第10讲 圆周运动中的动力学内容

知识点睛

匀速率圆周运动的向心力

在运动学部分的内容中，我们已经介绍过，做匀速率圆周运动的物体的加速度叫做向心加速度，它的大小取决于角速度ω和半径r，表达式为：

$$a=\omega^2 r$$

这个结论说明了，为了使物体做匀速率圆周运动，物体需要有一个持续的向心加速度，也就是说，根据牛顿第二定律，需要有一个持续的力施加在物体上，其表达式应为：

$$F=m\omega^2 r$$

我们将这个力称为**向心力**。向心力是做匀速圆周运动的物体所受的合力，是按效果命名的力。它的方向时刻在改变，因此向心力是变力。

理解向心力

（1）向心力的来源

①向心力是按力的作用效果命名的，它可以由某种性质的力来充当，如重力、弹力等。

②向心力可以是几个力的合力或某个力的分力。

（2）分析向心力的一般步骤

① 首先确定圆周运动的轨道所在的平面；

② 其次找出轨道圆心的位置；

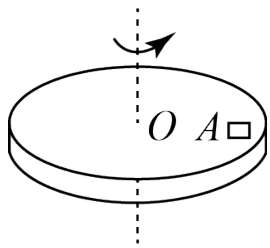
③ 最后分析做圆周运动的物体所受的力，作出受力图，找出这些力指向圆心方向的合外力就是向心力。

（3）离心运动

物体做圆周运动所需的向心力一旦消失，它将会沿着切线的方向飞出。除了向心力突然消失，在合力不足以提供所需的向心力时，物体虽然不会沿切线飞出，也会逐渐远离圆心。反之，离圆心越来越近。

头脑风暴

1 如图所示，小物体A与圆盘保持相对静止，跟着圆盘一起做匀速圆周运动，则A的受力情况是（ ）



A. 受重力、支持力和向心力

B. 受重力、支持力和静摩擦力，静摩擦力的方向与木块运动方向相反

C. 受重力、支持力和静摩擦力，静摩擦力的方向与木块运动方向相同

D. 受重力、支持力和静摩擦力，静摩擦力的方向指向圆心

答案 D

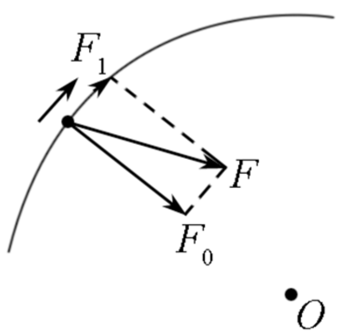
解析 小物体相对圆盘静止，但是有着延径向的相对运动趋势，因此摩擦力是静摩擦，方向指向圆心．

故选D．

变速圆周运动

（1）变速圆周运动概述

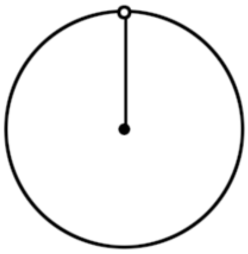
如图，做圆周运动的物体正在加速，O是物体运动轨迹的圆心，F是绳对物体的拉力。根据F产生的效果，可以把F分解为两个相互垂直的分力：跟圆周相切的分力F_1和指向圆心的分力F_0。F_1产生切向加速度。切向加速度与速度方向一致，标志着物体速度大小的变化；F_0产生向心加速度，方向与速度方向垂直，其表现就是速度方向的改变。同时具有向心加速度和切向加速度的圆周运动就是变速圆周运动。



（2）竖直平面内的圆周运动

竖直平面内的圆周运动，是典型的变速圆周运动，对于物体在竖直平面内做变速圆周运动的问题，高中物理中只研究物体通过最高点和最低点的情况，并且经常出现临界状态。

如图所示，绳拉小球在竖直平面内做圆周运动过最高点有下面几种情况。



① 临界条件：小球到达最高点时绳子的拉力（或轨道的弹力）刚好等于零，则小球的重力提供其做圆周运动的向心力，即$mg = m\frac{v_{临界}^2}{r}$。$v_{临界}$是小球通过最高点的最小速度，可以得到，$v_{临界} = \sqrt{gr}$。

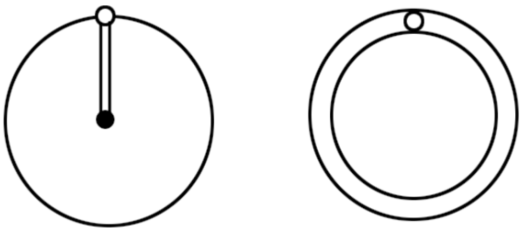
② 能过最高点的条件：$v \geqslant v_{临界}$（此时绳或轨道对球产生拉力F或压力F_N）。

③ 不能过最高点的条件：$v < v_{临界}$（实际上球还没有到最高点就脱离了轨道）。

（3）有物体支撑的小球在竖直平面内做圆周运动

① 临界条件：由于硬杆和管壁的支撑作用，小球恰能达到最高点的临界速度。

② 如下左图所示的小球过最高点时，轻杆对小球的弹力的情况：



当$v = 0$时，轻杆对小球有竖直向上的支持力F_N，其大小等于小的重力，即$F_N = mg$；

当时$0 < v < \sqrt{gr}$，杆对小球的支持力的方向竖直向上，大小随速度球的增大而减小；

当$v = \sqrt{gr}$时，$F_N = 0$；

当$v > \sqrt{gr}$时，杆对小球有指向圆心的拉力，其大小随速度的增大而增大。

③ 如上右图所示的小球过最高点时，光滑硬管对小球的弹力情况：

当$v = 0$时，管的内壁下侧对小球有竖直向上的支持力F_N，其大小等于小球重力，即$F_N = mg$；

当$0 < v < \sqrt{gr}$时，管的内壁下侧对小球有竖直向上的支持力F_N，大小随速度的增大而减小；

当$v = \sqrt{gr}$时，$F_N = 0$；

当$v > \sqrt{gr}$时，管的内壁上侧对小球有竖直向下指向圆心的压力，其大小随速度的增大而增大。

（4）变速圆周运动与机械能守恒

对于做圆周运动的物体，一般来说绳、杆或轨道给它施加的外力与它的运动方向垂直，而一般情况中，我们都不用考虑摩擦力，所以，物体满足机械能守恒定律，我们可以通过势能的转化来计算动能的变化量，从而得到物体的速度。

头脑风暴

2 用长为L的细绳栓着质量为m的物体，在竖直平面内做圆周运动，则（　）

A. 小球过最高点时，绳子张力可以为零

B. 小球过最高点时的最小速度是0

C. 小球刚好过最高点时的速度是$\sqrt{gL}$

D. 小球过最高点时，绳子对小球的作用力可以与球所受重力方向相反

答案 AC

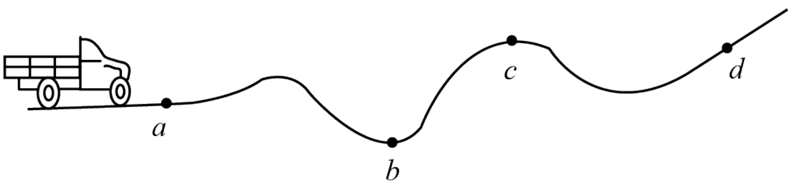
解析 物体做圆周运动的临界条件：最高点绳子张力为零．

此时有牛顿第二定律：$mg = m\dfrac{v^2}{L}$，$v = \sqrt{gL}$．

故A、C正确，B错误；

绳子只能够提供拉力，故D错误．

3 一辆卡车在丘陵地区匀速率行驶，地形如图所示，由于轮胎太旧，途中爆胎，爆胎可能性最大的地段应是（　）



A. a处　　B. b处　　C. c处　　D. d处

答案 B

解析

以车为研究对象，在坡顶，根据牛顿第二定律得：$mg-F_N=m\dfrac{v^2}{r}$，解得：$F_N=mg-m\dfrac{v^2}{r}$，$F_N<mg$①，

在坡谷，同理得：$F_N-mg=m\dfrac{v^2}{r}$，解得$F_N=mg+m\dfrac{v^2}{r}$，$F_N>mg$②，

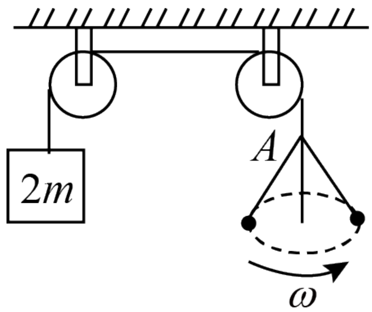
由①②对比可知，汽车在坡谷处所受的支持力大，更容易爆胎，则在b点比a、c、d点容易爆胎．

故选B．

例题精讲

基础训练

4 如图所示的装置中，用手抓住左侧木块，木块的质量为$2m$．令两个质量为m的小球绕竖直轴做同样的圆锥摆运动．不计装置摩擦，则松手后木块的运动情况是（　　）



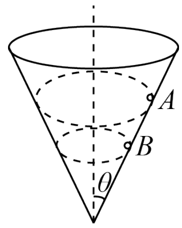
A. 向上运动　　B. 向下运动　　C. 静止不动　　D. 无法确定

答案　C

解析　设绳子与圆平面夹角为α，则$T\sin\alpha=mg$，所以右边两个绳子在竖直方向的合力为$2T\sin\alpha=2mg$，所以左边的绳子受到向上的拉力为$2mg$，对木块进行受力分析，受到绳子的拉力和重力，都为$2mg$，受力平衡，所以木块静止不动，故C正确．

故选C．

5 如图所示，内壁光滑的圆锥桶的轴线垂直于水平面，圆锥桶固定不动，有两个质量相同的小球A和B紧贴着内壁，分别在图中所示的水平面内做匀速圆周运动，则下列说法中正确的是（　　）



A. 球A的线速度必定大于球B的线速度

B. 球A的角速度必定小于球B的角速度

C. 球A的运动周期必定小于球B的运动周期

D. 球A对筒壁的压力必定大于球B对筒壁的压力

答案 AB

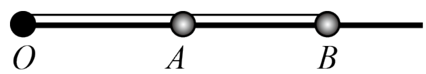
解析 A．球A向心力$F=mg\cot\theta=m\dfrac{v^2}{r}$，轨道半径越大，线速度越大，球$A$的线速度大于球$B$，故A正确；

B．向心力$F=m\omega^2r$，轨道半径越大，角速度越小，球A的角速度小于球B，故B正确；

C、D．$F=m\dfrac{4\pi^2r}{T^2}$，轨道半径越大，周期越长，球A的运动周期大于球B的运动周期，两球对筒壁的压力相同，故C、D错误．

故选AB．

6 如图所示，一根光滑的轻杆沿水平方向放置，左端O处连接在竖直的转动轴上，A、B两球可看作质点，穿在杆上，并用细线分别连接OA和AB，且$OA=AB$，已知B球质量为A球质量的2倍．当轻杆绕O轴在水平面内匀速转动时，OA和AB的拉力比为$F_1:F_2$为（　　）



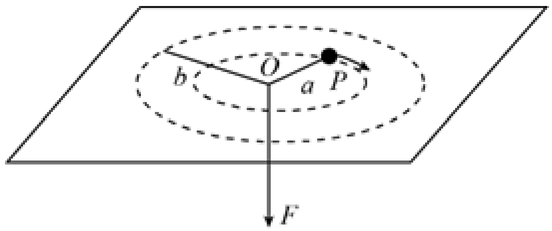
A. $2:1$　　B. $1:2$　　C. $5:1$　　D. $5:4$

答案 D

解析 当轻杆匀速转动时，两个小球也将做角速度相等，线速度不相等的匀速圆周运动，对A列方程可得$F_1-F_2=m_A\omega^2l$；对B列方程$F_2=m_B\omega^2\cdot2l$，联立解得$F_1:F_2=5:4$．

故选D．

7 穿过光滑水平平面中央小孔O的细线与平面上质量为m的小球P相连，手拉细线的另一端，让小球在水平面内以角速度ω_1沿半径为a的圆周做匀速圆周运动．所有摩擦均不考虑．求：



(1) 这时细线上的张力多大？

(2) 若突然松开手中的细线，经时间Δt再握紧细线，随后小球沿半径为b的圆周做匀速圆周运动．试问：Δt等于多大？这时的角速度ω_2为多大？

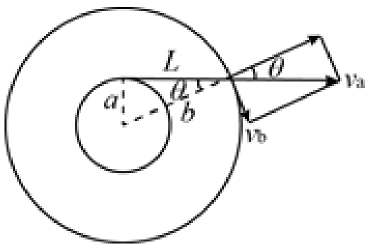
答案 (1) $m{\omega_1}^2a$

(2) $\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{\omega_1 a}$；$\dfrac{a^2}{b^2}\cdot\omega_1$

解析 (1) $\Delta t=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{\omega_1 a}$．

故答案为：$m{\omega_1}^2a$．

(2)



从a圆运动到b圆此时的速度为v_a．

$\Delta t=\dfrac{L}{v_a}$，此时$L=\sqrt{b^2-a^2}$．

$F=m{\omega_1}^2a=\dfrac{m{v_a}^2}{a}$，

$F=m{\omega_2}^2b=\dfrac{m{v_b}^2}{b}$，

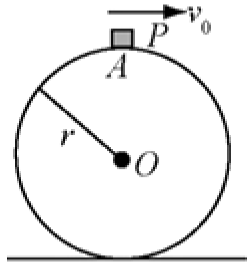
根据$\sin\theta=\dfrac{a}{b}$，$v_b=v_a\cdot\sin\theta$，

解得$\Delta t=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{\omega_1 a}$．

$\omega_2=\dfrac{a^2}{b^2}\cdot\omega_1$．

故答案为：$\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{\omega_1 a}$；$\dfrac{a^2}{b^2}\cdot\omega_1$．

8 如图所示，横截面半径为r的圆柱体固定在水平地面上．一个质量为m的小滑块P从截面最高点A处以$v_0=\sqrt{\frac{2rg}{5}}$滑下．不计任何摩擦阻力．



(1) 试对小滑块P从离开A点至落地的运动过程做出定性分析．

(2) 计算小滑块P落地时的瞬时速率．

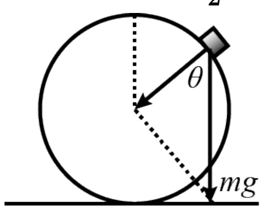
答案 (1) 物块先沿着圆柱面加速下滑，然后离开圆柱面做斜下抛运动

(2) $v_t=\sqrt{\frac{22rg}{5}}$

解析 (1) 设物块离开圆柱面时的速率为v，

$mg\cos\theta=m\frac{v^2}{r}$，

$mgr(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0{}^2$，解得：$v=\sqrt{\frac{4rg}{5}}$．



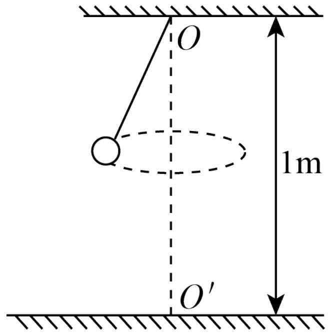
(2) 方法一：由$\frac{1}{2}mv_t{}^2=\frac{1}{2}mv_0{}^2+mg2r$，解得$v_t=\sqrt{\frac{22rg}{5}}$．

方法二：整个运动过程中，小滑块机械能守恒：$\frac{1}{2}mv_0{}^2+mg2r=\frac{1}{2}mv_t{}^2$ 得：

落地时的速率为$v_t=\sqrt{\frac{22rg}{5}}$．

故答案为：$v_t=\sqrt{\frac{22rg}{5}}$．

9 如图所示，质量是1kg的小球用长为0.5m的细线悬挂在O点，O点距地面高度为1m，如果使小球绕OO'轴在水平面内做圆周运动，若细线最大承受拉力为12.5N，求：



(1) 当小球的角速度为多大时，线将断裂．

(2) 断裂后小球水平抛出的距离．（ $g=10\mathrm{m/s^2}$ ）

答案 (1) $5\mathrm{rad/s}$

(2) $\frac{3\sqrt{3}}{10}\mathrm{m}$

解析 (1) 方法一：小球在水平面内做圆周运动时，由重力G和拉力F的合力提供向心力，当绳子拉力为12.5N时，向心力最大，则有：$F=\sqrt{F^2-(mg)^2}=7.5\mathrm{N}$

根据几何关系得：$r=L\cdot\frac{3}{5}=0.3\mathrm{m}$

根据向心力公式得：

$F=m\omega^2L\cdot\frac{3}{5}$

解得：$\omega=5\mathrm{rad/s}$．

答：当小球的角速度为$5\mathrm{rad/s}$时，线将断裂．

方法二：小球受到重力mg和线的拉力T作用，在水平面内做匀速圆周运动（即圆锥摆运动），设线与竖直方向的夹角为θ．

由牛顿第二定律得$T\sin\theta=m\omega^2r=m\omega^2L\sin\theta$，

所以$\omega=\sqrt{\frac{T}{mL}}\mathrm{rad/s}=\sqrt{\frac{12.5}{1\times0.5}}=5\mathrm{rad/s}$．

故答案为：$5\mathrm{rad/s}$．

(2) 方法一：绳被拉断后小球沿圆周的切线方向飞出，做平抛运动，其初速度

$v_0=\omega L\sin\theta$，①

又因为$T\cos\theta=mg$，②

由②得$\cos\theta=\frac{mg}{T}=\frac{10}{12.5}=0.8$，所以$\sin\theta=0.6$，代入①式得

$v_0=5\times0.5\times0.6=1.5\mathrm{m/s}$，

抛出点离地面的高度$h=1-L\cos\theta=0.6\mathrm{m}$，

又根据平抛运动的规律$\begin{cases} h = \dfrac{1}{2}gt^2 \\ x = v_0 t \end{cases}$，得

$x = v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = (1.5 \times \sqrt{0.12})\text{m} = (0.3 \times \sqrt{3})\text{m} = \dfrac{3\sqrt{3}}{10}\text{m}$.

方法二：绳被拉断后小球沿圆周的切线方向飞出，做平抛运动，其初速度

$v_0 = \omega L\sin\theta$，①

又因为$Tcos\theta = mg$，②

由②得$\cos\theta = \dfrac{mg}{T} = \dfrac{10}{12.5} = 0.8$，所以$\sin\theta = 0.6$，代入①式得

$v_0 = 5 \times 0.5 \times 0.6 = 1.5\text{m/s}$，

抛出点离地面的高度$h = 1 - L\cos\theta = 0.6\text{m}$，

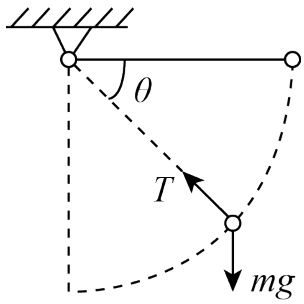
又根据平抛运动的规律$\begin{cases} h = \dfrac{1}{2}gt^2 \\ x = v_0 t \end{cases}$，得

$x = v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = (1.5 \times \sqrt{0.12})\text{m} = (0.3 \times \sqrt{3})\text{m} = \dfrac{3\sqrt{3}}{10}\text{m}$.

故答案为：$\dfrac{3\sqrt{3}}{10}\text{m}$.

进阶拓展

10 如图所示，单摆上的摆锤拉至水平位置，静止释放，当摆锤获得的竖直方向分速度达到最大值时，求摆锤此时的位置θ .



答案 $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

解析 设此摆的摆长为l，摆锤质量为m . 摆在运动中，

摆锤的速率满足：$mgl\sin\theta = \dfrac{1}{2}mv^2$①

绳中张力T满足：$T - mg\sin\theta = m\dfrac{v^2}{l}$②

当摆锤在水平位置静止释放后，开始阶段，随θ的增加，摆锤在竖直向下的分速度随之增加，

这是因为，此阶段竖直方向合力向下 . 当竖直方向速度分量达最大时，竖直方向合力为零，

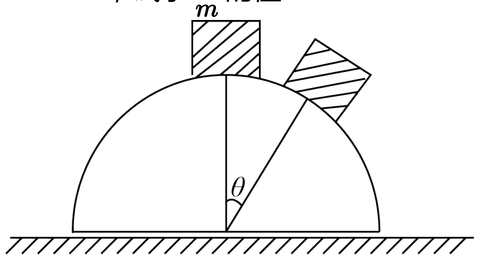
竖直向下分速度不再增加，达最大．

此时满足关系：$T\sin\theta = mg$③

联立方程①、②和③，解得：$\sin = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\theta = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$．

故答案为：$\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$．

11 如图所示，质量为M、表面光滑的半球体静止放在光滑地面上，半球顶端有一个质量为m的小滑块由静止开始下滑，至圆心角为θ处时飞离半球体，已知$\cos\theta = 0.70$，试求$\dfrac{M}{m}$的值．



答案 2.43

解析 滑块自静止下滑时，通过滑块与半球间的相互作用，半球将向相反的水平方向移动．滑块滑到θ位置时，由题意可知，滑块刚好与半球面分离时，半球对滑块的支撑力降为零，即此时刻滑块与半球间无相互作用．设此时滑块相对半球的速度为v，半球水平向左速度为V．

由于滑块与半球系统水平方向无外力作用，所以水平方向动量守恒，即满足方程：

$m(v\cos\theta - V) = MV$．

由系统机械能守恒，得

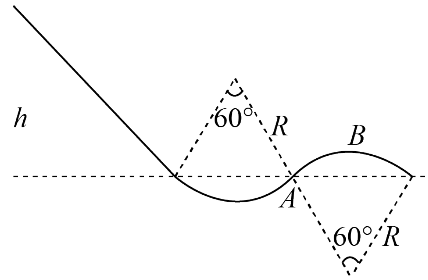
$mgR(1-\cos\theta) = \dfrac{1}{2}m[(v\cos\theta - V)^2 + (v\sin\theta)^2] + \dfrac{1}{2}MV^2$

当小滑块运动到图示位置时，滑块与半球无相互作用，此刻半球无加速度，半球参照系为惯性系，滑块的位置又在圆上，因此可写出此时半球系中的法向动力学方程：$mg\cos\theta = \dfrac{mv^2}{R}$，

联立解得：$\dfrac{M}{m} = \dfrac{\cos^3\theta - 3\cos\theta + 2}{3\cos\theta - 2} = 2.43$．

故答案为：2.43．

12 质量为m的小球从高为h的地方释放，如果在光滑轨道上的A点飞出，求h的值；如果是从轨道的B点（圆弧的最高点）飞出，求h的值．（图中两虚线夹角为$60°$，圆弧曲率半径为R）



答案 $\frac{\sqrt{3}}{4}R$，$1-\frac{\sqrt{3}}{2}<h\leq\frac{\sqrt{3}}{4}$

解析 小球在A点脱离轨道做斜上抛运动，小球在A点的方程为$mg\cos 30^\circ=m\frac{v_A^2}{R}$．

①

根据动能定理，有$mgh=\frac{1}{2}mv_A^2$．

②

联立式①和式②，得$h=\frac{\sqrt{3}}{4}R$．

如果是从轨道的B点（圆弧的最高点）飞出，$1-\frac{\sqrt{3}}{2}<h\leq\frac{\sqrt{3}}{4}$．

阅读材料

向心力与离心力

我们知道向心力是支持物体做圆周运动（曲线运动）的力，向心力的大小与切向速度以及曲率半径有关。在之前的学习中我们讲过运动的独立性，即质点的各分运动都可看成独立进行的，互不影响，那么同学们可能会产生这样的疑问，质点的径向加速度为什么会与角向速度有关呢。

这就涉及到静止坐标系与运动坐标系的区别。静止坐标系的坐标轴不随时间变化，常见如直角坐标系，可定义方向矢量$\hat{i}=a\hat{x}+b\hat{y}$，$\hat{x}$与$\hat{y}$分别是$x$和$y$方向的单位矢量，在静止坐标系中确定方向后，在该方向上的分运动是独立的，不受到其它方向运动的影响，满足运动独立性。在运动坐标系中，如极坐标系，可定义方向矢量$\hat{i}=a\hat{r}+b\hat{\theta}$，$\hat{r}$与$\hat{\theta}$分别是径向和角向的单位矢量，当物体运动时，可以发现$\hat{r}$与$\hat{\theta}$也在变化，因此这样定义的方向是变化的，不同方向上的运动并不是独立的。

那么什么是离心力呢？离心力是惯性力的一种，是一种假想力。当我们处在一个转动坐标系中时（如转弯的列车）。由于惯性，我们倾向于继续做直线运动，而列车则在转弯，因此人与列车就会产生相对运动，当车中的人将车视为是一个惯性系时，他们就会将自己的运动归结为一个实际不存在的力（离心力）造成的，这也就是我们常说的“被离心力甩出去”的解释。