

$$\vec{E} \sim f(x - ct). \tag{16}$$

То есть, для них должно выполняться уравнение вида

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \tag{17}$$

Разумеется, мы требуем, чтобы это уравнение выполнялось вдалеке от источников ($\rho = 0$), то есть, в таких областях, что $\operatorname{div}\vec{E} = 0$. В этих областях можно преобразовать левую часть:

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}). \tag{18}$$

Правая же часть тоже преобразуется (помним о том, что $\vec{j} = 0$, а также используем (15))[1]:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{c}\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right] \tag{19}$$

Таким образом, волновое уравнение (17) выполняется в том случае, если

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{20}$$

Это — как раз нужный закон Фарадея.

[1] Здесь какие-то проблемы с c.