第五部分 自招综合训练-动量与能量专题

动量和能量是高考的重点，也是高中物理课程的重点，同学们平时已经进行了大量的练习。在这个模块中，我们对动量和能量的内容进行一些拓展，主要包括二维情况、流体问题及质心系的应用。

一、二维动量定理

1.知识点睛

在高中课程中我们已经学习过动量定理，并指出动量定理是矢量式，但所研究的问题基本都是一维情况。在这个模块中，我们研究一些二维平面问题。在应用动量定理时，既可以在某一方向使用，也可以通过正交分解在两个方向上同时使用，即$\left\{ \begin{array}{l}

{I_{合外x}} = \Delta {p_x}\\

{I_{合外y}} = \Delta {p_y}

\end{array} \right.$。具体方法请大家结合例题学习。

2.例题精讲

1 某小球质量为m，与地面之间的动摩擦系数为μ，现将小球从高度为h处以初速度v_0平抛．小球与地面碰撞后，竖直方向的分速度大小不变，求小球与地面碰撞后水平方向的分速度大小（假设v_0很大，小球与地面碰撞后水平方向的分速度不会减为零，且碰撞过程时间极短，重力冲量不计）

答案 $v'_x = v_0 - 2\mu\sqrt{2gh}$

解析 以竖直向上为y轴正方向，v_0方向为x轴正方向．

小球落地时竖直方向速度$v_y = \sqrt{2gh}$，

小球与地面碰撞过程，对水平、竖直方向分别应用动量定理得：

$I_y = Nt = (-mv_y) - mv_y$，

$I_x = -ft = mv'_x - mv_0$，

且$f = \mu N$

联立解得：$v'_x=v_0-2\mu\sqrt{2gh}$.

2 一袋面粉(可看做质点)沿着与水平面成$\alpha=60°$角的光滑斜面，从高H处无初速地滑下，落到水平地板上(不弹起)，碰撞过程时间极短，不计重力冲量，袋与地板之间的动摩擦因数$\mu=0.7$，问袋停在何处？

答案 0.5m

解析 当袋滑到斜面末端时具有一定的沿斜面方向的速度．由于袋与地板碰撞时不会弹起，这意味着在地板支持力的作用下袋的竖直分动量变为零，同时水平方向袋受到摩擦力的冲量使得袋的水平速度减小．袋与地板碰撞的时间极短，在竖直方向利用动量定理时可以忽略面粉袋自重产生的冲量，即有$N\cdot\Delta t_N=mv\sin\alpha$.

假设$\Delta t_f=\Delta t_N$ ，

则在水平方向上摩擦力产生的冲量为：

$f\cdot\Delta t_f=\mu N\cdot\Delta t_N=\mu mv_0\sin\alpha\approx0.61mv_0$.

而袋的水平方向动量为：

$p_x=mv_0\cos\alpha=0.5mv_0$. 所以实际上摩擦力的存在时间$\Delta t_f<\Delta t_N$，袋的水平分速度比竖直分速度先变为零，因此袋是停在斜面的末端．

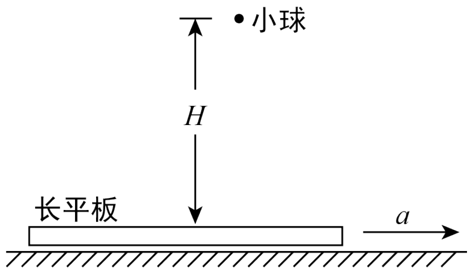
若题中$H=2\mathrm{m}$，$\alpha=45°$，$\mu=0.5$，袋又将停在何处？

袋滑到斜面底端的速度为$v=\sqrt{2gH}$，

根据$N\cdot\Delta t_N=mv\sin\alpha$，$-f\cdot\Delta t_f=-\mu N\Delta t_N=mv_x-mv\cos\alpha$得$v_x=v(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)$.

袋停的位置距斜面末端为$x=\dfrac{v_x^2}{2\mu g}=\dfrac{H(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)^2}{\mu}=0.5\mathrm{m}$.

3 质量足够大的长平板从$t=0$时刻开始在水平方向上由静止出发朝右匀加速运动，加速度大小为a．如图所示，在板的上方H高处有一静止的小球，在$t=0$时刻自由下落，而后与平板发生碰撞．设小球与平板接触时的滑动摩擦系数$\mu=0.1$，小球反弹高度也为H．将小球反弹离开平板时相对地面参考系的速度方向与朝右的水平方向夹角记为β，试求$\tan\beta$与a的关系．(碰撞过程时间极短，重力冲量不计)



答案 当$\frac{1}{5}v_0 \leqslant at_0$，即$a \geqslant \frac{1}{5}g$时，$\tan\beta = \frac{v_0}{v_x} = 5$，
当$\frac{1}{5}v_0 > at_0$，即$a < \frac{1}{5}g$时，$\tan\beta = \frac{v_0}{at_0} = \frac{g}{a}$．

解析 小球做自由落体运动，经过时间$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$与平板发生碰撞，且小球与平板发生碰撞前的速度为$v_0 = \sqrt{2gH}$，依题意，小球碰撞后竖直方向速度大小不变．

对小球在竖直方向应用动量定理：$N \cdot \Delta t = 2mv_0$．

若不考虑板的速度$v = at_0$，则在水平方向应用动量定理有$f \cdot \Delta t = mv_x$，$f = \mu N$．

联立解得$v_x = 2\mu v_0 = \frac{1}{5}v_0$．
当$\frac{1}{5}v_0 \leqslant at_0$，即$a \geqslant \frac{1}{5}g$时，$\tan\beta = \frac{v_0}{v_x} = 5$，
当$\frac{1}{5}v_0 > at_0$，即$a < \frac{1}{5}g$时，$\tan\beta = \frac{v_0}{at_0} = \frac{g}{a}$．
故答案为：当$\frac{1}{5}v_0 \leqslant at_0$，即$a \geqslant \frac{1}{5}g$时，$\tan\beta = \frac{v_0}{v_x} = 5$，
当$\frac{1}{5}v_0 > at_0$，即$a < \frac{1}{5}g$时，$\tan\beta = \frac{v_0}{at_0} = \frac{g}{a}$．

****

教师版补充：下面补充一道综合题，有一定计算量，老师可以选用

4 有一质量及线度足够大的水平板，绕竖直轴以角速度ω匀速旋转．在板的上方h处有一群相同的小球（可视为质点），它们以板的转轴为中心、R为半径均匀地在水平面内排成一个圆周（以单位长度内小球的个数表示其数线密度）．现让这些小球同时从静止状态开始自由落下，设每个球与平板发生碰撞的时间非常；而且碰撞前后小球在竖直方向上速度的大小不变，仅是方向反向；而在水平方向上则会发滑动摩擦，动摩擦因数为μ．试求这群小球第二次和第一次与平板碰撞时小球数线密度之比值η．

答案 见解析．

解析 设小球总数为n，第一次碰撞时小球数线密度为$\gamma=\dfrac{n}{2\pi R}$．

设小球质量为m，某个小球与板碰撞时，在竖直方向有：$N\cdot\Delta t_N=2m\sqrt{2gh}$．若$\Delta t_f=\Delta t_N$，小球在$\Delta t_f$时间内获得的水平速度$v_1$小于$\omega R$，则有：$f\cdot\Delta t_f=\mu N\Delta t_N=mv_1$，解得：

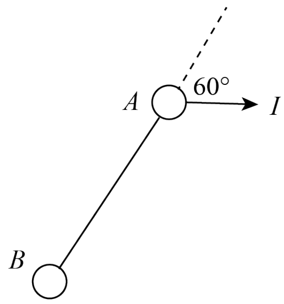
$v_1=2\mu\sqrt{2gh}$．小球第一次碰后做斜抛运动，水平射程$x_1=2v\sqrt{\dfrac{2h}{g}}=8\mu h$，第二次落到板上形成$R_1=\sqrt{R^2+x_1^2}=\sqrt{R^2+(8\mu h)^2}$为半径的圆，小球数线密度为$\lambda_1=\dfrac{n}{2\pi R}$．则比值

$$\eta=\frac{\lambda_1}{\lambda}=\frac{R}{R_1}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{8\mu h}{R}\right)}}，(2\mu\sqrt{2gh}<\omega R)．$$

若$\Delta t_f<\Delta t_N$，小球在第一次碰后离开平板与板相对静止，则$v_1{}'=\omega R$，同理可求得这种情况下小球数线密度$\eta'=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{8\omega^2h}{g}}}$，$(2\mu\sqrt{2gh}\geqslant\omega R)$．

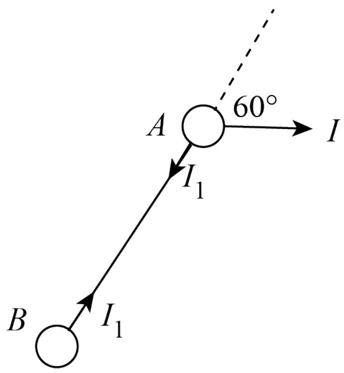
****

5 如图所示，完全相同的A、B两个小球质量都为m，放于光滑水平桌面上，两球用质量不计的轻绳连接，绳刚好伸直，现给A球一个与AB连接方向成60°的瞬时冲量I，求此时B球获得的速度．



答案 $\dfrac{I}{4m}$

解析 如图所示，



设AB绳子上冲量大小为I_1，对A、B小球分别沿绳方向应用动量定量，并结合绳两端沿绳方向速度相等可得：

$\frac{I\cos 60^\circ - I_1}{m} = \frac{I_1}{m}$，解得：$I_1 = \frac{1}{4}I$，

因为B球速度$v_B = \frac{I_1}{m} = \frac{I}{4m}$．

故答案为：$\frac{I}{4m}$．

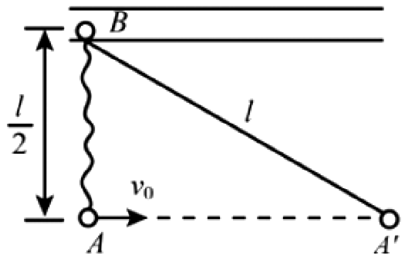
****

教师版说明：老师可以结合这道题目讲解一下此类问题的处理方法。此题也可以设球两个方向的分速度为未知数，再利用动量定理和沿绳速度相等求解，但不如直接设绳子冲量为未知数简单。

****

例题

6 如图所示，质量为m的小球B放在光滑的水平槽内，现有一长为l的细绳连接另一质量为m的小球A，开始细绳处于松弛状态，A与B相距为$\frac{l}{2}$，绳子不可伸长，小球A以初速度v_0向右运动，试求细绳被拉紧时B球的速度v_B．

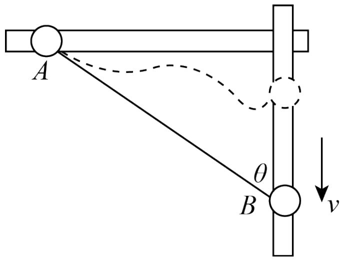


答案 $\frac{3v_0}{7}$

解析 设细绳拉紧时绳上冲量为I，则对B球沿水平方向由动量定理得：$I\cos 30^\circ = mv_B$,B球沿绳子速度分量为$v_B\cos 30^\circ$，对A球沿绳方向应用动量定理，并结合绳子两端沿绳方向速度相等，可得：$mv_B\cos 30^\circ = mv_0\cos 30^\circ - I$．

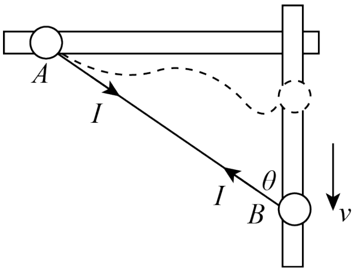
联立解得：$I = \frac{2\sqrt{3}mv_0}{7}$，$v_B = \frac{3v_0}{7}$．

7 如图所示，完全相同的A、B两个小环质量都为m，套在光滑的互相垂直的杆上．整个装置放在光滑水平桌面上，杆固定不动，小环可沿杆无摩擦滑动．两环用质量不计的轻绳连接，开始时绳松弛，给B环沿杆的初速度v，某时刻轻绳张紧，此时绳与B环所在杆成θ角，求轻绳张紧后瞬间，A球速度．



答案 $v\cos\theta\sin\theta$

解析 如图所示，设绳张紧瞬间，绳子冲量大小为I．



设绳子张紧后A球速度为v_A，方向沿其所在杆；B球速度为v_B，方向沿其所在杆．

对A球沿杆方向用动量定理得：$I\sin\theta = mv_A$，

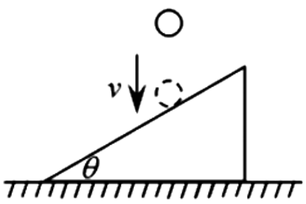
对B球沿杆方向用动量定理得：$-I\cos\theta = mv_B - mv$，

A、B沿绳方向速度相等，可得：$v_B\cos\theta = v_A\sin\theta$，

联立解得：$v_A = v\cos\theta\sin\theta$．

故答案为：$v\cos\theta\sin\theta$．

8 如图所示，质量为m、倾角为θ的斜面静止于光滑水平面上，质量也为m的小球自由下落，与斜面碰撞前速度为v，斜面表面光滑．小球与斜面发生非弹性碰撞，碰后沿斜面下滑(不弹起)，求碰后斜面速度．(碰撞时间极短，忽略小球重力冲量)



答案 $\dfrac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin^2\theta}v$

解析 设小球与斜面碰撞过程中，

斜面上表面弹力的冲量为I．

碰后斜面速度沿水平方向，设斜面速度为v_1，

对斜面沿水平方向应用动量定理得：$I\sin\theta = mv_1$；

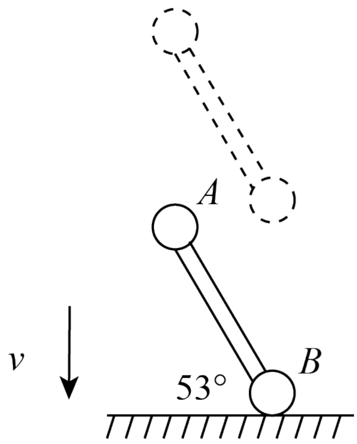
对小球垂直斜面方向应用动量定理，

并利用小球与斜面在垂直斜面方向速度相等可得：

$v\cos\theta - \dfrac{I}{m} = v_1\sin\theta$，

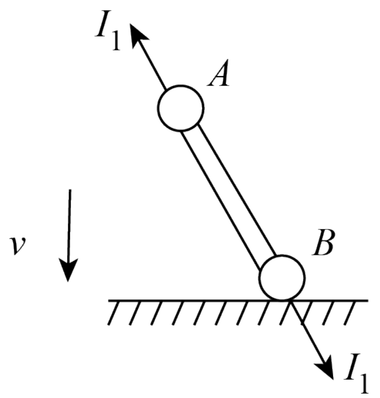
联立解得：$v_1 = \dfrac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin^2\theta}v$．

9 如图所示，完全相同的A、B两个小球质量都为m，两球用质量不计的轻杆连接，杆与水平方向夹角为$53°$，现将两球及轻杆保持图示角度从某高度自由释放，B球与地面接触瞬间，两球速度大小均为v，此后B球与地面发生非弹性碰撞，不从地面弹起，求碰撞后瞬时B球速度．（地面光滑，且碰撞时间极短，忽略重力冲量）



答案 $\dfrac{6}{17}v$

解析 由于轻杆只有两端受力，因此弹力一定沿杆方向，设B球与地面碰撞瞬时，杆对两球的冲量大小为I_1．



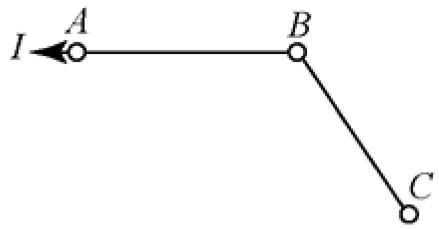
B球与地面碰撞后不弹起，故速度沿水平方向，设碰后B球速度为v_B．对B球沿水平方向应用动量定理得：$I_1\cos 53^\circ = mv_B$．

对A球沿杆方向就用动量定理，并结合杆两端方向速度相等得：$\dfrac{mv\cos 37^\circ - I_1}{m} = v_B\cos 53^\circ$，

联立解得$v_B = \dfrac{6}{17}v$．

故答案为：$\dfrac{6}{17}v$．

10 如图所示，A、B、C三个小球质量都为m，放于光滑水平桌面上，三个小球之间用质量不计的不可伸长的轻绳相连，绳刚好伸直，AB与BC夹角为120°．现在给A一个沿BA绳方向瞬时冲量I，求C球获得的速度为多少？



答案 $\dfrac{2I}{15m}$

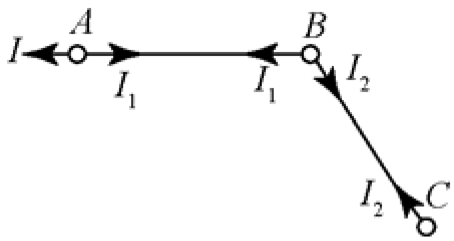
解析 如图所示，设AB绳子上冲量为I_1，BC绳子上的冲量为I_2．

分别隔离A、B、C用动量定理进行分析，并利用AB、BC两端沿绳子方向速度相等，可得：

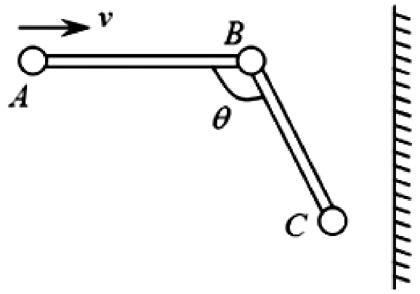
$\dfrac{I-I_1}{m} = \dfrac{I_1 - I_2\cos 60^\circ}{m}$；$\dfrac{I_1\cos 60^\circ - I_2}{m} = \dfrac{I_2}{m}$；

联立解得：$I_1 = \dfrac{8}{15}I$，$I_2 = \dfrac{2}{15}I$．因此，$v_c = \dfrac{2I}{15m}$．

故答案为：$\dfrac{2I}{15m}$．



11 如图所示，A、B、C三个小球质量都为m，放置于光滑水平桌面上．AB、BC分别用质量不计的轻杆连接，其中B球可认为与两根杆铰接(即两杆可绕B旋转，夹角可变)．现在A、B、C三个小球速度均为v，方向垂直于挡板，AB与BC夹角为θ．某时刻C球与挡板发生非弹性碰撞(不弹回，垂直挡板方向速度减为零)，挡板光滑，求碰后瞬间A球速度．



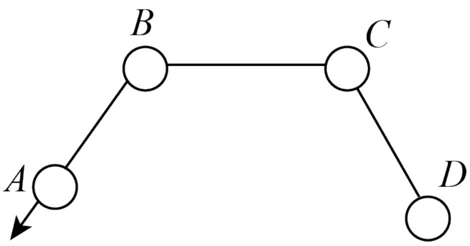
答案 $\frac{4\sin^2\theta}{4\sin^2\theta+\cos^2\theta}v$

解析 略

****

教师版说明：下面补充一道类似的问题，老师可以选讲。

12 如图所示，四个质量相等的质点三根不可伸长的绳子依次连接，置于光滑水平面上，三根绳子形成半个正六边形．现有一冲量作用于端点A并使这个质点速度为v，方向沿绳向外，求瞬时D的质点的速度．



答案 $\frac{v}{13}$

解析 略．

****

二、流体的动量

1.知识点睛

****

教师版说明：如果老师在一轮课程中已经讲过流体问题，可以跳过此模块

****

通常气体流、液体流、不能看成质点的绳子等连续体都可以广义的视为“流体”，在解决与流体有关的问题时，难点和关键点在于如何正确的选取研究对象，这里需要用到微元的思想方法。

通常情况下，我们选择Δt时间内流过某一截面的一段流体为研究对象。

然后可以结合动量和能量知识求解，这个模块中我们主要利用动量定理求解。一般思路是：

①结合已知条件表示出对应的质量Δm（对于光子等问题，可以直接表示出动量）；

②对该研究对象在Δt时间内应用动量定理求解即可（方程中等号两边含有的Δt可以最终消掉）。

具体的求解方法请大家结合例题进行学习。

2. 例题精讲

****

例题说明：例11~例14主要训练学生选取研究对象，正确表示Δm；其中例11、例12对应密度均匀的情况，例13、例14对应密度不均匀的情况，例14对应单位时间内发出的粒子数不变（即I不变），而不是数密度不变。后面的题目作为综合练习，涉及多种情景，有些涉及建模能力。

老师也可以按照自己的思路调整题目顺序。

****

13 水力采煤就是利用从高压水枪中喷出来的强力水柱冲击煤层而使煤层碎裂，设所用水枪出水口的横截面积为S，水速为v_0，水平射到煤层上后水的速度变为0，水的密度为ρ，水柱垂直地冲击到竖直煤壁上后沿竖直煤壁流下，求水柱施于煤层上的冲力大小．

答案 $\rho S v^2$

解析 取时间t内的水研究对象，以初速度方向为正方向，根据动量定理，有：$-Ft=0-(\rho Svt)v$

解得：$F=\rho S v^2$．

14 某种气体分子束由质量为m速度为v的分子组成，各分子都向同一方向运动，垂直地打在某平面上后又以原速率反向弹回，如分子束每立方米的体积内有n个分子，求被分子束撞击的平面所受到的压强．

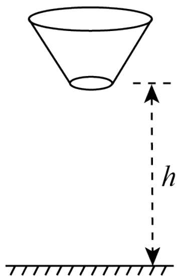
答案 $2v^2nm$

解析 设在Δt时间内射到面积为S的平面上的气体的质量为Δm，则$\Delta m = v\Delta t\cdot S\cdot n\cdot m$．取$\Delta m$为研究对象，它受到的合外力等于平面作用到气体上的压力F．

以v方向为正方向，由动量定理得：$-F\Delta t=(-\Delta mv)-(\Delta mv)$，解得$F=2v^2nSm$，平面受到的压强$p$为：$p=\dfrac{F}{S}=2v^2nm$．

故答案为：$2v^2nm$．

15 一个沙漏下部开口面积为S，假设单位时间内漏出沙子的质量保持不变，沙子漏出时的初速度忽略不计，沙漏下部开口距地面高度为h，沙子落地时不反弹，对地面的压强为p，若使沙子落地时对面的压强为$2p$，则应使沙漏下部开口距地面高度为（　）



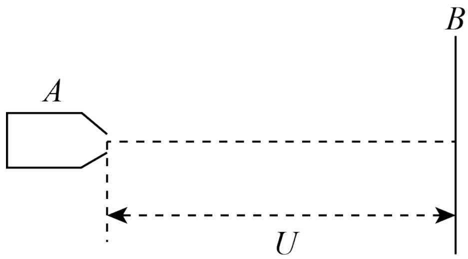
A. $\sqrt{2}h$　　B. $2h$　　C. $4h$　　D. $8h$

答案 C

解析 由于沙子落地之后不反弹，也就是说，沙子和地面发生的时完全非弹性碰撞，所以不能用能量方程求解，只能列动量冲量方程．

故选C．

16 如图所示，电子枪发出的电子初速度忽略不计，电子质量为m，电荷量为e，电子枪与极板间加一加速电压U，电子运动时形成的等效电流为I，电子打到极板上不反弹，求：



(1) 电子轰击极板时，对极板的压力．

(2) 若使极板的压力变为2倍，则加速电压应为多少．

答案 (1) $I\sqrt{\frac{2mU}{e}}$

(2) $4U$

解析 (1) 略．

(2) 略．

17 为估算池中睡莲叶面承受水滴撞击产生的平均压强，小明在雨天将一圆柱形水杯置于露台，测得1小时内杯中水上升了$45\mathrm{mm}$．查询得知，当时雨滴竖直下落速度约为$12\mathrm{m/s}$．据此估算该压强约为（设雨滴撞击睡莲后无反弹，不计雨滴重力，雨水的密度为$1\times10^{3}\mathrm{kg/m^{3}}$）（ ）

A. $0.15\mathrm{Pa}$ B. $0.54\mathrm{Pa}$ C. $1.5\mathrm{Pa}$ D. $5.4\mathrm{Pa}$

答案 A

解析 方法一：由题意可知它的流量为：$Q=S\times\frac{45\times10^{-3}}{3600}$，雨滴不反弹，根据动量定理得到：$Ft=mv$，压强为：$p=\frac{F}{S}=\frac{\rho Qvt}{St}=0.15\mathrm{Pa}$．

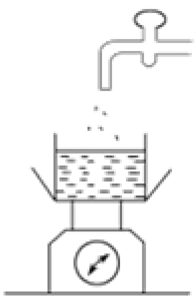
故选A．

方法二：设水杯底面积为S，$\Delta t=1\mathrm{h}$内下落的水的质量为$\Delta m=\rho Sh$?

对这部分水应用动量定理有$F\Delta t=\Delta mv$，则$F=\frac{\Delta mv}{\Delta t}$，???

故压强大小为$p=\frac{F}{S}=\frac{\Delta mv}{S\Delta t}=\frac{\rho Shv}{S\Delta t}=\frac{\rho hv}{\Delta t}=0.15\mathrm{pa}$

18 有一水龙头以每秒$700\mathrm{g}$水的流量竖直注入盆中，盆放在磅秤上，如图所示，盆中原来无水，盆的质量$500\mathrm{g}$，注至$10\,\mathrm{s}$末时，磅秤的读数为$83.3\mathrm{N}$，重力加速度为$9.8\mathrm{m/s^{2}}$，则此时注入盆中的水流的速度是多大？



答案 $14\mathrm{m/s}$

解析 方法一：取极短的时间Δt，在Δt内注入水的质量为$0.7\Delta t$．由动量定理得：

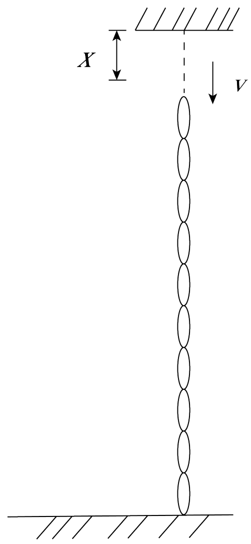
$0-0.7\Delta t\cdot(-v)=(83.3-7.5\times9.8-0.7\Delta t\times9.8)\cdot\Delta t$，其中$\Delta t^2$为高阶小量忽略不计，解得

$v=14\mathrm{m/s}$

方法二：取极短的时间Δt则在Δt注入水的质量为$0.7\Delta t$．由动量定理

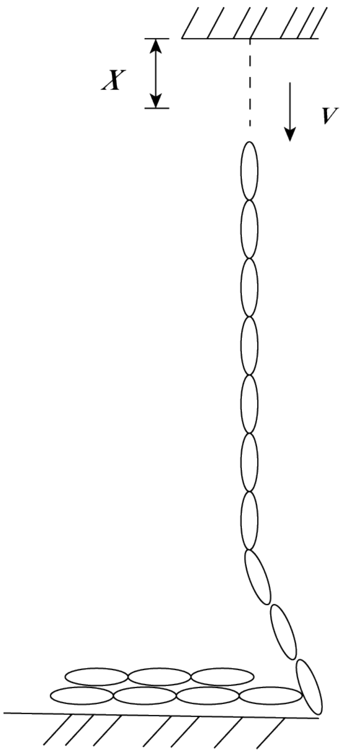
得：$0.7\Delta t\cdot v-0=(83.3-7.5\times9.8)\cdot\Delta t$故 $v=14\mathrm{m/s}$

19 一质量为m、长为l的均匀柔软绳自由悬垂，下端恰与一台秤秤盘接触．某时刻放开柔软绳上端，求台秤的最大读数．



答案 $3mg$

解析 方法一：设t时间内轻绳下落的长度为x，此时绳速：$v=\sqrt{2gx}$，设绳的线密度为ρ．



在$t\to t+\Delta t$时间内，又有$\Delta m=\rho\Delta x$的绳落到秤盘上．

由动量定理得：$-F\Delta t=0-\Delta mv=-\rho\Delta xv$（忽略微元段绳本身的重力冲量），

即：$F=\rho v\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)=\rho v^2=2\rho gx$，故：$N=F+\rho gx=3\rho gx$．

当$x=l$时，台秤的度数最大，即$N=3mg$，此时绳子全部落在台秤上．

方法二：设t时刻落到秤盘的绳长为x，此时绳速$v=\sqrt{2gx}$．在$t\to t+\Delta t$时间内，又有Δm=$\rho\Delta x$的绳落到秤盘上．

由动量定理得$-F\Delta t$=$0-\Delta mv$=$-\rho\Delta xv$（忽略微元段绳本身的重力冲量）．

即$F=\rho v(\Delta x/\Delta t)=\rho v=2\rho gx$．

故$N=F+\rho gx=3\rho gx$．

因而秤盘的最大读数为$3mg$，即出现在柔绳将要全部掉到秤盘上时．

故答案为：$3mg$．

20 光子具有能量，也具有动量．光照射到物体表面时，会对物体产生压强，这就是“光压”．光压的产生机理如同气体压强：大量气体分子与器壁的频繁碰撞产生了持续均匀的压力，器壁在单位面积上受到的压力就是气体的压强．设太阳光每个光子的平均能量为E，太阳光垂直照射地球表面时，在单位面积上的辐射功率为P_0．已知光速为c，则光子的动量为$\dfrac{E}{c}$．求：

(1) 若太阳光垂直照射在地球表面，则时间t内照射到地球表面上半径为r的圆形区域内太阳光的总能量及光子个数分别是多少？

(2) 若太阳光垂直照射到地球表面，在半径为r的某圆形区域内被完全反射（即所有光子均被反射，且被反射前后的能量变化可忽略不计），则太阳光在该区域表面产生的光压（用I表示光压）是多少？

(3) 有科学家建议利用光压对太阳帆的作用作为未来星际旅行的动力来源．一般情况下，太阳光照射到物体表面时，一部分会被反射，还有一部分被吸收．若物体表面的反射系数为ρ，则在物体表面产生的光压是全反射时产生光压的$\dfrac{1+\rho}{2}$倍．设太阳帆的反射系数$\rho=0.8$，太阳帆为圆盘形，其半径$r=15\mathrm{m}$，飞船的总质量$m=100\mathrm{kg}$，太阳光垂直照射在太阳帆表面单位面积上的辐射功率$P_0=1.4\mathrm{kW}$，已知光速$c=3\times10^8\mathrm{m/s}$．利用上述数据并结合第（2）问中的结论，求太阳帆飞船仅在上述光压的作用下，能产生的加速度大小是多少？不考虑光子被反射前后的能量变化．（保留2位有效数字）

答案

(1) $E=\pi r^2P_0t$，$n=\dfrac{\pi r^2P_0t}{E}$

(2) $I=\dfrac{2P_0}{c}$

(3) $a=5.9\times10^{-5}\mathrm{m/s^2}$

解析

(1) 时间t内太阳光照射到面积为S的圆形区域上的总能量$E_{总}=P_0St$

解得$E_{总}=\pi r^2P_0t$

照射到此圆形区域的光子数$n=\dfrac{E_{总}}{E}$

解得$n=\dfrac{\pi r^2P_0t}{E}$

(2) 因光子的动量$p=\dfrac{E}{c}$

则到达地球表面半径为r的圆形区域的光子总动量$p_{总}=np$

因太阳光被完全反射，所以时间t内光子总动量的改变量

$\Delta p=2p$

设太阳光对此圆形区域表面的压力为F，依据动量定理$Ft=\Delta p$

太阳光在圆形区域表面产生的光压$I=F/S$

解得$I=\dfrac{2P_0}{c}$

(3) 在太阳帆表面产生的光压$I'=\dfrac{1+\rho}{2}I$

对太阳帆产生的压力$F' = I'S$

设飞船的加速度为a，依据牛顿第二定律$F' = ma$.

解得$a = 5.9\times10^{-5}\mathrm{m/s^2}$

21 一帆船在静水中顺风飘行，风速为v_0，求船速多大时，风供给船的功率最大？(设帆面是完全弹性面，且与风向垂直)

答案 答案见解析

解析 方法一：

设船速度为v，以船为参照系，风以(v_0-v)的速度撞击风帆并原速反弹，则由动量定理得$F\Delta t = mn(v_0-v)S\Delta t\cdot 2(v_0-v)$，式中$n$为单位体积内分子的个数，$m$为每个空气分子的质量，$S$为的面积．

则风对帆的作用力为$F = 2nmS(v_0-v)^2$；

风供给船的功率为：$P = Fv = 2nmS(v_0-v)^2v = nmS\left(v_0-v\right)\left(v_0-v\right)\cdot 2v$．

因此，$v=\dfrac{v_0}{3}$时，风供给船的功率最大．

方法二：

计算功率也可以使用：

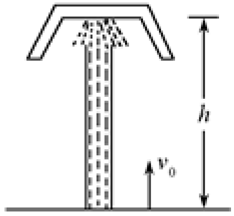
$$P=\frac{\Delta E_{\mathrm{k}}}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}\Delta m\left[v_0^2-\left(v_0-2v\right)^2\right]}{\Delta t}=\frac{1}{2}\frac{nm\left(v_0-v\right)S\Delta t\left[2v\left(2v_0-2v\right)\right]}{\Delta t}=2nmS(v_0-v)^2v，$$

结果与方法一相同．

****

教师版补充：下面再补充两道流体的问题，老师可以作为练习

22 由喷泉中喷出的竖直水柱，把一个质量为M的垃圾筒倒顶在空中．若水以恒定的速率v_0从面积为S的小孔中喷出射向空中，在冲击垃圾筒底后以原速竖直溅下，如图所示，求垃圾筒停留的高度h．



答案 $h=\frac{1}{2g}\left[v_0^2-\left(\frac{Mg}{2\rho Sv_0}\right)^2\right]$

解析 设v_1为上部水流的速度

所以有，$\frac{1}{2}v_0^2-\frac{1}{2}v_1^2=gh$

由动量定理$F\Delta t=\Delta p$，

$\Delta p=\Delta m\Delta v=2\Delta mv_1=2\rho\Delta Vv_1=2\rho v_1S_1\Delta tv_1=2\rho v_0Sv_1\Delta t$

上式运用了$v_1S_1=v_0S$，这是水流流量恒定的限制条件，其中S_1为水流与垃圾桶的接触面积，并且在推导时忽略了水平方向的速度分量．

所以有，$F=2\rho Sv_0v_1$，利用平衡条件$F=Mg$，并联立上面的方程，

$v_1=\frac{Mg}{2\rho Sv_0}$，$h=\frac{1}{2g}\left[v_0^2-\left(\frac{Mg}{2\rho Sv_0}\right)^2\right]$

23 对于同一物理问题，常常可以从宏观与微观两个不同角度进行研究，找出其内在联系，从而更加深刻地理解其物理本质．

正方体密闭容器中有大量运动粒子，每个粒子质量为m，单位体积内粒子数量n为恒量．为简化问题，我们假定：粒子大小可以忽略；其速率均为v，且与器壁各面碰撞的机会均等；与器壁碰撞后瞬间，粒子速度方向都与器壁垂直，且速率不变．利用所学力学知识，导出器壁单位面积所受粒子压力f与m、n和v的关系．

（注意：解题过程中需要用到、但题目没有给出的物理量，要在解题时做必要的说明）

答案 $f=\frac{F}{S}=\frac{1}{2}nmv^2$．

解析 与器壁碰撞前后瞬间，粒子速度方向都与器壁垂直，且速率不变，则一个粒子每与器壁碰撞一次给器壁的冲量是：$I=2mv$，在Δt时间内能达到面积为S容器壁上的粒子所占据的体积为：$V=Sr\Delta t$．

由于粒子有均等的概率在容器各面相碰，即可能达到目标区域的粒子数为：

$N=\frac{1}{6}nV=\frac{1}{6}nSV\Delta t$.

根据动量定理得：$F\Delta t=NI$，则得面积为S的器壁受到的粒子的压力为：

$F=\frac{NI}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{6}nSv\Delta t\times 2mv}{\Delta t}=\frac{1}{3}nSmv^2$.

所以器壁单位面积，所受粒子压力为：

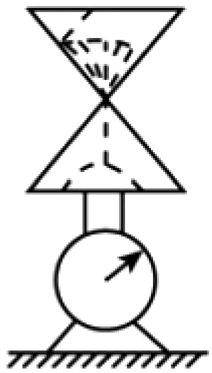
$f=\frac{F}{S}=\frac{1}{3}nmv^2$.

****

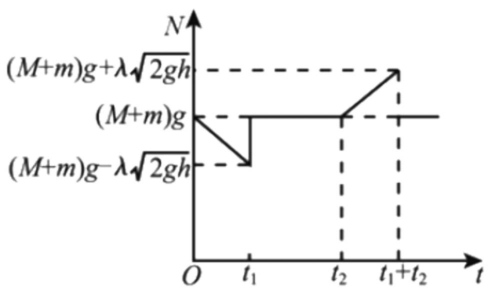
****

教师版补充： 下面补充一道难度较大、过程较多的题目，老师可以选讲

24 如图所示，一个沙漏(古代的一种计时器)置于一个盘秤上，初始时瓶中的所有沙子都放在上面的容器中，瓶的质量为M，瓶中的沙子质量为m．在$t=0$时，沙子开始释放流入下面的容器，沙子以质量变化率为$\left(\frac{\Delta m}{\Delta t}=\lambda\right)$离开上面的容器，试画出(并定性标明)一个图，给出在$t>0$的全部时间内秤的示数．



答案



解析 $t=0$时刻之前沙子全部静止，盘秤示数显然为$(M+m)g$．

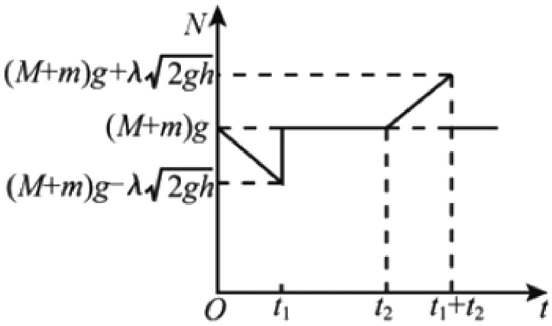
第一个阶段：正有沙子离开沙漏上部，但是没有沙子落到底部．向下为正，根据牛顿第二定律$(M+m)g-N=m_{空中}-g$，其中$m_{空中}=at$，解得：$N=(M+m)g-\lambda tg$．这一过程持续时间为0~t_1，其中t_1是沙子从离开沙漏上部自由下落到容器底部的时间，设下部沙漏的高度为h，则$t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}$．

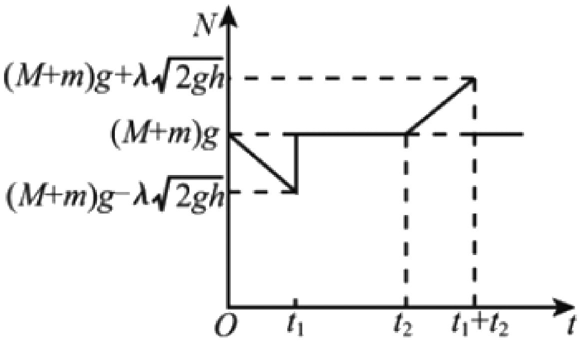
第二个阶段：正有沙子离开沙漏上部，同时有沙子落到底部．由于空中的沙子状态(质量、各部分速度)不变，因此沙子的总动量不变．以向下为正，对沙子和沙漏整体应用动量定理有$[(M+m)g-N]\Delta t=\Delta p=0$，解得：$N=(M+m)g$．这一过程持续时间为$t_1$~$t_2$，其中$t_2$是全部沙子流出沙漏上部的时间，即$t_2=m/\lambda$．

第三个阶段：所有沙子都已经离开了沙漏上部，但是还有沙子没到达底部．以向下为正，对Δt时间内落在底部的那些沙子应用动量定理，有$[(M+m-m_{空中})g-N]\Delta t=0-(\lambda\Delta t)v$，其中$m_{空中}=\lambda\left[\sqrt{\frac{2h}{g}}-(t-t_2)\right]$，$v=\sqrt{2gh}$．联立解得：$N=(M+m)g+\lambda(t-t_2)g$．这一过程持续时间为$t_2\sim t_2+t_1$．

在$t=t_2+t_1$时刻之后，沙子全部静止在沙漏底部，盘秤示数显然为$(M+m)g$．

因此，盘秤示数$N\sim$时间t示数如图所示．



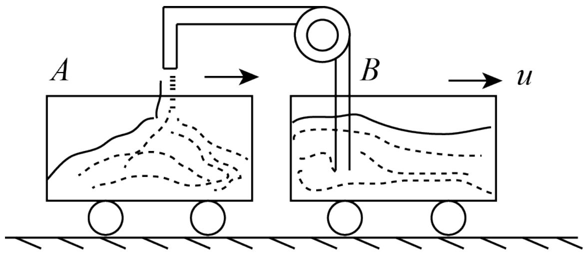
故答案为：．

****

****

下面再补充一道题目，本题不用动量定理而用动量守恒，但也是结合微元法选取研究对象，老师可以选用。

25 把粉状物料从小车B中以每秒b千克的速率吹进小车A中．物料沿向下地喷出料筒，故和小车B有着相同的水平速度u，在观察瞬间，小车A具有质量M和速度v，如图所示，求此瞬间A的加速度a．



答案 $\frac{b}{M}(u-v)$

解析 设在观察瞬间极短的时间间隔Δt内，进入小车A的物料$b\Delta t$的水平动量为（$b\Delta t$）u，小车A的动量为Mv．经Δt时间,小车与进入的物料总动量表达为$(M+b\Delta t)(v+\Delta v)$，其中$\Delta v$为小车$A$的速度增量．由于系统（小车$A$和物料$b\Delta t$系统）无水平方向外力，水平动量守恒，得方程

$(b\Delta t)u+Mv=(M+b\Delta t)(v+\Delta v)$．

由于Δt和Δv均为小量，在忽略高阶小量条件下，得：$(b\Delta t)u=M\Delta v+bv\Delta t$；

解得小车A的瞬时加速度$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{b}{M}(u-v)$．

故答案为：$\frac{b}{M}(u-v)$．

****

三、质心运动

1.知识点睛

在高中课程中学习动量守恒时，我们碰到过一个常见的模型——人船模型，当时我们是利用动量守恒并结合微元法进行研究的，下面我们利用其他方法再来研究一下这个问题。

在前面的课程中我们学习过质心的概念，质心位置坐标为：$x_c=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\cdots x_nm_n}{m_1+m_2+\cdots m_n}=\frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i}$。若各质点的位移分别为$\Delta x_1$、$\Delta x_2$、$\cdots$，则易知质心位移为：$\Delta x_c=\frac{\Delta x_1m_1+\Delta x_2m_2+\cdots\Delta x_nm_n}{m_1+m_2+\cdots m_n}=\frac{\sum m_i\Delta x_i}{\sum m_i}$。当质点系的动量守恒时，系统所受合外力为零，结合

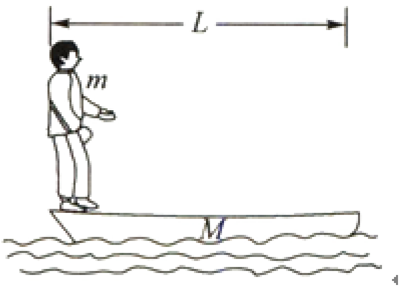
质心运动定律$a_c=\frac{F_{合外}}{\sum m_i}$，可得：$a_c=0$，即$v_c=常数$，质心静止或作匀速直线运动。因此质心位移$\Delta x_c=v_c t$，与上述质心位移公式联立，并结合约束条件即可求得各质点的位移。具体方法请大家结合例题求解。这种方法的优势在于可以方便地处理初始总动量不为零的问题。

定义

实际上，合外力为零时质心速度不变还可以这样理解：合外力为零时，系统总动量守恒，即$m_1v_1+m_2v_2+\cdots=\sum m_iv_i=常数$，又由于$v_c=\frac{\sum m_iv_i}{\sum m_i}$，因此$v_c\sum m_i=常数$。$v_c\sum m_i$也称为质心动量。

2. 例题精讲

26 如图所示，质量为M，长为L的船停在静止的水面上，一质量为m的人(可视为质点)静止站在船头的左端，当人由船头走到船尾，若不计水的阻力，人和船相对于地的位移的大小分别为多少(忽略水对船的阻力，请从质心位移的角度出发求解)？



答案 $x=\frac{M}{m+M}L$，$y=\frac{m}{m+M}L$．

解析 “人船模型”是由人和船两个物体构成的系统；该系统在人和船相互作用下各自运动，运动过程中该系统所受到的合外力为零；即人和船组成的系统在运动过程中总动量守恒．

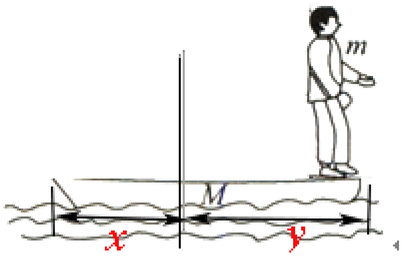
设人在运动过程中，人和船相对于水面的速度分别为v和u，则由动量守恒定律得$mv+Mu=0$

由于人在走动过程中任意时刻人和船的速度v和u均满足上述关系，所以运动过程中，人和船平均速度大小$\bar{v}$、$\bar{u}$也应满足相似的关系，即$m\bar{v}+M\bar{u}=0$

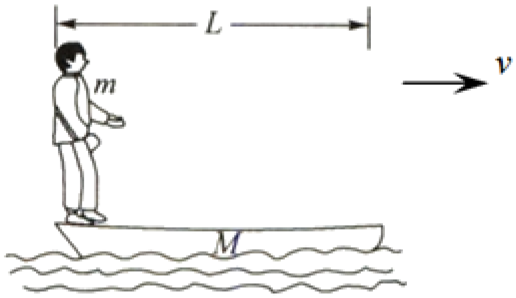
而$\bar{v}=\frac{x}{t}$，$\bar{u}=\frac{y}{t}$，所以上式可以转化为：$mx+My=0$

又有，$x+|y|=L$，得：$x=\frac{M}{m+M}L$，$y=-\frac{m}{m+M}L$，

所以人和船的位移大小分别为：$\frac{M}{m+M}L$，$\frac{m}{m+M}L$



27 如图所示，一个质量为m的人(可视为质点)站在长为L、质量为M的船的左端．船在水中以速度v匀速航行(不考虑水的阻力)．某时刻人从船的左端向右端走动，经时间t恰好走到船的右端．求此过程中船与人相对地的位移大小分别为多少？

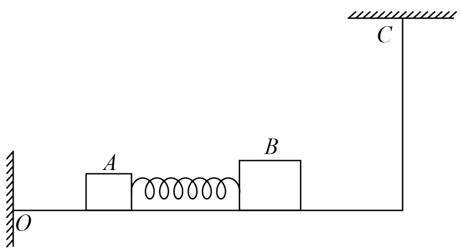


答案 人的位移：$vt+\dfrac{M}{m+M}L$；

船的位移：$vt-\dfrac{m}{m+M}L$

解析 略．

28 如图质量分别为m_1和m_2的物体A，B静止在光滑水平板上，其间有一被压缩的轻弹簧，长板可以绕O轴转动，另一端用细绳悬于C点．现将弹簧释放，在A、B分别滑向板端的过程中，细绳上的拉力(　　)



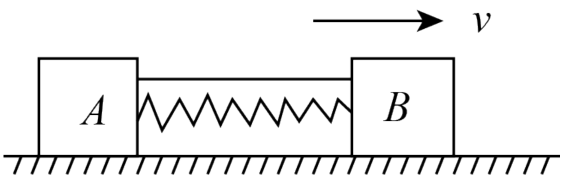
A. 增大　　B. 不变　　C. 减小　　D. 缺条件，无法确定

答案 B

解析 A、B系统水平方向合外力为零，故弹簧伸长的过程中系统质心位置不变，A、B对板的压力相对O点产生的总力矩不变，对板由力矩平衡可知，绳子的拉力大小不变．

故选B．

29 如图所示，完全相同的物块A、B质量均为m，A、B与劲度系数为k的轻弹簧两端拴接．初始时，弹簧处于压缩状态，压缩量为x，A、B由质量不计的轻绳连接，整个系统以速度v在光滑水平地面上做匀速直线运动．某时刻剪断轻绳，从剪断轻绳到B第一次达到最大速度所用时间为t，求此过程中B对地的位移．

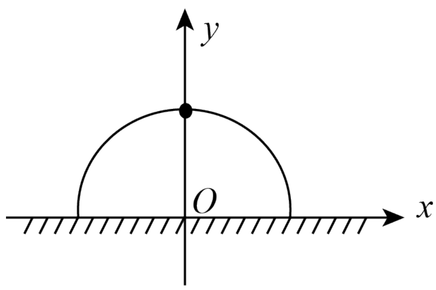


答案 $vt+\frac{x}{2}$

解析 当B达到最大速度时，从质心系（质心系是惯性系）建立能量守恒方程，得到此时弹簧回到原长．故，B相对质心的位移是$\frac{x}{2}$，故此时B对地面的位移为$vt+\frac{x}{2}$．

故答案为：$vt+\frac{x}{2}$．

30 如图所示，质量为M、半径为R的光滑半圆环轨道静止放在光滑水平地面上，质量为m的小球套在圆环轨道上，初始时处于圆环顶端．现在给小球一个微扰（初速度近似为零），小球沿轨道向右滑下．



(1) 求小球滑到圆环底端时，水平方向的对地位移．

(2) 如图所示，在初始位置建立相对地面静止的坐标系，求小球下滑过程中的轨迹方程．

(3) 若初始时刻圆环和小球以共同速度v向右做匀速直线运动，小球经时间t滑到圆环底端，求此过程中，小球水平方向的对地位移．

答案 (1) $\frac{MR}{M+m}$

(2) $\left(1+\frac{m}{M}\right)^2x^2+y^2=R^2$

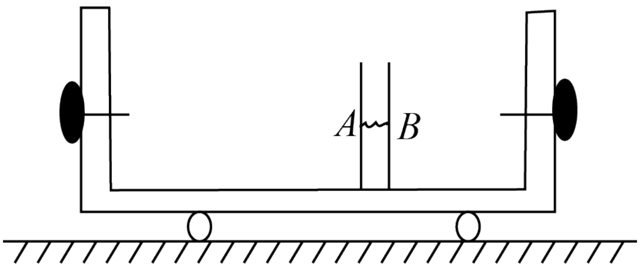
(3) $vt+\frac{MR}{M+m}$

解析 (1) 略．

(2) 略．

(3) 略．

31 如图所示，长为$3\mathrm{m}$，质量为$4\mathrm{kg}$的小车两端的护栏上各装有铁钉，车面光滑且车停在光滑的水平面上．小车内距右端$1\mathrm{m}$处放着两个质量分别为$m_A=3\mathrm{kg}$，$m_B=2\mathrm{kg}$，宽度不计的物块A和B，A、B之间有质量不计、长度不计的压缩弹簧．弹簧释放后B物块获得$4\mathrm{m/s}$的速度向右运动，两物块碰到钉子后均被钉住，试求小车在整个过程中通过的位移．



答案 $\frac{4}{9}\mathrm{m}$

解析 最终A、B被钉在小车左、右两侧．设车右移x，则B右移$(1+x)$，A左移$(2-x)$，以向右为正方向，由于系统所受合力为零，且初速度为零，故质心位移为零，有

$4x+2(1+x)-3(2-x)=0$．解得：$x=\frac{4}{9}\mathrm{m}$．

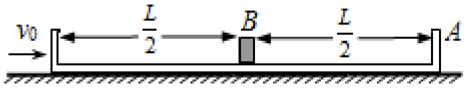
故答案为：$\frac{4}{9}\mathrm{m}$．

****

教师版补充：下面补充一道高考题，本题第（3）问用常规图像法也可以做，但比较复杂，通过换参考系并结合质心运动可以简化问题，老师可以选用。

32 在光滑水平地面上有一凹槽A，中央放一小物块B．物块与左右两边槽壁的距离如图所示，L为$1.0\mathrm{m}$．凹槽与物块的质量均为m，两者之间的动摩擦因数μ为0.05．开始时物块静止，凹槽以$v_0=5\mathrm{m/s}$初速度向右运动，设物块与凹槽壁碰撞过程中没有能量损失，且碰撞时间不计．g取

$10\mathrm{m/s^2}$．求：



(1) 物块与凹槽相对静止时的共同速度．

(2) 从凹槽开始运动到两者相对静止物块与右侧槽壁碰撞的次数．

(3) 从凹槽开始运动到两者相对静止所经历的时间及该时间内凹槽运动的位移大小．

答案 (1) $v = 2.5\mathrm{m/s}$

(2) 发生6次碰撞．

(3) $s_2 = 12.75\mathrm{m}$

解析 (1) 设两者间相对静止时速度为v，由动量守恒定律得

$mv_0 = 2mv$

$v = 2.5\mathrm{m/s}$

(2) 物块与凹槽间的滑动摩擦力

$F_f = \mu N = \mu mg$

设两者相对静止前相对运动的路程为s_1，由动能定理得

$-F_f \cdot s_1 = \frac{1}{2}(m+m)v^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

得$s_1 = 12.5\mathrm{m}$

已知$L = 1\mathrm{m}$，可推知物块与右侧槽壁共发生6次碰撞．

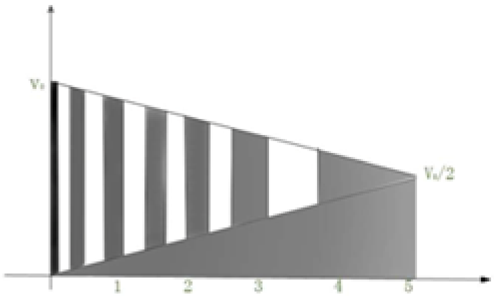
(3) 设凹槽与物块碰撞前的速度分别为v_1、v_2，碰后速度分别为v'_1、v'_2．有

$mv_1 + mv_2 = m'v_1 + mv'_2$

$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv'^2_1 + \frac{1}{2}mv'^2_2$

得 $v'_1 = v_2$，$v'_2 = v_1$

即每碰撞一次凹槽与物块发生一次速度交换，在同一坐标系上两者的速度图线如图所示，



根据碰撞次数可分为13段，凹槽、物块的$v-t$图像在两条连续的匀变速运动图线间转换，故可用匀变速直线运动规律求时间，则$v=v_0+at$ $a=-\mu g$ 解得$t=5\text{s}$

凹槽的$v-t$图像所包围的阴影部分的面积即为凹槽的位移大小s_2（等腰三角形面积共13份，第一份面积为$0.5L$，其余每份面积均为L）

$$s_2=\frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)t+6.5L=12.75\text{m}$$

****

四、能量守恒应用（临界问题）

1.知识点睛

在高中课程中，能量守恒定律有着广泛的应用，大家已经比较熟悉。在这个小模块中，我们解决一些涉及能量的临界问题。

2.例题精讲

33 如图所示，一颗珠子穿在一个固定在竖直平面、半径为R的圆环上，可以沿着圆环自由滑动，现用一个轻质橡皮筋连接圆环最顶端和珠子，初始时刻珠子静止于圆环最低端，此时圆环作用在珠子的力为其重量的两倍，轻轻拨动珠子，珠子开始沿着圆环向上滑动，当它滑过三分之一圆周时速度达到最大，试求完全放松后橡皮筋的长度．

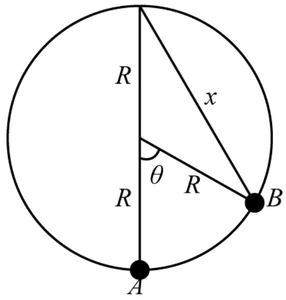


图15

答案 $\dfrac{R}{2}$

解析 方法一：设完全放松后橡皮筋的长度为x_0，当珠子沿着职滑动到B点时，根据机械能守恒定律，有：

$\dfrac{1}{2}k(2R-x_0)^2-\dfrac{1}{2}k(x-x_0)^2=mgR(1-\cos\theta)+\dfrac{1}{2}mv^2$．①

其中$x=2R\cos\dfrac{\theta}{2}$．②

联立式①和式②，得$\dfrac{1}{2}mv^2=\left(-2kR^2+2mgR\right)\cos^2\dfrac{\theta}{2}+2kx_0R\cos\dfrac{\theta}{2}+2R(kR-kx_0-mg)$．

令$y=\left(-2kR^2+2mgR\right)\cos^2\dfrac{\theta}{2}+2kx_0R\cos\dfrac{\theta}{2}$，

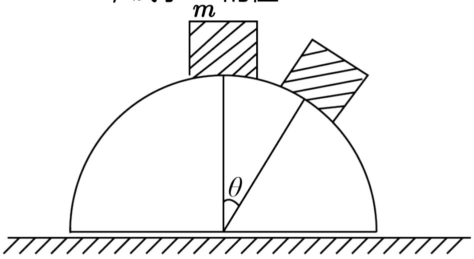
当y取最大值时，有$\cos\dfrac{\theta}{2}=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2kx_0R}{2\left(-2kR^2+2mgR\right)}=\dfrac{1}{2}$．③

初始时刻珠子静止于圆环最低端，有$k(2R-x_0)=3mg$．④

联立式③和式④，得$x_0=\dfrac{R}{2}$．

方法二：若直接利用速度最大时切向合力为0，就容易得到$k(R-x_0)=mg$，与④式联立，可以更简单地得到$x_0=\dfrac{R}{2}$．

34 如图所示，质量为M、表面光滑的半球体静止放在光滑地面上，半球顶端有一个质量为m的小滑块由静止开始下滑，至圆心角为θ处时飞离半球体，已知$\cos\theta=0.70$，试求$\dfrac{M}{m}$的值．



答案 2.43

解析 滑块自静止下滑时，通过滑块与半球间的相互作用，半球将向相反的水平方向移动．滑块滑

到θ位置时，由题意可知，滑块刚好与半球面分离时，半球对滑块的支撑力降为零，即此时刻滑块与半球间无相互作用．设此时滑块相对半球的速度为v，半球水平向左速度为V．

由于滑块与半球系统水平方向无外力作用，所以水平方向动量守恒，即满足方程：

$m(v\cos\theta - V) = MV$．

由系统机械能守恒，得

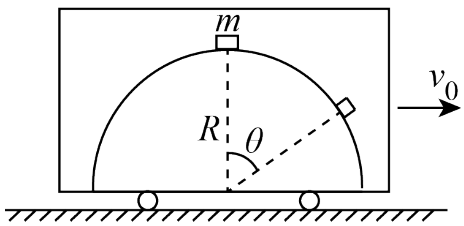
$mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}m[(v\cos\theta - V)^2 + (v\sin\theta)^2] + \frac{1}{2}MV^2$

当小滑块运动到图示位置时，滑块与半球无相互作用，此刻半球无加速度，半球参照系为惯性系，滑块的位置又在圆上，因此可写出此时半球系中的法向动力学方程：$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$，

联立解得：$\frac{M}{m} = \frac{\cos^3\theta - 3\cos\theta + 2}{3\cos\theta - 2} = 2.43$．

故答案为：2.43．

35 质量很大的车厢在水平地面上以v_0匀速行驶，车厢内有一半径为R的固定光滑半圆柱面，顶部有一质量为m的物块，开始时滑块静止，如图所示，后因扰动在图示平面内下滑，直到离开圆柱面．假设车厢始终匀速运动，试问在此过程中圆柱面支持力对物块所做的功W．



答案 见解析．

解析 在车厢参考系（车厢匀速运动，故为惯性系）中，物体因受扰动下滑，设物体将离未离圆柱面时物块的位置为θ、物块相对圆柱体的速率为v'．在车厢参考系中有机械能守恒和物块临界位置的动力学方程有：

$mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv'^2$，

$mg\cos\theta = \frac{mv'^2}{R}$，

联立解得：$\cos\theta = \frac{2}{3}$，$v' = \sqrt{\frac{2}{3}gR}$，

（1）当物块向右下滑，物块刚离开圆柱面时，对地速度大小满足：

$v_{you}^2 = v_0^2 + v'^2 + 2v_0v'\cos\theta = v_0^2 + \frac{2}{3}gR + \frac{4}{3}v_0\sqrt{\frac{2}{3}gR}$，

在地面参考系中，利用动能原理，圆柱面支持力对物块做功：

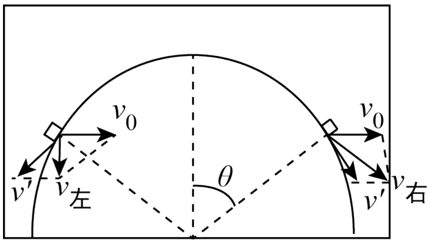
$$W_1=\frac{1}{2}mv_{you}^2-\frac{1}{2}mv_0^2-mgR(1-\cos\theta)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gR}\cdot mv_0\ .$$

（2）当物块向左下滑时，物块刚离圆柱面时，对地速度大小满足：

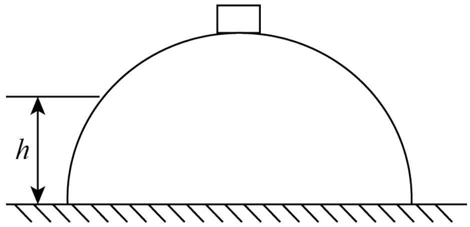
$$v_{zuo}^2=v_0^2+v'^2-2v_0v'\cos\theta=v_0^2+\frac{2}{3}gR-\frac{4}{3}v_0\sqrt{\frac{2}{3}gR}\ ,$$

同理可得，圆柱面支持力对物体做功：

$$W_1=\frac{1}{2}mv_{zuo}^2-\frac{1}{2}mv_0^2-mgR(1-\cos\theta)=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gR}\cdot mv_0\ .$$



36 如图所示，一质量为m的小物体，放在半径为R的光滑半球上，初始时它们相对静止，然后半球面以加速度$a=\frac{g}{4}$向右匀加速运动，小物体从最高点滑下，求物体离开球面时离地面的高度h．



答案　$h_1\approx0.81R$

解析　以半球面为参考系，物体恰好要脱离半球面时，受重力和惯性力$F_{惯}=ma$作用，如图所示．

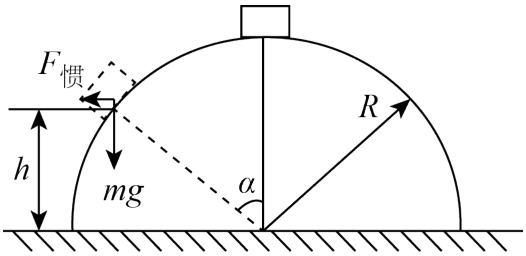
由牛顿第二定律得：$mg\cos\alpha-F_{惯}\sin\alpha=\frac{mv^2}{R}$；

在下滑过程中，由动能定理得：$mg(R-h)+F_{惯}R\sin\alpha=\frac{1}{2}mv^2$

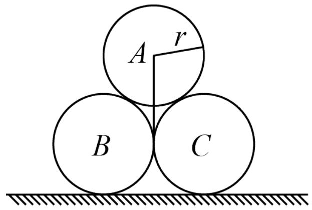
由几何关系得：$\cos\alpha=\frac{h}{R}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{R^2-h^2}}{R}$，

联立解得：$h_1\approx0.81R$，$h_2\approx0.44R$（舍）．

故答案为：$h_1\approx0.81R$．



37 水平桌面上叠放着三个圆柱体A、B、C，它们的半径均为r，质量$m_B = m_C = \frac{m_A}{2}$．先让它们保持如图所示的位置，然后从静止开始释放，若不计所有接触面间的摩擦，求A与B、C分离时的速率．



答案 $\frac{2}{3}\sqrt{\sqrt{3}gr}$．

解析 设A与B、C分离瞬间，A、B中心连线与竖直方向夹角为α，如图所示．

则A下落的距离为$h = \sqrt{3}r - 2r\cos\alpha$．

设此时A下落的速率为v_A，B、C的速率分别为v_B、v_C．

$m_Bv_B - m_Cv_C = 0$，

$m_Agh = \frac{1}{2}m_Av_A^2 + \frac{1}{2}m_Bv_B^2 + \frac{1}{2}m_Cv_C^2$，

解得：$v_A^2 + v_B^2 = 2gr\left(\sqrt{3} - 2\cos\alpha\right)$，

在A与B分离前，A与B的中心间距保持不变，所以v_A、v_B在A、B连心线上的投影应当相等，

即$v_A\cos\alpha = v_B\sin\alpha$，

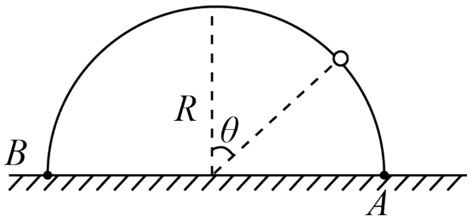
在AB分离的顺时，B对A的弹力为零，A相对于B做圆周运动，则由牛顿第二定律得：

$m_Ag\cos\alpha = m_A\frac{\left(v_A\sin\alpha + v_B\cos\alpha\right)^2}{2r}$，

联立解得：$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$，$v_A = \frac{2}{3}\sqrt{\sqrt{3}gr}$．

故答案为：$\frac{2}{3}\sqrt{\sqrt{3}gr}$．

38 一质量为M、半径为R的半圆环，竖直放置于水平面上（假设圆环不倒下，也不能沿水平面滑动——水平地面足够粗糙）．一质量为m的小珠套在大圆环上，并静置于环的顶端．今小珠受轻微扰动向右无摩擦滑下．求小珠滑到什么位置（用图中θ表示）可使半圆环右端A点与水平面间的作用力为零．



答案 $\theta_1=\arccos\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{1-\frac{3M}{m}}\right)(m\geqslant 3M)$

解析 小珠自环顶由静止开始下滑．初始阶段，小珠速度小，重力在法向分力的一部分作为向心力，另一部分由环对珠的支持力抵消．当珠的高度不断下降，速度渐渐变大，在某位置θ_0处，重力在法向分力全部作为向心力，环与珠之间无相互作用．

小珠进一步下滑，速度进一步增大，重力的法向分力已不足以维持小珠的圆周运动，为维持小珠在环上运动，还需由环对小珠施加另一部分向心力．它的反作用力就是小珠对半圆环沿环法向向外的力．此力有可能使半圆环右端A点抬起来．设半圆环右端A点与水平面间无相互作用，但A点还未离开水平地面时，小珠与环间的相互作用力大小为N，小珠位置在θ_1，小珠速率为v_1．此时，小珠运动满足的向动力学方程为：$mg\cos\theta_1+N=m\frac{{v_1}^2}{R}$，

并满足机械能守恒：$mgR(1-\cos\theta_1)=\frac{1}{2}m{v_1}^2$，

与此同时，对于半圆环可以写出相对于半圆环左端点B的力矩平衡方程：$MgR=NR\cos\theta_1$，

化简得：$3m\cos^2\theta_1-2m\cos\theta_1+M=0$，

解得：$\cos\theta_1=\frac{1}{3}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{3M}{m}}\right)$，

由于小珠在到达$\theta_1=\arccos\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{1-\frac{3M}{m}}\right)$时，半圆环右端点已经离开水平面，因此另一个解舍去．故：

$\theta_1=\arccos\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{1-\frac{3M}{m}}\right)$，

上述解存在条件：$1-\frac{3M}{m}\geqslant 0$，即$m\geqslant 3M$．

故答案为：$\theta_1=\arccos\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{1-\frac{3M}{m}}\right)(m\geqslant 3M)$．

五、斜碰

1.知识点睛

在高中课程中，我们讨论的碰撞都是正碰，也称对心碰撞，即碰前碰后两球的速度均处在两球中心的连线上。一般情况下，由于碰前两球的速度不在两球中心的连线上，所以碰后两球将沿不同角度分离（即斜碰）。在这个模块中，我们来研究斜碰的问题。处理斜碰问题时，我们应用的物理原理与处理正碰基本相同。

①在自由碰撞过程中，系统动量近似守恒。注意动量守恒是矢量式，可以通过正交分解，写出不同方向的动量守恒方程。

②如果系统发生的是弹性碰撞，则碰撞前后系统的机械能不变。

③由于碰撞过程中，两光滑小球的相互作用力沿连心线方向，故两球垂直连心线方向的速度分量均保持不变。

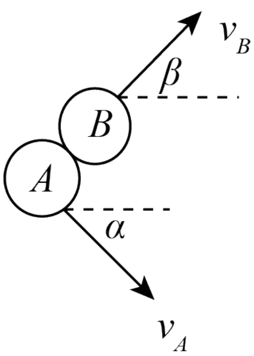
2. 例题精讲

39 如图所示，两个完全相同的弹性光滑小球A、B放置在光滑水平面上，两球质量均为m．初始时B球静止，A球初速度为v，此后两球发生弹性斜碰，求碰后两球速度方向的夹角．

答案 $\frac{\pi}{2}$

解析 方法一：

设A、B碰后速度分别为v_A、v_B，与水平方向夹角分别为α、β，如图所示：



由弹簧碰撞过程中动量守恒、机械能守恒可得：

$mv=mv_A\cos\alpha+mv_B\cos\beta$，

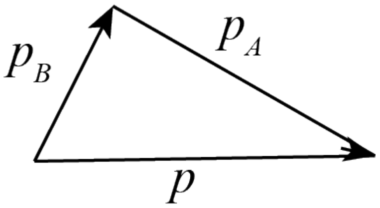
$mv_B\sin\beta-mv_A\sin\alpha=0$，

$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2$，

联立化简可得：$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=0$，即$\cos(\alpha+\beta)=0$．解得$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$．

方法二：

设碰前A球动量为$\vec{p}$，碰后A、B动量分别为$\vec{p_A}$、$\vec{p_B}$，由动量守恒可得：$\vec{p}=\vec{p_A}+\vec{p_B}$，即$\vec{p}$、$\vec{p_A}$、$\vec{p_B}$构成闭合三角形，如图所示．



弹性碰撞过程中，机械能守恒，故$\frac{p^2}{2m}=\frac{p_A^2}{2m}+\frac{p_B^2}{2m}$，即$p^2=p_A^2+p_B^2$．

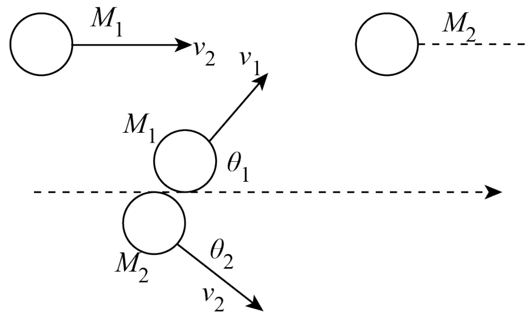
因此，$p_A\perp p_B$，A、B碰后速度方向夹角为$\frac{\pi}{2}$．

故答案为：$\frac{\pi}{2}$．

****

教师版补充：下面补充一道类似的问题，老师可以作为练习

40 如图所示，质量为M_1速度为v_0的小球，与一质量为M_2的静止小球作弹性碰撞，碰后，M_1、M_2的运动方向与v_0的方向所成的角分别为θ_1和θ_2，求证：$\tan\theta_1=\frac{\sin 2\theta_2}{\frac{M_1}{M_2}-\cos 2\theta_2}$．



答案 证明见解析

解析 列动量&能量守恒方程

$$\begin{cases}M_1v_0=M_1v_1\cos\theta_1+M_2v_2\cos\theta_2 ① \\ M_1v_1\sin\theta_1=M_2v_2\sin\theta_2 ②\end{cases}$$

$\frac{1}{2}M_1v_0^2=\frac{1}{2}M_1v_1^2+\frac{1}{2}M_2v_2^2$，③

联立①，②式可以得到，

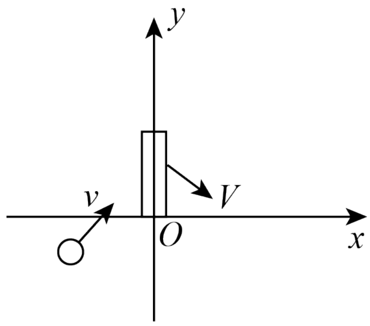
$$\begin{cases} v_0 = \frac{M_2}{M_1}(\sin\theta_2\cot\theta_1 + \cos\theta_2)v_2 \\ v_1 = \frac{M_2}{M_1}\cdot\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}v_2 \end{cases}$$

代入③式即可得到：

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin 2\theta_2}{\frac{M_1}{M_2} - \cos 2\theta_2}.$$

****

41 如图所示，小球与平板均光滑，小球与平板发生完全弹性碰撞．木板质量为M，小球质量为m，沿板的法向和切向建立坐标系．设碰撞前，板的速度为V，球的速度为v．碰撞后，速度分别变为V'和v'．证明：两物体发生碰撞时，接近速度与分离速度大小相等，方向遵守“光反射定律”，即入射角等于反射角．



答案 证明见解析．

解析 两者发生完全弹性碰撞，故系统同时满足动量守恒和能量守恒：

$MV_x + mv_x = MV_x' + mv_x'$，

$\frac{1}{2}M(V_x{}^2 + V_y{}^2) + \frac{1}{2}m(v_x{}^2 + v_y{}^2) = \frac{1}{2}M(V_x'^2 + V_y'^2) + \frac{1}{2}m(v_x'^2 + v_y'^2)$，

在y方向，无相互作用力，故在这个方向上，两者速度不变．

即$V_y = V_y'$，$v_y = v_y'$．

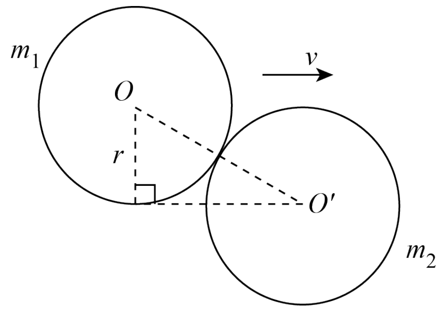
联立可得：$v_x - V_x = -(v_x' - V_x')$，

这表明在x方向上，小球对木板的接近速度与分离速度大小相等，方向相反．在y方向上，显然两者的相对速度不变．因此，在碰撞过程中，球与板的接近速度与分离速度大小相等．

以木板为参考系，小球的入射角满足$\tan\alpha = \frac{|v_y - V_y|}{|v_x - V_x|}$，反射角（即分离速度与法线夹角）满足

$\tan\beta = \frac{|v_y' - V_y'|}{|v_x' - V_x'|}$，显然$\tan\alpha = \tan\beta$，即$\alpha = \beta$．

42 半径均为r，质量分别为m_1，m_2的两均质光滑小球1，2置于光滑水平面上，球2静止，球1以速度v向球2运动，碰撞前瞬间，球1，2的位置如图所示，其中O，O'为球1，2的球心，两球发生完全弹性碰撞，求碰撞后球1，2的运动速度u_1和u_2．



答案 $u_1=\dfrac{\sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1m_2}}{m_1+m_2}v$，$u_2=\dfrac{\sqrt{3}m_1}{m_1+m_2}v$

解析 由题图结合几何知识可知，碰撞前瞬间，球1速度方向与两球心连线之间的夹角为30°，建立直角坐标系，取两球心连线为x轴，将v沿x和y轴方向分解为v_x和v_y，则

$v_x=v\cos 30^\circ v_y=v\sin 30^\circ$，

设m_1和m_2撞后速度u_1和u_2沿x和y轴方向的分量分别为$u_{1x}u_{1y}$和$u_{2x}u_{2y}$，

在碰撞过程中，两球相互作用力沿球心连线方向，因此碰撞前后两球y方向速度不变，即

$u_{1y}=v_y=v\sin 30^\circ$；$u_{2y}=0$，

碰撞过程中，两球在x轴方向动量守恒，有

$m_1v_x=m_1u_{1x}+m_2u_{2x}$，

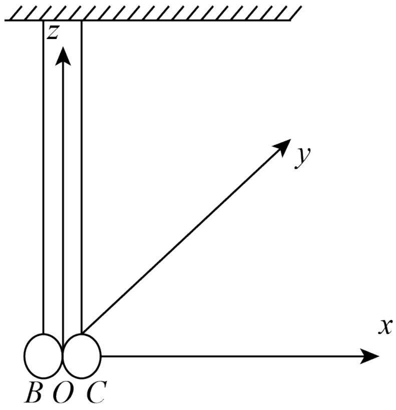
又由两球在碰撞过程中机械能守恒，即

$\frac{1}{2}m_1v^2=\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2=\frac{1}{2}m_1(u_{1x}^2+u_{1y}^2)+\frac{1}{2}m_2u_{2x}^2$，

联立解得：$u_1=\dfrac{\sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1m_2}}{m_1+m_2}vu_2=\dfrac{\sqrt{3}m_1}{m_1+m_2}v$．

故答案为：$u_1=\dfrac{\sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1m_2}}{m_1+m_2}vu_2=\dfrac{\sqrt{3}m_1}{m_1+m_2}v$．

43 ABC为三个完全相同的光滑小球，B，C各被一长为$L=2.0\mathrm{m}$的不可伸长的轻线悬挂于天花板上，两球刚好接触，以接触点O为原点作一直角坐标系$Oxyz$，z轴竖直向上，Ox轴与两球连心线重合，如图所示，现让A球射向BC两球，使它们同时发生碰撞，碰前A速度方向沿y轴正方向，$v_{A0}=4.0\mathrm{m/s}$．碰后A沿y轴负方向反弹，$v_A=0.4\mathrm{m/s}$．求B，C碰撞后偏离O点的最大位移．



答案 1.13m

解析 略．

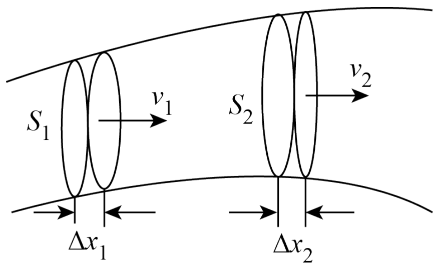
六、流体的能量

1.知识点睛

在前面的课程中，我们从动量的角度研究了流体问题，下面我们从能量的角度研究流体问题。解决问题的关键仍然是正确选取研究对象，只是解决问题的过程中应用的是能量方程。

2.例题精讲

44 如图所示，有一小段不可压缩的液柱，由于体积在运动中保持不变，因此当S_1面以速度v_1向前运动了Δx_1时，S_2面以速度v_2向前运动了Δx_2．若该液柱前后两个界面处的压强分别为p_2和p_1，利用功能关系证明流体内流速大的地方压强小．（忽略重力作用及高度的变化）



答案 证明见解析．

解析 研究如图所示的S_1面到S_2面之间一小段液柱，在很短的Δt时间内，液柱向前运动了一段距离（即S_1面向前运动了Δx_1，S_2面向前运动了Δx_2）．

在此过程中，合外力对液柱作功：$W=p_1S_1\cdot\Delta x_1-p_2S_2\cdot\Delta x_2$，

液柱可以看做中间大部分不变，只有Δx_1的一小段运动到了Δx_2位置，因此，液柱的总能量变化为$\Delta E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}(\rho S_2\Delta x_2)v_2^2-\frac{1}{2}(\rho S_1\Delta x_1)v_1^2$，

对该段液柱，由动能定理$W=\Delta E_{\mathrm{k}}$得：

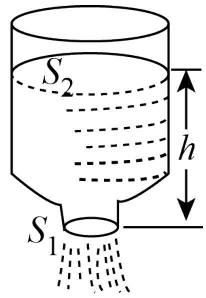
$p_1S_1\cdot\Delta x_1-p_2S_2\Delta x_2=\frac{1}{2}(\rho S_2\Delta x_2)v_2^2-\frac{1}{2}(\rho S_1\Delta x)v_1^2$①

由于液体不可压缩，因此有$S_1\Delta x_1=S_2\Delta x_2$②

联立①②化简得：$p_1-p_2=\frac{1}{2}\rho v_2^2-\frac{1}{2}\rho v_1^2$，即$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$．

因此流速越大的地方压强越小．

45 如图所示，一个盛水容器两端开口，小口的横截面积为S_1，大口的横截面积为S_2，内盛的水在不断地流出，此时的高度差为h，求此时流出小口的水流速度．



答案 $\sqrt{\frac{2ghS_2^2}{S_2^2-S_1^2}}$

解析 将瓶中的液体分成无穷多层的水平小液片，每片质量均为Δm．液体稳定流动后，中间某个固定位置液片的状态保持不变，这就相当于经很短时间Δt后最上面的液片移动到了最下面．

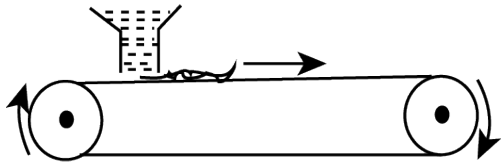
设最上方液体速度大小为v_2，液体流出时的速度为v_1，则由机械能守恒得：

$\Delta mgh=\frac{1}{2}\Delta mv_1^2-\frac{1}{2}\Delta mv_2^2$，由于液体不能被压缩，因此$S_1v_1\Delta t=S_2v_2\Delta t$，

联立解得：$v_1=\sqrt{\frac{2ghS_2^2}{S_2^2-S_1^2}}$．

故答案为：$v_1=\sqrt{\frac{2ghS_2^2}{S_2^2-S_1^2}}$．

46 如图所示，传送带以$1m/s$的速度水平匀速运动．沙斗以$20kg/s$的流量向皮带上装沙子．为保持传递速率不变，驱动皮带的电动机因此应增加的功率为（　　）

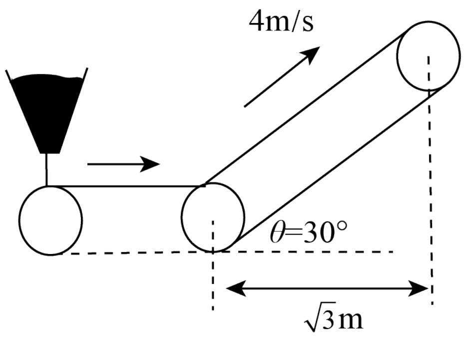


A. $10W$　　B. $20W$　　C. $30W$　　D. $40W$

答案　B

解析　当传送带稳定运行后，每秒钟内有$20kg$的沙子落到皮带上开始加速，同时原来在加速过程中的沙子将有$20kg$达到与传送带共速，原来已经与传送带共速的沙子运动状态不变．因此，从整体效果上看，每秒钟内$20kg$的沙子落到传送带上，速度从零加速到与传送带共速．在此过程中传送带的电动机提供两部分的能量，一是这些沙子增加的动能E_k，二是摩擦生热Q．在常规的高考练习中我们已经练习过这个模型，在此情景中$Q=E_k$，具体推导过程不再赘述．因此，电动机提供的总能量$E=E_k+Q=2E_k=2\times\frac{1}{2}mv^2=20J$，因此功率$P=\frac{E}{t}=20W$．故选B．

47 洗煤厂的洗煤装置中有一段传送带，角度及长度参数如图所示，中间转折部分由长度不计的圆弧连接（煤炭在此处无能量损失），整个传送装置以$4m/s$的速度匀速运动，在传送带的左端有一个漏斗以$100kg/s$的流量均匀地向传送带的上表面漏煤炭，设煤炭落到传送带上水平初速度为零，并且在水平部分就已经与送带共速：传送带摩擦因数足够大，煤炭能够在倾斜部分无滑动的被运送到最高点，若保持传送带的速率不变，而且不考虑其它方面的损耗，则驱动传送带的电动机仅仅由此而消耗的电功率为多少？



答案　$2600W$

解析 本题是上题的简单变式，解法类似．当传送带稳定运行后，从整体效果上看，每秒钟有100kg的煤落到传送带上加速后与传送带共速，并被运送到最高点．传送带的电动机需要提供三部分的能量，一是煤炭获得的动能E_k、而是煤炭获得的重力势能E_p、三是煤炭在传送带上滑动时产生的热量Q．

因此，每秒内电动机提供的能量$E=E_k+E_p+Q=\frac{1}{2}mv^2+mgh+\frac{1}{2}mv^2=2600\text{J}$．电动机的功率$P=\frac{E}{t}=2600\text{W}$．

48 汽车高速行驶时，空气阻力不能忽略，将汽车简化为横截面积约1m^2的长方体，并以此模型估算汽车以60km/h行驶时为克服空气阻力所增加的功率．已知空气密度$\rho=1.3\text{kg/m}^3$．

答案 $6\times10^3\text{W}$

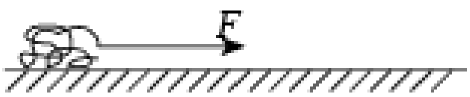
解析 设汽车的截面积为S，当汽车以一定速度运动时，将推动前方的空气使之获得相应的速度．在Δt时间内，车前方以S为底，$v\Delta t$为高的空气柱获得的动能为

$E_k=\frac{1}{2}\Delta mv^2=\frac{1}{2}\rho Sv\Delta tv^2$

可认为空气柱相对汽车滑动，在汽车的带动下达到与汽车相同的速度，转化的内能

$Q=E_k=\frac{1}{2}\rho Sv\Delta tv^2$，发动机克服阻力提供的能量有两部分，一部分提供空气的动能，一部分用来提供损失的动能，因此发动机的功率$P=\frac{E_k+Q}{\Delta t}=\rho Sv^3$，带入数据得：$P=6\times10^3\text{W}$．

49 如图所示，长度为l的柔软绳索堆放在光滑的水平面上，其线密度为λ，现用水平力拉绳的一端，使之做速度为v的匀速直线运动，已知$t=0$时拉出的绳子长度$l_0=0$，求：



(1) 所需的拉力F

(2) 从初始时刻到将整条绳子拉动的过程中，拉力做的功W

答案 (1) λv^2

(2) λlv^2

解析 (1) 略

(2) 暂无

七、质心动能

1.知识点睛

我们在前面的模块中研究质点组的运动时，应用运动合成分解的思想将质点组的运动分解为相对质心的运动和质心对地的运动。在涉及能量问题时，不同参考系中的动能不同，那么各质点相对质心的动能和相对地面的动能有什么关系呢？

定理

（1）柯尼希定理

设质点组中第i个质点相对地面的速度为$\vec{v_i}$，质心速度为$\vec{V_c}$，第i个质点相对质心的速度记为$\vec{u_i}$。我们不加证明的给出下列结论：

质点组的总动能E_k（$E_k=\frac{1}{2}\sum m_i v_i^2$）等于各质点相对质心的动能$E_k'$（$E_k'=\frac{1}{2}\sum m_i u_i^2$）加上质心整体平动的动能$E_{kc}$（$E_{kc}=\frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)V_c^2$）。即$E_k=E_k'+E_{kc}$。

****

教师版补充：柯尼希定理的推导过程老师选讲。

设质点组中第i个质点相对地面的速度为$\vec{v_i}$，质心速度$\vec{V_c}=\frac{\sum m_i\vec{v_i}}{\sum m_i}$，第$i$个质点相对质心的速度记为$\vec{u_i}$，则$\vec{v_i}=\vec{V_c}+\vec{u_i}$。质点组在地面参考系中的总动能：

\[\begin{array}{l}

{E_{\rm{k}}} = \frac{1}{2}\sum {{m_i}v_i^2} \\

\quad \; = \frac{1}{2}\sum {{m_i}{{\left({\overrightarrow {{u_i}} + \overrightarrow {{V_c}} } \right)}^2}} \\

\quad \; = \frac{1}{2}\sum {\left({{m_i}u_i^2 + {m_i}V_c^2 + 2{m_i}\overrightarrow {{u_i}} \cdot

\overrightarrow {{V_c}} } \right)} \\

\quad \; = {E_{\rm{k}}}' + \frac{1}{2}\left({\sum {{m_i}} } \right)V_c^2 + 0\\

\quad \; = {E_{\rm{k}}}' + {E_{{\rm{k}}c}}

\end{array}\]

****

公式

（2）两体系统

由两质点组成的系统，相对质心的动能：

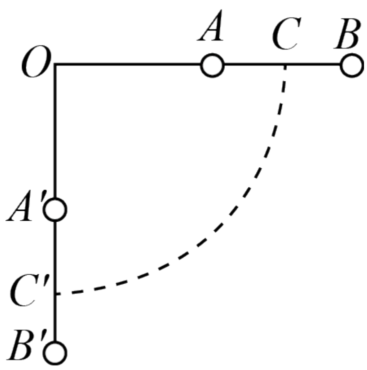
$$\begin{array}{l}
{E_{\rm{k}}}' = \frac{1}{2}{m_1}{\left({{v_1} - \frac{{{m_1}{v_1} + {m_2}{v_2}}}{{{m_1} + {m_2}}}} \right)^2} + \frac{1}{2}{m_2}{\left({{v_2} - \frac{{{m_1}{v_1} + {m_2}{v_2}}}{{{m_1} + {m_2}}}} \right)^2}\\
\;\quad \; = \frac{1}{2}\frac{{{m_1}{m_2}}}{{{m_1} + {m_2}}}{\left({{v_1} - {v_2}} \right)^2} = \frac{1}{2}\mu v_{相}^2
\end{array}$$

其中$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$称为约化质量（或折合质量）；$v_{相} = v_1 - v_2$为两者相对速度。在两物体发生完全非弹性正碰时，由于质心动能不变，所以碰撞中损失的是相对质心动能，即$\dfrac{1}{2}\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2$。这与利用动量、能量双守恒方程求得的结果相同。

在牛顿运动定律模块中，我们推导了质心运动定律：$\overrightarrow{F_{合外}} = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n)\overrightarrow{a_C}$。类比高中课程中推导动能定理的过程，我们不加证明的给出下列结论：系统所受外力为恒力时，$\sum \overrightarrow{F_{外}} \cdot \overrightarrow{x_C} = \Delta E_{kC}$，其中$x_C$为质心的位移，$\Delta E_{kC}$为质心动能的变化量；若系统受力不为恒力，可以利用微元或积分处理，即$\sum \int \overrightarrow{F_{外}} \cdot d\overrightarrow{x_C} = \Delta E_{kC}$。

2. 例题精讲

50 如图所示，质量均为m的两个小球，分别固定在一根长为l的轻杆的中点和一端．轻杆O端固定，整个装置从水平位置静止释放，下落到数值位置时质心速度为v_c，试分析下面计算v_c的方法是否正确．



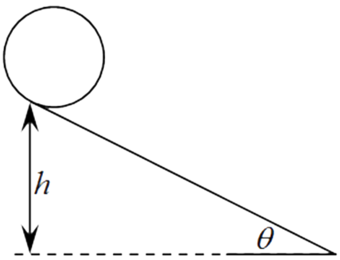
由题意可知：$oc = oc' = \dfrac{3}{4}l$，在转动过程中，两球和杆的系统机械能守恒：

$2mg \times \dfrac{3}{4}l = \dfrac{1}{2}(2m)v_c^2$，解得：$v_c = \sqrt{\dfrac{3}{2}gl}$．

答案 解法不正确，系统的动能除了质心动能，还包含相对质心转动的动能．

解析 略．

51 如图所示，质量均匀分布的圆环由静止释放，沿高为h，倾角为θ的固定斜面顶端下滑，圆环质量为m，半径为R，下滑过程中始终保持纯滚动．假设h很大，圆环滑到斜面底端时重心下降高度近似为h．求圆环滑到斜面底端时的质心速度．

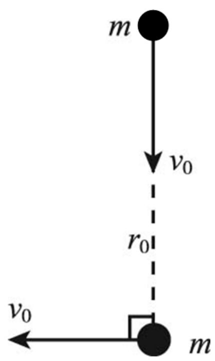


答案 圆环滑到斜面底端时的质心速度为$\sqrt{gh}$

解析 圆环下降的重力势能转化为了质心速度的动能和圆环相对质心纯滚时的转动动能两部分．所以，利用柯尼希定理可以得到答案．

故答案为：圆环滑到斜面底端时的质心速度为$\sqrt{gh}$．

52 两个质点之间只有万有引力作用，其质量、间距和速度如图所示．若两个质点能相距无穷远，速率v_0需要满足什么条件？（两质量分别为m_1，m_2的质点相距r时，其间万有引力势能为$E_p=-G\frac{m_1m_2}{r}$）



答案 $v_0 \geqslant \sqrt{\frac{2Gm}{r_0}}$

解析 解法一：

以两质点为系统动量守恒，系统总动量的大小为$\sqrt{2}mv_0$．它们之间的相互作用过程可以视为一种"碰撞"．依题意，碰撞后引力势能增大，这部分能量来自碰撞损失的动能．而碰撞过程中动能损失最大的情况——完全非弹性碰撞——就是能符合题意的初始速度v_0最小的临界情况．

两质点能相距无穷远的临界条件为：发生"完全非弹性碰撞"，"碰后"两质点有相同的速度为v，而两者相距无穷远．

由系统的动量守恒推出：$\sqrt{2}mv_0=2mv$；

由系统的能量守恒推出：$2\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right)-G\frac{m^2}{r_0}=2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$；

解得：$v_0=\sqrt{\frac{2Gm}{r_0}}$；因此，当$v_0\geqslant\sqrt{\frac{2Gm}{r_0}}$时，两物体的相对距离可以达到无穷远．

解法二：

两物体系统的运动可以分解为质心的平动和两物体相对质心的运动．由于只存在两者之间的万有引力，因此，质心运动速度不变．

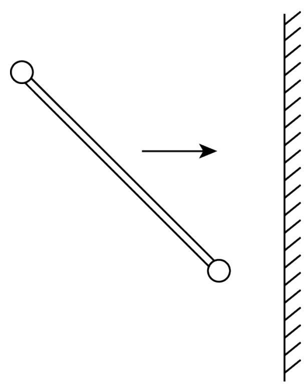
由两物体运动过程中总能量守恒，可得：

$$E_{kc}+\frac{1}{2}\frac{mm}{m+m}\left(\sqrt{2}v_0\right)^2-G\frac{mm}{r_0}=E_{kc}+0+0，$$

其中，E_{kc}为质心平动的动能．当两物体刚好运动到无穷远时，两物体相对质心运动的动能为零，引力势能为零．

由上式解得：$v_0=\sqrt{\frac{2Gm}{r_0}}$．因此，当$v_0\geqslant\sqrt{\frac{2Gm}{r_0}}$时，两物体的相对距离可以达到无穷远．

53 两个质量都为m的小球以速度v平动撞向墙面，杆与墙面的初始夹角为45°，设碰撞为完全弹性碰撞，不考虑以及重力，求撞墙后瞬间两球速度大小．



答案 见解析．

解析 解法一：

设碰后质心速度为v_C，方向向左为正；系统绕质心转动角速度为ω；设杆长为l，则小球相对质心转动半径$r=\dfrac{l}{2}$．

弹性碰撞过程中，系统机械能守恒：$2\times\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}(2m)\,v_C^2+2\times\dfrac{1}{2}m(\omega r)^2$①

以墙上发生碰撞的点为轴，系统角动量守恒：$mv=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l=m\left(\omega r-\dfrac{\sqrt{2}}{2}v_C\right)\cdot l$②

联立解得：$v_C=\dfrac{v}{3}$，$\omega r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}v$．

则上面小球速度$v_1=\sqrt{\left(\omega r-\dfrac{\sqrt{2}}{2}v_C\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}v_C\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}v$

与墙发生碰撞的小球速度$v_2=\sqrt{\left(\omega r+\dfrac{\sqrt{2}}{2}v_C\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}v_C\right)^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}v$．

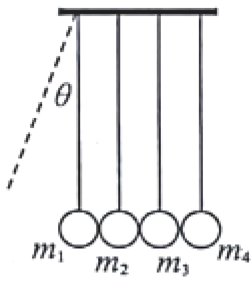
方法二：

轻杆只有两端受力，则对二球冲量必沿杆，那么未碰墙的球垂直杆速度分量不变：

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}v=\omega r-\dfrac{\sqrt{2}}{2}v_C$③

③式可以替代②式，其余解法与方法一相同．

54 如图，用长同为l的细绳悬挂四个小球，质量依次满足$m_1\gg m_2\gg m_3\gg m_4$．将第一个小球如图拉起一定角度后释放，试问最后一个小球开始运动时速度为多少．



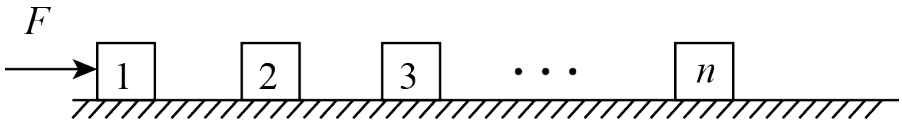
答案 $8\sqrt{2gl\,(1-\cos\theta)}$

解析 第一球碰撞前速度为$v_1=\sqrt{2gl\,(1-\cos\theta)}$，带动第二球的速度$v_2=2v_1$；

第二球碰第三球，带动第三球的速度$v_3=2v_2$；

进而第四球的速度$v_4=2v_3=8v_1=8\sqrt{2gl\,(1-\cos\theta)}$

55 如图所示，n个完全相同的质量均为m的物块（可看做质点）静止在光滑水平地面上，任意两个物块间距均为l．现用水平恒力F作用于1号物块上，物块之间的碰撞均为完全非弹性碰撞，求前$n-1$个物块与第n个物块碰后瞬间，n个物块的速度v．



答案 前$n-1$个物块与第n个物块碰后瞬间，n个物块的速度为$\sqrt{\dfrac{(n-1)Fl}{nm}}$

解析 前面物块与第n个物块碰后瞬间，所有物块共速，故此时质心速度也为v，整个过程中，质心位移为$\dfrac{n-1}{2}l$．

因此，$F\cdot\dfrac{n-1}{2}l=\dfrac{1}{2}(nm)v^2$，

解得：$v=\sqrt{\dfrac{(n-1)Fl}{nm}}$．

故答案为：前$n-1$个物块与第n个物块碰后瞬间，n个物块的速度为$\sqrt{\dfrac{(n-1)Fl}{nm}}$．