第九部分-自招综合训练-磁场

在高中物理课程中，我们学习了磁场的基本概念，安培力、洛伦兹力的计算方法，重点研究了带电粒子在复合场中的运动及相关应用。在这个模块中，我们拓展一些磁场相关的基本原理和公式，并处理一些更复杂的带电粒子在复合场中的运动问题。

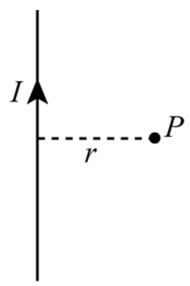
一、电流的磁场

1. 知识点睛

公式

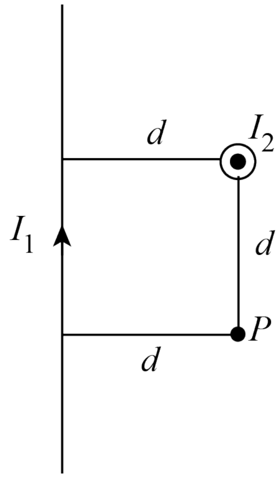
1. 无限长直线电流的磁感应强度：

设在无限长直导线中有恒定电流I，P为导线附近一点，P到导线的距离为r，则P点的磁感应强度大小为$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$，其中常数$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{N/A^2}$，是真空的磁导率。磁感应强度的方向由安培定则判断即可。



2. 例题精讲

1 如图所示，两条无限长直载流导线垂直而不相交，其间最近距离为d，电流分别为I_1和I_2．P点到两导线的距离都是d，求P点的磁感应强度大小．

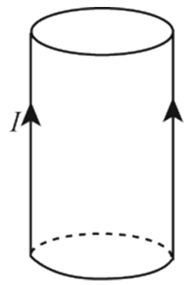


答案 $\frac{\mu_0}{2\pi d}\sqrt{I_1^2+I_2^2}$

解析 略

标注 磁场 > 认识磁场 > 磁感应强度

2 如图所示，无限长空心圆柱面中均匀通有电流，证明圆柱内任意点的磁感应强度为零．



答案 将导体圆柱面产生的磁场无限细分成一列列条状电流线产生的磁感应强度，然后再进行叠加积分运算即可证得题述结论．

解析 略

标注 电磁学 > 磁场 > 磁场叠加原理

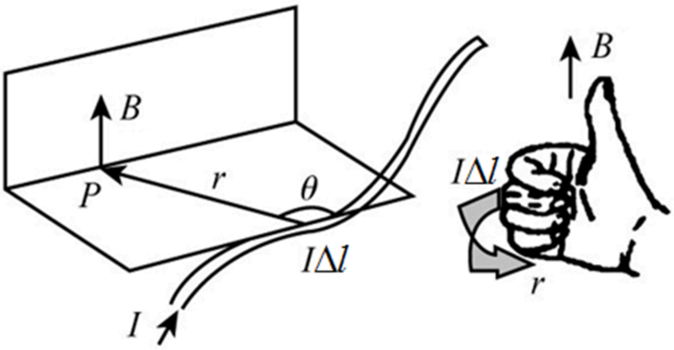
3. 知识点睛

定律

2. 毕奥——萨伐尔定律

如图所示，将电流看作无穷多小段电流（即电流元），每一小段电流元用$I\Delta\vec{l}$表示。则电流元在空间某点P产生的磁场的磁感应强度的大小$\vec{B}_{电流元}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\vec{l}}{r^2}\sin\theta$，式中$r$是电流元$I\Delta\vec{l}$到$P$点的矢径的大小；$\theta$是电流元$I\Delta\vec{l}$与矢径$\vec{r}$之间小于$\pi$的夹角。

磁感应强度$\vec{B}_{电流元}$的方向遵守右手螺旋定则，即垂直于电流元与矢径所构成的平面，四指从电流元经θ角转向矢径时拇指所指向的方向。



整个电流在P点产生总磁感应强度B为各电流元产生的磁感应强度$\vec{B}_{电流元}$的矢量叠加。

若写成矢量积分形式可表示为$\vec{B}=\int d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$

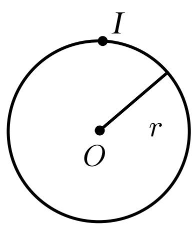
****

教师版说明：不要求用积分或叉乘计算，只要求会对简单情况用微元法进行计算。

****

4.例题精讲

3 如图所示，环形导线半径为r，通有恒定电流I，求圆环中心O点的磁感应强度大小．

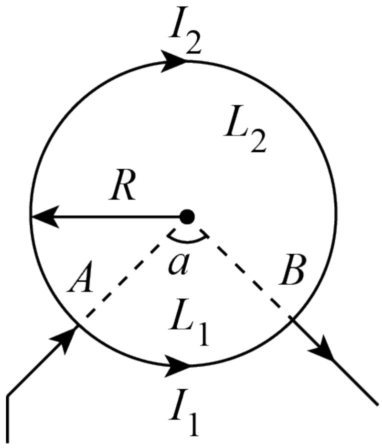


答案 $\frac{\mu_0 I}{2r}$

解析 略

标注 磁场 > 磁场的认识 > 磁感应强度的判定

4 如图所示，将均匀细导线做成的环上任意两点A、B与固定电源连接起来，计算由环上电流引起的环中心的磁感应强度．

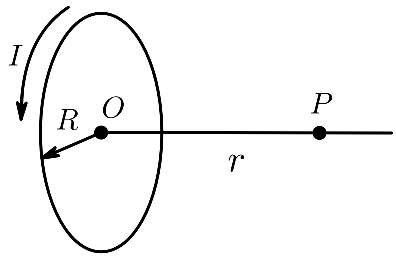


答案 $B=0$

解析 略

标注 磁场 > 磁场的认识 > 磁感应强度的判定

5 如图所示，圆环形导线半径为R，通有恒定电流I．通过圆心O且垂直于圆环平面的轴线上有一点P，$OP=r$，求P点的磁感应强度大小．



答案 $\dfrac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$

解析 略

标注 磁场 > 磁场的认识 > 磁感应强度的判定

5. 知识点睛

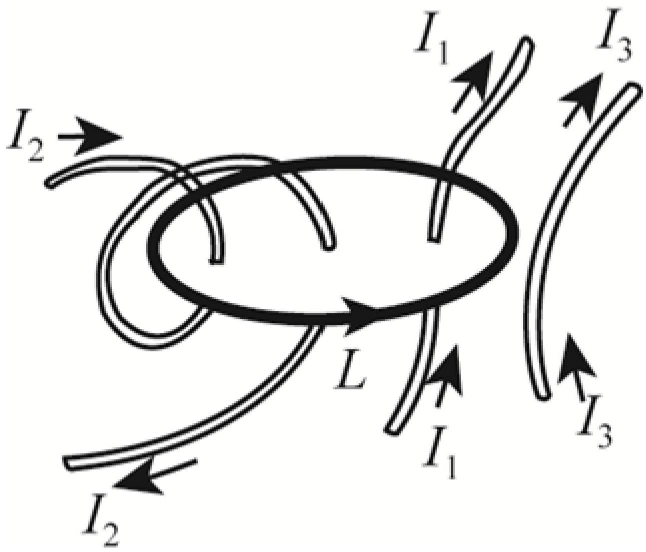
定律

此部分选讲

3.安培环路定理

在计算静电场的场强时我们提到过：虽然理论上可以由点电荷的场强公式和叠加原理处理各种电荷分布产生的场强，但是计算量可能很大。而高斯定理有时可以简化一些问题。类似的，在处理磁场问题时，安培环路定理是一条很有用的基本规律，但是它用到的数学知识较多，下面我们先用比较易懂的语言叙述一下。

在稳恒电流的磁场中，选取一个闭合回路L（并规定环绕方向），如图所示。(1) 将所有穿过回路的电流记做$\sum\limits_{内} I$，注意：当电流不穿过回路时，对$\sum\limits_{内} I$无贡献，如下图I_3；对于穿过回路的电流，右手四指沿回路环绕方向弯曲，拇指方向为电流正方向，记做$I>0$，反之$I<0$，如下图中$I_1>0$，$I_2<0$；则下图中$\sum\limits_{内} I=I_1-2I_2$。(2) 将回路分成无穷多小段$\Delta\vec{l}$（方向为该小段路径的切线方向），设该点的磁感应强度$\vec{B}$的方向与$\Delta\vec{l}$的夹角为θ，则有$\sum B\Delta l\cos\theta=\mu_0\sum\limits_{内} I$，这就是安培环路定理。



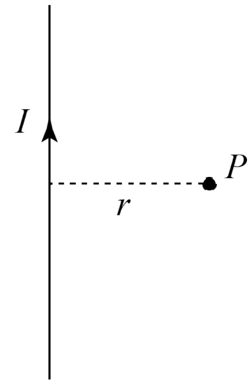
下面我们再用比较规范的语言叙述一遍：

在稳恒电流的磁场中，磁感应强度$\vec{B}$沿任何闭合环路L积分，等于穿过这个闭合环路所有电流强度的代数和的μ_0倍。即$\sum\limits_{闭合回路}\vec{B}\cdot\Delta\vec{l}=\mu_0\sum\limits_{闭合回路内} I$或$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum\limits_{L内} I$。式中电流$I$正负规定为：当穿过回路$L$的电流方向与回路的环绕方向服从右手规则时$I>0$，反之$I<0$。

安培环路定理的应用请大家结合例题学习。

6. 例题精讲

6 在无限长直导线中有恒定电流I，P为导线附近一点，P到导线的距离为r，请利用安培环路定理求P点的磁感应强度大小．

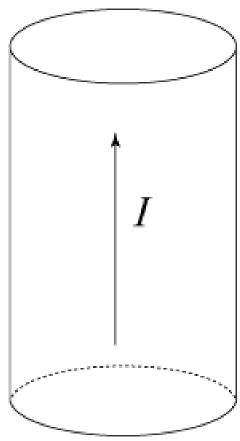


答案 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

解析 略

标注 磁场 > 磁场的认识 > 磁感应强度的判定

7 求圆截面的无限长截流直导线的磁场分布，设导线的半径为R，电流I均匀地通过横截面．

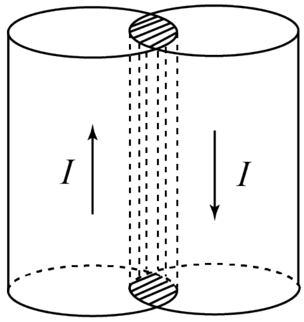


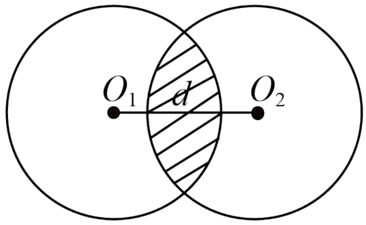
答案 $B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}(r>R)\\\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi r}(r\leqslant R)\end{cases}$ r为距轴线的距离．

解析 略

标注 磁场 > 磁场的认识 > 磁感应强度的判定

8 如图所示图形可以看做两根无限长圆柱重叠构成，两侧通有反向电流．该电流可以等效看做在左侧O_1圆柱中通有向上的电流I（沿圆截面均匀分布），在右侧O_2圆柱中通有向下的电流I（沿圆截面均匀分布），重叠的阴影区域中电流抵消（等效于没有电流）．两圆柱截面半径均为R，轴线间距（即截面的圆心距离O_1O_2）为d，求阴影区域中的磁感应强度分布．



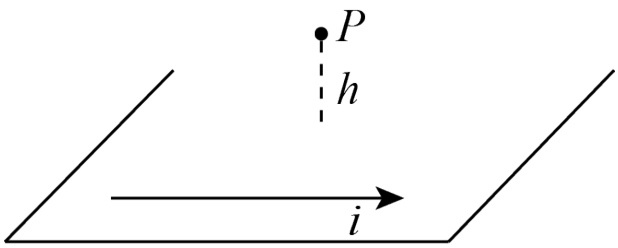


答案 $\frac{\mu_0 Id}{2\pi R^2}$

解析 略

标注 磁场 > 磁场的认识 > 磁感应强度的判定

9 如图所示，无穷大平面上均匀分布面电流，面电流密度(单位宽度上的电流)为i，P点距平面距离h，求P点的磁感应强度大小．



答案 $\frac{\mu_0 i}{2}$

解析 略

标注 磁场 > 磁场的认识 > 磁感应强度的判定

10 设无限长均匀密绕直螺线管中通有电流I，单位长度上的线圈匝数为n，求螺线管内的磁感应强度分布．

答案 螺线管内为匀强磁场， $B=\mu_0 nI$.

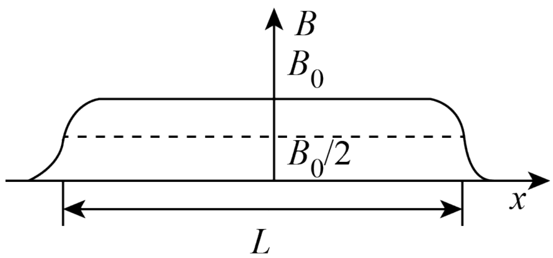
解析 略

标注 磁场 > 磁场的认识 > 磁感应强度的判定

教师版补充：老师可以再拓展一下螺绕环。设环的总匝数为N，通过的电流为I，则距轴线R处的磁感应强度$B=\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi R}$。

教师版补充：下面补充一道题目，与环路定理无关，利用对称性求解，老师可以作为补充。

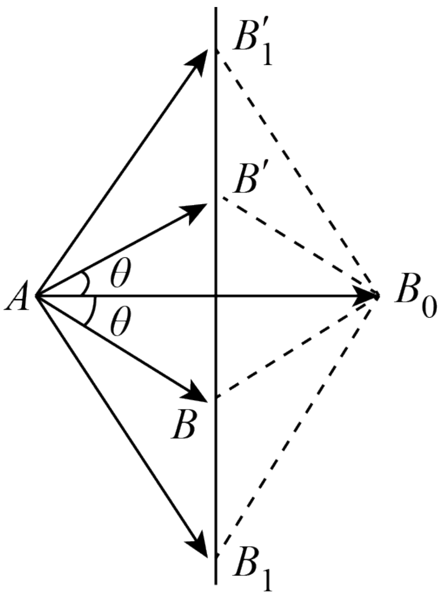
11 长度L远大于半径的通电直螺线管内部为匀强磁场，在其轴线上的磁感应强度分布如图所示，已知管口截面中心处磁感应强度为管内的一半，若在管口截面上距中心为r($r<$管半径)处的磁感应强度为B，则可能有（　　）



A. $B\geqslant B_0$　　B. $\dfrac{B_0}{2}<B<B_0$　　C. $B=\dfrac{B_0}{2}$　　D. $B<\dfrac{B_0}{2}$

答案 AB

解析 由图可知，通电螺线管内某一点的磁感应强度为B_0，可认为是左右两个半无限长的螺线管在管口处产生的磁出应强度的合成，如图所示．



若左边半无限长通电螺线管在距中心为r的A处产生的磁感应强度为B，方向与B_0成θ角，则根据对称性右半无限长通电螺线管在A处产生的磁感应强度为B'，$B'=B$，因此有$2B\cos\theta=B_0$，解得：$B=\dfrac{B_0}{2\cos\theta}$．根据$A$位置的不同，$\theta$可在$0\sim90^\circ$范围内变化，当$60^\circ\leqslant\theta<90^\circ$时，$B\geqslant B_0$，故A正确;

B. 当$0^\circ<\theta<60^\circ$时，$\dfrac{B_0}{2}<B<B_0$，故B正确．

故选AB．

标注 磁场 > 磁场的认识 > 磁感应强度的判定

二、安培力补充

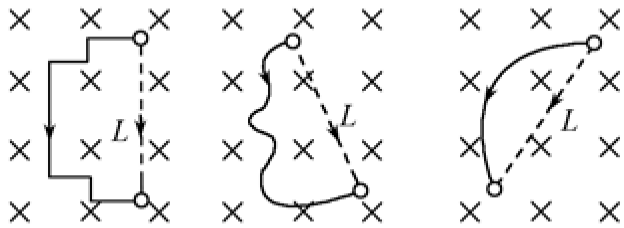
1. 知识点睛

教师版说明：如果老师在第一轮讲磁场时已经强调过有效长度的问题，可以跳过这部分内容。

定义

（1）有效长度（选讲）

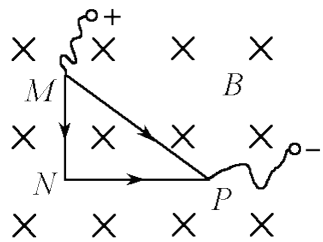
①安培力公式$F=BIL$中的L可以理解为有效长度，对于直导线，L是导线在磁场中的长度；对于弯曲导线，**当导线所在平面与磁场垂直时**，L等于弯曲直导线两端点连接线段的长度，如图所示，相应电流方向沿L由始端流向末端。该公式的**适用条件是在匀强磁场中**，否则要用微元法计算。



②在匀强磁场中，垂直于磁场平面内的任意形状的闭合通电线圈所受安培力的合力为零（可以看做①中有效长度为零的情况）。

2. 例题精讲

12 用粗细均匀的电阻丝折成平面三角形框架MNP，MN、NP、MP的长度分别为$3L$、$4L$、$5L$，电阻丝每L长度的电阻为r，框架M、P端与电动势为E、内阻不计的电源相连，垂直于框架平面有磁感应强度为B的匀强磁场，则框架受到的安培力大小为 ______ ，方向 ______ ．



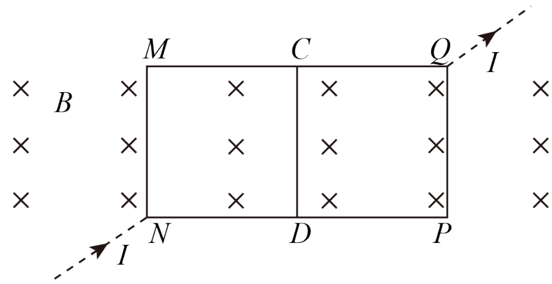
答案 1．$\frac{12BEL}{7r}$

2．在纸面内垂直MP向上

解析 略

标注 磁场 > 安培力

13 如图所示，线框$MNPQ$置于匀强磁场B中，电流I从N点流入，Q点流出．线框中任意两点间的长度均为L（即可以看做两个正方形$MNDC$、$CDPQ$），任意两点间电阻均相等，求线框所受的安培力合力大小．



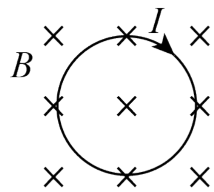
答案 $\sqrt{5}BIL$

解析 略

标注 磁场 > 安培力 > 安培力的基本计算

例题说明：这道题建议老师用有效长度讲。

14 如图所示，匀强磁场的磁感应强度为B，环形线圈半径为R，通有电流I，求线圈中的张力．



答案 BIR

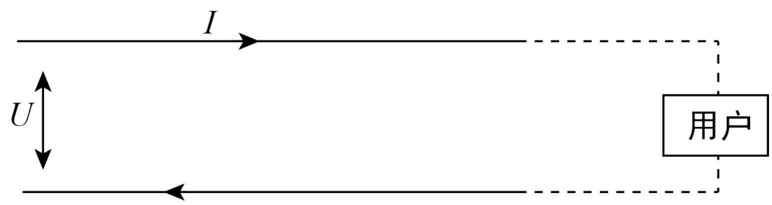
解析 略

标注 磁场 > 安培力 > 安培力的基本计算

3. 例题精讲

例题说明：下面这道题与有效长度无关，只涉及安培力的计算，但是要综合应用电磁场的知识，有一定难度。

15 如图所示为理想输电导线（电阻不计，可近似看成无限长直导线），导线中电流为I，两导线间电压为U．若两导线可等效看成电容，为使两导线所受电磁力均为零，求单位长度的电容值C．（提示：已知无限长均匀带电导线的电荷线密度为η时，距离导线r处的电场强度为$E=\frac{2k\eta}{r}$）



答案 $\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi k}}\frac{I}{U}$

解析 取一条导线上长为l的一段，带电量为Q．两导线间距为r．

则该段导线受另一条导线的磁场力$F_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot Il$（斥力）；该段导线受另一条导线的电场力$F_2=\frac{2kQ}{rl}\cdot Q$（引力）．若导线所受电磁力合力为零，则$F_1=F_2$，联立解得：$Q=\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi k}}Il$．

即单位长度的带电量$\eta=\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi k}}I$．故单位长度的电容值$C=\frac{\eta}{U}=\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi k}}\frac{I}{U}$．

故答案为：$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi k}}\frac{I}{U}$．

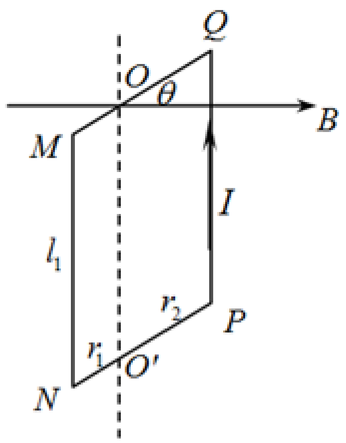
标注 磁场 > 安培力 > 安培力的平衡问题

4. 知识点睛

定义

（2）磁力矩

我们先通过图示的例子研究，矩形线圈$MNPQ$在匀强磁场B中绕轴OO'旋转，线圈中通有电流I，某时刻线圈平面与磁场方向夹角为θ，线圈各边长度如图中所示。



此时，PQ边所受磁力矩$M_1=BIl_1r_2cos\theta$，从上向下看逆时针方向；

MN边所受磁力矩$M_2=BIl_1r_1cos\theta$，从上向下看逆时针方向；

故线圈所受合力矩为$M=M_1+M_2=BIl_1cos\theta(r_1+r_2)=BIScos\theta=BIS_{\parallel}$，其中$S$为线圈面积，$S_{\parallel}$为平行磁场方向的投影面积。

若线圈匝数为N匝，则$M=NBIScos\theta=NBIS_{\parallel}$。

上述推导过程是利用矩形线圈推导的，实际对于任意形状的线圈都适用，我们不加证明的给出下列结论：

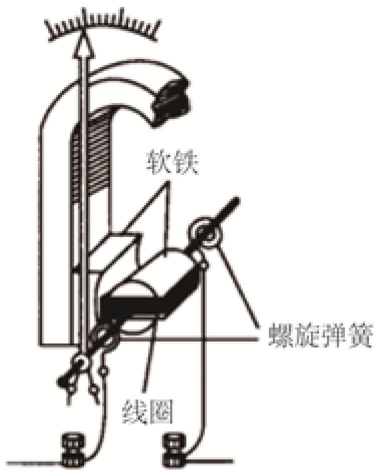
匀强磁场对通电线圈的磁力矩为$M=NBIScos\theta$，其中N为线圈匝数，I为流过线圈的电流，S为线圈面积，θ为线圈平面与磁场方向的夹角。**无论线圈形状如何，转轴（与垂直磁场）位置如何，都可用上式计算。**

如果写成矢量形式$\vec{M}=I\vec{S}\times\vec{B}$，其中$\vec{S}$的方向为平面法向的方向。

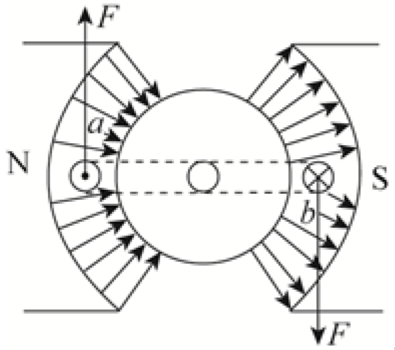
阅读材料

磁电式电流表

磁电式电流表的构造如图所示。在很强的蹄形磁铁的两极间有一个固定的圆柱形铁芯，铁芯的外面套有一个可以转动的铝框，在铝框上绕有线圈。铝框的转动轴上装有两个螺旋弹簧和一个指针，线圈的两端分别接在这两个螺旋弹簧上，被测电流经过这两个弹簧流入线圈。



蹄形磁铁和铁芯间的磁场是均匀地辐向分布的，如图所示。不管通电线圈转到什么角度，它的平面都跟磁力线平行。在距轴线等距离处的磁感应强度的大小总是相等的，保证B的大小不发生变化，且安培力的方向与线圈垂直。若通电线圈的匝数为N，则线圈所受的磁场力矩$M_1=NBIS$，由于NBS为定值，所以M_1与电流I成正比。另一方面，弹簧产生的力矩M_2跟偏角θ成正比，平衡时$M_1=M_2$，则$\theta=kI$，所以，测量时指针偏转的角度与电流的大小成正比，可以用指针的偏转角度来指示电流的大小，这种电流计的刻度是均匀的。这种利用永久磁铁来使通电线圈偏转的仪表叫做磁电式仪表。

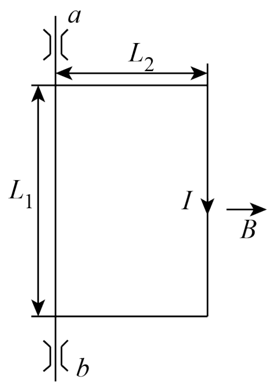


当线圈中的电流方向改变时，安培力的方向随着改变，指针的偏转方向也随着改变。所以，根据指针的偏转方向，可以知道被测电流的方向。

这种仪表的优点是刻度均匀，准确度高，灵敏度高，可以测出很弱的电流；缺点是价格较贵，对过载很敏感，如果通入的电流超过允许值，就很容易把它烧掉，使用时要特别注意。

5. 例题精讲

16 一个长为L_1，宽为L_2，质量为m的矩形导电线框，由质量均匀分布的刚性杆构成，静止放置在不导电的水平桌面上，可绕与线框的一条边重合的光滑固定轴ab转动，在此边中串接一能输出可变电流的电流源（图中未画出）．线框处在匀强磁场B中，磁场的磁感应强度沿水平方向且与转轴垂直，俯视图如图所示．现让电流从零逐渐增大，当电流大于某一最小值$I_{\min}$时，线框将改变静止状态，求电流值$I_{\min}$．



答案 $\frac{mg}{2BL_1}$

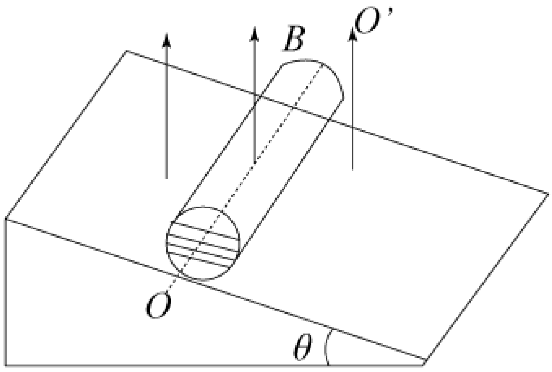
解析 单匝的通电线框与磁场方向平行，故线框对固定轴ab的磁力矩为$M=BIL_1L_2$，线框还受到重力矩的作用，即$M_G=mg\frac{L_2}{2}$．当$M\geqslant M_G$时，线框将改变静止状态，可解得$I_{\min}=\frac{mg}{2BL_1}$．

故答案为：$\frac{mg}{2BL_1}$．

标注 相互作用 > 力的合成与分解 > 力矩问题 > 力矩的平衡

磁场 > 安培力 > 安培力的平衡问题

17 如图所示，倾角为θ的斜面上放一木制圆柱，其质量m，长为l，底面半径为R，圆柱上顺着轴线绕有N匝的线圈，线圈平面与斜平行，斜面处于竖直向上的匀强磁场中，磁感应强度为B ．当通入多大的电流时，圆柱才不往下滚动. (假设斜面粗糙，圆柱不会沿斜面滑动)

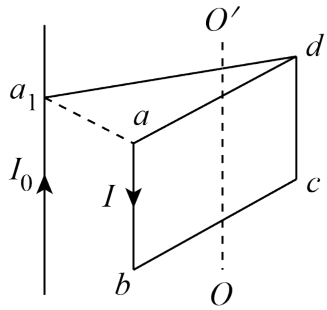


答案 $I=\dfrac{mg}{2NBl}$

解析 略

标注 磁场 > 安培力 > 安培力的平衡问题

18 通电长导线中电流I_0的方向如图所示．边长为$2L$的正方形载流线圈$abcd$中的电流强度为I，方向为$a\to b\to c\to d$．线圈的ab、cd边以及过ad、bc边中点的轴线OO'都与长导线平行．当线圈处于图示位置时，ab边与直导线间的距离aa_1等于$2L$，且aa_1与ad垂直，已知长导线中电流产生的磁场在ab处的磁感应强度为B_1，在cd处的磁感应强度为B_2，则载流线圈处于此位置时受到的磁力矩（对OO'轴）的大小为 ______ ．



答案 $IL^2(2B_1+\sqrt{2}B_2)$

解析 通电长导线对ab边的安培力垂直ab，对OO'轴的力矩大小为$2B_1IL^2$，通电长导线对cd边的安培力垂直cd指向da_1，对OO'轴的力矩大小为$2B_1IL^2\sin 45^\circ$，两边所受的安培力力矩方向相同，故线圈受到的磁力矩大小为$M=2B_1IL^2+2B_1IL^2\sin 45^\circ=IL^2(2B_1+\sqrt{2}B_2)$．

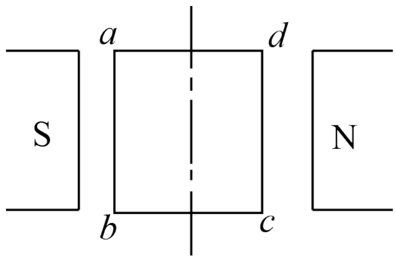
故答案为：$IL^2(2B_1+\sqrt{2}B_2)$．

标注 磁场 > 安培力 > 安培力的平衡问题

相互作用 > 力的合成与分解 > 力矩问题 > 力矩的概念

教师版补充：下面补充一道电流表的题目，老师可以选用。

19 如图所示，$abcd$表示的是电流计中的通电线圈$ab=cd=L_1=1\text{cm}$，$ad=bc=L_2=0.9\text{cm}$，共有$n=50$匝，磁感强度$B=0.5\text{T}$、均匀辐向分布，线圈两端接有螺旋弹簧，每转过1°弹簧可产生$2.5\times10^{-9}\text{N}\cdot\text{m}$的恢复力矩，若线圈最大偏转角为$90^\circ$．求：



(1) 该电流计的满刻度值I；

(2) 当指针偏转40°时，通入线圈的电流强度．

答案 (1) 10^{-4}A

(2) $4.4\times10^{-5}\text{A}$

解析 (1) 略

(2) 略

标注 磁场 > 安培力 > 磁电式电表

三、带电粒子在复合场中运动习题课

1.例题精讲

例题说明：下面的题目是一些较难的高考题（或同等难度的题）、自招题，但知识点都是高中课内的。

20 离子推进器是太空飞行器常用的动力系统，某种推进器设计的简化原理如图1所示，截面半径为R的圆柱腔分为两个工作区．I为电离区，将氙气电离获得1价正离子，II为加速区，长度为L，两端加有电压，形成轴向的匀强电场．I区产生的正离子以接近0的初速度进入II区，被加速后以速度v_M从右侧喷出．I区内有轴向的匀强磁场，磁感应强度大小为B，方向在图2中垂直纸面向外．在离轴线$R/2$处的C点持续射出一定速度范围的电子．假设射出的电子仅在垂直于轴线的截面上运动，截面如图2所示（从左向右看）．电子的初速度方向与中心O点和C点的连线成α角（$0<\alpha<90°$）．推进器工作时，向I区注入稀薄的氙气．电子使氙气电离的最小速度为v_0，电子在I区内不与器壁相碰且能到达的区域越大，电离效果越好．已知离子质量为M；电子质量为m，电量为e．（电子碰到器壁即被吸收，不考虑电子间的碰撞）．

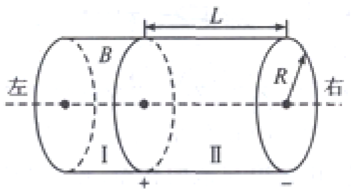


图 1

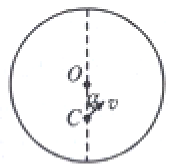


图 2

(1) 求II区的加速电压及离子的加速度大小；

(2) α为$90°$时，要取得好的电离效果，求射出的电子速率v的范围；

(3) 要取得好的电离效果，求射出的电子最大速率v_m与α的关系．

答案

(1) $U=\dfrac{1}{2e}Mv_M^2$

$a=\dfrac{1}{2L}v_M^2$

(2) $B>\dfrac{4mv_0}{3eR}$

(3) $v_{\max}=\dfrac{3eBR}{4m(2-\sin a)}$

解析

(1) 由动能定理：

$eU=\dfrac{1}{2}Mv_M^2$

得：

$U=\dfrac{1}{2e}Mv_M^2$

$$a=\frac{eE}{M}=e\frac{U}{ML}=\frac{1}{2L}v_M^2$$

(2) 设电子运动的最大半径为r

$$2r=\frac{3}{2}R$$

$$eBv=m\frac{v^2}{r}$$

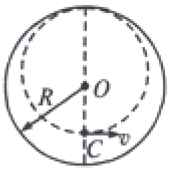
所以有$v_0\leqslant v<\frac{3eBR}{4m}$

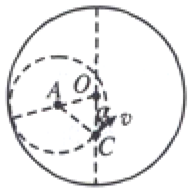
要使有解，磁感应强度$B>\frac{4mv_0}{3eR}$

(3) 如图所示，$OA=R-r$，$OC=R/2$，$AC=r$

根据几何关系得$r=\frac{3R}{4(2-\sin a)}$

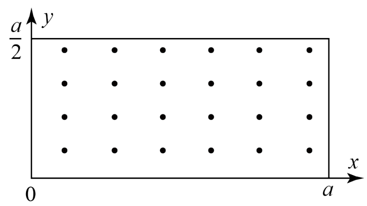
得$v_{\max}=\frac{3eBR}{4m(2-\sin a)}$





标注 磁场 > 带电粒子在磁场中的运动

21 如图所示，在$0\leqslant x\leqslant a$、$0\leqslant y\leqslant\frac{a}{2}$范围内有垂直于$xy$平面向外的匀强磁场，磁感应强度大小为$B$，坐标原点$O$处有一个粒子源，在某时刻发射大量质量为$m$、电荷量为$q$的带正电粒子，它们的速度大小相同，速度方向均在$xy$平面内，与$y$轴正方向的夹角分布在$0\sim90^\circ$范围内，已知粒子在磁场中做圆周运动的半径介于$\frac{a}{2}$到$a$之间，从发射粒子到粒子全部离开磁场经历的时间恰好为粒子在磁场中做圆周运动周期的四分之一，求最后离开磁场的粒子从粒子源射出时的速度的大小及方向？



答案 20.8°

解析 设粒子的发射速度为v，粒子做圆周运动的轨道半径为R，根据洛伦兹力提供向心力，得：

$$qvB=m\frac{v^2}{R}$$

解得

$R=\dfrac{mv}{qB}$

当$\dfrac{a}{2}<R<a$时，在磁场中运动的时间最长的粒子，其轨迹是圆心为C的圆弧，圆弧与磁场的边界相切，

如图所示，设该粒子在磁场中运动的时间为t，依题意，$t=\dfrac{T}{4}$，回旋角度为$\angle OCA=\dfrac{\pi}{2}$．

设最后离开磁场的粒子的发射方向与y轴正方向的夹角为α，

由几何关系得：

$R\sin\alpha=R-\dfrac{\alpha}{2}$，$R\sin\alpha=a-R\cos\alpha$，且$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$．

解得：

$R=\left(2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)a$，$v=\left(2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\dfrac{aqB}{m}$，$\sin\alpha=\dfrac{6-\sqrt{10}}{6}$．

故最后离开磁场的粒子从粒子源射出时的速度大小为：

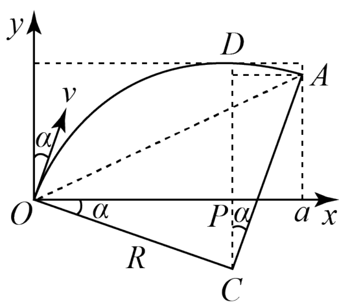
$v=\left(2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\dfrac{aqB}{m}$．

最后离开磁场的粒子从粒子源射出时的速度方向与y轴正方向夹角的正弦为：

$\sin\alpha=\dfrac{6-\sqrt{6}}{10}$．

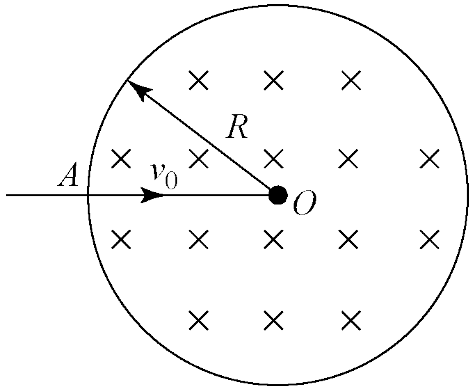
故$\alpha=20.8°$．

故答案为：$20.8°$．



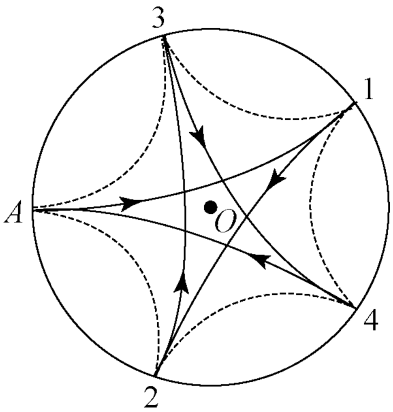
标注 磁场 > 带电粒子在磁场中的运动

22 如图所示，一个质量为m、电荷量为$+q$的粒子，从A点正对着圆心O以速度v_0射入半径为R的内壁光滑的绝缘圆筒中，圆筒内存在垂直纸面向里的匀强磁场．要使带电粒子与圆筒内壁碰撞后仍从A点射出，求磁感应强度B的大小．设粒子与圆筒内壁碰撞时无能量和电量损失，不计粒子的重力．



答案 $B=\dfrac{mv}{qR}\cot\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$

解析

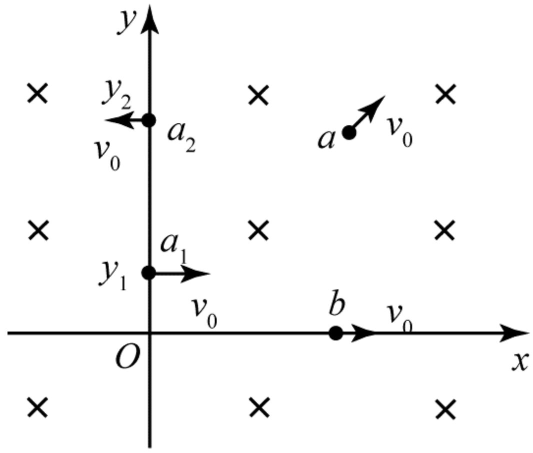


如图所示，若粒子经过n次与圆筒内壁碰撞从A点射出且仅绕筒内壁转一圈，则相邻两次碰撞点所对应的圆心角$\theta=\dfrac{2\pi}{n+1}(n=2,3\cdots)$．若粒子经过$n$次碰撞但绕筒内壁转了$k$圈从$A$点射出，则相邻两次碰撞所对应的圆心角为$\theta=\dfrac{2k\pi}{n+1}(k=1,2,3\cdots,n=2,3\cdots)$．由于粒子在磁场中发生偏转，任意两次碰撞点所对应的圆心角$\theta<\pi$，因此，$k<\dfrac{n+1}{2}$，且k与$n+1$应为互质正整数．由几何关系知，粒子运动的半径$r=R\tan\dfrac{\theta}{2}=R\tan\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$，又由$qvB=m\dfrac{v^2}{r}$，解得：$B=\dfrac{mv}{qR}\cot\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$，其中$k=1,2,3\cdots$，$n=2,3\cdots$，$k<\dfrac{n+1}{2}$，且$k$与$n+1$为互质正整数．

标注 磁场 > 带电粒子在磁场中的运动 > 带电粒子在匀强磁场中的运动 > 带电粒子在匀强磁场中的基本问题

23 如果质量相同的小球a、b在沿一条直线的运动过程中发生弹性正碰撞，则a的碰后速度等于b的碰前速度，b的碰后速度等于a的碰前速度．

如图所示，光滑水平绝缘的大桌面取为$O\text{-}xy$坐标面，空间有竖直向下（图中朝里）的匀强磁场B（解题时略去球之间的电作用力）．



(1) $O\text{-}xy$平面上的小球a，质量为m，电量为$q>0$，初速度方向如图所示，大小为v_0，而后a将作匀速圆周运动，试求圆半径R和运动周期T．

(2) 图中小球a_1、a_2质量同为m，电量也同为q，开始时分别位于y轴上的y_1、y_2（$y_2>y_1$）位置，初速度方向如图所示，大小也同为v_0．设a_1、a_2间可能发生的碰撞都是弹性正碰而且不会相互转移电荷（下同）．要求a_1能到达y_2处，试求y_2-y_1的所有可能取值．

(3) 图中小球b的质量也为m，电量也为q，$t=0$时位于x轴上距O稍远的x_1位置，初速度方向沿x轴，大小也为v_0．现给你一个质量为m，电量为$-q$，初速度大小为v_0的小球b'．$t=0$时b'的初始位置和初始速度方向由你选定，但要求在$t=\left(k+\frac{1}{2}\right)T$时刻$(k\in N)$，$b$球可达到$x$轴上与$x_1$相距尽可能远的$x_2$（$x_2>x_1$）位置，最后给出你所得的$x_2-x_1$的值．

答案

(1) $R=\dfrac{mv_0}{qB}$，$T=\dfrac{2\pi m}{qB}$

(2) $y_2-y_1=2R=2\dfrac{mv_0}{qB}$或$y_2-y_1=4R=4\dfrac{mv_0}{qB}$

(3) $x_2-x_1=2(2k+1)R$

解析

(1) 带电小球在水平面内作匀速圆周运动，洛伦兹力提供向心力，

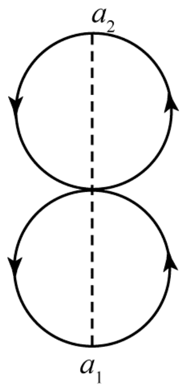
由牛顿第二定律：$Bqv_0=m\dfrac{v_0^2}{R}$，解得：$R=\dfrac{mv_0}{qB}$；

由$T=\dfrac{2\pi R}{v_0}$，解得：$T=\dfrac{2\pi m}{qB}$．

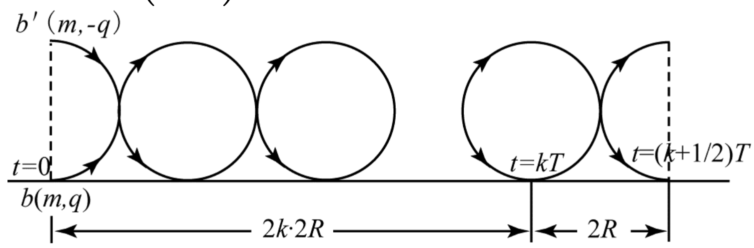
(2) 满足题意的一种情况对应两球未发生碰撞，但各自转过半圆后分别达到另一点，此时

$y_2-y_1=2R=2\dfrac{mv_0}{qB}$；

另一种情况对应两球各自转半圆周后发生弹性碰撞，速度交换后，又各自转过半圆周到达另一点，如图所示，此时$y_2-y_1=4R=4\dfrac{mv_0}{qB}$.



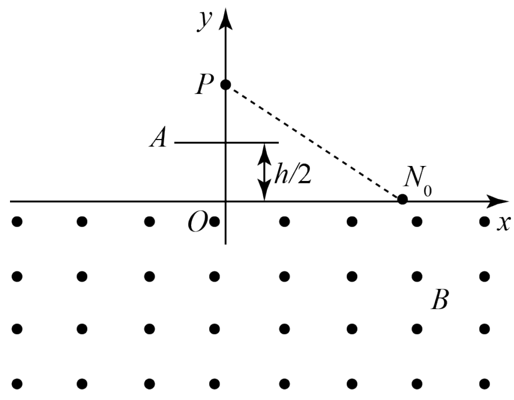
(3) $t=0$时刻将b'放在（$x=x_1$ ，$y=2R$）位置，初速度方向也沿x轴正向，在$t=0$时刻同时释放b和b'，这样两球各自转过$\dfrac{1}{4}$圈后正碰，以后每转过$\dfrac{1}{2}$圈后就会正碰，经$t=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)T$时，$b$球又回到$x$轴上，如图所示．



因此，$x_2-x_1=2(2k+1)R$.

标注　磁场 > 带电粒子在磁场中的运动

24 如图，在x轴下方有匀强磁场，磁感应强度大小为B，方向垂直于xy平面向外．P是y轴上距原点为h的一点，N_0为x轴上距原点为a的一点．A是一块平行于x轴的挡板，与x轴的距离为$\dfrac{h}{2}$，A的中点在y轴上，长度略小于$\dfrac{a}{2}$．带点粒子与挡板碰撞前后，x方向的分速度不变，y方向的分速度反向、大小不变．质量为m，电荷量为q（$q>0$）的粒子从P点瞄准N_0点入射，最后又通过P点．不计重力．求粒子入射速度的所有可能值．

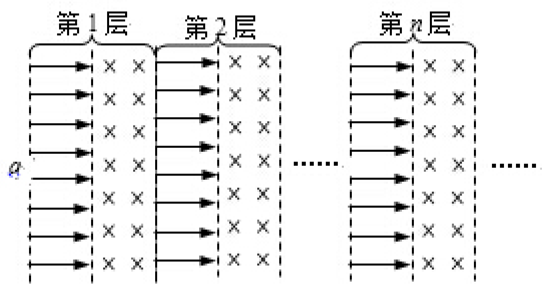


答案 $v_0=\dfrac{qBa\sqrt{a^2+h^2}}{mh}$，$n=0$；
$v_1=\dfrac{3qBa\sqrt{a^2+h^2}}{4mh}$，$n=1$；
$v_2=\dfrac{2qBa\sqrt{a^2+h^2}}{3mh}$，$n=2$

解析 略

标注 磁场 > 带电粒子在磁场中的运动

25 现代科学仪器常利用电场、磁场控制带电粒子的运动．在真空中存在着如图所示的多层紧密相邻的匀强电场和匀强磁场，电场和磁场的宽度均为d．电场强度为E，方向水平向右；磁感应强度为B，方向垂直纸面向里．电场、磁场的边界互相平行且与电场方向垂直，一个质量为m、电荷量为q的带正电粒子在第1层电场左侧边界某处由静止释放，粒子始终在电场、磁场中运动，不计粒子重力及运动时的电磁辐射．



(1) 求粒子在第2层磁场中运动时速度v_2的大小与轨迹半径r_2；

(2) 粒子从第n层磁场右侧边界穿出时，速度的方向与水平方向的夹角为θ_n，试求$\sin\theta_n$；

(3) 若粒子恰好不能从第n层磁场右侧边界穿出，试问在其他条件不变的情况下，也进入第n层磁场，但比荷较该粒子大的粒子能否穿出该层磁场右侧边界，请简要推理说明之．

答案

(1) $2\sqrt{\dfrac{qEd}{m}}$，$\dfrac{2}{B}\sqrt{\dfrac{mEd}{q}}$

(2) $B\sqrt{\dfrac{nqd}{2mE}}$

(3) 见解析

解析

(1) 粒子在进入第2层磁场时，经过两次电场加速，中间穿过磁场时洛伦兹力不做功．

由动能定理，有$2qEd=\dfrac{1}{2}mv_2^2$①

由式①解得$v_2=2\sqrt{\dfrac{qEd}{m}}$②

粒子在第二层磁场中受到的洛伦兹力充当向心力，有$qv_2B=m\dfrac{v_2^2}{r_2}$③

由②③式解得$r_2=\dfrac{2}{B}\sqrt{\dfrac{mEd}{q}}$ ④

(2) 设粒子在第n层磁场中运动的速度为v_n，轨迹半径为r_n（各量的下标均代表粒子所在层数，下同）．

$nqEd=\dfrac{1}{2}mv_n^2$⑤

$qv_nB=m\dfrac{v_n^2}{r_n}$⑥

粒子进入第n层磁场时，速度的方向与水平方向的夹角为α_n，从第n层磁场右侧边界穿出时速度方向与水平方向的夹角为θ_n，粒子在电场中运动时，垂直于电场线方向的速度分量不变，有

$v_{n-1}\sin\theta_{n-1}=v_n\sin\alpha_n$⑦

由图1看$r_n\sin\theta_n-r_n\sin\alpha_n=d$⑧

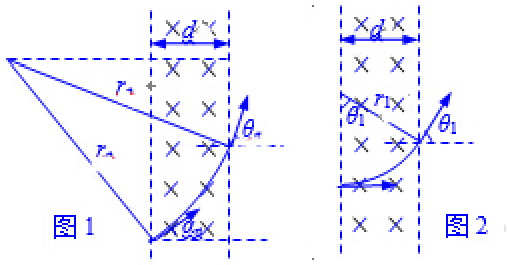
由⑥⑦⑧式得$r_n\sin\theta-r_{n-1}\sin\theta_{n-1}=d$⑨

由⑨式看出$r_1\sin\theta_1, r_2\sin\theta_2, \ldots\ldots, r_n\sin\theta_n$为一等差数列，公差为$d$，可得

$r_n\sin\theta_n=r_1\sin\theta_1+(n-1)d$⑩

当$n=1$时，由图2看出 $r_1\sin\theta_1=d$⑪

由⑤⑥⑩⑪式得$\sin\theta_n=B\sqrt{\dfrac{nqd}{2mE}}$⑫



(3) 若粒子恰好不能从第n层磁场右侧边界穿出，则$\theta_n=\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\theta_n=1$

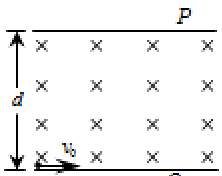
在其他条件不变的情况下，换用比荷更大的粒子，设其比荷为$\dfrac{q'}{m'}$，假设能穿出第n层磁场右侧边界，粒子穿出时速度方向与水平方向的夹角为θ'_n，由于$\dfrac{q'}{m'}>\dfrac{q}{m}$

则导致$\sin\theta'_n>1$

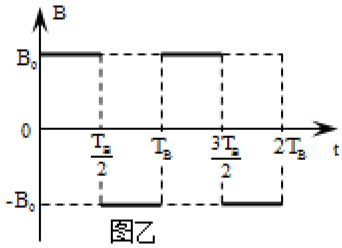
说明θ'_n不存在，即原假设不成立．所以比荷较该粒子大的粒子不能穿出该层磁场右侧边界．

标注　磁场 > 带电粒子在磁场中的运动

26 如图甲所示，间距为d垂直于纸面的两平行板P、Q间存在匀强磁场．取垂直于纸面向里为磁场的正方向，磁感应强度随时间的变化规律如图乙所示．$t=0$时刻，一质量为m、带电量为$+q$的粒子（不计重力），以初速度v_0由Q板左端靠近板面的位置，沿垂直于磁场且平行于板面的方向射入磁场区．当B_0和T_B取某些特定值时，可使$t=0$时刻入射的粒子经Δt时间恰能垂直打在P板上(不考虑粒子反弹)．上述m、q、d、v_0为已知量．



图甲



图乙

(1) 若$\Delta t=\dfrac{1}{2}T_B$，求B_0；

(2) 若$\Delta t=\dfrac{3}{2}T_B$，求粒子在磁场中运动时加速度的大小；

(3) 若$B_0=\dfrac{4mv_0}{qd}$，为使粒子仍能垂直打在P板上，求T_B．

答案　(1) $B_0=\dfrac{mv_0}{qd}$

(2) $a=\dfrac{3v_0^2}{d}$

(3) $T_B=\dfrac{\pi d}{3v_0}$或$T_B=\left(\dfrac{\pi}{2}+\arcsin\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{d}{2v_0}$

解析　(1) 设粒子做圆周运动的半径为R_1，由牛顿第二定律得

$qv_0B_0=\dfrac{mv_0^2}{R_1}$ ①

据题意由几何关系得

$R_1=d$ ②

联立①②式得

$B_0=\frac{mv_0}{qd}$ ③

(2) 设粒子做圆周运动的半径为R_2，加速度大小为a，由圆周运动公式得

$a=\frac{v_0^2}{R_2}$ ④

据题意由几何关系得

$3R_2=d$ ⑤

联立④⑤式得

$a=\frac{3v_0^2}{d}$ ⑥

(3) 设粒子做圆周运动的半径为R，周期为T，由圆周运动公式得

$T=\frac{2\pi R}{v_0}$ ⑦

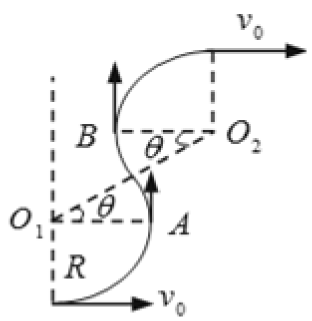
由牛顿第二定律得

$qv_0B_0=\frac{mv_0^2}{R}$ ⑧

由题意知$B_0=\frac{4mv_0}{qd}$，代入⑧式得

$d=4R$ ⑨

粒子运动轨迹如图所示，



O_1、O_2为圆心，O_1O_2连线与水平方向的夹角为θ，在每个T_B内，只有A、B两个位置才有可能垂直击中P板，且均要求$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，由题意可知

$\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2\pi}T=\frac{T_B}{2}$ ⑩

设经历完整T_B的个数为$n(n=0,1,2,3......)$

若在A点击中P板，根据题意由几何关系得

$R+2(R+R\sin\theta)n=d$⑪

当$n=0$时，无解

当$n=1$时，联立⑨⑪式得

$\theta=\frac{\pi}{6}(\sin\theta=\frac{1}{2})$⑫

联立⑦⑨⑩⑫式得

$T_B=\dfrac{\pi d}{3v_0}$⑬

当$n\geq 2$时，不满足$0<\theta<90^{\circ}$的要求

若在B点击中P板，据题意由几何关系得

$R+2R\sin\theta+2(R+R\sin\theta)n=d$⑭

当$n=0$时，无解

当$n=1$时，联立⑨⑭式得

$\theta=\arcsin\dfrac{1}{4}(\sin\theta=\dfrac{1}{4})$⑮

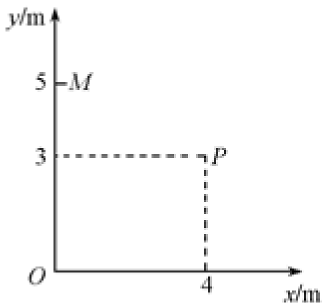
联立⑦⑨⑩⑮式得

$T_B=\left(\dfrac{\pi}{2}+\arcsin\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{d}{2v_0}$⑯

当$n\geqslant 2$时，不满足$0<\theta<90^{\circ}$的要求

标注　磁场 > 带电粒子在磁场中的运动

27 如图所示，xy平面为一光滑水平面．在$x>0$，$y>0$的空间区域内有平行于xy平面的匀强电场，场强大小为$E=100\text{V/m}$；在$x>0$，$y<3\text{m}$的区域内同时有垂直于xy平面的匀强磁场．一质量为$m=2\times10^{-6}\text{ kg}$、电荷量大小为$q=2\times10^{-7}\text{C}$的带负电粒子从坐标原点$O$以一定的初动能入射，在电场和磁场的作用下发生偏转，到达$P(4,3)$点时，动能变为初动能的0.2倍，速度方向平行于y轴正方向．最后，粒子从y轴上$y=5\text{m}$的M点射出电场，动能变为初动能的0.52倍．求：



(1) OP连线上与M点等电势的点的坐标．

(2) 粒子由P点运动到M点所需的时间（粒子重力不计）．

答案　(1) $(2.4，1.8)$

(2) 1s

解析 (1) 粒子从O点入射沿曲线运动到$P\left(x_P, y_P\right)$点，由于洛伦兹力不做功，故动能改变是由电场力做功引起，设该匀强电场沿Ox，Oy方向的分量分别为E_x，E_y，粒子在P点的速度为v；则

$-qE_x x_P - qE_y y_P = E_{kP} - E_{kO} = -4E_{kP} = -2mv^2$

即$0.4E_x + 0.3E_y = 2v^2$

粒子从P运动到M只受电场力作用，则

$qE_x x_P - qE_y\left(y_M - y_P\right) = E_{kM} - E_{kP} = 0.52E_{kO} - E_{kP} = 1.6E_{kP}$

即$0.4E_x - 0.2E_y = 0.8v^2$

由此得$E_x = 3.2v^2\ E_y = 2.4v^2$

同时由题意得$E_x^2 + E_y^2 = E^2$

这样$v = 5\mathrm{m/s}$，$E_x = 80\mathrm{V/m}$，$E_y = 60\mathrm{V/m}$

合场强与Ox轴的夹角$\tan\theta = E_y/E_x = 3/4$，即$\theta = 37°$，恰和$OP$方向一致．

设OP连线上与M点等电势的点为Q，则

$OQ = OM\sin\theta = 3\mathrm{m}$，$x_Q = OQ\cos\theta = 2.4\mathrm{m}$，$y_Q = OQ\sin\theta = 1.8\mathrm{m}$．

(2) 从P点到M点，由$x_P = \frac{1}{2}\cdot\frac{qE_x}{m}t^2$，可得$t = 1\mathrm{s}$．

标注 磁场 > 带电粒子在磁场中的运动

2. 知识点睛

定义

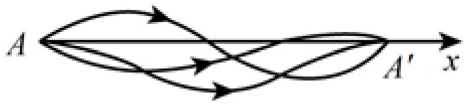
1．磁聚焦现象

（1）第一种磁聚焦

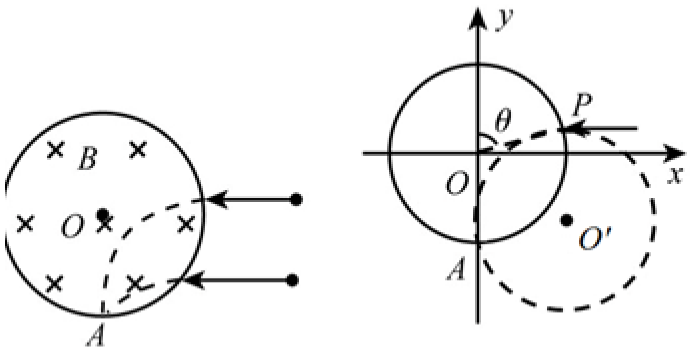
若匀强磁场的磁感应强度为B，一电荷量为q、质量为m的粒子，以初速度v进入磁场中运动，在普遍的情形下，v与B成任意夹角θ，这时我们可以把v分解为与B平行的分量$v_\parallel = v cos\theta$和垂直于$B$的分量$v_\perp = v sin\theta$。若只有$v_\perp$分量，粒子将在垂直于$B$的平面内做匀速圆周运动；若只有$v_\parallel$分量，磁场对粒子没有作用力，粒子将沿$B$的方向（或反方向）做匀速直线运动。当两个分量同时存在时，粒子的轨迹将成为一条螺旋线，其螺距h（粒子每回转一周前进的距离）为$h = v_\parallel T = \frac{2\pi m v_\parallel}{qB}$。

h与$v_\perp$分量无关，设从磁场中的A点发射出一束速率v近似相等的带电粒子流，v与磁感应强度B间的夹角θ很小（各粒子θ略有不同），则$v_\parallel = v cos\theta \approx v$，$v_\perp = v sin\theta \approx v\theta$。由于速度的垂直分量$v_\perp$不同，各粒

子将沿不同半径的螺旋线前进。但由于速度的平行分量$v_{\parallel}$近似相等，各粒子经过距离$h=\dfrac{2\pi mv_{\parallel}}{qB}\approx\dfrac{2\pi mv}{qB}$后又会重新会聚在$A'$点，如图所示。这就是与光束经透镜后聚焦类似的磁聚焦现象。



（2）第二种磁聚焦



甲　　　　乙

如图甲所示，在圆O中存在着垂直纸面向里的匀强磁场，一束带电粒子的质量和电荷量相同，以相同的速度从不同位置射入磁场，若圆形有界磁场的半径和带电粒子做圆周运动的半径相等，均为R，可证明所有粒子都将在磁场边界上的A点射出。如图乙所示，过O点建立平面直角坐标系，x轴平行入射方向。设入射点P与圆心O的连线OP与y轴正向的夹角为θ，则P点的坐标为（$R\sin\theta$，$R\cos\theta$），轨迹圆的圆心O'坐标为（$R\sin\theta$，$R\cos\theta-R$），磁场圆的方程为$x^2+y^2=R^2$，轨迹圆的方程为$(x-R\sin\theta)^2+(y+R-R\cos\theta)^2=R^2$，两圆的交点坐标为$(0,-R)$，$(R\sin\theta,R\cos\theta)$。其中是$(R\sin\theta,R\cos\theta)$入射点$P$的坐标，$(0,-R)$为出射点$A$的坐标，它与入射点的位置无关，因此，当轨迹圆的半径与磁场圆的半径相等时，互相平行的粒子射入磁场后，一定会汇聚到与粒子入射速度垂直的直径的一个端点上。

3. 例题精讲

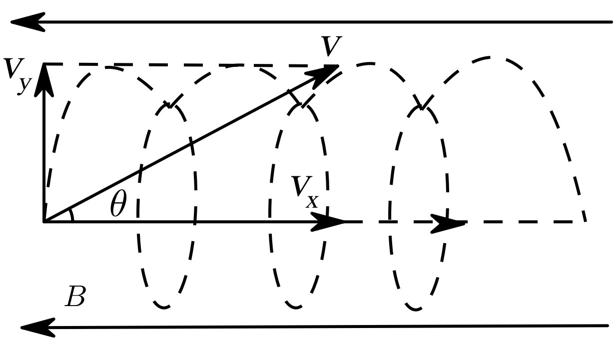
28 加速电压为U的电子辐射管放入匀强磁场中，磁感应强度为B，方向平行于管轴，这时在光屏上观察到模糊的小亮斑．如果改变磁感应强度，那么可以发现，当为某些值B_0、$2B_0$ 、$3B_0$…时，电子光斑会汇聚成点，试解释这个现．借助这个实验怎样确定电子的比荷.

答案　见解析．

解析 电子经电场加速后，速度大小相同，但速度方向略有差异，电子束以一定的发射角度θ进入匀强磁场，电子的运动轨迹为一螺旋线，如图所示．设从电子枪到屏的距离为l，若$l = nh$ (n为正整数，h为螺距)时，电子亮斑聚焦成点．电子经电场加速后的速度为v，根据动能定理有$eU = \frac{1}{2}mv^2$ ，解得：$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ ．由于电子束的发射角度$\theta \to 0$，则电子进入磁场时的速度分量$v_x = v\cos\theta \approx v$ ．

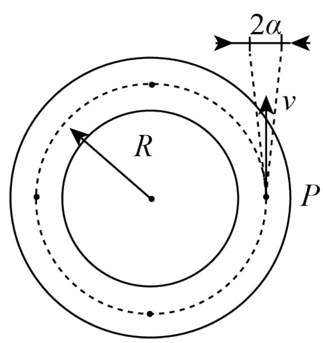
因此$l = nvT = n\sqrt{\frac{2eU}{m}}\cdot\frac{2\pi m}{Be} = \frac{n}{B}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{2mU}{e}}$ ，满足上述条件时，屏上电子亮斑会聚成点．

而且电子的比荷$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 Un^2}{B^2l^2}$ ，则当$n = 1$ 、$B = B_0$ 时，有$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U}{B_0^2 l^2}$，故只要测量$U$、$l$和$B_0$便可确定电子的比荷．



标注 磁场 > 带电粒子在磁场中的运动 > 带电粒子在复合场中的运动 > 复合场问题

29 如图所示，在螺线环的平均半径R处有电子源P，由P点沿磁感线方向注入孔径角2α（$2\alpha \ll 1^\circ$）的一电子束，束中的电子都是以电压U_0加速度后从P点发出的．假设螺线环内磁感应强度B的大小为常量，电子质量为m，电荷量为e，并假设电子束中各电子间的静电相互相作可以忽略．



(1) 为了使电子束涡环形磁场运动，需另加一个使电子束偏转的匀强磁场B_1，对于在环内沿半径为R的圆形轨道运动的一个电子，试计算所需的B_1大小．

(2) 当电子束沿环形磁场运动时，为了使电子束每绕一圈有四个聚焦点，如图所示，环内磁场B应有多大．（忽略磁场B的弯曲，只考虑B对聚焦的影响，忽略B_1对聚焦的影响）

答案 (1) $B_1=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$

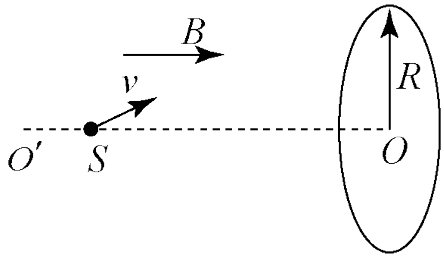
(2) $B=\frac{4}{R}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$

解析 (1) 略

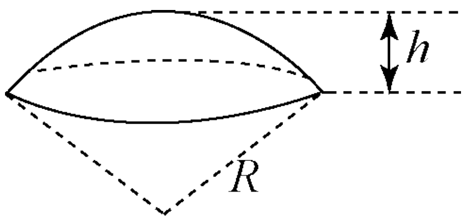
(2) 略

标注 磁场 > 带电粒子在磁场中的运动 > 带电粒子在复合场中的运动 > 组合场问题

30 如图所示，S为一离子源，它能机会均等地向各个方向持续大量地发射正离子，离子的质量电量和速率均为m、q和v．在离子源的右侧有一半径为R的圆屏OO'是通过屏中心O并垂直于屏面的轴线，S位于轴线上．空间有一平行于轴线向右的匀强磁场，磁感应强度为B，发射的离子中，有的离子不论SO的距离如何，总能打在圆屏上．求这类离子占离子总数的比例．（不考虑离子间的碰撞及相互作用）

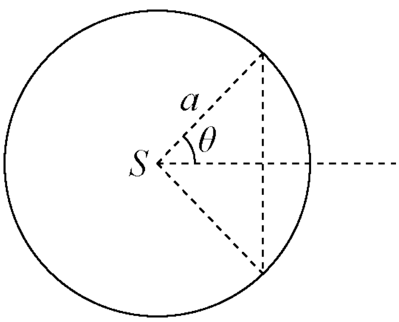


提示：如图所示，若球半径是R，球冠的高是h，则球冠面积是$S=2\pi Rh$．



答案 $\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{qBR}{2mv}\right)^2}}{2}$

解析

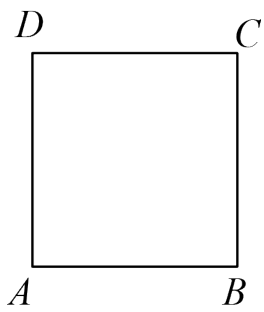


离子的运动是一系列等螺距的螺旋运动．若离子的初速度v与SO成θ角，则其轨迹的螺距为$h=\dfrac{2\pi m}{qB}v\cos\theta$，螺旋截面圆的半径为$r=\dfrac{mv\sin\theta}{qB}$，$S$点是该圆圆周上的点．在$2r\leqslant R$且$\theta<\dfrac{\pi}{2}$的条件下，离子向右运动轨迹一定通过圆屏．可得$\sin\theta\leqslant\dfrac{qBR}{2mv}$．认为放射源$S$周围密度均匀，取一个如图所示半径为$a$的球面，这样离子从面积为$2\pi a^2(1-\cos\theta)$球面上通过，故与总发射离子数之比为$k=\dfrac{2\pi a^2(1-\cos\theta)}{4\pi a^2}=\dfrac{1-\sqrt{1-\left(\dfrac{qBR}{2mv}\right)^2}}{2}$．

故答案为：$\dfrac{1-\sqrt{1-\left(\dfrac{qBR}{2mv}\right)^2}}{2}$．

标注　磁场 > 带电粒子在磁场中的运动 > 带电粒子在匀强磁场中的运动 > 带电粒子在匀强磁场中的基本问题

31 如图，$ABCD$是边长为a的正方形．质量为m、电荷量为e的电子以大小为v_0的初速度沿纸面垂直于BC边射入正方形区域．在正方形内适当区域中有匀强磁场．电子从BC边上的任意点入射，都只能从A点射出磁场．不计重力，求：



(1) 此匀强磁场区域中磁感应强度的方向和大小．

(2) 此匀强磁场区域的最小面积．

答案　(1) 垂直于纸面向上；$\dfrac{mv_0}{ea}$．

(2) $\dfrac{\pi-2}{2}a^2$．

解析　(1) 设匀强磁场的磁感应强度的大小为B，令圆弧$\overset{\frown}{AEC}$是自C点垂直于BC入射的电子在磁场中的运行轨道．电子所受到的磁场的作用力$f=ev_0B$　①

应指向圆弧的圆心，因而磁场的方向应垂直于纸面向外．圆弧的圆心在CB边或其延长线上．依题意，圆心在A、B连线的中垂线上，故B点即为圆心，圆半径为a按照牛顿

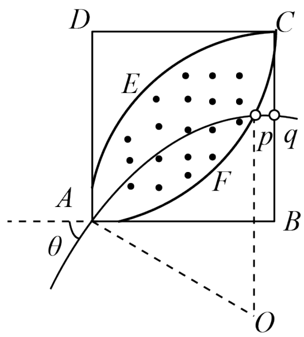
定律有

$Bqv = m\dfrac{{v_0}^2}{a}$　　②，

联立①②式得$B = \dfrac{mv_0}{ea}$．

故答案为：垂直于纸面向上；$\dfrac{mv_0}{ea}$．

(2) 由（1）中决定的磁感应强度的方向和大小，可知自C点垂直于BC入射电子在A点沿DA方向射出，且自BC边上其它点垂直于入射的电子的运动轨道只能在$BAEC$区域中．因而，圆弧$\overset{\frown}{AEC}$是所求的最小磁场区域的一个边界．为了决定该磁场区域的另一边界，我们来考查射中A点的电子的速度方向与BA的延长线交角为θ（不妨设$0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$）的情形．该电子的运动轨迹$qpA$如图所示．图中，圆弧$\overset{\frown}{AP}$的圆心为$O$，$pq$垂直于$BC$边，由③式知，圆弧$\overset{\frown}{AP}$的半径仍为$a$，在$D$为原点、$DC$为$x$轴，$AD$为$y$轴的坐标系中，$P$点的坐标$(x, y)$为$x = a\sin\theta$，$y = -[a-(a-a\cos\theta)] = -a\cos\theta$，这意味着，在范围$0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$内，$p$点形成以$D$为圆心、$a$为半径的四分之一圆周$\overset{\frown}{AFC}$，它是电子做直线运动和圆周运动的分界线，构成所求磁场区域的另一边界．因此，所求的最小匀强磁场区域时分别以B和D为圆心、a为半径的两个四分之一圆周$\overset{\frown}{AEC}$和$\overset{\frown}{AFC}$所围成的，其面积为$S = 2\left(\dfrac{1}{4}\pi a^2 - \dfrac{1}{2}a^2\right) = \dfrac{\pi-2}{2}a^2$．



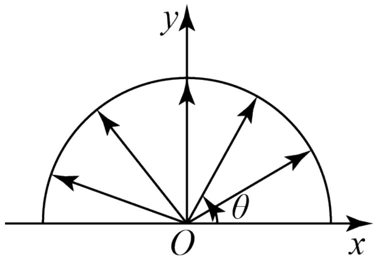
故答案为：$\dfrac{\pi-2}{2}a^2$．

标注　磁场 > 带电粒子在磁场中的运动

下面补充一道类似的涉及磁聚焦现象的题目，处理方法也是利用参数方程，但是此题计算量较大，供老师备用。

32 图中原点$O(0,0)$处有一带电粒子源，以同一速率v沿xy平面内的各个不同方向$\theta(0 \leqslant \theta \leqslant 180^\circ)$发射质量为$m$，电量为$q(>0)$的带电粒子．试设计一个方向垂直于$xy$平面大小为$B$的均匀磁场区域，使由$O$发射的带电粒子经磁场并从其边界逸出后均能沿$x$轴正方向运动（写出磁场边界的方程，并给

出边界线）．



答案 答案见解析

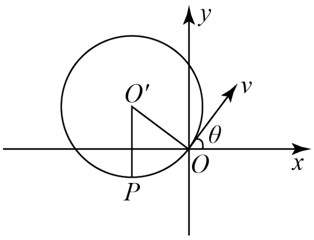
解析 先设磁感应强度为B的匀强磁场方向垂直xy平面里，且无边界．考察从粒子源发出的速率为v、方向与x轴夹角为θ的粒子．在磁场的洛伦兹力作用下粒子做圆周运动，圆轨道经过坐标原点O，且与速度方向相切，设圆轨道的半径为R，有：$qvB=m\dfrac{v^2}{R}$①

解得：$R=\dfrac{mv}{qB}$．②

圆轨道的圆心O'在过坐标原点O与速度方向垂直的直线上，至原点的距离为R，如图1所示．通过圆心O'作平行于y轴的直线与圆轨道交于P点，粒子运动到P点时其速度方向恰好是沿x轴正方向，故P点的连线就是所求磁场区域的边界线．P点的坐标为：

$x=-R\sin\theta$③

$y=-R+R\cos\theta$④



这就是磁场区域边界的参数方程，消去参数θ，得：

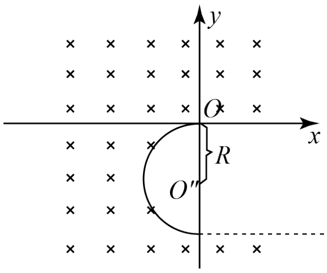
$x^2+(y+R)^2=R^2$⑤

由②、⑤式得

$x^2+\left(y+\dfrac{mv}{qB}\right)^2=\dfrac{m^2v^2}{q^2B^2}$⑥

这是半径为R圆心O''坐标为$(0,-R)$的圆，作为题所要求的磁场区域的边界线，应是如图2所示的半个圆周，故磁场区域的边界线的方程为：

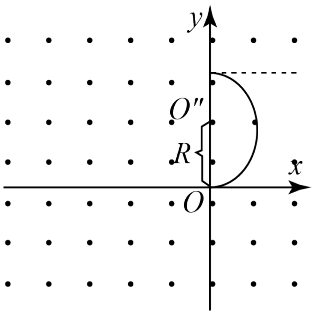
$x^2+\left(y+\dfrac{mv}{qB}\right)^2=\dfrac{m^2v^2}{q^2B^2}$，（$x\leqslant0$，$y\leqslant0$）⑦



若磁场方向垂直于xy面向外，则磁场的边界线为如图3所示的半圆，磁场区域的边界线的方程为：

$x^2+(y-R)^2$，（$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$）⑧

或$x^2+\left(y-\dfrac{mv}{qB}\right)^2=\dfrac{m^2v^2}{q^2B^2}$，（$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$）⑨



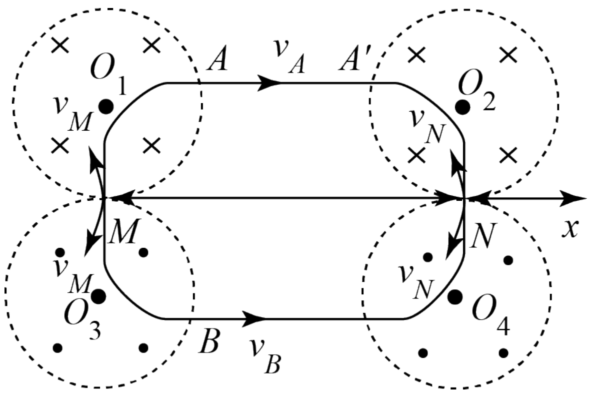
证明同前．

标注　磁场 > 带电粒子在磁场中的运动

33 在某一平面内有M、N两点，由M点向平面内各个方向发射速率均为v_0的电子．请设计一种匀强磁场分布，使得由M点发出的所有电子都能够汇集到N点，电子电量为e，质量为m．只要求给出结果．

答案　答案见解析．

解析　本题可利用磁聚焦原理，磁场分布如图所示．

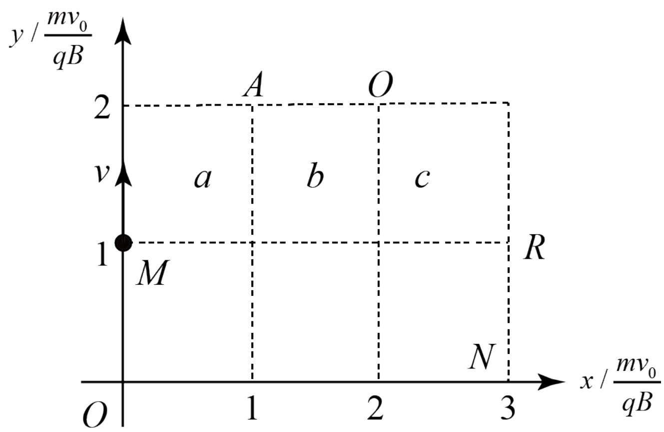


对于从M点向MN连线上方发射的电子，可设计两个半径均为$R=\frac{mv_0}{eB}$的圆形磁场（磁场方向垂直纸面向里）分别与MN相切，两圆心连线平行于MN，且M、N的距离L满足$L\geqslant 2R=\frac{2mv_0}{eB}$．对于从$M$点向$MN$连线下方运动的电子，只要使半径相同的两圆形磁场与上方的圆形磁场关于MN对称且磁场方向与之相反即可．

标注　磁场 > 带电粒子在磁场中的运动 > 带电粒子在匀强磁场中的运动 > 带电粒子在匀强磁场中的基本问题

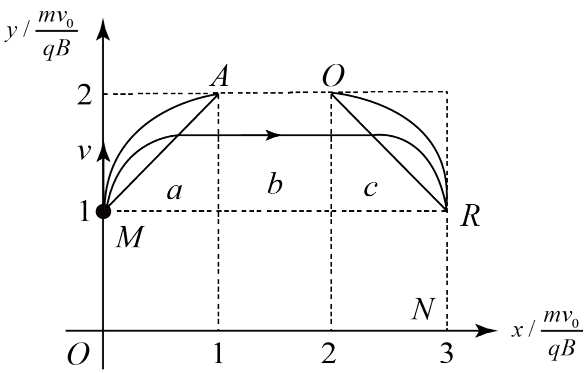
下面再补充一道确定轨道的题，此题的磁场与上面的磁聚焦情况不同，但处理方法有类似之处，老师可以选用。

34 如图所示，在直角坐标系xOy中，点$M(0,1)$处不断向$+y$方向发射大量质量为m、带电量为$-q$的粒子，粒子的初速度大小在$0\sim v_0$之间，这些粒子所经磁场的磁感应强度大小为B，方向垂直于纸面向里，所有粒子都沿$+x$方向穿过b区域，均沿$-y$方向通过点$N(3,0)$．求符合要求的磁场范围的最小面积，并在所给的坐标系中画出粒子运动轨迹示意图．



答案　$\frac{1}{2}(\pi-2)\left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2$；见解析

解析　在a区域，设任速度为v的粒子偏转90°后从(x,y)点离开磁场，由几何关系有$x=R$，$y=R+\frac{mv_0}{qB}$，得$y=x+\frac{mv_0}{qB}$，即磁场右边界是一直线，此后粒子均沿$+x$方向穿过b区域进入c区域，粒子的运动轨迹及磁场区域如图所示．



磁场最小面积$S_{\min}=2\left(\frac{1}{4}\pi R_0^2-\frac{1}{2}R_0^2\right)=\frac{1}{2}(\pi-2)\left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2$．

故答案为：$\frac{1}{2}(\pi-2)\left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2$；见解析．

标注　磁场 > 带电粒子在磁场中的运动 > 带电粒子在匀强磁场中的运动 > 带电粒子在匀强磁场中的基本问题

4. 知识点睛

方法

2. 配速法

带电粒子在正交的匀强磁场和匀强电场（或重力场）中运动，若所受洛伦兹力与电场力（或重力）不平衡而做曲线运动时，情况比较复杂。这时，如果给带电粒子配上一对等大反向的速度或对带电粒子的初速度进行分解，那么粒子复杂的曲线运动就可等效为沿某一方向的匀速直线运动和一个匀速圆周运动的合成，这实际上是借助等效原理和运动的合成分解原理，在全新的数理模型基础上简化了问题，我们将这种方法称之为“配速法”。具体方法请大家结合例题学习。

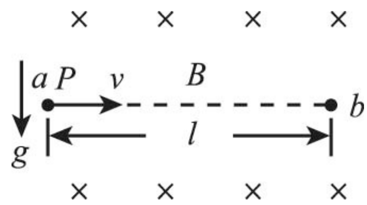
****

教师版说明：这部分的知识老师可以结合下面的例题讲解，让学生自己思考。另外，有些题目还可以用动量定理结合微元法（积分）求解，老师可以两种方法都介绍一下。另外如果老师愿意推一下轨迹方程（摆线），也可以自己补充。

****

5. 例题精讲

35 如图所示，在一竖直平面内有水平匀强磁场，磁感应强度B的方向垂直该竖直平面朝里．竖直平面中ab两点在同一水平线上，两点相距l．带电量$q>0$，质量为m的质点P，以初速v从a对准b射出．略去空气阻力，不考虑P与地面接触的可能性，设定qm和B均为不可改取的给定量．



(1) 若无论l取什么值，均可使P经直线运动通过b点，试问v应取什么值？

(2) 若v为(1)问可取值之外的任意值，则l取哪些值，可使P必定会经曲线运动通过b点？

(3) 对每一个满足(2)问要求的l值，计算各种可能的曲线运动对应的P从a到b所经过的时间．

(4) 对每一个满足(2)问要求的l值，试问P能否从a静止释放后也可以通过b点？若能，再求P在而后运动过程中可达到的最大运动速率$v_{\max}$．

答案

(1) $v=\dfrac{mg}{qB}$

(2) $l=\dfrac{2n\pi m^2g}{q^2B^2}n=1,2,\ldots$

(3) $\Delta t=\dfrac{2n\pi m}{qB}$

(4) P可通过b，$v_{\max}=\dfrac{2mg}{qB}$

解析

(1) 初速度v水平对准b点，为使P经直线运动通过b，要求P所受磁场力与重力平衡，有$qvB=mg$，解得：$v=\dfrac{mg}{qB}$ ①．

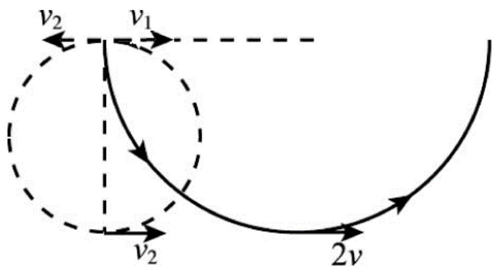
(2) 若式①不能满足，P便在此竖直平面内作曲线运动，可将初速度v水平分解为：$v=v_1+v_2$，其中$v_1=\dfrac{mg}{qB}$ ②．这样P的运动可分解为：分运动1是速度为v_1的匀速直线运动；分运动2是以速度为v_2的匀速圆周运动，$v_2>0$对应顺时针方向圆周运动，$v_2<0$对应逆时针方向圆周运动，由洛伦兹力提供向心力可知：$qvB=\dfrac{mv_2^2}{R}$，圆周运动周期为$T=\dfrac{2\pi R}{v}$；联立可得：$T=\dfrac{2\pi m}{qB}$ ③．

为使P通过b点，要求经若干个整圆周运动周期时，v_1对应的直线运动位移大小恰好等于l，即有$l=v_1nTn=1,2,\ldots$ ④．

将式②，③代入式④，即得l必须取下述值：$l=\dfrac{2n\pi m^2g}{q^2B^2}n=1,2,\ldots$ ⑤．

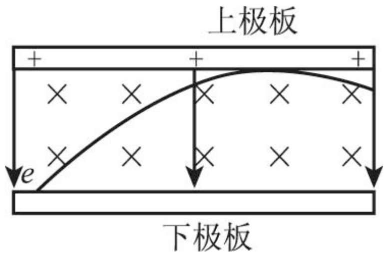
(3) 符合(2)问要求的每一个l均需满足式⑤，无论v和v_2取何值，P从a到b所经时间同为$\Delta t=\dfrac{l}{v_1}=nT=\dfrac{2n\pi m}{qB}$ ⑥，式中n为一个与l值对应的正整数．

(4) 根据(2)问解答可知，只要l取式④限定的值，P从静止释放也可通过b点．此时$v=0$的分解式为：$0=v_1+v_2$，即$v_2=-v_1$．对应的分运动2为下图所示的逆时针方向匀速圆周运动．经半个周期，P在最低点的分速度v_2 $\left(t=\frac{T}{2}\right)$与分速度$v_1$相同，对应的合速度最大，故所求最大速度为$v_{\max}=2v_1=\frac{2mg}{qB}$．



标注　磁场 > 带电粒子在磁场中的运动

36 如图所示，一平行板电容器两极板间电压为U_0、相距为d，上极板带正电，极板间有匀强磁场，磁场方向垂直纸面向里．电子从下极板由静止开始运动，到达上极板，对于给定的电压U_0，当磁感应强度等于某一临界值时，电子刚好不能到达上极板．已知元电荷量为e，电子的质量为m，不计电子重力．



(1) 求磁感应强度的临界值B_c．

(2) 电子在两极板间的运动为曲线运动，一般的曲线运动可以分为很多小段，每一小段都可以看做圆周运动的一部分，求当磁感应强度为临界值时，电子在曲线最高点等效圆周运动的半径r．

答案　(1) $B_c=\frac{1}{d}\sqrt{\frac{2mU_0}{e}}$

(2) $r=2d$

解析　(1) 方法一：电子初始时刻处于静止状态，可以分解为水平向左的速度v与水平向右的速度v，其中令$evB_c=eE$，即$v=\frac{E}{B_c}=\frac{U_0}{B_cd}$；则此后电子的运动可以看成水平向右速度为$v$的匀速直线运动（由水平向右的速度$v$引起）与顺时针方向匀速圆周运动（由水平

向左的速度v引起）的合运动．

对于匀速圆周运动的分运动，洛伦兹力提供向心力：$evB_c = m\dfrac{v^2}{R}$；

电子恰好不打到上极板，则圆周运动直径恰好为板间距d，即$2R = d$；

联立解得：$B_c = \dfrac{1}{d}\sqrt{\dfrac{2mU_0}{e}}$，$v = \sqrt{\dfrac{eU_0}{2m}}$．

方法二：当$qvB = mg\cos\theta$时，小球将离开斜面．沿斜面方向，小球做匀加速直线运动，$v = gt\sin\theta$．小球能在斜面上滑行的时间，$t = \dfrac{m}{qB}\cot\theta$．

设电子竖直方向速度为v_y；当磁感应强度为B_c时，电子刚好不能到达上极板，在最高点处$v_y = 0$，设此时水平方向速度为v_x．

根据动能定理有：$eU_0 = \dfrac{1}{2}mv_x^2$．

电子从下极板向上极板运动过程中，在很短的时间Δt内，水平方向受到的冲量为$(ev_yB_c)\Delta t$，电子从开始运动至最高点的过程，根据动量定理，在水平方向向有

$\sum(ev_yB_c)\Delta t = mv_x - 0 \Rightarrow eB_c\sum(v_y\Delta t) = mv_x \Rightarrow eB_cd = mv_x$．

联立解得：$v_x = \sqrt{\dfrac{2eU_0}{m}}$；$B_c = \dfrac{1}{d}\sqrt{\dfrac{2mU_0}{e}}$．

故答案为：$B_c = \dfrac{1}{d}\sqrt{\dfrac{2mU_0}{e}}$．

(2) 方法一：电子在最高点处，静电力与洛伦兹力的合力提供向心力：

$ev_xB_c - e\dfrac{U_0}{d} = m\dfrac{v_x^2}{r}$；

解得：$r = 2d$．

方法二：电子运动到最高点时，对地速度为两个分运动速度的合成，在此位置，两分运动速度方向相同，则$v_x = 2v = \sqrt{\dfrac{2eU_0}{m}}$．

此时，静电力与洛伦兹力的合力提供向心力：$ev_xB_c - e\dfrac{U_0}{d} = m\dfrac{v_x^2}{r}$．

解得：$r = 2d$．

故答案为：$r = 2d$．

标注　相互作用 > 共点力的平衡

下面补充一道简单题，老师可以留作习题，让学生课后练习。

37 质量为m、带电荷量为$+q$的小球，在离地面高为h处从静止开始自由下落，为使小球始终不会与地面相碰，可设想在它开始下落时就加一个足够强的水平匀强磁场．求磁场磁感应强度的最小取

值$B_{\min}$．忽略空气阻力的影响．

答案 $B_{\min}=\frac{m}{q}\sqrt{\frac{2g}{h}}$．

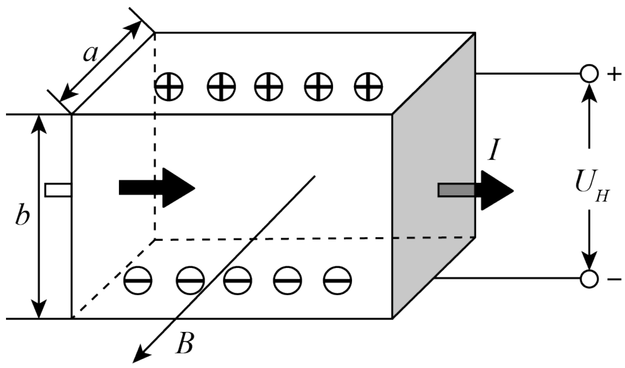
解析 略

标注 磁场 > 带电粒子在磁场中的运动 > 带电粒子在匀强磁场中的运动 > 带电粒子在匀强磁场中的基本问题

6. 例题精讲

下面的题目考查霍尔效应、磁流体发电机等应用。

38 如图所示的一块半导体样品放在垂直于竖直面向外的匀强磁场中，磁感应强度为$B=5\times10^{-3}\mathrm{T}$，当有恒定电流$I=2.0\mathrm{mA}$通过样品时，产生的霍尔电势差$U_H=5.0\mathrm{mV}$，极性如图所示，$a=1.00\mathrm{mm}$，$b=3.00\mathrm{mm}$．求载流子数密度是多少，载流子定向运动速度是多少．



答案 1.25×10^{19}个$/\mathrm{m}^3$；$\frac{1000}{3}\mathrm{m/s}$．

解析 设载流子漂移速度为v，由$evB=e\frac{U_H}{b}$得：

$v=\frac{U_H}{bB}=\frac{1000}{3}\mathrm{m/s}$．

$n=\frac{I}{evab}=\frac{IB}{eaU_H}=1.25\times10^{19}$．

故答案为；1.25×10^{19}个$/\mathrm{m}^3$；$\frac{1000}{3}\mathrm{m/s}$．

标注 磁场 > 带电粒子在磁场中的运动 > 电磁学与现代科技 > 霍尔效应 磁流体发电机 电磁流量计

39 磁流体推进船的动力来源于电流与磁场间的相互作用．图1是平静海面上某实验船的示意图，磁流体推进器由磁体、电极和矩形通道（简称通道）组成．

如图2所示，通道尺寸$a=2.0\mathrm{m}$，$b=0.15\mathrm{m}$、$c=0.10\mathrm{m}$．工作时，在通道内沿z轴正方向加$B=8.0\mathrm{T}$的匀强磁场；沿x轴正方向加匀强电场，使两金属板间的电压$U=99.6\mathrm{V}$；海水沿y轴正方向流过通道．已知海水的电阻率$\rho=0.22\Omega\cdot\mathrm{m}$．

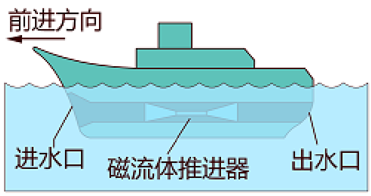


图1

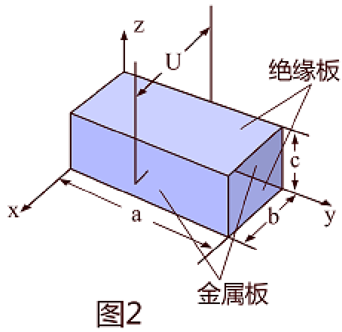


图2

(1) 船静止时，求电源接通瞬间推进器对海水推力的大小和方向；

(2) 船以$v_s=5.0\mathrm{m/s}$的速度匀速前进．若以船为参照物，海水以5.0m/s的速率涌入进水口由于通道的截面积小球进水口的截面积，在通道内海水速率增加到$v_d=8.0\mathrm{m/s}$．求此时两金属板间的感应电动势$U_{感}$．

(3) 船行驶时，通道中海水两侧的电压$U'=U-U_{感}$计算，海水受到电磁力的80%可以转化为对船的推力．当船以$v_s=5.0\mathrm{m/s}$的船速度匀速前进时，求海水推力的功率．

答案

(1) $F_t=796.8\mathrm{N}$；

对海水推力的方向沿y轴正方向（向右）

(2) $U_{感}$=9.6 V．

(3) $P=2880$ W．

解析

(1) 根据安培力公式，推力$F_1=I_1Bb$，其中$I_1=\frac{U}{R}$，$R=\rho\frac{b}{ac}$

则$F_t=\frac{U}{R}Bb=\frac{Uac}{\rho}B=796.8\mathrm{N}$

对海水推力的方向沿y轴正方向（向右）

(2) $U_{感}$=Bub=9.6 V

(3) 根据欧姆定律，$I_2=\frac{U'}{R}=\frac{(U-Bv_4b)ac}{pb}=600\mathrm{A}$

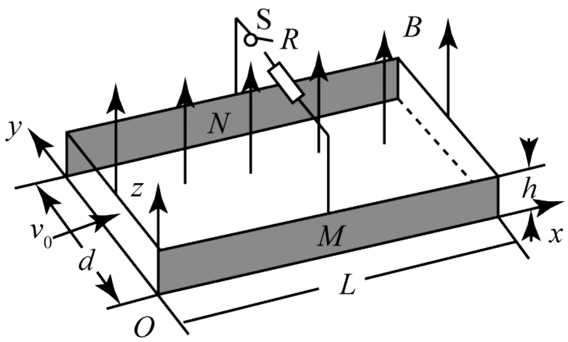
安培推力$F_2=I_2Bb=720\mathrm{N}$

对船的推力$F=0.8F_2=576\mathrm{N}$

推力的功率$P=Fv_s=0.8F_2v_s=2880\ \mathrm{W}$

标注　磁场 > 带电粒子在磁场中的运动

40 如图，某一新型发电装置的发电管是横截面为矩形的水平管道，管道的长为L、宽为d、高为h，上下两面是绝缘板，前后两侧面M、N是电阻可忽略的导体板，两导体板与开关S和定值电阻R相连．整个管道置于磁感应强度大小为B，方向沿z轴正方向的匀强磁场中．管道内始终充满电阻率为ρ的导电液体（有大量的正、负离子），且开关闭合前后，液体在管道进、出口两端压强差的作用下，均以恒定速率v_0沿x轴正向流动，液体所受的摩擦阻力不变．



(1) 求开关闭合前，M、N两板间的电势差大小U_0；

(2) 求开关闭合前后，管道两端压强差的变化Δp；

(3) 调整矩形管道的宽和高，但保持其它量和矩形管道的横截面积$S=dh$不变，求电阻R可获得的最大功率P_m及相应的宽高比$\frac{d}{h}$的值．

答案　(1) $U_0=Bdv_0$

(2) $\Delta p=\dfrac{Ldv_0B^2}{LhR+d\rho}$

(3) $P_m=\dfrac{LSv_0^2B^2}{4\rho}$，$\dfrac{d}{h}=\dfrac{LR}{\rho}$

解析　(1) 设带电离子所带的电量为q，当其所受的洛仑兹力与电场力平衡时，U_0保持恒定，

$qv_0B=q\dfrac{U_0}{d}$①

得$U_0=Bdv_0$②

(2) 设开关闭合前后，管道两端压强差分别为p_1、p_2，液体所受的摩擦阻力均为f，开关闭合后管道内液体受到安培力为$F_安$，有

$p_1hd=f$③

$p_2hd = f + F_{安}$④

$F_{安} = BId$⑤

根据欧姆定律，有

$I = \frac{U_0}{R+r}$⑥

两导体板间液体的电阻

$r = \rho\frac{d}{R+r}$⑦

由②③④⑤⑥⑦式得

$\Delta p = \frac{Ldv_0B^2}{LhR+d\rho}$⑧

(3) 电阻R获得的功率为

$P = I^2R$

$p = \left(\frac{Lv_0B}{\frac{LR}{d}+\frac{\rho}{h}}\right)^2 R$

当$\frac{d}{h} = \frac{LR}{\rho}$时

电阻R获得的最大功率

$P_m = \frac{LSv_0^2B^2}{4\rho}$

标注 磁场 > 带电粒子在磁场中的运动