同解方程组与矩阵秩

判断两个方程组同解可采纳如下方法:

（1）验证一个方程组的解也是另一个方程组的解。

（2）验证两个齐次线性方程组同解，只要证明它们有相同的基础解系;

如果齐次线性方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 为同解方程组，则 $r(A)=r(B)$。

（3）设 $BX=\gamma$ 是 $AX=\beta$ 的部分方程组。若 $AX=\beta$ 有解，且 $r(A)=r(B)$，则这两个方程组同解。

【例1】　设 $AX=\beta$ 的部分方程组成一个新的方程组 $BX=\gamma$。证明：若 $AX=\beta$ 有解，且 $r(A)=r(B)$，则这两个方程组同解。

证明　设 $AX=\beta$ 的通解为

$$X=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 η 是方程组 $AX=\beta$ 的一个特解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r(A)}$ 是导出组 $AX=0$ 的一个基础解系。由于 $BX=\gamma$ 是 $AX=\beta$ 的部分方程组，所以 η 也是 $BX=\gamma$ 的一个特解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r(A)}$ 是 $BX=0$ 的解。因为 $r(A)=r(B)$，所以 $n-r(B)$ 个线性无关的解 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r(A)}$ 为 $BX=0$ 的一个基础解系，从而部分方程组 $BX=\gamma$ 的通解也为

$$X=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

因此 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解。

【例2】　已知线性方程组（I）：$\begin{cases} x_2+ax_3+bx_4=0 \\ -x_1+cx_3+dx_4=0 \\ ax_1+cx_2-ex_4=0 \\ bx_1+dx_2+ex_3=0 \end{cases}$ 有两个自由变量，a,b,c,d,e 满足关系_________。

解　根据题设条件，方程组（I）的系数矩阵的秩等于 4-2=2，因此它与部分方程组（II）：$\begin{cases} x_2+ax_3+bx_4=0 \\ -x_1+cx_3+dx_4=0 \end{cases}$ 同解。从方程组（II）求出一个基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix} c \\ -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} d \\ -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，通

解为 $X=k_1\begin{pmatrix}c\\-a\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}d\\-b\\0\\1\end{pmatrix}$，代入方程组（I）中的第三、四个方程，利用 k_1,k_2 的任意性，即刻得到 $e=ad-bc$。

【例3】　已知线性方程组 $\begin{cases}ax_1+bx_2=1\\x_1+2x_2-x_3=1\\2x_1+x_2+x_3=-4\end{cases}$ 有无穷多解，求通解，并确定 a,b。

解　用 A 表示方程组的系数矩阵，显然 $r(A)\geq 2$（有非零的二阶子式）。由于方程组有无穷多解，所以 $r(A)\leq 2$，故 $r(A)=2$。因此该方程组与方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=1\\2x_1+x_2+x_3=-4\end{cases}$ 同解。其通解为

$$X=\begin{bmatrix}-3\\2\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3-k\\2+k\\k\end{bmatrix}。$$

代入方程 $ax_1+bx_2=1$，得

$$a(-3-k)+b(2+k)=1，$$

即 $(-3a+2b)+(-a+b)k=1$。由 k 的任意性知

$$\begin{aligned}-3a+2b=1,\\-a+b=0,\end{aligned}$$

解之得 $a=-1,b=-1$。

【例4】　设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，证明

（1） $AX=0$ 与 $A^TAX=0$ 为同解方程组；

（2） $r(A^TA)=r(A)$；

（3）对任意 n 维向量 β，方程组 $A^TAX=A^T\beta$ 必有解。

证明　（1）仅需证明 $A^TAX=0$ 的解必为 $AX=0$ 的解。

设 $A^TAX=0$，左乘 X^T 得 $X^TA^TAX=0$，即

$$(AX)^T(AX)=0，$$

记 $AX=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，则上式成为 $y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}+\cdots+y_n^{\ 2}=0$，在实数范围内必有 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$，即 $AX=0$。

（2）因为同解方程组 $AX=0$ 与 $A^TAX=0$ 的解空间相同，所以解空间的维数相等，即 $n-r(A^TA)=n-r(A)$，故 $r(A^TA)=r(A)$。

（3）仅需证明方程组 $A^TAX=A^T\beta$ 的系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩。

显然增广矩阵的秩一定大于等于系数矩阵的秩，即 $r(A^TA \vdots A^T\beta)\geq r(A^TA)$。

又，将增广矩阵写成 $(A^TA \vdots A^T\beta)=A^T\cdot(A \vdots \beta)$，因此

$$r(A^TA \vdots A^T\beta)\leq r(A^T)=r(A)=r(A^TA),$$

综合上述，我们有 $r(A^TA \vdots A^T\beta)=r(A^TA)$。

【例5】 设 A 为 n 阶方阵。证明 $A^nX=0$ 与 $A^{n+1}X=0$ 为同解方程组。

证明　显然 $A^nX=0$ 的解一定是 $A^{n+1}X=0$ 的解。

反之，设 ξ 是 $A^{n+1}X=0$ 的一个解，即 $A^{n+1}\xi=0$。假设 $A^n\xi\neq0$，考虑向量组 $\xi,A\xi,\cdots,A^n\xi$，下证这组向量线性无关。设

$$k_0\xi+k_1A\xi+\cdots+k_nA^n\xi=0,$$

左乘 A^n，并注意到 $A^{n+1}\xi=0$，有 $k_0A^n\xi=0$，由此结合假设 $A^n\xi\neq0$，得 $k_0=0$。于是上式成为

$$k_1A\xi+\cdots+k_nA^n\xi=0,$$

左乘 A^{n-1}，有 $k_1A^n\xi=0$，故 $k_1=0$。依次类推，不难得到 $k_0=k_1=\cdots=k_n=0$，所以向量组 $\xi,A\xi,\cdots,A^n\xi$ 线性无关，这与 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关相矛盾，假设不成立。故 $A^n\xi=0$。

注：本题意味着：对于 n 阶方阵，$r(A^{n+1})=r(A^n)$。