第八部分 自招综合训练-复杂电路

初中电学模块中，我们学习过欧姆定律及简单电路计算；高中阶段，又拓展了闭合电路欧姆定律。但是对于无法简单应用串、并联规律求解的复杂电路，我们暂时还无法处理。这个模块中，我们重点介绍处理复杂电路的常用方法。

需要说明的是，**这个模块中我们仅研究恒定直流电路**。

基尔霍夫定律

知识点睛

定义

①在恒定直流电路中除了电源以外，只有电阻元件，我们把电源和（或）电阻串联而成的通路叫做**支路**。

②三条或更多条支路的连接点叫做**节点**。

③几条支路构成的闭合通路叫做**回路**。

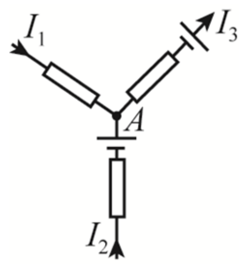
④其内部不包含任何支路的回路叫做**网孔**。

定理

（1）基尔霍夫第一定律（KCL）

所有进入某节点的电流的总和等于所有离开这节点的电流的总和。

例如，对于图中所示的节点A，可以列出方程：$I_1+I_2=I_3$。



（2）基尔霍夫第二定律（KVL）

若规定电势从高到低时电势降落为正，电势从低到高时电势降落为负，则沿回路环绕一周，电势降落的代数和为零。

① 确定电阻（包括内阻）上电势降落的正负号，要看绕行方向与电流的关系：沿电流方向看去，电势降落为正；逆电流方向看去，电势降落为负。

② 确定（理想）电源上电势降落的正负号要看绕行方向与电源极性的关系：从正极到负极看去电势降落为正，从负极到正极看去电势降落为负。

对于一个有n个节点、p个支路的复杂电路，其独立电流方程为$n-1$，电压回路方程为$p-(n-1)$个。为了保证回路的独立性，在新选定的回路中，必须至少有一段电路中在已选的回路中未曾出现过。（事实上根据上面的定义，独立回路的数量就是网孔的数量）

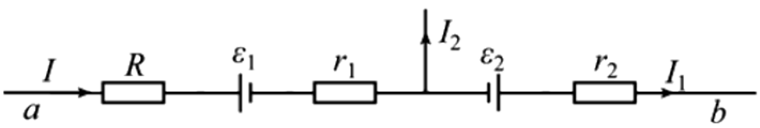
例题精讲

****

例题说明：下面题目重点理解电势、电势差的概念，练习计算含源电路两点间电势差，练习列出回路电压方程。

****

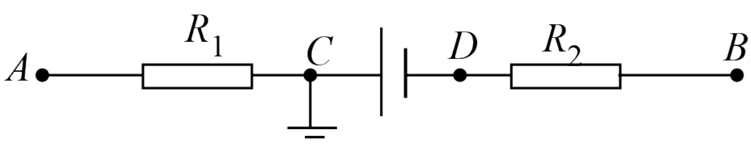
1 如图所示，一段含源电路中ε_1、r_1、ε_2，r_2，R，I、I_1为已知，电流I的方向从a到b，求a、b两点间的电压U_{ab}．



答案 $U_{ab}=IR+\varepsilon_1+Ir_1+(-\varepsilon_2)+I_1r_2$

解析 略．

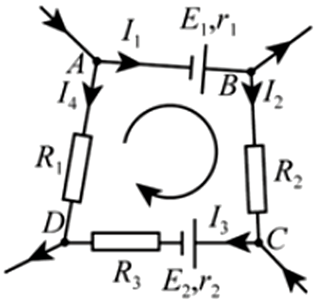
2 如图所示，$R_1=2\Omega$，$R_2=3\Omega$，电源电动势$\varepsilon=4\text{V}$，内阻$r=1\Omega$，C点接地．若电流由B流入A流出（无电流从C点流入大地），R_1消耗的功率为0.5W，求U_D．



答案 -3.5V

解析 略

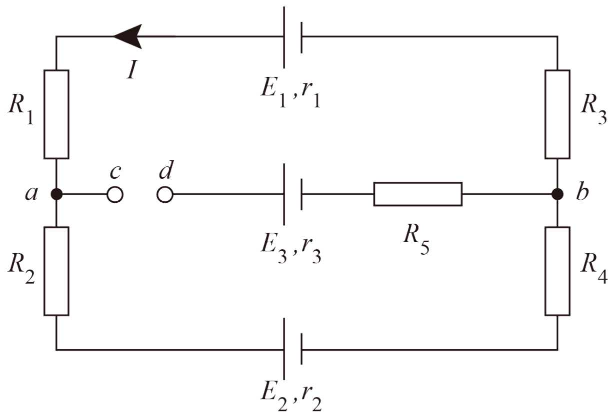
3 一个闭合回路中各电阻、电流(大小及方向)如图所示，沿图示的回路方向列出回路电压方程．



答案 $-E_1+I_1r_1+I_2R_2+E_2+I_3\left(r_2+R_3\right)-I_4R_1=0$

解析 略．

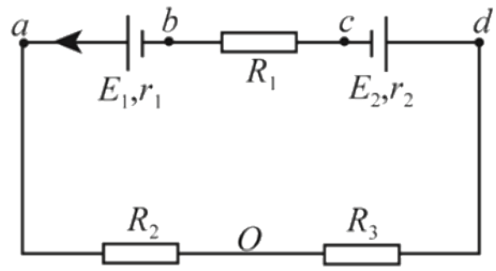
4 一电路如图所示，已知$R_1=R_2=R_3=R_4=2\Omega$，$R_5=3\Omega$，$E_1=12\text{V}$，$E_2=8\text{V}$，$E_3=9\text{V}$，$r_1=r_2=r_3=1\Omega$ ，求U_{ab}，U_{cd} ．



答案 $U_{ab}=10\text{V}$；$U_{cd}=1\text{V}$

解析 略

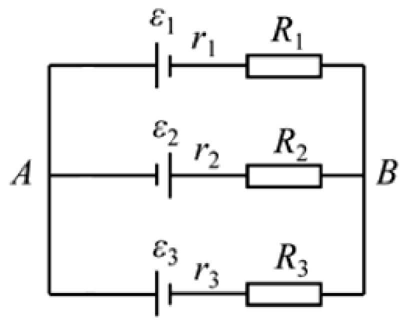
5 如图所示电路中，$R_1=2\Omega$，$R_2=1\Omega$，$R_3=3\Omega$，$E_1=24\text{V}$，$E_2=6\text{V}$，$r_1=2\Omega$，$r_2=1\Omega$，假设O点电势为零，试确定a、b、c、d点电势．



答案 $U_a=2\text{V},U_b=-18\text{V}$，$U_c=-14\text{V}$，$U_d=-6\text{V}$

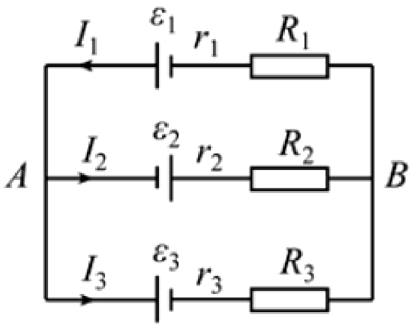
解析 略．

6 如图所示，已知三节电池的电动势和内阻分别为：$\varepsilon_1=4\text{V}$，$\varepsilon_2=\varepsilon_3=2\text{V}$，$r_1=r_2=r_3=1\Omega$，定值电阻$R_1=7\Omega$，$R_2=1\Omega$，$R_3=3\Omega$，求$AB$间的电压$U_{AB}$．



答案 $U_{AB}=0$

解析 设各支路中电流方向如图所示．



对节点A：$I_1=I_2+I_3$，

对上半个回路：$I_1(r_1+R_1)+I_2(r_2+R_2)-\varepsilon_1-\varepsilon_2=0$，

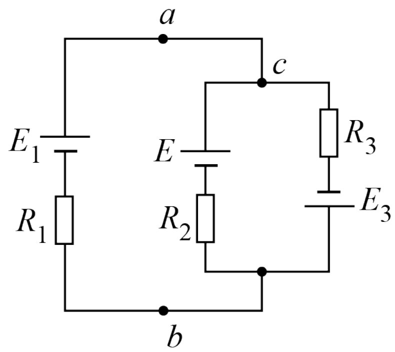
对整个回路：$I_1(r_1+R_1)+I_3(r_3+R_3)+\varepsilon_3-\varepsilon_1=0$，

联立解得：$I_3=-0.5\text{A}$，$I_2=1\text{A}$，$I_1=0.5\text{A}$．

因此，$U_{AB}=\varepsilon_1-I_1(R_1+r_1)=0$.

故答案为：$U_{AB}=0$.

7 如图所示电路中，$E_1=3.0\mathrm{V}$，$E_2=1.5\mathrm{V}$，$E_3=2.2\mathrm{V}$，$R_1=1.5\Omega$，$R_2=2.0\Omega$，$R_3=1\Omega$，电源内阻均不计，求U_{ab} .



答案 0.254V

解析 设电流方向如答图所示，对节点c，有$I_1I_2I_3$，

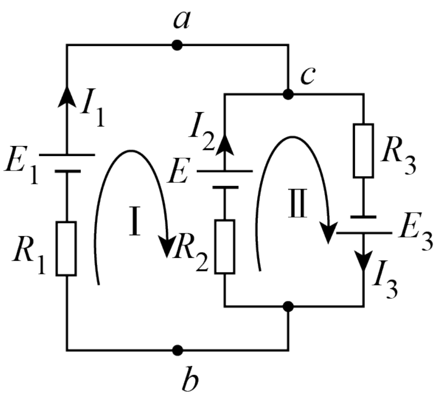
对回路Ⅰ，有$-E_1+E_2-I_2R_2+I_2R_1=0$.

对回路Ⅱ，有$-E_2+I_3R_3-E_3+I_2R_2=0$，

联立解得$I_1=\dfrac{119}{65}\mathrm{A}I_2=\dfrac{81}{130}\mathrm{A}I_3\dfrac{319}{130}\mathrm{A}$.

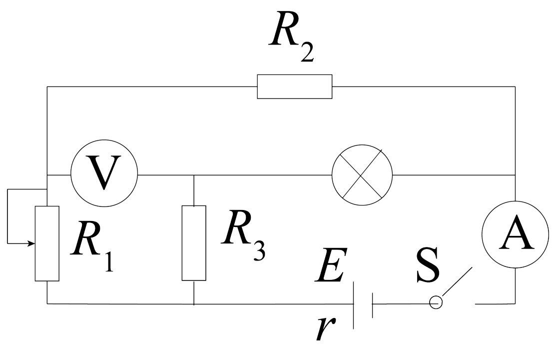
故$U_{ab}=I_3R_3-E_3=0.254\mathrm{V}$.

故答案为：0.254V .



8 如图所示电路中，小灯泡规格为“$6V$，3W”，$R_3=4\Omega$，电源内阻$r=1\Omega$，电压表、电流表均为理想电表，闭合开关，调节滑动变阻器阻值，使电压表示数为0，此时灯泡恰好正常发光，电流表

的示数为1A，则电源电动势E= ______ ，电源输出功率P= ______ ，R_2= ______ .

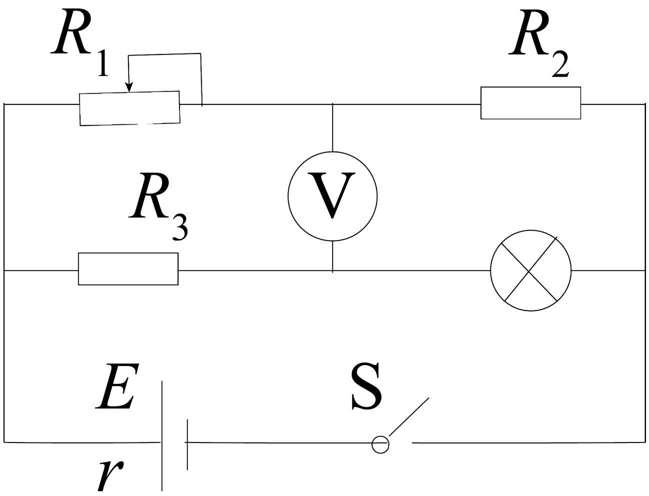


答案 1．9V

2．8W

3．12Ω

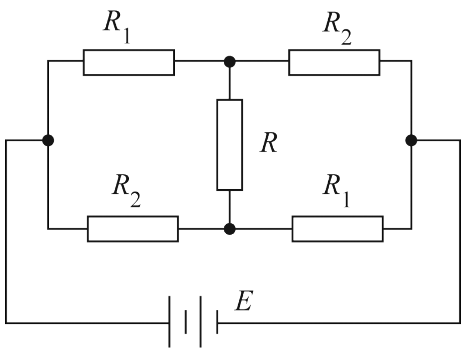
解析 这是一个桥式电路，等效电路图如图所示，



当电压表示数为0时，电桥处于平衡状态，流过小灯泡的电流为0.5A，R_3两端的电压为2V，电源内阻的分压为1V，

故电源电动势$E=9\mathrm{V}$，电源输出功率$P=8\mathrm{W}$，两个支路的电流均为0.5A，R_2两端的电压为6V，故$R_2=12\Omega$．

9 如图所示电路，电源电动势为E，内阻不计，电阻R_1、R_2、R已知，求流过电阻R的电流I．



答案 当$R_2 > R_1$时，$I > 0$；

当$R_2 < R_1$时，$I < 0$；

当$R_1 = R_2$时，$I = 0$．

解析 假设各电阻上的电流方向如图所示，规定流过电阻R的电流向下为正，

对于节点C，有$I_1 = I + I_2$，

对节点D，有$I + I_3 = I_4$，

对ACB电路，有$E = I_1R_1 + I_2R_2$，

对ADB回路，有$E = I_3R_2 + I_4R_1$，

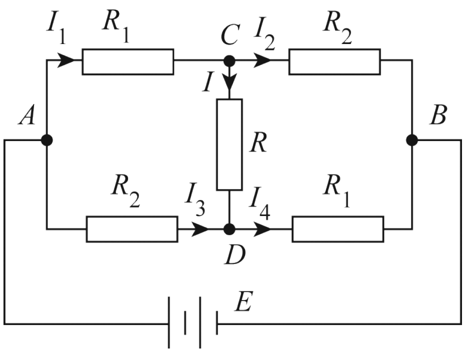
对$ACDA$回路，有$I_1R_1 + IR - I_3R_2 = 0$，

联立以上各式解得$I = \dfrac{(R_2 - R_1)E}{2R_1R_2 + (R_1 + R_2)R}$，

当$R_2 > R_1$时，$I > 0$，方向向下；

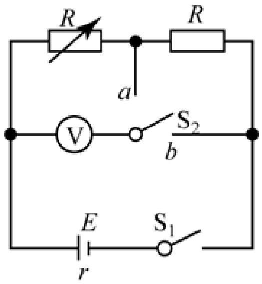
当$R_2 < R_1$时，$I < 0$，方向向上；

当$R_1 = R_2$时，$I = 0$．



10 某同学设计了如图（a）所示的电路测电源电动势E、内阻r和电阻R_1的阻值，实验器材有：待测电源（电动势为E，内阻为r）；待测电阻R_1；电压表V（量程为1.5V，内阻很大）；电阻箱

$R(0\sim99.99\Omega)$；开关S_1；单刀双掷开关S_2；导线若干．



(a)

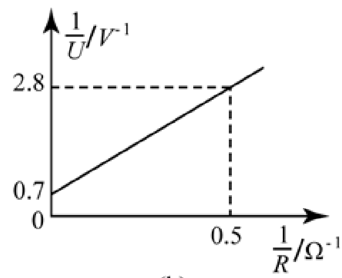
（1）先测量电阻R_1的阻值，请将该同学的操作补充完整．

①闭合S_1，将S_2切换到a，调节电阻箱，读出其示数R_0和对应的电压表实数U_1；

②保持电阻箱示数不变，将S_2切换到b，读出电压表的示数U_2；

③则电阻R_1的表达式为______．

（2）该同学已经测得电阻$R_1=4.95\Omega$，继续测电源电动势E和内阻r的阻值，做法是：闭合S_1，将S_2切换到a，多次调解电阻箱，读出多组电阻箱实数R和对应的电压表示数U，由测得的数据，绘出了如图（b）所示的$\frac{1}{U}-\frac{1}{R}$图线，则电源电动势$E=$______V，内阻$r=$______Ω．（保留三位有效数字）



(b)

答案　（1）$\frac{U_2-U_1}{U_1}R_0$

（2）1．1.43

2．1.05

解析　（1）当S_2切换到a时，电压表测R两端的电压；

当S_2切换到b时，电压表测R及R_1两端的电压，

根据串联分压定律，有：$R_1=\frac{U_2-U_1}{U_1}R_0$．

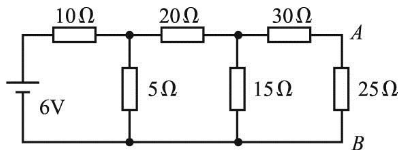
（2）根据闭合电路的欧姆定律，有$E=U+\frac{U}{R}(R_1+r)$．

变形可得$\frac{1}{U}=\frac{1}{E}+\frac{R_1+r}{E}\cdot\frac{1}{R}$．

由数学知识可得$\frac{1}{E}=0.7$，$\frac{R_1+r}{E}=\frac{2.8-0.7}{0.5}$．

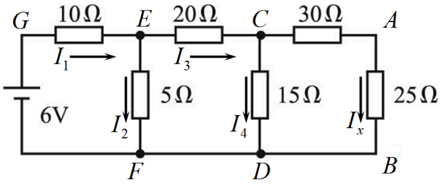
解得$E=1.43\text{V}$，$r=1.05\Omega$．

11 各电阻的阻值如图所示，电源电动势为6V，内阻为2Ω，求AB支路中的电流强度．



答案 0.011A

解析 设流过各电阻的电流如图所示．



由$ABDC$回路电压方程得：$(30+25)\,I_x-15I_4=0$，解得：$I_4=\dfrac{11}{3}I_x$；

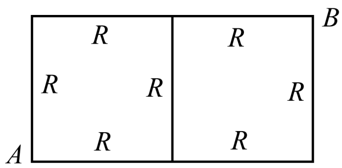
由节点C电流方程得：$I_3=I_4+I_x=\dfrac{14}{3}I$；

由$CDFE$回路电压方程得：$20I_3+15I_4-5I_2=0$，解得：$I_2=\dfrac{89}{3}I$；

由节点E电流方程得：$I_1=I_2+I_3=\dfrac{103}{3}I$；

由GEF回路电压方程得：$(10+2)\,I_1+5I_2=6$，解得：$I\approx0.011\text{A}$．

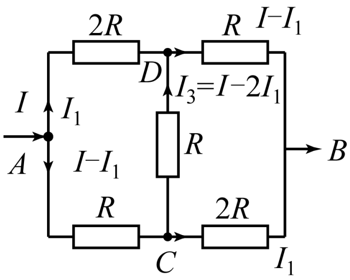
12 7个电阻均为R的网络如图甲所示．试求A、B间的等效电阻R_{AB}．



甲

答案 $\dfrac{7R}{5}$

解析 设电流I从A端流入，B端流出．根据对称性及串联等效电阻公式，可将电路化简为如图所示，并设各部分电流分布如图所示．



沿路径AD可得：$U_{AD}=I_1\cdot 2R$，

沿路径ACD可得：$U_{AD}=(I-I_1)R+(I-2I_1)R$，

联立解得：$I_1=\frac{2}{5}I$．

取路径ADB，可算出：

$U_{AB}=I_1\cdot 2R+(I-I_1)R=\frac{7RI}{5}$．

可得：$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}=\frac{7R}{5}$．

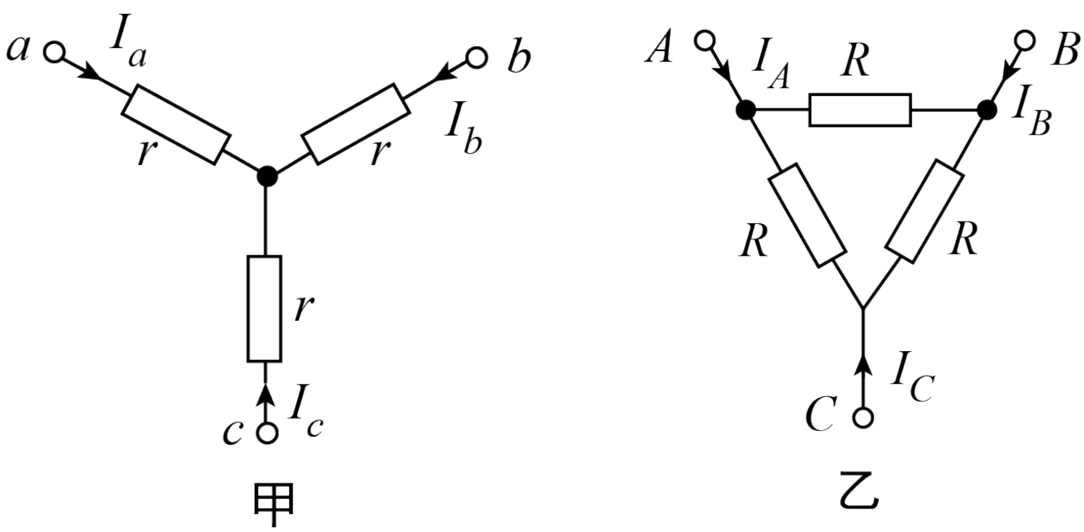
说明：本题也可以通过Δ-Y形电路变换求解．

****

例题说明：下面这道题只是作为基尔霍夫定律的练习，并不要求学生会应用变换。这道题可以让学生用特殊值和基尔霍夫定律分别求解。

****

13 如图所示电路，图甲中的电阻连接称为Y形连接，假设三个电阻均为r；图乙中的电阻连接称为Δ形连接，假设三个电阻均为R．当满足某些条件时两种连接等效，所谓等效是指同时满足：$U_{ab}=U_{AB}$，$U_{bc}=U_{BC}$，$U_{ca}=U_{CA}$，$I_a=I_A$，$I_b=I_B$，$I_c=I_C$．求两种连接等效时，R与r的关系．



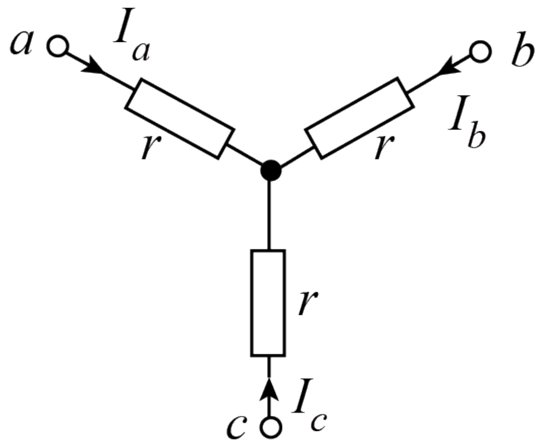
答案 $R=3r$

解析 电流方向如图所示，在Δ形连接中有：$I_A=\frac{U_{AB}}{R}=\frac{U_{CA}}{R}$，$I_B=\frac{U_{BC}}{R}-\frac{U_{AB}}{R}$，$I_C=\frac{U_{CA}}{R}-\frac{U_{BC}}{R}$．

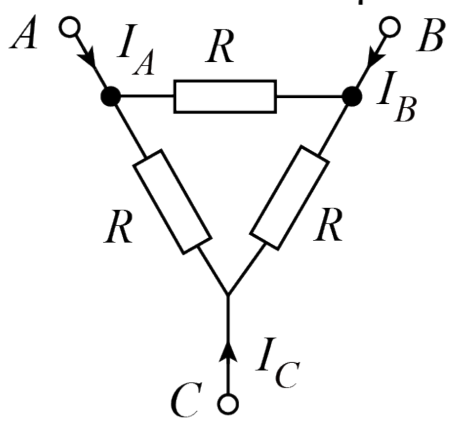
则在Y形连接中有：$U_{ab}=I_ar-I_br$，$U_{ca}=I_cr-I_ar$，$I_a+I_b+I_c=0$；

可解得：$I_a=\frac{1}{3r}U_{ab}-\frac{1}{3r}U_{ca}$，$I_b=\frac{1}{3r}U_{bc}-\frac{1}{3r}U_{ab}$，$I_c=\frac{1}{3r}U_{ca}-\frac{1}{3r}U_{bc}$．

通过比较系数可得：$R=3r$．



甲



乙

叠加原理

基尔霍夫定律是解决恒定直流电路问题的一般通用方法，但是如果电路复杂，则方程较多，计算量很大。下面我们继续介绍求解复杂电路问题的其它方法。

知识点睛

（1）电源叠加

如果电路中有多个电源，则通过电路中任一支路的电流等于电路中各个电动势单独存在时在该支路上产生的电流的代数和。这与力学中常用的独立作用原理是非常相似的。

当单独考虑某一电源的作用时，将其它电压源用内阻代替即可，若为理想电压源，则将电源短路。

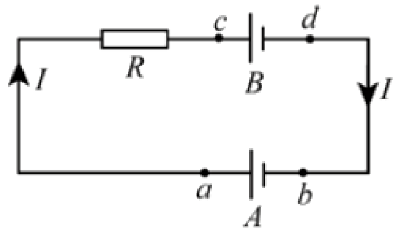
（2）电流叠加

当电流从节点A流入，从节点B流出时，可以先假设电流由节点A流向任意节点C（有时可以是无穷远），再由节点C流向节点B。任意支路电流是这两次电流的叠加。

电流叠加法有一定的技巧性，请大家结合例题学习。

例题精讲

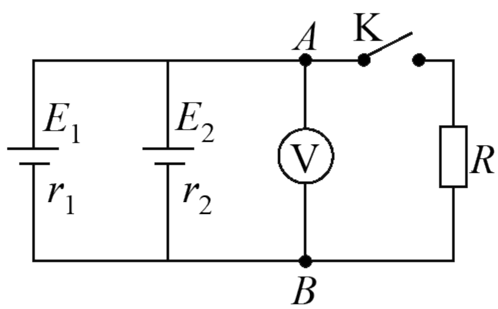
14 如图所示，A的电动势为$\varepsilon_1 = 24\mathrm{V}$，内阻$r_A = 2\Omega$；$B$的电动势为$\varepsilon_2 = 12\mathrm{V}$，内阻$r_B = 1\Omega$；外电阻$R = 3\Omega$，利用叠加原理求回路电流．



答案 2A

解析 略．

15 如图（a）所示，$R = r_1 = 8\Omega$，$r_2 = 2\Omega$，$E_2 = 2E_1 = 6\mathrm{V}$，试分别求断开和合上电键K时，伏特表的读数．



(a)

答案　断开电键K时，伏特表的读数为5.4V；合上电键K时，伏特表的读数为4.5V．

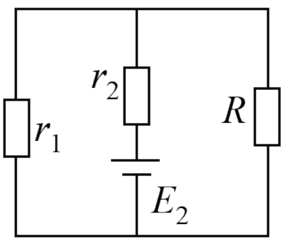
解析　解法一：断开电键K，回路成简单回路．

由于$E_2 > E_1$，回路电流沿逆时针方向，回路电流I为$I = \dfrac{E_2 - E_1}{r_1 + r_2}$，

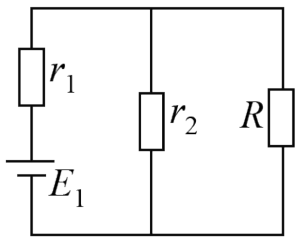
伏特表读数为$U_{AB} = U_A - U_B = E_2 - Ir_2 = E_2 - \dfrac{E_2 - E_1}{r_1 + r_2} r_2 = 5.4(\mathrm{V})$，

合上电键K，电路变为多回路电路，伏特表读数就是R上的电压降．

利用叠加定理求解．为求出每个电源在R上独立提供的电流，画出两个等效电路，如图（b）和（c）所示，每一个图中只保留一个电动势．



(b)



(c)

如图（b）中流经R的电流$I_1 = \dfrac{E_2}{r_2 + \dfrac{Rr_1}{R + r_1}} \cdot \dfrac{r_1}{R + r_1} = 0.5(\mathrm{A})$，

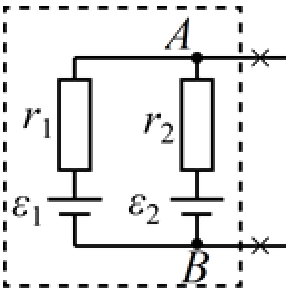
图（c）中流经R的电流$I_2 = \dfrac{E_1}{r_1 + \dfrac{Rr_2}{R + r_2}} \cdot \dfrac{r_2}{R + r_2} = \dfrac{1}{16}(\mathrm{A})$，

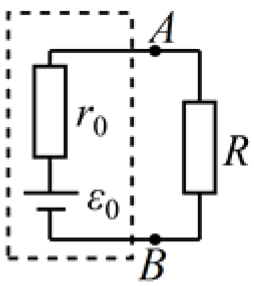
而且I_1，I_2流经R的方向一致，

所以原电路中伏特表的读数为$U_{AB} = (I_1 + I_2)R = 4.5(\mathrm{V})$．

解法二：

在合上K后，可以将题目中的电路简化为如图所示的电路．





等效电动势ε_0等于A、B开路时的路端电压，由分析可知：

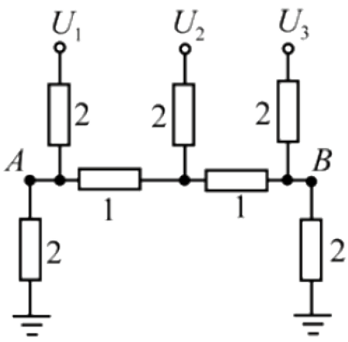
$\varepsilon_0 = U_{AB} = \varepsilon_2 - Ir_2 = \varepsilon_2 - \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{r_1 + r_2} r_2 = 5.4\mathrm{V}$．

等效内阻r_0为二端网络除源后的等效内阻：$r_0 = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 1.6\Omega$．

故$U_{AB} = \dfrac{\varepsilon_0 R}{r_0 + R} = 4.5\mathrm{V}$．

故答案为：断开电键K时，伏特表的读数5.4V；合上电键K时，伏特表的读数为4.5V．

16 电路中各电阻阻值如图所示，输入电压分别为U_1、U_2、U_3，求B点电势．



答案 $\frac{1}{12}U_1+\frac{1}{6}U_2+\frac{1}{3}U_3$

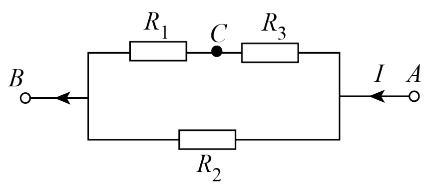
解析 略．

****

例题说明：下面这道题主要让学生体会电流叠加的思想，为后面做铺垫

****

17 利用如图所示电路研究电流叠加原理．已知电阻$R_1=1\Omega$，$R_2=2\Omega$，$R_3=3\Omega$，电流I从A点流到B点，为了计算通过R_2支路的电流，可以直接利用串并联规律计算，也可以利用叠加原理：假设一支电流I从A点流入C点流出，另一电流从C点流入B点流出，各支路电流为两次电流的叠加，试计算：



（1）A点流入C点流出的电流I通过R_2支路的电流．

（2）C点流入B点流出的电流I通过R_2支路的电流．

（3）通过R_2支路的总电流．

答案 （1）$\frac{1}{2}I$

（2）$\frac{1}{6}I$

（3）$\frac{2}{3}I$

解析 （1）$\frac{1}{2}I$．

（2）$\frac{1}{6}I$．

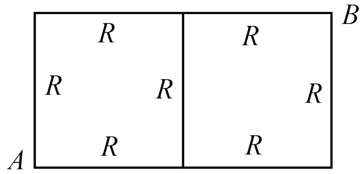
（3）$\frac{2}{3}I$．

****

例题说明：下面这道题说明利用电流叠加求电阻的方法，为后面较难的题目做铺垫。

****

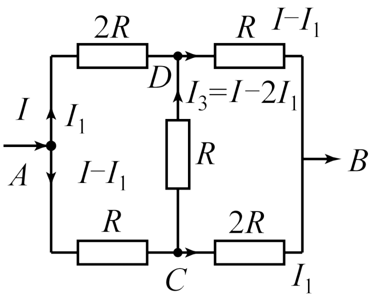
18 7个电阻均为R的网络如图甲所示．试求A、B间的等效电阻R_{AB}．请利用叠加原理求解．



甲

答案 $\frac{7R}{5}$

解析 设电流I从A端流入，B端流出．根据对称性及串联等效电阻公式，可将电路化简为如图所示，并设各部分电流分布如图所示．



沿路径AD可得：$U_{AD}=I_1\cdot 2R$，

沿路径ACD可得：$U_{AD}=(I-I_1)R+(I-2I_1)R$，

联立解得：$I_1=\frac{2}{5}I$．

取路径ADB，可算出：

$U_{AB}=I_1\cdot 2R+(I-I_1)R=\frac{7RI}{5}$．

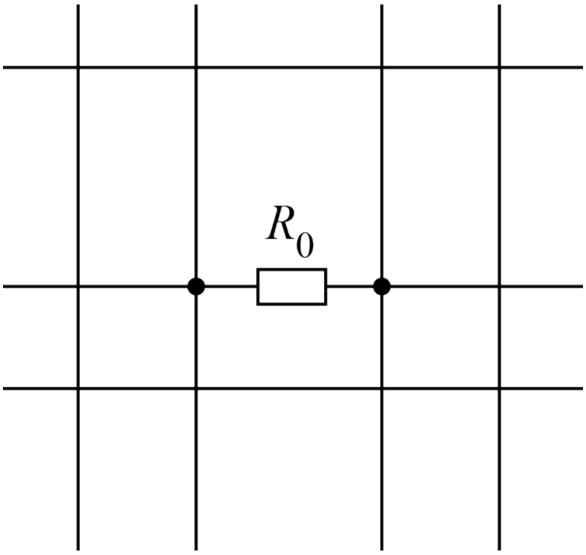
可得：$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}=\frac{7R}{5}$．

说明：本题也可以通过Δ-Y形电路变换求解．

故答案为：$\frac{7R}{5}$．

19

如图所示为无限网络，每根导线电阻为R，AB之间导线的电阻$R_0=3R$，求AB之间的电阻．



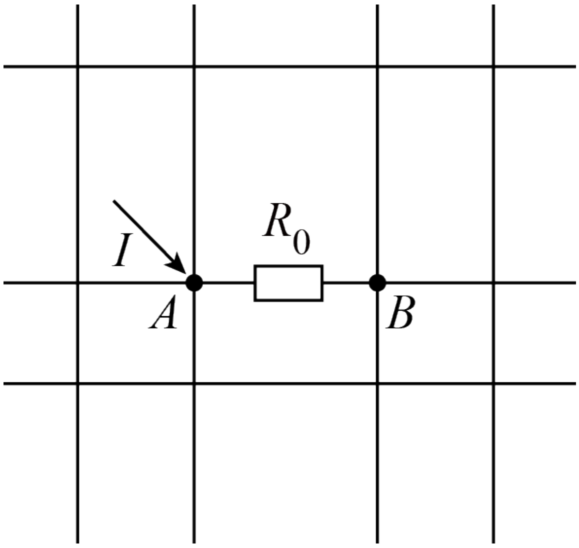
答案 $3R/4$

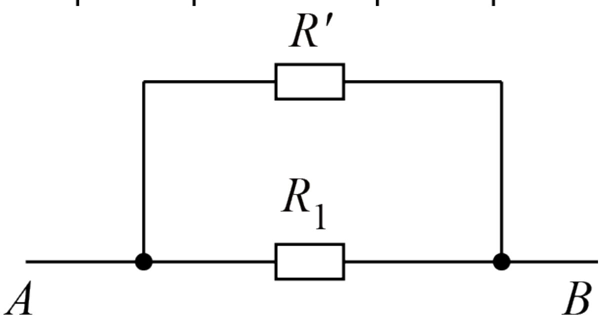
解析 先将无限网络视为每个电阻丝电阻相等为R，A流入电流I，B流出电流I，这样的电流进出可看成从A处流进电流I先流到无穷远处，而B处流出的电流可理解成是从无穷远处汇聚而成．

若单纯观察A流进电流I，由无限对称性知，AB线上有$I/4$从A到B；若单纯观察B流出电流I，由无限对称性知，AB线上同样有$I/4$从A到B，则两者叠加，故AB线上的电流为$I/2$，

$R_{AB}{}'=U_{AB}/I=0.5IR/I=R/2$．

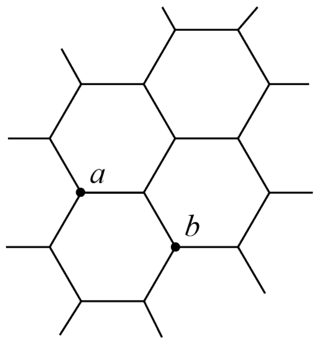
$R_{AB}{}'$看作R'与$R_1=R$的并联，如图，解得$R'=R$．为了求得R_{AB}，只要将R_1换成$R_0=3R$，故得$R_{AB}=R'R_0/(R'+R_0)=3R/4$．





故答案为：$3R/4$．

20 有一无限大平面导体网络，它由大小相同的正六角形网眼组成，如图所示．所有六边形每边的电阻均为R_0，求网络结点a，b间的等效电阻．

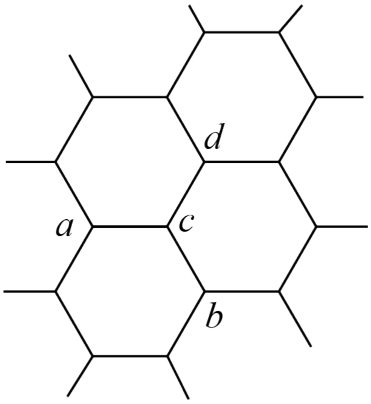


答案 R_0

解析 由网络的对称性可知，假设有I电流由a点流入网络，必有$\frac{I}{3}$电流由a流向c，在C点又分两支路电流向d和b，即流经cb的电流为$\frac{I}{6}$；另一方面，假设有I电流从网络b点流出，亦有$\frac{I}{3}$由c点流向b，a和d分别有$\frac{I}{6}$流向c．将两种情况叠加，则有I电流由a流入，从b流出．按电流可叠加性，$I_{ac}=\frac{I}{3}+\frac{I}{6}=\frac{I}{2}$，由$a$流向$c$，$I_{ac}=\frac{I}{3}+\frac{I}{6}=\frac{I}{2}$，由$c$流向$b$．$ab$两点间等效电阻

$$R_{ab}=\frac{U_{ab}}{I}=\frac{I_{ac}R_0+I_{ab}R_0}{I}=R_0\ .$$

故答案为：R_0 .



等效电压源和等效电流源（选讲）

****

教师版说明：电流源的应用相对较少，因此涉及电流源的内容老师选讲。老师如果想练习电压源与电流源的转化，可以自己编几个简单题。

****

知识点睛

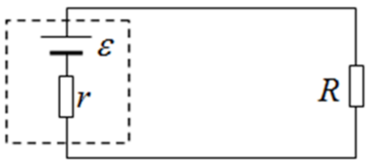
定义

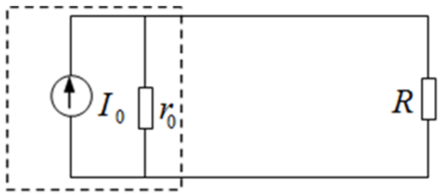
①一个实际电源可以看成是电动势为ε，内阻为零的理想电压源与电阻r的串联。在理想情况下，$r=0$，不管外电阻如何，电源提供的外电压总是恒定值ε，我们把这种电源叫做**恒压源**。在非理想情况下，$r\neq 0$，这样的电源叫做电压源，它相当于内阻r与恒压源串联。

②我们还可以设想有另一种理想电源，不管外电阻如何变化，它总提供不变的电流I_0，这种电源称为**恒流源**。一个电池串联一个很大的电阻就近似组成一个恒流源，因为它对外电阻提供的电流几乎不随外电阻变化。在非理想情况下，这样的电源叫做电流源，相当于一定的内阻r_0与恒流源并联。

③实际电源既可以看成电压源，也可以看成电流源，它们之间存在着某种等效关系。作用等效是指对于同样的外电路，它们产生的电压和电流都相同。

如图所示的电压源提供的电流$I=\dfrac{\varepsilon}{R+r}$，电流源提供的电流$I=I_0\dfrac{r_0}{R+r_0}$。若对任意外电阻都成立，则要求：$I_0=\dfrac{\varepsilon}{r}$，$r=r_0$。即满足这样的变化关系的电压源和电流源等效。





定理

（1）等效电压源定理（戴维南定理）

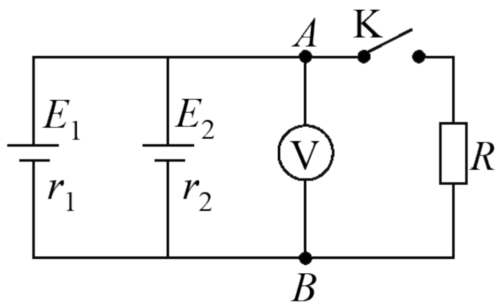
两端有源网络可等效于一个电压源，其电动势等于网络的开路电压，内阻等于从网络两端看除电源以外（即将电动势短路）网络的电阻。

（2）等效电流源定理（诺尔顿定理）

两端有源网络可等效于一个电流源，电流源的输出电流等于网络两端短路时流经两端点的电流，内阻等于从网络两端看除电源外网络（即将电流源开路）的电阻。

例题精讲

21 如图（a）所示，$R=r_1=8\Omega$，$r_2=2\Omega$，$E_2=2E_1=6\mathrm{V}$，试分别求断开和合上电键K时，伏特表的读数．（请练习使用等效电压源求解）



(a)

答案 断开电键K时，伏特表的读数为5.4V；合上电键K时，伏特表的读数为4.5V．

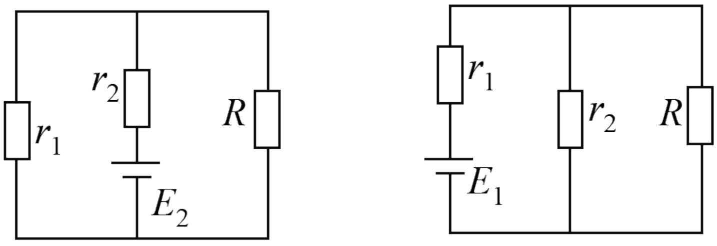
解析 断开电键K，回路成简单回路．

由于$E_2>E_1$，回路电流沿逆时针方向，回路电流I为$I=\dfrac{E_2-E_1}{r_1+r_2}$，

伏特表读数为$U_{AB}=U_A-U_B=E_2-Ir_2=E_2-\dfrac{E_2-E_1}{r_1+r_2}r_2=5.4(\mathrm{V})$，

合上电键K，电路变为多回路电路，伏特表读数就是R上的电压降．

利用叠加定理求解．为求出每个电源在R上独立提供的电流，画出两个等效电路，如图（b）和（c）所示，每一个图中只保留一个电动势．



(b) (c)

如图（b）中流经R的电流$I_1=\dfrac{E_2}{r_2+\dfrac{Rr_1}{R+r_1}}\cdot\dfrac{r_1}{R+r_1}=0.5(\mathrm{A})$，

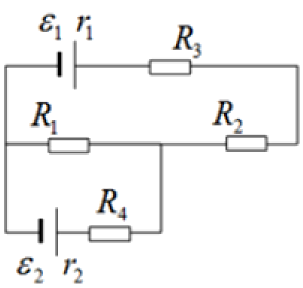
图（c）中流经R的电流$I_2=\dfrac{E_1}{r_1+\dfrac{Rr_2}{R+r_2}}\cdot\dfrac{r_2}{R+r_2}=\dfrac{1}{16}(\mathrm{A})$，

而且I_1，I_2流经R的方向一致，

所以原电路中伏特表的读数为$U_{AB}=(I_1+I_2)R=4.5(\mathrm{V})$．

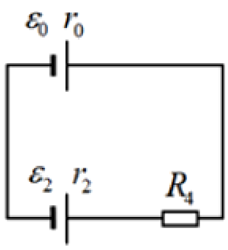
故答案为：断开电键K时，伏特表的读数5.4V；合上电键K时，伏特表的读数为4.5V．

22 如图所示电路，电动势$\varepsilon_1=3.0\mathrm{V}$，$\varepsilon_2=1.0\mathrm{V}$，内阻$r_1=0.5\Omega$，$r_2=1\Omega$，电阻$R_1=10\Omega$，$R_2=5.0\Omega$，$R_3=4.5\Omega$，$R_4=19.0\Omega$，试用等效电压源定理计算从电源$\varepsilon_2$正极流出的电流．



答案 0.02A

解析 把除电源ε_2和电阻R_4的电路用等效电压源ε_0、r_0代替，等效电路如图．

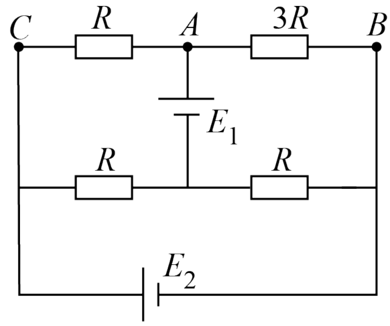


则$\varepsilon_0=\dfrac{R}{r_1+R_1+R_2+R_3}\varepsilon_1=1.5\mathrm{V}$，$r_0=\dfrac{R_1(r_1+R_2+R_3)}{r_1+R_1+R_2+R_3}=5\Omega$．

由等效电路可得，通过ε_2的电流$I=\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon_2}{r_0+R_4+r_2}=0.02\mathrm{A}$.

故答案为：$0.02\mathrm{A}$.

23 如图所示电路，电源内阻不计，当电动势E_1减小$1.5\mathrm{V}$后，怎样改变电动势E_2使流经电池E_2的电流强度与E_1改变前流经E_2的电流强度相同？

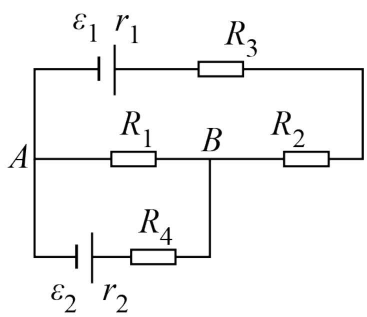


答案 E_2应减小0.375V

解析 把除E_2以外的电路当作一个等效电源

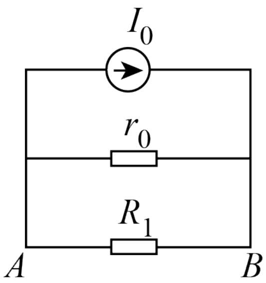
$E_{等}=U_{CB}=U_{CA}+U_{AB}=-\dfrac{E_1}{R+R}\cdot R+\dfrac{E_1}{3R+R}\cdot 3R=\dfrac{E_1}{4}$. 将E_1短接，从电源E_2两侧看，等效内阻$r_{等}=\dfrac{R\cdot R}{R+R}+\dfrac{3R\cdot R5}{3R+R4}R$. 这样对于等效电路有$I_2=\dfrac{E_{等}-E_2}{r_{等}}=\dfrac{E_1-4E_2}{5R}$ ，要使E_1减小后，I_2不变，须满足$\Delta E_1-4\Delta E_2=0$得$\Delta E_2=\dfrac{1}{4}\Delta E_1=-0375\mathrm{V}$，即$E_2$应减小$0.375\mathrm{V}$.

24 如图所示电路，电动势$\varepsilon_1=3.0\mathrm{V}$，$\varepsilon_2=1.0\mathrm{V}$，内阻$r_1=0.5\Omega$，$r_2=1\Omega$，电阻$R_1=10\Omega$，$R_2=5.0\Omega$ ，$R_3=4.5\Omega$，$R_4=19.0\Omega$，试用等效电流源定理计算从结点B流向节点A的电流I .



答案 $0.14\mathrm{A}$

解析 等效电路如图所示 .



根据等效电流源定理，电流源的I_0等于将原电路中A、B两点短路时流过的电流，即

$$I_0=\frac{\varepsilon_1}{r_1+R_3+R_2}+\frac{\varepsilon_2}{r_2+R_4}=0.35\text{A}\ .$$

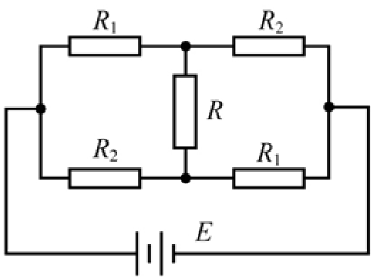
而电流源的内阻r_0等于从A、B两端的电阻，

即$r_0=\dfrac{(r_1+R_3+R_2)(r_2+R_4)}{r_1+R_3+R_2+r_2+R_4}=\dfrac{20}{3}\Omega$.

因此，$I=\dfrac{r_0}{r_0+R_1}I_0=0.14\text{A}$.

故答案为：0.14A .

25 如图所示电路，电源电动势为E，内阻不计，电阻R_1、R_2、R已知（假设$R_2>R_1$），试用等效电源定理计算流过电阻R的电流I .



答案 $I=\dfrac{(R_2-R_1)E}{2R_1r_2+(R_1+R_2)R}$.

解析 略 .

网络电阻化简

知识点睛

（1）对称法

若电路结构具有对称性，可将各等势点叠合，或将等势点一分为二（原则是拆开等势点不会影响电路的状态），从而将电路化为简单的串并联电路来求解等效电阻。

（2）极限法

包含有无限多个电阻的二端网络称为二端无限电阻网络。如果这样的网络是由无限多个某种小网络元按相同的方式逐个连接而成的，那么常可采用极限法来求网络的等效电阻。其方法是：先设由k个网络元组成的二端网络的等效电阻为R_k，再连接一个网络元，设法找出连接后的等效电阻R_{k+1}与R_k之间的数学递推关系式，最后令$k \to \infty$，则R_{k+1}与R_k便同为原二端网络的等效电阻R_{AB}，R_{K+1}与R_k的递推关系式就变成关于R_{AB}的一元代数方程，由此可解出R_{AB}。具体方法请大家结合例题学习。

****

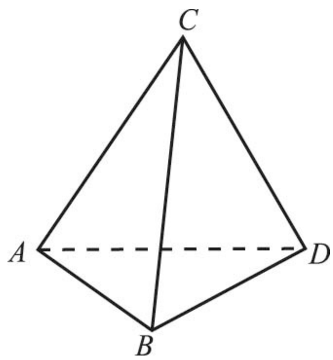
教师版说明：利用极限法求解自相似无穷网络电阻，老师可以根据时间选讲。

电路化简还有一些其它方法，例如变换等，这些内容比较复杂，计算量较大，我们就不进行专门介绍了。

****

例题精讲

26 正四面体$ABCD$，每条边的电阻均为R，取一条边的两个顶点，如图中AB，求整个四面体的等效电阻R_{AB}为多少．



答案 $R_{AB} = \frac{R}{2}$

解析 设电流从A端流入，B端流出．由对称性易知C，D两点一定等势，故可删除CD两点间的电阻，则等效电阻R_{AB}满足$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}$，解得$R_{AB} = \frac{R}{2}$．

27 平面上有100个点，每两点之间连有阻值R的电阻，在任意两点间加上电压U，则电路消耗的总功率为（　　）

A. $100\dfrac{U^2}{R}$　　B. $50\dfrac{U^2}{R}$　　C. $10\dfrac{U^2}{R}$　　D. $\dfrac{U^2}{R}$

答案　B

解析　任意两个点之间都连有阻值为R的电阻，因此电阻分布具有对称性，为了叙述方便，设A、B两点间加上电压，则除A、B外的其余98个点为等势点，这98个点相互之间的电阻可以拆去，因此等效电阻可看成是电阻R与$\dfrac{2R}{n-2}=\dfrac{R}{49}$的并联，$R=\dfrac{R}{50}$，总功率$P=\dfrac{U^2}{R}=50\dfrac{U^2}{R}$．

故选B．

28 由6个未必相同的电阻和电压$U=10\text{V}$的直流电源构成的电路如图1所示，其中电源输出电流$I_0=3\text{A}$．若如图2所示，在电源右侧并联一个电阻（电阻值记为R_x），则电源输出电流$I=5\text{A}$．今将此电源与电阻R_x串联后，改接在C、D两点右侧，如图3所示，试求电源输出电流I'．

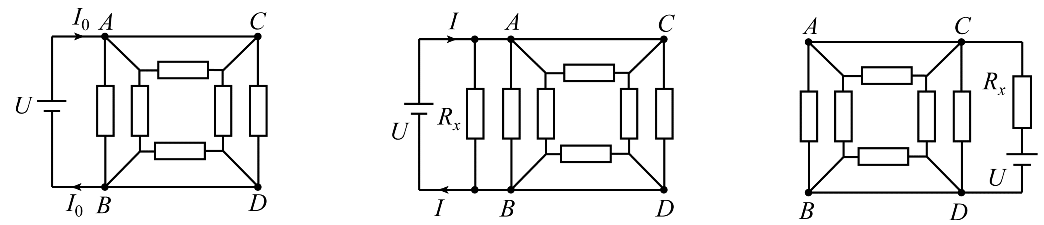
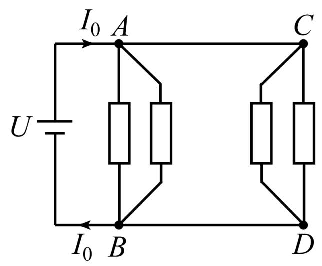


图1　　图2　　图3

答案　1.2A

解析　以图1为例，由于A、C两点等势，B、D两点等势，所以图1的电路可以简化为如图所示情景：



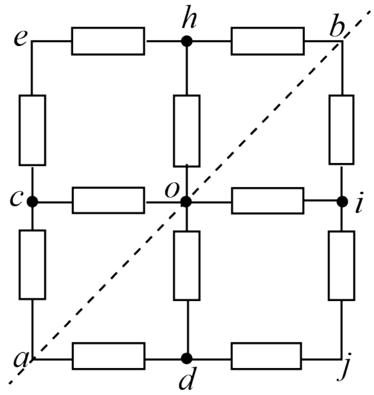
电路中$ABCD$部分电阻实际为四个电阻并联；图2、图3化简后情景相同．因此可以设$ABCD$部分总电阻为R．

则由图1可知：$R=\dfrac{U}{I_0}=\dfrac{10}{3}\Omega$；

由图2可知：$I=\dfrac{U}{R}+\dfrac{U}{R_x}$，解得：$R_x=5\Omega$；

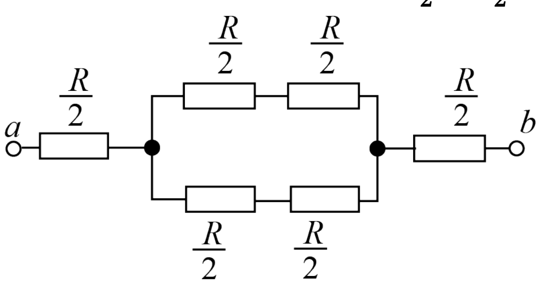
由图3可知：$I'=\dfrac{U}{R+R_x}=1.2\text{A}$．

29 在如图所示电路中，12个相同电阻，阻值均为R，试求ab两端间的等效电阻R_{ab}．



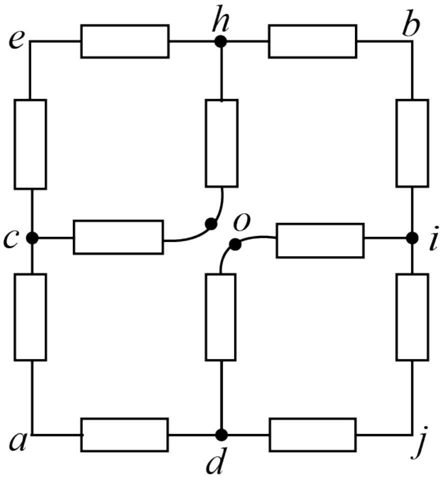
答案 见解析．

解析 网络电阻具有对称性，设想电流由a端流入，b端流出，可以看出cd两点，eoj三点，hi两点分别等电势，以ab位对称轴将电路对折，则$cdej$和ih三对节点——重合，各节点间电阻并联，等效电路如图所示，由此可得$R_{ab}=\dfrac{1}{2}R+\dfrac{1}{2}R+\dfrac{1}{2}R=1.5R$．

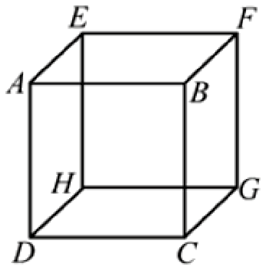


对于完全对称的网络电阻，也可将某些等式点拆开，若将图中的O点分开成如图45-7所示，电路成为左上、右下两相同的简单电路，ab间的等效电阻有$\dfrac{1}{R_{ab}}=2\times\dfrac{1}{R+\frac{2R}{2}+R}=\dfrac{2}{3R}$，故$R_{ab}=1.5R$．

值得一提的是，如果把点沿图中垂直于虚线的另一方向拆开，分开后的两点不等势，则这种分拆的方式就不可行．



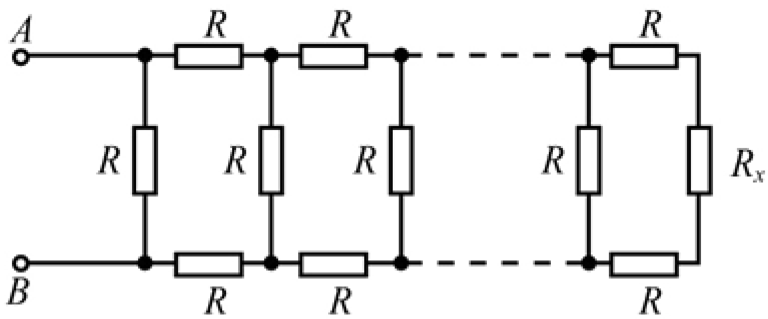
30 如图所示，12个阻值都是R的电阻组成立方体，试求A、B间电阻R_{AB}和A、G间电阻R_{AG} .



答案 $R_{AB}=\frac{7}{12}R$；$R_{AG}=\frac{5}{6}R$

解析 略 .

31 如图所示的无穷网络电阻中，除最后一个电阻为R_x外，其余电阻阻值都是R，那么要使A、B两点间的等效电阻与网络级数n无关，则$R_x=$ ______ R .



答案 $R_x=\left(\sqrt{3}-1\right)R$

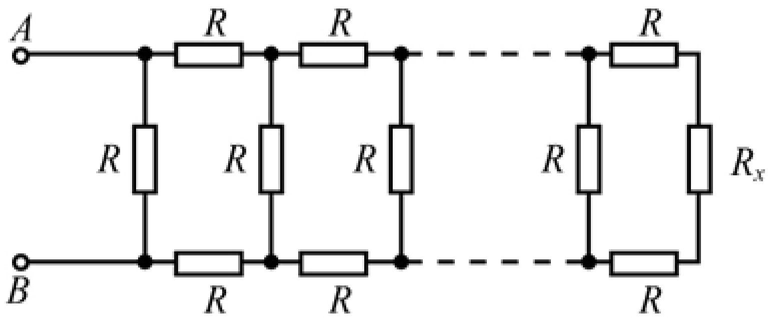
解析

要使A、B两点间的等效电阻与网络级数无关，则最后4个电阻的等效电阻应为R_x，即

$\frac{1}{R_x}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_x+2R}$，解得$R_x=\left(\sqrt{3}-1\right)R$．

故答案为：$R_x=\left(\sqrt{3}-1\right)R$．

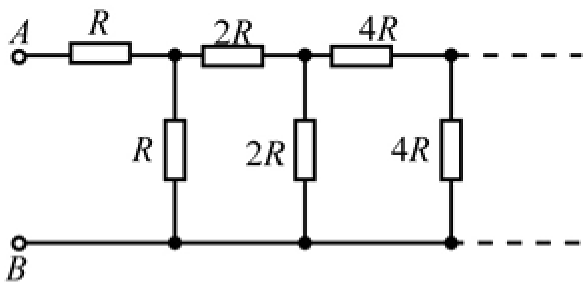
32 如图所示的无穷网络电阻，所有电阻阻值为R，求R_{AB}．



答案 $\left(\sqrt{3}-1\right)R$．

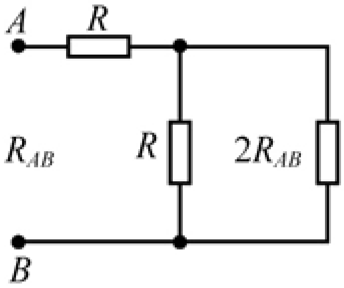
解析 略．

33 如图所示，由电阻组成的长链有无数个节点，第一个节点有阻值为R的两个电阻，第二个节点有阻值为$2R$的两个电阻，第三个节点有阻值为$4R$的两个电阻，如此下去，已知低一级两节点间的电阻总是前一级节点间电阻的2倍，则A、B间的电阻值应为多少．



答案 $\frac{3+\sqrt{17}}{4}R$．

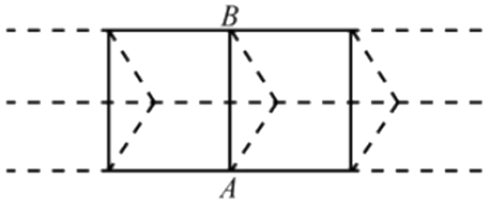
解析 设A、B两点间的电阻为R_{AB}，则第2级及以后的无限网络等效电阻为$2R_{AB}$，等效电路如图所示．



有$R_{AB}=R+\dfrac{2R_{AB}R}{2R_{AB}+R}$，即$2R_{AB}^2-3RR_{AB}-R^2=0$，解得$R_{AB}=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}R$．

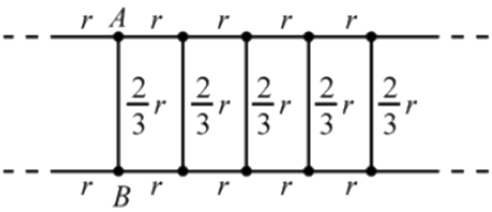
故答案为：$\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}R$．

34 电阻丝无限网络如图所示，每一段金属丝的电阻均为r，试求A、B两点间的等效电阻R_{AB}．

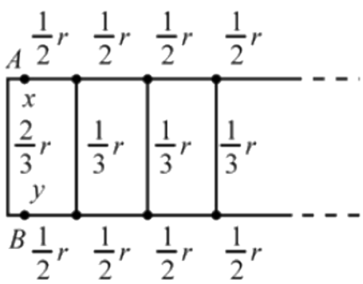


答案 $\dfrac{2\sqrt{21}}{21}r$

解析 由对称性可将原图背面的金属丝拆去，再将每个小三角形等效为阻值为$\dfrac{2}{3}r$的直导线，如图所示．



再折叠成如下图所示，此网络可视为A、B端之间的$\dfrac{2}{3}r$与图中x、y为端点(x、y为无限靠近A、B的点)的半无限网络并联而成．

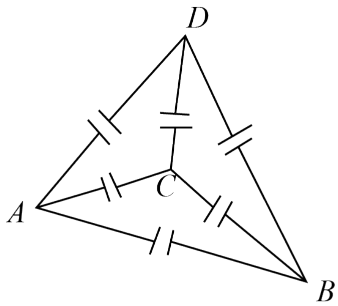


有$R_{xy}=\dfrac{r}{2}+\dfrac{r}{2}+\dfrac{\dfrac{r}{3}R_{xy}}{\dfrac{r}{3}+R_{xy}}$，解得$R_{xy}=\dfrac{3+\sqrt{21}}{6}r$．因此$R_{AB}=\dfrac{\dfrac{2}{3}r\cdot R_{xy}}{\dfrac{2}{3}r+R_{xy}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{21}r$．

故答案为：$\frac{2\sqrt{21}}{21}r$．

补充题

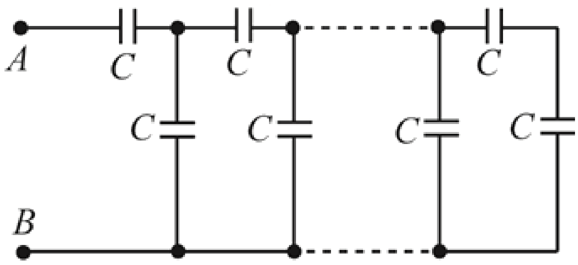
35 如图所示，每个电容器的电容均为C，求AB点间的等效电容C_{AB}．



答案 $2C$

解析 $2C$．

36 如图所示的无穷网络电容，所有电容值均为C，求A、B两点间的电容．



答案 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}C$．

解析 略．

欧姆定律的微分形式

知识点睛

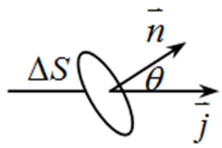
定义

在粗细相同和材料均匀的导体两端加上恒定电势差后，导体内存在恒定电场，从而形成恒定电流，电流在导体任一截面上各点的分布是相同的。但是如果导体各处粗细不同或材料不均匀（或是大块导体），则电流在导体截面上各点的分布将是不均匀的，这时电流在导体截面上各点的分布情况可以用**电流密度**$\vec{j}$来描述。

①电流密度是矢量，其方向为该点的电流方向。

②某点电流密度的大小等于通过该点与电流方向垂直的单位面积的电流强度。

设想在导体中某点取一个与电流方向垂直的截面元ΔS，则通过ΔS的电流ΔI该点电流密度j的关系是$\Delta I = j\Delta S$。如果截面元$\Delta\vec{S}$的法线方向与电流方向夹角为θ，则$\Delta I = j\Delta S\cos\theta$。写成矢量形式即为$\Delta I = \vec{j}\cdot\Delta\vec{S}$，其中$\Delta\vec{S}$的方向是面元的法线方向。

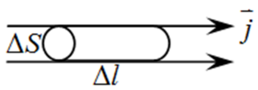


在大块导体中各点$\vec{j}$有不同的数值和方向，这就构成一个矢量场，即电流场。像电场分布可以用电场线来形象描绘一样，电流场也可以用电流线描绘。所谓电流线是这样一些曲线，其上每点的切线方向都和该点的电流密度方向一致。电流密度和电流的关系，实际是一个矢量场和它的通量的关系。

公式

（1）欧姆定律的微分形式

设想在导体内取一小段，设其长度为Δl，垂直截面为ΔS，对于这段导体，由欧姆定律有：$I = \dfrac{U}{R}$



其中电流$I = j\Delta S$；电阻$R = \rho\dfrac{\Delta l}{\Delta S}$；场强$E$的方向与电流密度方向一致，因此电势差$U = E\Delta l$；

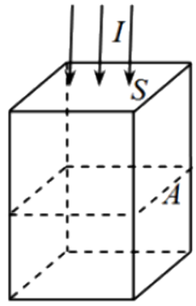
联立四个式子可得：

$$j = \frac{E}{\rho} = \sigma E$$

其中$\sigma = \dfrac{1}{\rho}$，称为电导率。这就是**欧姆定律的微分形式。**

例题精讲

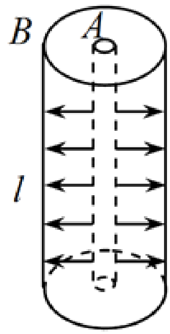
如图所示，一根均匀导线截面积为S，电阻率为ρ，电流I从上端流入，下端流出．假设电流在导线内均匀分布，求任意截面A处的电流密度和场强大小．



答案 $j=\dfrac{I}{S}$；$E=\rho\dfrac{I}{S}$

解析 略．

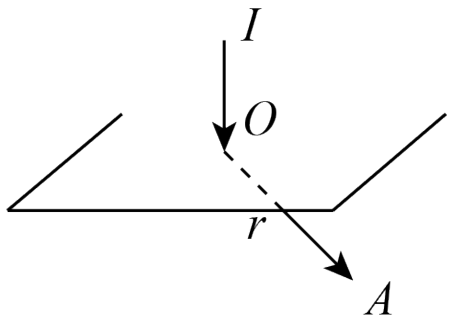
38 如图所示，同轴电极A、B之间充有电阻率为ρ的均匀介质，两电极长度均为l，电流I从中心电极A流向电极B，假设不同高度处电流均匀分布，忽略边缘效应，求距离轴线r（r小于电极B的半径）处的电流密度及场强大小．



答案 $j=\dfrac{I}{2\pi rl}$；$E=\rho\dfrac{I}{2\pi rl}$．

解析 略．

39 大地可以看做电阻率为ρ的无穷大均匀介质，从地面上O点注入电流I，求大地中距离O点r处的电流密度的大小．



答案 $j=\dfrac{I}{2\pi r^2}$

解析 略．

40 无穷大的空间中充满均匀的导体物质，在其中相距为L的两个点之间接上电源，结果从电源流进、流出的电流强度均为I，计算这两点连线中点处的电流密度为多少．

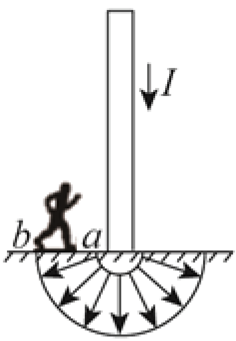
提示：可以先让电流从正极流向无穷远，再从无穷远汇向电源负极，实际的电流为两次电流的总和．

答案 $j=\dfrac{2I}{\pi L^2}$．

解析 略．

41 电线被风吹断，一端触及地面，从而使200A的电流由接触点流入地下，如图所示．设地面水平，大地的电导率$\sigma=10^{-2}\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$，当一个人走近输电线接地端，左右两脚间（约0.6m）的电压称跨步电压，试求：距高压线触地点1m和10m处的触地电压．

提示：若电场中场强满足$E\dfrac{k}{r^2}$（其中k为常数），则任意两点间电压$U_{ab}=k\left(\dfrac{1}{r_a}-\dfrac{1}{r_b}\right)$．



答案 见解析．

解析 高压线触地后在地内电流可认为球对称分布，则距触地点r处的电流密度应为$j=\dfrac{I}{2\pi r^2}$．因此，场强$E=\dfrac{I}{2\pi\sigma r^2}$，则跨步电压$U=\dfrac{I}{2\pi\sigma r}\dfrac{\Delta r}{r\left(r+\Delta r\right)}$．

因此，距触地点$1\mathrm{m}$处的跨步电压$U\approx 1194\mathrm{V}$，距触地点$10\mathrm{m}$处的跨步电压$U\approx 18\mathrm{V}$．

知识点睛

****

教师版说明：这部分内容老师选讲，也可以作为题目让学生自己进行推导。

****

（2）欧姆定律的微观解释

假设导体中自由电子的数密度（单位体积的粒子数）为n，自由电子的质量为m、电荷量为q，定向移动速度为v，结合电流的微观表达式可得：

$$j=\frac{I}{\Delta S}=\frac{nqv\Delta S}{\Delta S}=nqv \quad ①$$

为了简化问题，我们可以认为自由电子在导体中受到电场力和一个恒定阻力$\bar{f}$的作用，以速度v做匀速直线运动，可得：

$$\bar{f}=qE=q\frac{j}{\sigma}=\frac{nq^2v}{\sigma}$$

实际上自由电子在导体中的运动由热运动与定向移动叠加构成，后者形成电流。而定向移动并不是一直做匀速直线运动。自由电子在与原子实碰撞之前，以加速度$a=\dfrac{qE}{m}$做匀加速直线运动，每次与原子实碰撞后，定向移动速度减为零，再重新开始做匀加速运动，如此周期性循环。设自由电子的平均碰撞间隔为τ，在每次与原子实碰撞前电子的最大速度$v_{\mathrm{m}}=a\tau=\dfrac{qE}{m}\tau$，则在一个碰撞周期内，电子受到的平均作用力$\bar{f}=\dfrac{mv_{\mathrm{m}}-0}{\tau}=qE$，与上述推导结果相同。

电子在整个运动过程中的平均定向移动速度：

$$v=\frac{1}{2}a\tau=\frac{1}{2}\frac{qE}{m}\tau \quad ②$$

联立①②可得：

$$j=\frac{1}{2}\frac{nq^2E}{m}\tau$$

与欧姆定律的微分形式$j=\sigma E$对比可知：$\sigma=\dfrac{nq^2}{2m}\tau$。

假设电子在两次碰撞之间前进的平均路程（称为平均自由程）为λ，自由电子热运动速度为u，则$\tau=\dfrac{\lambda}{u}$。

例题精讲

42 超导现象是20世纪人类重大发现之一，目前我国已研制出世界传输电流最大的高温超导电缆并成功示范运行．超导体在温度特别低时电阻可以降到几乎为零．这种性质可以通过实验研究．将一个闭合超导金属圆环水平放置在匀强磁场中，磁感线垂直于圆环平面，逐渐降低温度使超导环发生由正常态到超导态的转变后突然撤去磁场，此后若环中的电流不随时间变化，则表明其电阻为零．为探究该圆环在超导状态的电阻率上限ρ，研究人员测得撤去磁场后环中电流为I，并经一年以上的时间t未检测出电流变化．实际上仪器只能检测出大于ΔI的电流变化，其中$\Delta I \ll I$，当电流的变化小于ΔI时，仪器检测不出电流的变化，研究人员便认为电流没有变化．设环的横截面积为S，环中电子定向移动的平均速率为v，电子质量为m、电荷量为e，环中定向移动电子减少的动能全转化为圆环的内能．试用上述给出的各物理量，求超导状态的电阻率上限ρ．

答案 $\rho=\dfrac{mvS\Delta I}{etI^2}$

解析 设圆环周长为l、电阻为R，由电阻定律得 $R=\rho\dfrac{l}{S}$

设t时间内环中电流释放焦耳热而损失的能量为ΔE，由焦耳定律得 $\Delta E=I^2Rt$

设环中单位体积内定向移动电子数为n，则 $I=nevS$

式中n、e、S不变，只有定向移动电子的平均速率的变化才会引起环中电流的变化

电流变化大小取ΔI时，相应定向移动电子的平均速率的变化得大小为Δv，则$\Delta I=neS\Delta v$

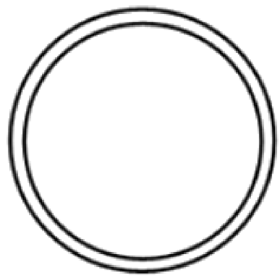
设环中定向移动电子减少的动能总和为ΔE_k，则$\Delta E_k=nlS\left[\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}m(v-\Delta v)^2\right]$

由于$\Delta I \ll I$，可得 $\Delta E_k=\dfrac{lmv}{e}\Delta I$

因为环中定向移动电子减少的动能全转化为圆环的内能．$\Delta E=\Delta E_k$

联立上述各式，得 $\rho=\dfrac{mvS\Delta I}{etI^2}$ ．

43 如图所示，一根电阻率为ρ的导线做成半径很大圆环(导线半径远小于圆环半径)，导线截面积为S．设电子质量为m，电荷量为e．开始时圆环在平面内绕圆心做匀速圆周运动，线速度为v_0，某时刻让圆环突然静止下来，电子由于惯性继续运动一段距离，求圆环停下来后流过圆环任意截面的电荷量．



答案 $\dfrac{mv_0S}{e\rho}$

解析 设导线内电子数密度为n．

电子减速停下过程中，通过某一截面的电荷量：$Q=\sum I\Delta t=neS\sum v\Delta t$．

电子减速过程中，对电子应用动量定理得：$-\sum f\Delta t=0-mv_0$，即$ne^2\rho\sum v\Delta t=mv_0$．

联立解得：$Q=\dfrac{mv_0S}{e\rho}$．

故答案为：$\dfrac{mv_0S}{e\rho}$．