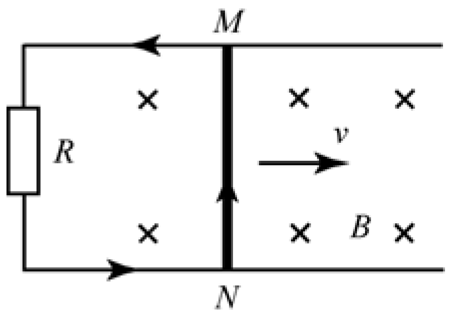
第十部分-自招综合训练-电磁感应

在高中物理课程中，我们学习了法拉第电磁感应定律、楞次定律等基本规律。在这个模块中，我们深化一下两种感应电动势的微观本质，并重点处理一些复杂的电磁感应综合问题。

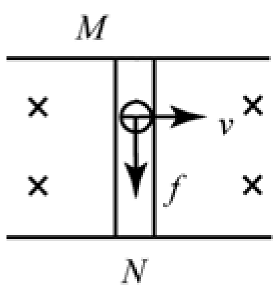
一、动生电动势的本质

1.知识点睛

导体在磁场中做切割磁感线运动，致使导体上产生感应电动势，这种电动势叫做动生电动势。如图所示，导体MN沿固定的导轨向右做切割磁感线运动时，回路中就产生了如图所示的感应电流。



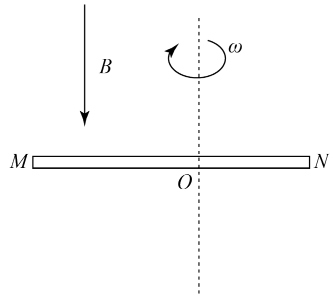
我们把导体MN放大，如图所示，MN中存在大量的自由电子。当导体向右运动时，自由电子受到磁场施与的洛仑兹力向N端积聚，产生由M指向N的静电场。达到平衡时，作用在自由电子上的静电力与洛伦兹力相等，导体两端便产生了一个稳定的电势差。这种靠非静电力引起的电势差，实际上就是电源内部形成电动势的机理。因此在整个回路中，MN实际上是电源，产生动生电动势的非静电力实质是洛伦兹力的分力。



教师版补充：如果老师还要再复习一下动生电动势使用时的注意事项，例如磁场与导棒不垂直、有效长度、旋转切割等问题，可以自己补充，这里不作为重点。下面补充两个题，老师可以选用。

1 **2018年河北石家庄高二学而思**

在水平面内，金属棒MN以角速度ω绕过O点的竖直轴顺时针旋转，空间存在竖直向下的匀强磁场，如图所示，已知$|MO|>|NO|$，则下列说法中正确的是（　　）



A. M点电势高于N点

B. M点电势低于N点

C. 若增大ω，则M、N两点电势差增大

D. 若增大B，则M、N两点电势差增大

答案　ACD

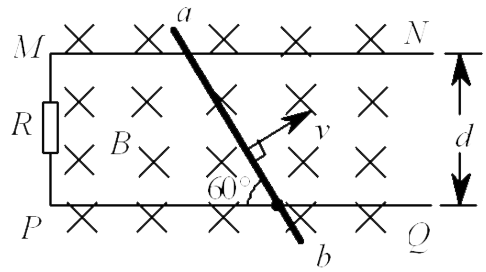
解析　M、N两点电势差为

$U_{MN}=\varphi_M-\varphi_N=\varphi_M-\varphi_O+\varphi_O-\varphi_N=U_{MO}-U_{NO}=\frac{1}{2}B\left(|MO|^2-|NO|^2\right)\omega>0$．当$\omega$或$B$增大时，$U_{MN}$增大．ACD正确．

故选ACD．

标注　电磁学 > 电磁感应 > 电磁感应定律

2 如图所示，MN、PQ为平行金属轨道，间距为d．P、Q之间接一只阻值为R的电阻．匀强磁场的磁感应强度为B，方向垂直纸面向里．一根金属杆ab放在轨道上，它与轨道成60°夹角．若ab杆以垂直于杆的速度v在轨道滑行，除R之外的其他电阻均不计，则通过R的电流大小是（　　）



A. $\dfrac{Bdv}{R\sin60^\circ}$

B. $\frac{Bdv}{R}$

C. $\frac{Bdv\sin 60^\circ}{R}$

D. $\frac{Bdv\cos 60^\circ}{R}$

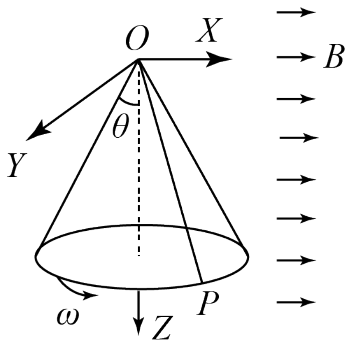
答案 A

解析 导体棒切割磁感线的有效长度为$d' = \frac{d}{\sin 60^\circ}$，根据$E = Bd'v$得$E = \frac{Bdv}{\sin 60^\circ}$，所以感应电流为$I = \frac{Bdv}{R\sin 60^\circ}$．

故选A．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 电磁感应定律

3 如图所示的直角坐标系中，有一绝缘体制成的半锥角为θ的锥体．圆锥体顶点在坐标原点处其轴线沿Z轴方向．有一条长为l的细金属丝OP固定在圆锥体的侧面上，金属丝与圆锥体的一条母线重合．整个空间中存在磁感应强度为B的匀强磁场，磁场方向沿X轴正方向．



当圆锥体绕其轴沿图示方向做角速度为ω的匀角速转动时：

(1) OP经何处时两端电势相等．

(2) 电势差U_{OP}的最大值．

答案 (1) OP经过YOZ平面的瞬间

(2) $\frac{1}{2}\omega l^2 B\sin\theta\cos\theta$

解析 (1) 略

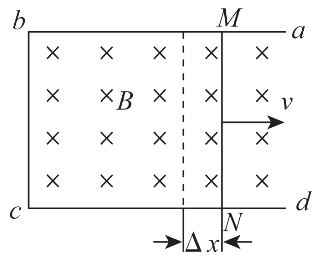
(2) 略

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 动生电动势常见问题 > 旋转切割问题

2. 例题精讲

4 请解答：

(1) 如图1所示，固定于水平面上的全属框架$abcd$，处在竖直向下的匀强磁场中．金属棒MN沿框架以速度v向右做匀速运动．框架的ab与dc平行，bc与ab、dc垂直．MN与bc的长度均为l，在运动过程中MN始终与bc平行，且与框架保持良好接触．磁场的磁感应强为B．

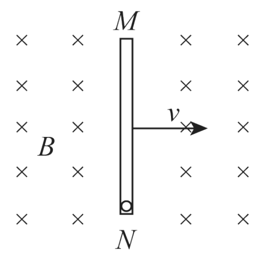


a．请根据法拉第电磁感应定律$E=\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$，推导金属棒$MN$中的感应电动势$E$；

b．在上述情景中，金属棒MN相当于一个电源，这时的非静电力与棒中自由电子所受洛伦兹力有关．请根据电动势的定义，推导金属棒MN中的感应电动势E．

(2) 为进一步研究导线做切割磁感线运动产生感应电动势的过程，现构建如下情景：

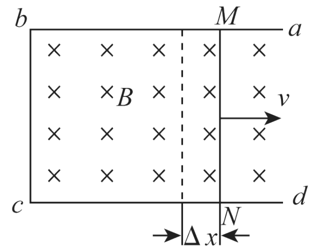
如图2所示，在垂直于纸面向里的匀强磁场中，一内壁光滑长为l的绝缘细管MN，沿直面以速度v向右做匀速运动．在管的N端固定一个电量为q的带正电小球（可看做质点）．某时刻将小球释放，小球将会沿管运动．已知磁感应强度大小为B，小球的重力可忽略．在小球沿管从N运动到M的过程中，求小球所受各力分别对小球做的功．



答案 (1) a．BIL b．见解析

(2) $qvBI$

解析 (1) a．如图1所示，在一小段时间Δt内，金属棒MN的位移$\Delta x=VN$，



这个过程中线框的面积的变化量$\Delta s = 2\Delta x = IV\Delta t$，

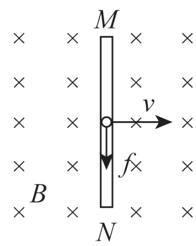
穿过闭合电路的磁通量的变化量$\Delta\Phi = B\Delta s = BIV\Delta t$，

根据法拉第电磁感应定律$E = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$，

解得$E = BIV$．

b．如图2所示，棒向右运动时，电子具有向右的分速度，受到沿棒向下的洛伦兹力

$f = evB$，f即非静电力，



在f的作用下，电子从M移动到N的过程中，非静电子做功$W = eVBI$，

根据电动势定义$E = \dfrac{W}{q}$，

解得$E = BIV$．

说明：此处只有结果如a已得分，此处不再给分．

(2) 小球随管向右运动的同时还沿管向上运动，其速度如图3所示．小球所受洛伦兹力$f_{合}$

，

如图4所示．将$f_{合}$正交分解如图5所示．

小球受到洛伦兹力$f_{合}$外，还受到管对它向右的支持力F，如图6所示．

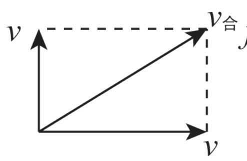


图3

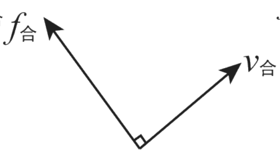


图4

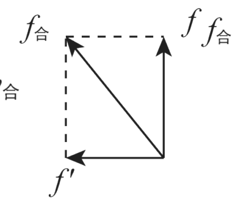


图5

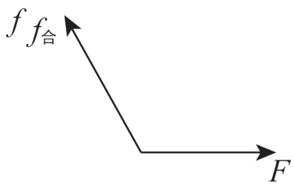


图6

洛伦兹力$f_{合}$不做功$W_{f合} = 0$，

沿管方向，洛伦兹力f做正功$W_1 = f_2 = qvBI$，

垂直管方向，洛伦兹力f'是变力，做负功$W_2 = -W_1 = -qvBI$，

由于小球在水平方向做匀速运动，则$F=f$，

因此，管的支持力F对小球做正功$W_F=qvBl$．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律

二、感生电动势的本质

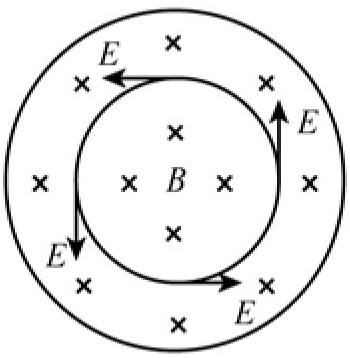
1.知识点睛

由于磁场变化产生的电动势称为感生电动势。

麦克斯韦的电磁场理论表明，变化的磁场在周围空间会激发出感生电场。假如有一个局限在圆柱形范围内的匀强磁场B，B的方向平行于圆柱体的轴，当B的大小增加时，感生电场的方向可借助楞次定律来判断，如图所示，电场线是一些闭合的同心圆，无头无尾，像旋涡一样，所以感生电场也叫涡旋电场。我们之前学习过的静电场的电场线却是起于正电荷终于负电荷，有头有尾，这是两者很重要的区别。感生电场的涡旋性决定了它不同于静电场的规律，在涡旋电场中，电荷沿闭合回路走一圈，电场力对它做功不为零，涡旋电场对电荷的作用力不是保守力，不能引入电势的概念。

感生电场也对电荷也有力的作用（而且属于非静电力），感生电动势产生的微观机理实际上就是感生电场力搬运电荷所致。

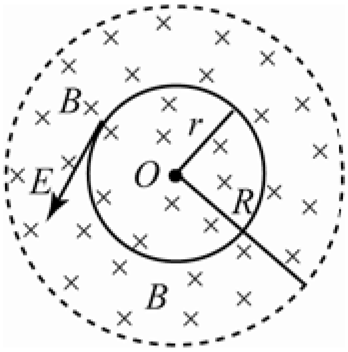
可补充：区分静电场和感生电场，可定义保守场（势能）的充要条件是旋度为0，对于静电场成立，对于感生电场（因磁场变化产生的）不成立；可以从麦克斯韦方程的角度理解：静电场与感生电场可以分别求解再叠加。可以从相对论的角度理解不同参考系下动生电动势与感生电动势的转化。



下面我们再讨论一下特殊情况下感生电场的大小。

如图所示，是一圆柱状均匀磁场区的横截面，截面半径为R，如果磁感应强度B随时间增加，变化率为$\dfrac{\Delta B}{\Delta t}$，$B$的方向如图所示垂直纸面向里，则磁场中以$O$点为圆心、$r$为半径的导体回路上的感应电动势

为：$\varepsilon=\dfrac{\Delta B}{\Delta t}\pi r^2(r\leq R)$；$\varepsilon=\dfrac{\Delta B}{\Delta t}\pi R^2(r>R)$；。

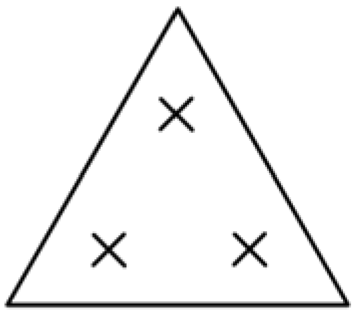


再从电动势的定义出发，回路中的电动势$\varepsilon=\dfrac{W}{q}=E\cdot 2\pi r$，其中$E$即为涡旋电场的场强。

联立可得：$E=\dfrac{r}{2}\cdot\dfrac{\Delta B}{\Delta t}(r\leq R)$；$E=\dfrac{R^2}{2r}\cdot\dfrac{\Delta B}{\Delta t}(r>R)$。

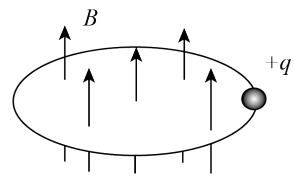
按场分布可定义与计算回路单边上的局部电动势$\varepsilon_{AB}=\dfrac{W}{q}=\dfrac{\sum q\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}}{q}=\sum\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}$，类似于静电场场强$E$与电势差$U_{AB}$的关系。当场强$\vec{E}$处处沿弧\stackrel{{\mbox{\frown}}}{AB}的切线方向且大小一定，则$\varepsilon_{AB}=El_{AB}$ ，其中l_{AB}表示弧\stackrel{{\mbox{\frown}}}{AB}的长度。当场强$\vec{E}$处处垂直于弧的切线方向，则$\varepsilon_{AB}=0$。

对于其它分布的磁场，虽然在数学上计算电场分布比较复杂，但我们依然可根据对称性推导对称分布的磁场在对称回路中产生电动势的分布情况。比如，等边三角形区域中，有磁场以$\dfrac{\Delta B}{\Delta t}=k$均匀变化，用三角形回路围住此区域，可由法拉第定律推导总电动势$\varepsilon=kS_{三角形}$，单边电动势$\varepsilon_{单}=\dfrac{\varepsilon}{3}$。



2. 例题精讲

5 英国物理学家麦克斯韦认为，磁场变化会在空间激发感生电场．如图所示，一个半径为r的绝缘细环水平放置，环内存在竖直向上的匀强磁场B，环上套一带电荷量为$+q$的小球．已知磁感应强度B随时间均匀增加，其变化率为k，若小球在环上运动一周，则感生电场对小球的作用力所做的功的大小是（　　）



A. 0

B. $\frac{1}{2}r^2qk$

C. $2\pi r^2qk$

D. πr^2qk

答案 D

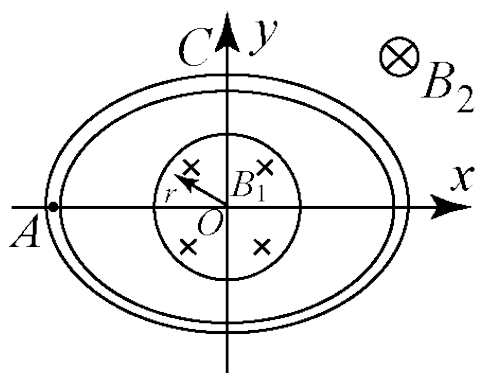
解析 整个圆环的感应电动势$E=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=S\frac{\Delta B}{\Delta t}=\pi r^2k$，小球在环上运动一周，电场力做功$W=qU=qE=\pi r^2qk$．

故选D．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势

电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势的计算和本质 > 感生电动势计算

6 如图所示一椭圆轨道，其方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，在中心处有一圆形区域，圆心在$O$点，半径为$r(r<b)$．圆形区域中有一均匀磁场$B_1$，方向垂直纸面向里，$B_1$以变化率$k$均匀增大．在圆形区域外有另一匀强磁场$B_2$，方向与$B_1$相同．在初始时，$A$点有一带正电$q$、质量为$m$的粒子，粒子只能在轨道上运动，把粒子由静止释放，若要其通过C点时对轨道无压力，求B_2的大小．提示：C点处的曲率半径为$\rho=\frac{a^2}{b}$．



答案 $\frac{br}{a^2}\sqrt{\frac{(4n+3)mk\pi}{2q}}(n=0,1,2,3\dots)$

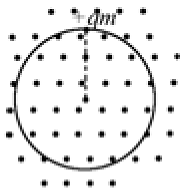
解析 由题意可知，感生电场方向为逆时针方向．粒子由A点释放后，沿逆时针方向运动．椭圆轨道上一周的感应电动势$\varepsilon=k\pi r^2$．电子由A运动到C由动能定理

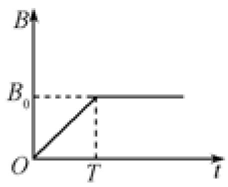
$qk\pi r^2\left(n+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}mv^2(n=0,1,2,3\cdots)$．粒子运动到$C$点时，由$B_2$产生的洛伦兹力提供向心力，即$qvB_2=\frac{mv^2}{\rho}$，联立解得：$B_2=\frac{br}{a^2}\sqrt{\frac{(4n+3)mk\pi}{2q}}(n=0,1,2,3\ldots)$．

故答案为：$\frac{br}{a^2}\sqrt{\frac{(4n+3)mk\pi}{2q}}(n=0,1,2,3\ldots)$

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势的计算和本质 > 感生电动势计算

7 质量为m、带电荷量$+q$的绝缘小珠，穿在半径为r的光滑圆形轨迹上，轨道平面水平，空间有分布均匀且随时间变化的磁场，磁场方向竖直向上，如图所示，磁感应强度$B(t)$的变化规律如图所示．





(1) 若圆环由金属材料制成，求圆环上感应电动势ε的大小；

(2) 若圆环由绝缘材料制成，已知在$t<T$内，圆环处的感应电场的方向是沿顺时针并指向圆环的切线方向、大小为$E=\frac{\varepsilon}{2\pi r}$，$t=0$时刻小珠静止，求$t>T$时，轨道对小珠的作用力$F$的大小（小珠重力不计）

答案 (1) $\frac{B_0}{T}\pi r^2$．

(2) $F=\frac{q^2rB_0^2}{4m}$．

解析 (1) 由法拉第电磁感应定律：$\varepsilon=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{B_0}{T}\pi r^2$

(2) 圆珠在电场力的作用下做变速圆周运动，在时间T内，电场力做的功$W=qEl$ ①

圆珠的路程$l=\frac{1}{2}at^2$ ②

圆柱的加速的$a=\frac{qE}{m}$ ③

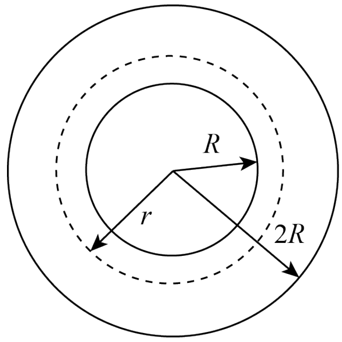
$t>T$时，圆珠做匀速圆周运动，轨道对小珠的作用力提供向心力，

$F=\frac{mv^2}{r}$ ④

由①②③④得：$F=\frac{q^2rB_0^2}{4m}$

标注 电磁感应及其应用

8 一个长直螺线管内部包含了另一个同轴的螺线管，内部螺线管的半径为R，外面螺线管的半径为$2R$，两螺线管单位长度具有相同的圈数，且初始都没有电流．在同一瞬时，电流开始在两个螺线管中线性增大，任意时刻，通过边螺线管的电流为外边螺线管中电流的两倍且方向相同，由于电流增加，一个处于两个螺管之间初始静止的带电粒子开始沿一条同心圆轨道运动，如图所示，不计重力，求该圆轨道半径r．



答案 $\sqrt{2}R$．

解析 设螺线管单位长度内的圈数为n，t时刻外螺线管电流为I，则内螺线管电流为$2I$．即此时外螺线管在其内部产生磁场$B_1=\mu_0 nI$，内螺线在其内部产生磁场$B_2=2\mu_0 nI$．

由于电流均匀的增长，因此，感生电场为$E=\frac{r}{2}\cdot\frac{B_1}{t}+\frac{R^2}{2r}\cdot\frac{B_2}{t}=\frac{\mu_0 nI}{t}\cdot\frac{r^2+2R^2}{2r}$．

感生电场力使带电粒子获得的速度为v，则$qEt=mv$

此时，粒子所受洛伦兹力提供向心力，$qvB_1=m\frac{v^2}{r}$

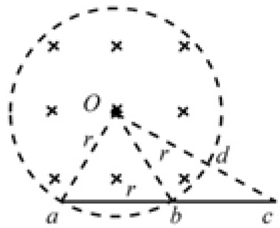
联立解得：$r=\sqrt{2}R$．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势的计算和本质 > 感生电动势的本质

9 在半径为r的圆形区域内存在着方向垂直纸面向里、磁感应强度随时间t的变化率为k的磁场中：

(1) 如图所示，一根长为r的细金属杆ab与磁场垂直地放在该区域内，杆的两端恰在圆周上，求杆中感生电动势的大小；

(2) 在（1）的基础上把ab杆延长至c，且$ab = bc$，那么U_{ca}为多大？



答案 (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}kr^2$

(2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\pi}{12}\right)kr^2$

解析 (1) 本题如果直接取ab路径对电场强度E进行积分求电动势，一般同学无法完成．处于变化磁场中的导体若不构成闭合回路，可设法使其构成回路，由回路面积法求得整个闭合回路中的感生电动势，再减去各辅助导体上的感生电动势即可．构成闭合回路的原则是，尽量使各辅助导体上的感生电动势容易计算或者为零．对于涡旋电场，沿径向放置的导体杆中的自由电子所受电场力与杆垂直，电子不会沿杆移动，这种杆的两端不会产生电动势．设想另加两根金属杆Oa、Ob一起构成闭合回路Oab，整个回路的电动势$E=\dfrac{\Delta\varPhi}{\Delta t}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}kr^2$，因$Oa$、$Ob$杆中没有感生电动势，故杆中电动势的大小$|U|=E=\dfrac{\sqrt{3}}{4}kr^2$．

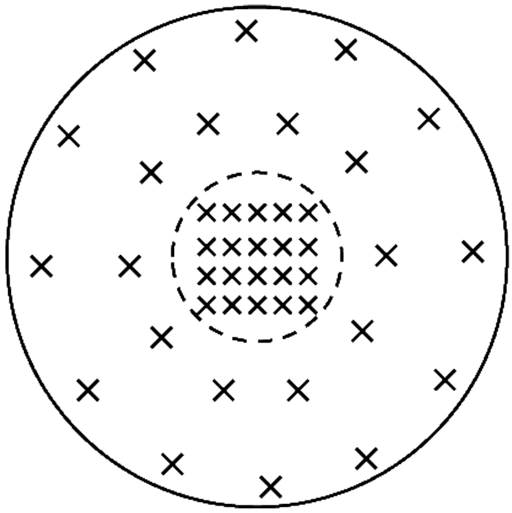
(2) 需要注意的是，涡旋电场并不仅仅存在于变化的磁场内，也同样存在于变化磁场的外围空间，导体处于磁场外也会产生电动势．我们可取两根径向的导体杆Oa、Oc，它们和ac杆一起构成一个闭合回路，得$U_{ca}=E_{Oca}=k(S_{Oab}+S_{Obd})=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\pi}{12}\right)kr^2$．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律

10 2017年北京中国科学技术大学自主招生第14题

如图所示，磁场在以O为圆心、半径为R的圆形区域内的磁感应强度为$3B_1$，半径从R到$3R$的环形区域内的磁感应强度为B_1，其余地方没有磁场，B_1的值从$t=0$时开始线性增加，即$B_1=\lambda t$，一

个电子质量为m，电荷量大小为e，$t=0$时在环形磁场区域内静止，假设电子在以O点为圆心的圆周上运动，圆的半径应是多少？



答案 $\sqrt{2}R$

解析 设电子做圆周运动的半径为r，根据法拉第电磁感应定律，感应电动势为：

$\varepsilon=\dfrac{\Delta \Phi}{\Delta t}$．①

其中$\Phi=3B_1\cdot\pi R^2+B_1\left(\pi r^2-\pi R^2\right)$． ②

联立式①和式②，得$\varepsilon=\lambda\pi\left(2R^2+r^2\right)$．

所以感生电场为$E=\dfrac{\varepsilon}{2\pi r}=\lambda\left(\dfrac{R^2}{r}+\dfrac{r}{2}\right)$．

电子沿切线方向的加速度为$a=\dfrac{eE}{m}=\dfrac{e\lambda}{m}\left(\dfrac{R^2}{r}+\dfrac{r}{2}\right)$．

t时刻电子的速度为$v=at=\dfrac{e\lambda}{m}\left(\dfrac{R^2}{r}+\dfrac{r}{2}\right)t$． ③

根据牛顿第二定律，有$evB_1=m\dfrac{v^2}{r}$． ④

联立式③和式④，得$r=\sqrt{2}R$．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势

电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势的计算和本质 > 感生电动势计算

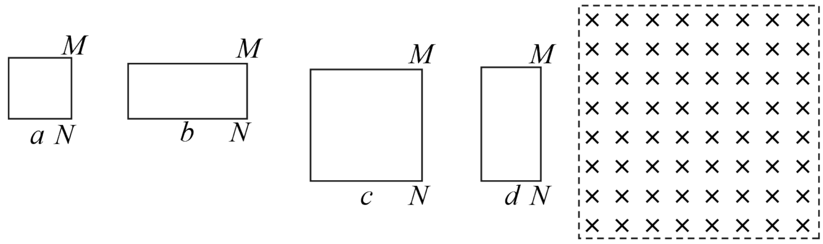
三、电磁感应中的电路问题

1. 知识点睛

电磁感应与电路相结合的问题，主要涉及电路的分析与计算。关键是正确找到电源位置，分清内外电路，正确画出等效电路图，特别要注意区分路端电压与电动势。对于动生电动势，可以将切割磁感线的导体作为电源；对于感生电动势情况比较复杂，回路中各部分都可能有电动势，可以在环路中使用基尔霍夫定律，请大家结合例题学习。

2. 例题精讲

11 用相同导线绕制的边长为l或$2l$的四个闭合线框，以相同的速度匀速进入右侧匀强磁场，如图所示．在每个线框进入磁场的过程中，M、N两点间的电压分别为U_a、U_b、U_c和U_d，下列判断正确的是（　　）



A. $U_a < U_b < U_c < U_d$

B. $U_a < U_b < U_d < U_c$

C. $U_a = U_b < U_c = U_d$

D. $U_b < U_a < U_d < U_c$

答案　B

解析　速度相同，故电路总的感应电动势$2E_a = 2E_b = E_c = E_d$，根据分压可得$U_a < U_b < U_d < U_c$．

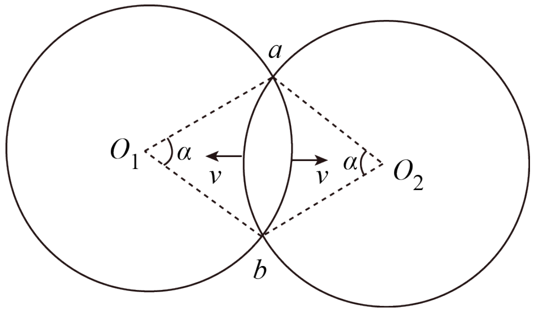
故选B．

标注　电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 动生电动势

电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 电磁感应综合问题 > 线框模型

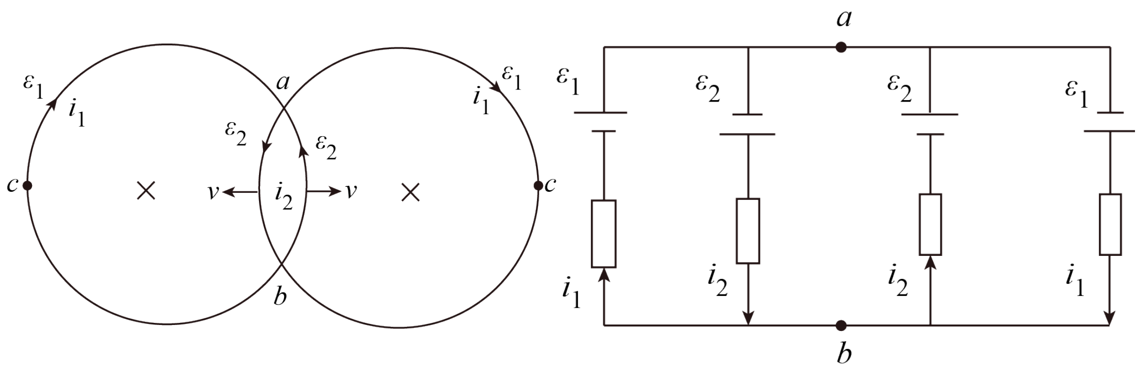
12 两个半径为R的相同的金属圆环，沿着通过两环圆心的直线在同一平面上相向平动，如图所示．长度等于圆环周长的金属丝的电阻为r，不计圆环电感．磁感应强度为B的均匀磁场垂直于两个环

面．求当两圆环平动速度均为v，而$\alpha=\frac{\pi}{3}$时，磁场对两圆环作用力的大小．假设此时两圆环接触点a和b，且接触良好．



答案 见解析．

解析 假设均匀磁场垂直环面向里．由电路对称性，可设弧acb和弧adb的电动势为ε_1、电流为i_1；而相交点a、b之间的小圆弧的电动势为ε_2、电流为i_2，等效电路如图所示．



每段圆弧在切割磁感线时产生的电动势大小都于弦ab切割磁感线时产生的电动势，即

$\varepsilon_1=\varepsilon_2=BRv$．

圆环上优弧部分电阻$r_1=\frac{5r}{6}$，劣弧部分电阻$r_2=\frac{1}{6}r$．

对最左边回路：$\varepsilon_1-i_1r_1-i_2r_2+\varepsilon_2=0$；

对左边圆环回路有：$-i_1r_1+\varepsilon_1-\varepsilon_2+i_2r_2=0$；

联立解得：$i_1=\frac{6BRv}{5r}$，$i_2=\frac{6BRv}{r}$．

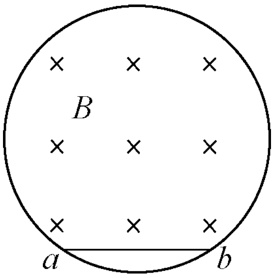
圆环上各部分圆弧所受安培力等效于相同的电流流过弦ab时所产生的安培力．因此优弧部分受力$F_1=i_1BR=\frac{6B^2R^2v}{5r}$，劣弧部分受力$F_2=i_2BR=\frac{6B^2R^2v}{r}$．

因此O_1所受合力$F=F_1+F_2=7.2\frac{B^2R^2v}{r}$，方向向左；同理，$O_2$所受合力也为$7.2\frac{B^2R^2v}{r}$，方向向右．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 动生电动势常见问题 > 有效长度问题

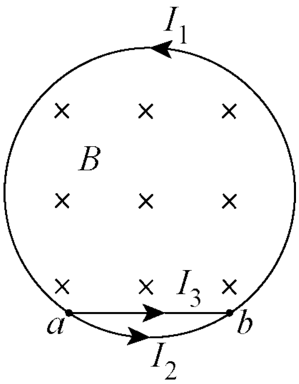
例题说明：下面题目涉及感生电动势，需要正确找到电源位置。

13 如图所示，一磁感应强度为B的匀强磁场，分布在半径为R的无限长圆柱体内，设$B=B_0t(B_0>0)$．现有一半径也为R，总电阻为r的粗细均匀的金属圆环，放在垂直于磁场的平面内，金属圆环中心在匀强磁场的对称轴上．长为R、电阻为r'的直导线的两个端点a、b与金属圆环良好连接，求此直导线中的感应电流(感应电流所产生的磁场可以忽略)．



答案 $\dfrac{9\sqrt{3}B_0R^2}{5r+36r'}$．

解析 设金属圆环各部分电流如图所示．



优弧和ab杆构成的面积为$\left(\dfrac{5}{6}\pi R^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}R^2\right)$；

对此回路列式有：$I_1\dfrac{5r}{6}+I_3r'-B_0\left(\dfrac{5}{6}\pi R^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}R^2\right)=0$；

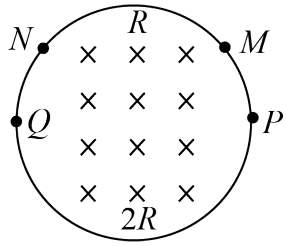
对整个圆环回路列式有$I_1\dfrac{5r}{6}+I_2\dfrac{1}{6}r-B_0\pi R^2=0$；

且$I_1=I_2+I_3$，联立解得：$I_3=\dfrac{9\sqrt{3}B_0R^2}{5r+36r'}$．

故答案为：$\dfrac{9\sqrt{3}B_0R^2}{5r+36r'}$．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势的计算和本质 > 感生电动势计算

14 两根长度相等、材料相同、电阻分别为R和$2R$的细导线，围成一直径为D的圆环，P、Q为其两个接点，如图所示在圆环所围成的区域内，存在垂直于圆面、指向纸里的匀强磁场，磁场的磁感应强度的大小随时间增大，变化率为恒定值b．已知圆环中的感应电动势是均匀分布的，设MN为圆环上的两点，MN间的弧长为半圆弧$PMNQ$的一半，试求这两点间的U_M-U_N．



答案 $-\frac{1}{48}\pi D^2 b$

解析 根据电磁感应定律，整个圆环中的感应电动势的大小为

$E=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{1}{4}\pi D^2 b$①

此电动势均匀分布在整个环路内，方向是逆时针方向．由欧姆定律可知感应电流为

$I=\frac{E}{R+2R}$②

研究$N\to Q\to P\to M$回路

M、N两点的电压：$U_M-U_N=\frac{3}{4}E-I\left(2R+\frac{R}{2}\right)$③

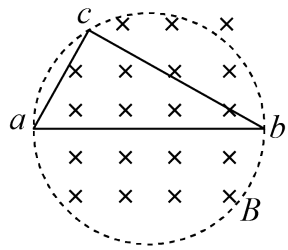
或研究$N\to M$回路：$U_M-U_N=-\frac{1}{4}E+I\cdot\frac{R}{2}$．

均可得$U_M-U_N=-\frac{1}{48}\pi D^2 b$．

故答案为：$-\frac{1}{48}\pi D^2 b$．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 电磁感应定律

15 如图所示，在一个圆柱形的区域内存在匀强磁场，圆柱轴线与纸面垂直，磁场方向垂直纸面向里，且磁感应强度随时间均匀增大．在磁场中与磁场方向垂直的平面上有一个直角导体框abc，其三个顶点恰在磁场边界的圆周上，$\angle abc=30°$，导体框电阻分布均匀，求导体框abc上三个电势差的比值$U_{ab}:U_{bc}:U_{ca}$．



答案 $-4\sqrt{3}:3(\sqrt{3}-1):(\sqrt{3}+3)$

解析 设圆周半径为R，$\Delta B/\Delta t=k$，单位长度导线电阻为λ．

三角形abc回路中的$E=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2\dfrac{\Delta B}{\Delta t}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}kR^2$，故$abc$回路中的电流强度为$I=\dfrac{E}{R}=\dfrac{\sqrt{3}kR}{2(3+\sqrt{3})\lambda}$

．

而因涡旋电场垂直半径方向，故$E_{ab}=0$，同时ΔOac和ΔObc面积相同，同时Oa，Oc，Ob中都无感应电动势，故有

$E_{bc}=E_{ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}kR^2$．

而因涡旋电场垂直半径方向，故$E_{ab}=0$，同时ΔOac和ΔObc面积相同，同时Oa，Oc，Ob中都无感应电动势，故有

$E_{bc}=E_{ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}kR^2$．

这样$U_{ab}=I\cdot 2R\lambda=\dfrac{\sqrt{3}kR^2}{3+\sqrt{3}}$．

$U_{ab}=I\cdot\sqrt{3}R\lambda-E_{bc}=\dfrac{3(\sqrt{3}-1)kR^2}{4(3+\sqrt{3})}$．

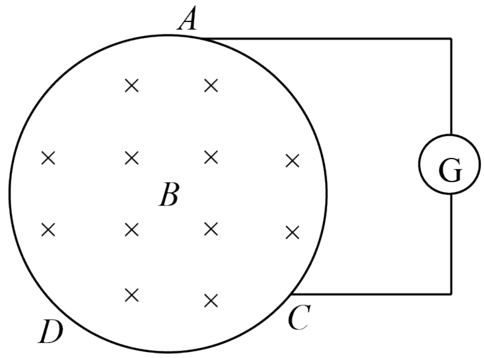
$U_{ca}=I\cdot R\lambda-E_{ca}=-\dfrac{kR^2}{4}$．

所以$U_{ab}:U_{bc}:U_{ca}=-4\sqrt{3}:3(\sqrt{3}-1):(\sqrt{3}+3)$．

故答案为：$-4\sqrt{3}:3(\sqrt{3}-1):(\sqrt{3}+3)$．

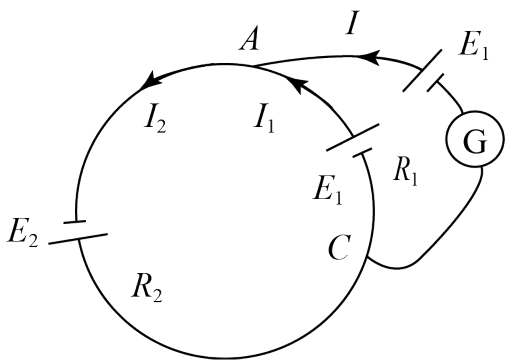
标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律

16 如图所示，一匀质细导线圆环，总电阻$R=1.2\Omega$，半径$a=0.6\mathrm{m}$，被A、D、C三点等分，环内充满匀强磁场，其磁感应强度B的方向始终垂直于环面向里，大小则以均匀速率增强．检流计G连接A、C两点，其内阻为$r=0.2\Omega$，今测得通过检流计的电流强度为$I=6\mathrm{mA}$，求磁场变化的速率．



答案 $7.43\times10^{-3}\mathrm{T/s}$

解析 等效电路如图所示，设磁场变化率为k，劣弧导线电阻$R_1=0.4\Omega$，优弧导线电阻为$R_2=0.8\Omega$．对圆环回路有$E_1+E_2=k\pi a^2=I_1R_1+I_2R_2$，对于磁场外的回路总的感生电动势为零，有$Ir-I_1R_1=0$，又由于$I+I_1=I_2$．

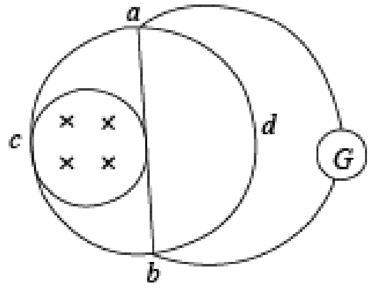


联立解得：$k\approx7.43\times10^{-3}\mathrm{T/s}$．

故答案为：$7.43\times10^{-3}\mathrm{T/s}$．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势的计算和本质 > 感生电动势计算

17 一导线围成半径为D的圆环$acbd$，在圆环所围域内有一半径为$\frac{D}{2}$的磁场区，其周界与圆环内切于c点．该区域内是磁感强度为B的匀强磁场，方向如图所示，均匀增大，且$\frac{\Delta B}{\Delta t}=k$，$ab$导线为圆环的一直径，与磁场区边界相切，设$ab$及两半圆环电阻都为$r$，电流计的内阻也为$r$，其他电阻不计．电流计位于纸面之内．求下列情况下通过电流计的电流．



(1) acb与adb都位于纸面内，并分别位于ab两侧；

(2) adb绕ab转$90°$折成与纸面垂直；

(3) adb再绕ab转折成与acb重合．

答案

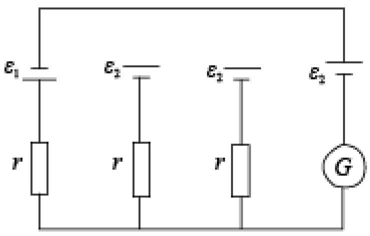
(1) $I_G=\frac{1}{3}I=\frac{1}{16r}k\pi D^2$

(2) $I_G=\frac{1}{3}I=\frac{1}{16r}k\pi D^2$

(3) $I_G{}'=\frac{1}{2}I'=\frac{1}{8r}k\pi D^2$

解析

(1) 等效电路如图所示．



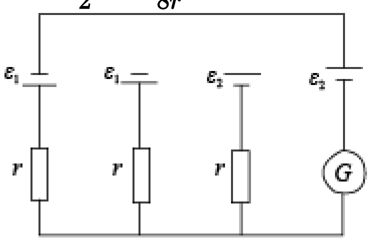
其中$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{1}{4}\pi kD^2$,总电流为$I=\frac{\varepsilon}{r+\frac{r}{3}}=\frac{3}{16r}k\pi D^2$，通过电流计$G$的电流为

$I_G=\frac{1}{3}I=\frac{1}{16r}k\pi D^2$.

(2) 情况同（1）

(3) 作出等效电路如图所示，则$I'=（\varepsilon_1+\varepsilon_2）\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=\frac{1}{4r}k\pi D^2$,流过电流计的电流

$I_G{}'=\frac{1}{2}I'=\frac{1}{8r}k\pi D^2$.



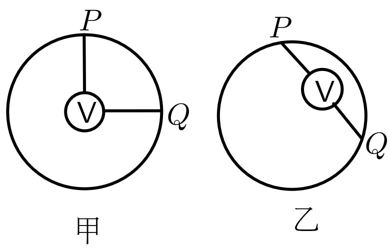
标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 动生电动势

电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 动生电动势常见问题 > 旋转切割问题

科学思维 > 科学推理

科学思维 > 模型建构

18 如图甲所示，一个半径为a的均匀细圆环，电阻为r，磁感应强度B的方向垂直圆平面向里，以$\frac{\Delta B}{\Delta t}=k$均匀增大，$P$、$Q$是环上两点，所张圆心角为$\frac{\pi}{2}$，现将一非常小的电压表用导线跨接在$P$、$Q$两点，电压表内阻为$R$，导线电阻不计．



(1) 若把电压表放在圆环中心，连接用的导线沿环半径，求表的读数U_1．

(2) 若图乙所示，若把电压表放在PQ弦的中点处，连接用的导线沿着此弦，求表的读数U_2．

答案 (1) 0．

(2) $\frac{8ka^2R}{16R+3r}$．

解析 (1) 沿半径方向导线不产生感生电动势，等效电路如图所示，

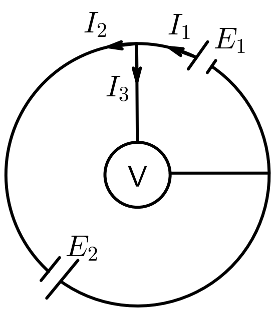
有$E_1+E_2=k\pi a^2=I_1\frac{r}{4}+I_2\frac{3}{4}r$，

$E_1=k\frac{\pi a^2}{4}=I_1\frac{r}{4}+I_3R$，且$I_1=I_2+I_3$，

联立解得：$I_3=0$，

故电压表读数$U_1=0$．

故答案为：0．



(2) 等效电路如图所示，

有$E_1+E_3=k\frac{\pi a^2}{4}-k\frac{a^2}{2}=I_1\frac{r}{4}+I_3R$，

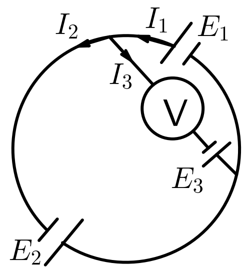
$E_1+E_2=k\pi a^2=I_1\frac{r}{4}+I_2\frac{3}{4}r$，

且$I_1=I_2+I_3$，

联立解得：$I_3=-\frac{8ka^2}{16R+3r}$，

故电压表读数$U_2=|I_3|R=\frac{8ka^2R}{16R+3r}$．

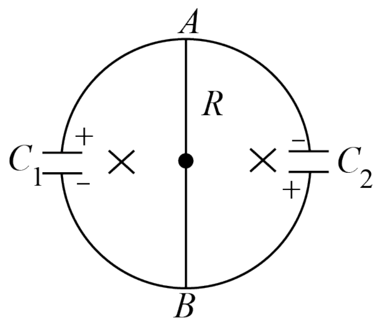
故答案为：$\frac{8ka^2R}{16R+3r}$．



标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势

电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势的计算和本质 > 感生电动势计算

19 半径为R的金属丝圆环，有一个沿直径放置的金属跨接线，左、右两半圆上分别接上电容器C_1和C_2，如图所示．将环放置在磁感应强度随时间线性增大的磁场中$B(t)=B_0\frac{t}{T}$，磁场方向垂直于环面，某一时刻撤去跨接线，接着磁场停止变化，求两个电容器上带的电量．



答案 答案见解析．

解析 可以把金属跨接线的环看作由两个回路AC_1B和BC_2A组成，每回路面积为$\frac{\pi}{2}R^2$，穿过每个回路的磁通量随时间变化$\Phi(t)=\frac{\pi R^2}{2}B_0\frac{t}{T}$，于是每个回路中产生感应电动势$\varepsilon=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{\pi R^2B_0}{2T}$，这就是每个电容器两极板的电势差．

因此，当磁场变化时，电容器两极板上电量是恒定的，设C_1、C_2的上极板带电量分别为Q_1、Q_2．则$Q_1=\varepsilon C_1$，$Q_2=\varepsilon C_2$．

当撤去跨接线且磁场停止变化后，电荷Q_1和Q_2在C_1和C_2间重新分布，直到两个电容器电压相等为止．设此时C_1、C_2的上极板带电量分别为$Q_1{}'$、$Q_2{}'$．

则：$\dfrac{Q_1{}'}{C_1}=\dfrac{Q_2{}'}{C_2}$，且$Q_1{}'+Q_2{}'=Q_1+Q_2$．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势

电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势的计算和本质 > 感生电动势计算

科学思维 > 科学推理

科学思维 > 模型建构

20 **2018年河北石家庄高二学而思**

质量为m，电阻为R的圆环在如图的磁场中下落，稳定时速度为v．求匀速下落时电动势，有以下两种计算方案．

方法一：由受力平衡

$$mg=\frac{B^2L^2v}{R}$$

$$\varepsilon=BLv$$

有结论：$\varepsilon=\sqrt{mgRv}$

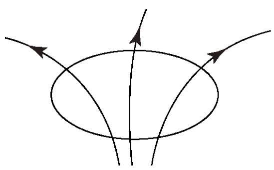
方法二：由功能关系

$$P_R=mgv$$

$$P_R=\frac{\varepsilon^2}{R}$$

有结论：$\varepsilon=\sqrt{mgvR}$

问：关于以上哪种方案说法正确的是（　　）



A. 都正确

B. 都不正确

C. 只有方案一正确

D. 只有方案二正确

答案 A

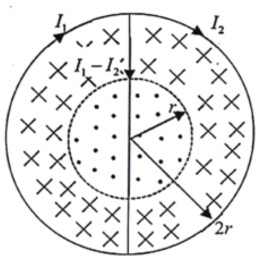
解析 当速度达到稳定时，必然存在受力平衡．同时功能平衡也是受力平衡的必然要求．因此两种方案都是正确的．

故选A．

标注 电磁学 > 电磁感应 > 电磁感应定律

21 2018年河北石家庄高二学而思

有一半径为$2r$的线圈．内部磁场分布如图，磁感应强度均为B．有一长为$4r$的金属杆（横在中间），其电阻为R．金属杆的右半边线圈电阻为R，左半边线圈电阻为$2R$．当两个磁场磁感应强度从B缓慢变化至0时，求通过右半边的电荷量q．



答案 $\frac{4\pi r^2 B}{5R}$

解析 磁场变化产生涡旋电场，线圈处电场E满足：

$E\times 2\pi\times 2r=\frac{\Delta\phi}{\Delta t}=\frac{\Delta\left(B\times 3\pi r^2-B\times\pi r^2\right)}{\Delta t}$，

所以$E=\frac{r}{2}\times\frac{\Delta B}{\Delta t}$．

如图设出电流分布，对线圈左半边和金属杆列基尔霍夫定律方程：

$E\times\pi\times 2r-I_1\times 2R-(I_1-I_2)\times R=0$，

对线圈右半边和金属杆列基尔霍夫定律方程：

$E\times\pi\times 2r-I_2\times 2R-(I_1-I_2)\times R=0$，

联立两式得：

$I_2=\frac{8\pi rE}{5R}=\frac{4\pi r^2}{5R}\times\frac{\Delta B}{\Delta t}$，

因此通过右半边的电荷量q为：

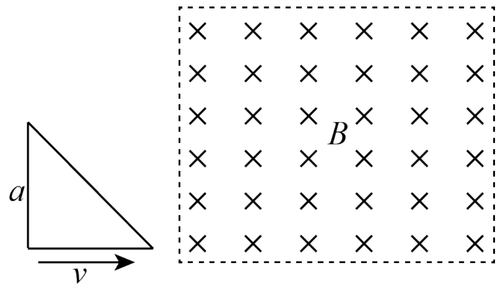
$q=\frac{4\pi r^2}{5R}\Sigma\Delta B=\frac{4\pi r^2 B}{5R}$．故答案为$\frac{4\pi r^2 B}{5R}$．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势

电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势的计算和本质 > 感生电动势计算

22 **2016年中国科学技术大学自主招生第5题**

如图所示，一金属导线单位长度的电阻为ρ，折成等腰直角三角形，直角边长为a，在$t=0$时刻从图示位置开始以匀速v进入以$B=B_0-kt$规律变化的均匀磁场中，其中k为大于零的常数．当三角形的水平直角边进入一半时，求：



(1) 导线内的动生电动势．

(2) 导线内的感生电动势．

(3) 导线内的电流强度．

答案 (1) $\frac{B_0 av}{2}-\frac{ka^2}{4}$

(2) $\frac{1}{8}ka^2$

(3) $\frac{|4B_0 v-3ka|}{8\left(2+\sqrt{2}\right)\rho}$

解析 (1) 当三角形的水平直用进入，

$B=B_0-k\cdot\frac{a}{2v}$．

则动生电动势为$E_{动}=B\cdot\frac{a}{2}\cdot v=\frac{B_0 av}{2}-\frac{ka^2}{4}$．

(2) 感生电动势为$E_{感}=\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right|\cdot S=\frac{1}{8}ka^2$

(3) 感应电动势为$E=\left|E_{动}-E_{感}\right|=\left|\frac{B_0 av}{2}-\frac{3ka^2}{8}\right|$．

则电流强度为$I=\frac{E}{R}=\frac{\left|\frac{B_0 av}{2}-\frac{3ka^2}{8}\right|}{\left(2+\sqrt{2}\right)a\rho}=\frac{|4B_0 v-3ka|}{8\left(2+\sqrt{2}\right)\rho}$．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律

四、自感

1.知识点睛

1．自感系数

当一个线圈中的电流变化时，它产生的变化的磁场不仅在邻近的电路中激发出感应电动势，同样也在它自身激发出感应电动势，这种现象称为**自感**。由于自感而产生的感应电动势叫**自感电动势**，它的大小同样遵守**法拉第电磁感应定律**，即$E_L=N\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$。而磁通量与电流成正比，所以有$E_L\propto\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$，可以写成等式为$E_L=L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$，$L$称为自感系数，单位为亨利（$H$）。

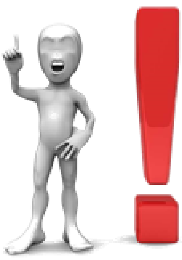
前面的模块中我们推导过通电螺线管中的磁感应强度$B=\mu_0 nI$，因此

$E_L=N\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}=NS\dfrac{\Delta B}{\Delta t}=\mu_0 n^2 V\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$，其中$l$为螺线管的长度，$V$为螺线管的体积，$n$为单位长度的匝数。

比较可得$L=\mu_0 n^2 V$。如果管内充满某种均匀磁介质，磁导率为μ，则$L=\mu n^2 V$，这就是教材中所说的L与线圈的大小、形状、圈数以及是否有铁芯等因素有关的含义。

上述自感系数的决定式只对长直螺线管适用。

电流衰减曲线？



电路发生变化的**瞬间**，通过包含自感线圈支路的电流不会发生突变。

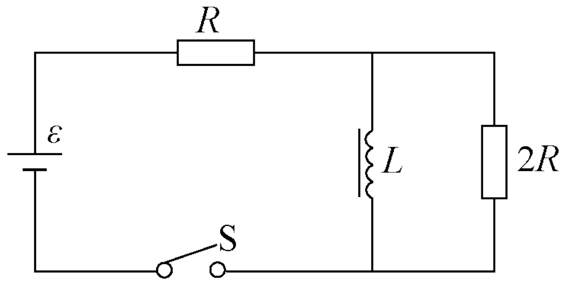
2．线圈中的磁场能量

通电自感中，包含线圈支路的电流i从0逐渐变到稳定值I_0。这个过程中，电源不仅要供给电路中产生焦耳热的能量，而且还要反抗自感电动势E_L做功，在时间Δt内，此功为$W=E_L i\Delta t=Li\Delta i$。在建立电流的过程中，电源反抗自感电动势所做的总功为$W_{总}=\sum W=\dfrac{1}{2}LI_0^2$（可以做出$L_i\sim i$图象，也可以直接积分）。

这部分功以磁场能的形式储存在线圈L内。当开关断开时电流由I_0减小到0，则原来储存的磁场能通过自感电动势做功全部释放。

2. 例题精讲

23 如图所示，电源电动势为ε，内阻不计，线圈自感系数为L（电阻不计），两定值电阻阻值分别为R、$2R$．求：



(1) 开关闭合瞬间，L两端电压及线圈支路的电流变化率$\dfrac{\Delta i}{\Delta t}$．

(2) 电路稳定后断开开关瞬间，L两端电压及线圈支路的电流变化率$\dfrac{\Delta i}{\Delta t}$．

答案 (1) $U=\dfrac{2}{3}\varepsilon$，$\dfrac{\Delta i}{\Delta t}=\dfrac{2\varepsilon}{3L}$．

(2) $U=2\varepsilon$，$\dfrac{\Delta i}{\Delta t}=\dfrac{2\varepsilon}{L}$．

解析 (1) 略

(2) 略

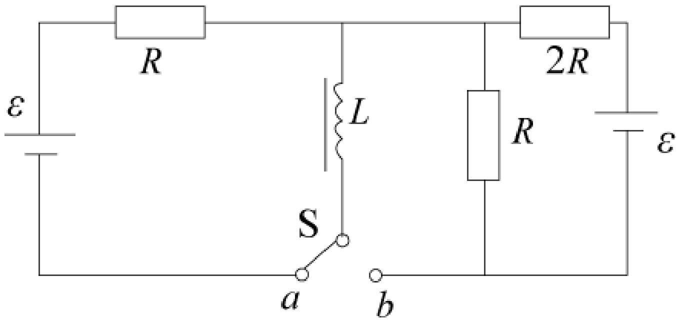
标注 电磁感应及其应用 > 自感、互感和涡流 > 自感和互感

电磁感应及其应用 > 自感、互感和涡流 > 自感现象和互感现象

科学思维 > 科学推理

科学思维 > 模型建构

24 如图所示，两个电源电动势均为ε，内阻不计，线圈自感系数为L(电阻不计)，定值电阻阻值如图中所示．开始时，单刀双掷开关处于a端，稳定后，将开关掷到b端，求开关刚换到b端的瞬间线圈中的感应电动势大小．

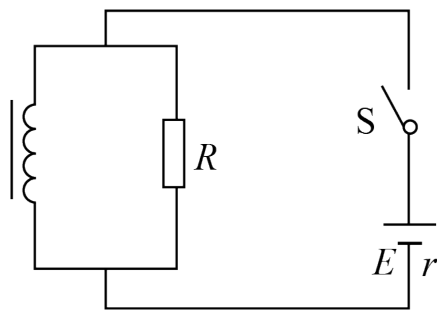


答案 $\frac{\varepsilon}{3}$

解析 略

标注 电磁感应及其应用 > 自感、互感和涡流 > 自感和互感

25 电感为L的线圈和电阻R并联，再通过开关S接到电动势为E，内阻为r的电池上，如图所示．开始开关S断开，电路中没有电流，求开关闭合后通过电阻的电量．(线圈电阻不计)



答案 $\frac{LE}{Rr}$

解析 由于R与L并联，故$I_R=\frac{E_L}{R}$．通过R的量$q=\sum I_R\Delta t=\sum\frac{E_L}{R}\Delta t=\frac{L}{R}\sum\Delta I$，$\sum\Delta I$为电感$L$上从开关闭合到稳定以后电流的变化量．最后状态$L$把$R$短路，通过$L$的电流为$\frac{E}{r}$，所以$\sum\Delta I=\frac{E}{r}$，代入解得$q=\frac{LE}{Rr}$．

故答案为：$\frac{LE}{Rr}$．

标注 电磁感应及其应用 > 自感、互感和涡流 > 自感现象和互感现象

26 由于接触不完善，在短路的超导螺线管里电流发生变化，这个电流产生的磁场的磁感应强度每小时减小2%，螺线管的自感系数$L=1\mathrm{H}$，试求接触电阻R．

答案 $5.6\times10^{-6}\Omega$

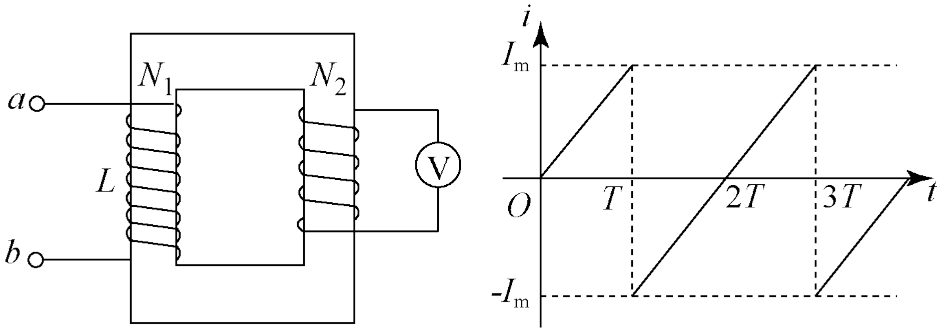
解析 螺线管回路中电流发生变化，产生自感电动势$\varepsilon=L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$，式中$\Delta I$是在$\Delta t$时间内电流的变化量．

据欧姆定律$L=\dfrac{\Delta I}{\Delta t}=IR$．因为在螺线管内磁感应强度与电流成正比，所以这两个量的变化量在同一个时间内仍然成正比，即$\dfrac{\Delta B}{B}=\dfrac{\Delta I}{I}$．联立解得：$R=\dfrac{L\Delta I}{I\Delta t}=\dfrac{L\Delta B}{B\Delta t}=5.6\times10^{-6}\Omega$．

故答案为：$5.6\times10^{-6}\Omega$．

标注 电磁感应及其应用 > 自感、互感和涡流 > 自感和互感

27 如图所示，两个自感线圈套在铁芯上，不计漏磁，匝数分别为N_1、N_2．左侧线圈（即N_1）自感系数为L．Ⓥ为理想电压传感器（通过的电流可忽略）．a、b两端接如图所示的电流，各量如图所示．求电压传感器的示数．



答案 $L\dfrac{N_2I_m}{N_1T}$

解析 略

标注 科学思维 > 模型建构

科学思维 > 科学推理

电磁感应及其应用 > 交变电流 > 变压器问题 > 多负载变压器问题

电磁感应及其应用 > 交变电流 > 变压器

28 设有一单层密绕螺线管，长$l=50\text{cm}$，截面积$S=10\text{cm}^2$，绕组的总匝数为$N=3000$，试求其自感系数．

答案 23mH

解析 $L=\mu_0 n^2 V=\mu_0 N^2\dfrac{S}{l}\approx 23\text{mH}$.

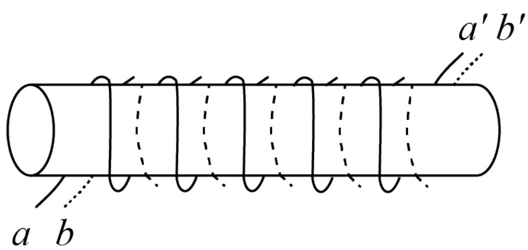
标注 电磁感应及其应用 > 自感、互感和涡流 > 自感和互感

科学思维 > 模型建构

科学思维 > 科学推理

电磁感应及其应用 > 自感、互感和涡流 > 自感现象和互感现象

29 如图所示，用双线密绕在一个长直圆柱上，形成两个螺线管线圈aa'和bb'（分别以实线和虚线表示），已知两个线圈的自感都是L．今若把a与b两端相连，把a'和b'两端接入电路，这时两个线圈的总自感等于 ______ ；若把b与a'相连，把a和b'两端接入电路，这时两个线圈的总自感等于 ______ ；若把a与b两端相连作为一端，a'与b'相连作为另一端，把这两端接入电路，这时两个线圈的总自感等于 ______ ．



答案 1．零

2．$4L$

3．L

解析 当a与b两端相连，把a'和b'两接入电路时，假设电流从a'端流入、b'端流出，线圈aa'中的电流产生的磁场与bb'中的电流产生的磁场方向相反，线圈电流产生的合磁场为零，因此不会产生自感电动势，故这种连接的自感系数等于零．

若把b与a'相连，把a与b'两端接入电路，相当于线圈单位长度的匝数加倍，根据上面的分析，总的自感将变为原来的4倍，即变为$4L$．

若把a与b两端相连作为一端，a'与b'相作为另一端接入电路，相当于导线的横截面积变大，线圈的自感系数与导线的粗细无关，所以这时的总自感仍为L．

故答案为：零；$4L$；L．

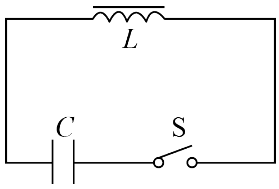
标注 电磁感应及其应用 > 自感、互感和涡流 > 自感现象和互感现象

科学思维 > 科学推理

科学思维 > 模型建构

电磁感应及其应用 > 自感、互感和涡流 > 自感和互感

30 如图所示，电容器电容为C，线圈自感系数为L，不计电阻，初始时刻开关断开，电容器带电量为Q．现在闭合开关S，求：



(1) 通过L的最大电流．

(2) 电流最大时，电容器的带电量．

(3) 已知S闭合后，L中电流先增加后减少，求线圈中电流第一次减少为零时，电容器的带电量．

答案 (1) $\dfrac{Q}{\sqrt{LC}}$

(2) 0

(3) Q

解析 (1) 略

(2) 略

(3) 略

标注 电磁感应及其应用 > 自感、互感和涡流 > 自感现象和互感现象

电磁感应及其应用 > 自感、互感和涡流 > 自感和互感

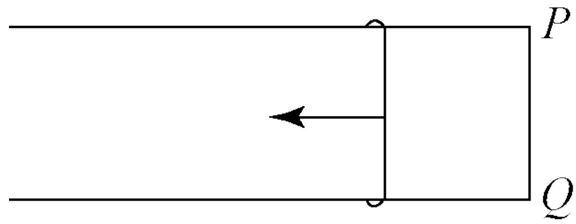
科学思维 > 科学推理

科学思维 > 模型建构

五、电磁感应动力学问题习题课

1. 例题精讲

31 如图所示，两根平行金属导轨固定在水平桌面上，每根导轨每米的电阻为$r_0=0.10\Omega/\mathrm{m}$，导轨的端点$P$、$Q$用电阻可以忽略的导线相连，两导轨间的距离$l=0.20\mathrm{cm}$．有随时间变化的匀强磁场垂直于桌面，已知磁感应强度B与时间t的关系为$B=kt$，比例系数$k=0.020\mathrm{T/s}$．一电阻不计的金属杆可在导轨上无摩擦地滑动，在滑动过程中保持与导轨垂直，在$t=0$时刻，金属杆紧靠在P、Q端，在外力作用下，杆以恒定的加速度从静止开始向导轨的另一端滑动，求在$t=6.0\mathrm{s}$时金属杆所受的安培力．



答案 $1.44\times10^{-3}\mathrm{N}$

解析 设金属杆的加速度为a，在t时刻，杆与初始位置的距离$x=\dfrac{1}{2}at^2$，此时杆的速度$v=at$，这时杆与导轨构成的回路面积$S=xl$．假设匀强磁场方向竖直向下，金属杆切割磁感线产生的电动势为$E_1=Blv$，方向为逆时针．若金属杆不动，由于磁感应强度变化产生的电动势为$E_2=\dfrac{\Delta B}{\Delta t}S$，根据楞次定律判断它的方向也为逆时针．所以回路中的总感应电动势$E=E_1+E_2=kS+Blv$，回路总电阻$R=2xr_0$，感应电流为$I=\dfrac{E}{R}$，作用于杆的安培力$F=BIl$，

联立解得：$F=\dfrac{3k^2l^2}{2r_0}t=1.44\times10^{-3}\mathrm{N}$．

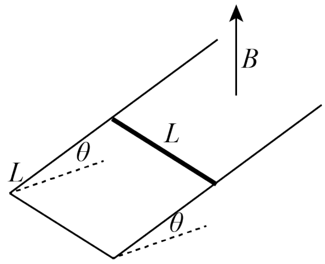
故答案为：$1.44\times10^{-3}\mathrm{N}$．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 电磁感应综合问题 > 单棒轨道模型

电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 感生电动势的计算和本质 > 感生电动势计算

32 **2018年河北石家庄高二学而思**

如图所示，光滑平行U形轨道相距为L，倾角为θ，一质量为m、电阻为R、长为L的导体棒置于距导轨底端L处，空间存在竖直向上的变化磁场，磁感应强度$B=B_0+kt\,(k>0)$，现在导体棒上加一沿斜面向上的力，使导体棒始终保持静止，重力加速度为g，则t时刻的力$F=$ ______ .



答案 $\dfrac{(B_0+kt)\,kL^3\cos^2\theta}{R}+mg\sin\theta$

解析 根据法拉第电磁感应定律，有$E=\dfrac{\Delta B}{\Delta t}S=kL^2\cos\theta$.

回路中的感应电流$I=\dfrac{E}{R}=\dfrac{kL^2\cos\theta}{R}$.

导体棒受到的安培力$f=BIL=\dfrac{(B_0+kt)\,kL^3\cos\theta}{R}$.

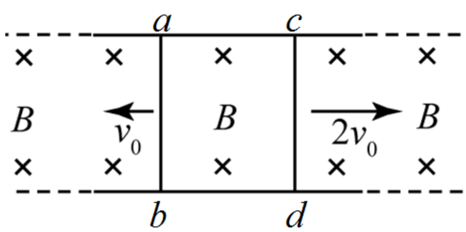
导体棒的受力如图所示，根据平衡条件，有

$F=f\cos\theta+mg\sin\theta=\dfrac{(B_0+kt)\,kL^3\cos^2\theta}{R}+mg\sin\theta$.

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律

33 **2008年北京大学自主招生第4题**

如图所示，两条电阻可以忽略不计的金属长导轨固定在一个水平面上，互相平行，相距l . 另外两根长度都是l，质量都是m，电阻都是R的导体棒ab、cd，可以在长导轨上无摩擦地左右滑动 . 在讨论的空间范围内，存在着竖直向下的匀强磁场，磁感应强度大小为B . 开始时，右侧的导体棒具有朝右的初速度$2v_0$，左侧的导体棒具有朝左的初速度v_0 .



(1) 计算开始时流过两根导体棒的电流强度，以及各自所受安培力的大小和方向 .

(2) 当两根导体棒中有一根先停止运动时，再计算此时两棒所受安培力的大小和方向 .

答案 (1) ab：$\frac{3B^2l^2v_0}{2R}$，方向向右；cd：$\frac{3B^2l^2v_0}{2R}$，方向向左

(2) ab：$\frac{B^2l^2v_0}{2R}$，方向向右；cd：$\frac{B^2l^2v_0}{2R}$，方向向左

解析 (1) 开始时，ab、cd产生的感应电动势方向相同，总电动势为

$E=Blv_0+2Blv_0=3Blv_0$；

感应电流$I=\frac{E}{2R}=\frac{3Blv_0}{2R}$；

ab受到的安培力为$F_{ab}=IBl=\frac{3B^2l^2v_0}{2R}$，方向向右；

cd受到的安培力为$F_{cd}=IBl=\frac{3B^2l^2v_0}{2R}$，方向向左．

(2) ab、cd棒中的电流始终相同，则所受安培力始终大小相同、方向相反，系统动量守恒．ab棒先停下来，设此时cd速度为v，则：

$m(2v_0)-mv_0=0+mv$，

解得$v=v_0$．

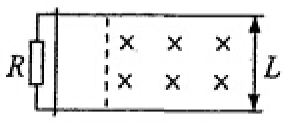
此时感应电动势：$E'=Blv_0$，感应电流$I'=\frac{E'}{2R}=\frac{Blv_0}{2R}$；

ab受到的安培力为$F_{ab}=I'Bl=\frac{B^2l^2v_0}{2R}$，方向向右；

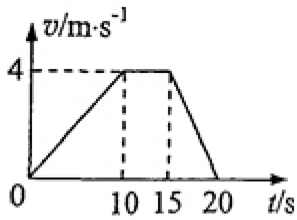
cd受到的安培力为$F_{cd}=I'Bl=\frac{B^2l^2v_0}{2R}$，方向向左．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律

34 如图（a），两相距$L=0.5\text{m}$的平行金属导轨固定于水平面上，导轨左端与阻值$R=2\Omega$的电阻连接，导轨间虚线右侧存在垂直导轨平面的匀强磁场．质量$m=0.2\text{kg}$的金属杆垂直置于导轨上，与导轨接触良好，导轨与金属杆的电阻可忽略．杆在水平向右的恒定拉力作用下由静止开始运动，并始终与导轨垂直，其$v-t$图像如图（b）所示．在15s时撤去拉力，同时使磁场随时间变化，从而保持杆中电流为0．求：



图（a）



图（b）

(1) 金属杆所受拉力的大小F；

(2) $0-15\text{s}$内匀强磁场的磁感应强度大小B_0；

(3) 15–20s内磁感应强度随时间的变化规律．

答案 (1) $F=0.24\text{N}$

(2) $B_0=0.4\text{T}$

(3) $B_t=\dfrac{20}{50+(t-15)(25-t)}$

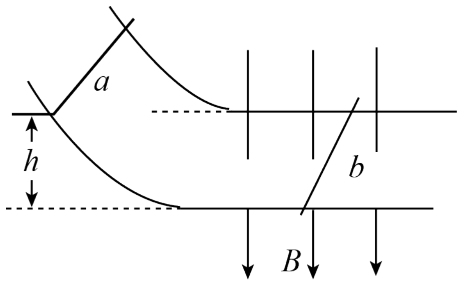
解析 (1) 略

(2) 略

(3) 略

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律

35 如图所示，金属棒a从高h处自静止沿光滑的弧形平行金属导轨下滑，进入轨道的水平光滑部分以后在自上向下的匀强磁场B中运动．在轨道的水平部分原来静止地放着另一根金属棒b，已知两棒质量关系为$m_a=2m_b$．如果两棒始终没有相碰，试求两棒的最终速度分别为多少？

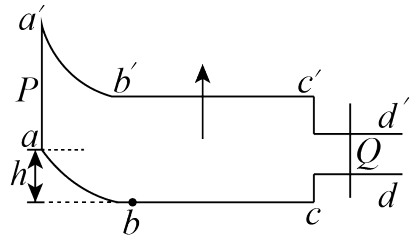


答案 速度均为$\frac{2}{3}\sqrt{2gh}$

解析 略

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律

36 光滑平行异形导轨$abcd$与$a'b'c'd'$如图所示，轨道的水平部分bcd处于竖直向上的匀强磁场中，bc段轨道宽度是cd段轨道宽度的2倍，轨道足够长，将质量相同的金属棒P和Q分别置于轨道上的ab段和cd段，将P棒从距水平轨道高为h的地方由静止释放，使其自由下滑，求棒P和Q的最终速度．



答案 $v_P=\frac{1}{5}\sqrt{2gh}$，$v_Q=\frac{2}{5}\sqrt{2gh}$

解析 方法一：设P、Q棒的质量为m，长度分别为$2L$和L，磁感强度为B，P棒进入水平轨道的速度为v，对于P棒，金属棒下落h过程应用动能定理：$mgh=\frac{1}{2}mv^2$，解得棒刚进入磁场时的速度为：$v=\sqrt{2gh}$，

当P棒进入水平轨道后，切割磁感线产生感应电流．P棒受到安培力作用而减速，Q棒受到安培力而加速，Q棒运动后也将产生感应电动势，与P棒感应电动势反向，因此回路中的电流将减小．最终达到匀速运动时，回路的电流为零，

所以：$E_P=E_Q$，即：$2BLv_p=BLv_Q$，$2v_P=v_Q$，因为当P、Q在水平轨道上运动时，它们所受到的合力并不为零．$F_p=2BIL$，$F_Q=BIL$（设I为回路中的电流），因此P、Q组成的系统动量不守恒．设P棒从进入水平轨道开始到速度稳定所用的时间为Δt，对P、Q分别应用动量定理得：$-F_p\Delta t=-2BIL\Delta t=mv_P-mv$①，$F_Q\Delta t=BIL\Delta t=mv_Q-0$，$2v_p=v_Q$③，

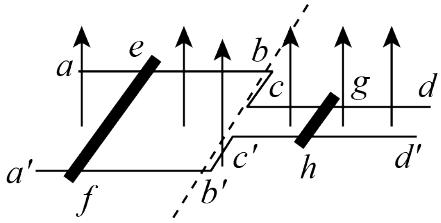
解得：$v_P=\frac{1}{5}\sqrt{2gh}$，$v_Q=\frac{2}{5}\sqrt{2gh}$

方法二：P棒下滑过程机械能守恒，滑至水平轨道有一定的速度，切割磁感线，回路中产生感应电流为逆时针方向，由左手定则可以判断，P棒受安培力向左，Q棒受安培力向右，所以P棒做减速运动，Q棒做加速运动．因bc轨道宽是cd轨道宽的2倍，所以当Q棒速度是P棒速度的2倍时，回路中的磁通量不再变化，即此时回路中无感应电流，则PQ不再受安培力，速度不再变化即为最终速度．P棒下滑过程，由机械能守恒有$mgh=\frac{1}{2}mv^2$ ①，P棒减速、Q棒加速的过程，由动量定理有：对P棒$I_P=-F_Pt=m(v_P-v)$②，对Q棒$I_Q=F_Qt=m\cdot v_Q$③且有$F_P=2F_Q$④，$v_Q=2v_P$⑤，①～⑤式联立求解得$v_P=\frac{1}{5}\sqrt{2gh}$，$v_Q=\frac{2}{5}\sqrt{2gh}$

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律

下面再补充一道难度较大的双导棒问题，老师可以选用。

37 如图所示，$abcd$和$a'b'c'd'$为水平放置的平行导轨，区域内充满方向竖直向上的匀强磁场．虚线右方磁感应强度为$3B$，左方磁感应强度为B．ab、$a'b'$间的宽度为$2L$，cd、$c'd'$间的宽度为L，导轨ab、$a'b'$是光滑的．杆gh的电阻为R、质量为m，cd、$c'd'$与杆gh间的摩擦力为$\frac{mg}{5}$．设导轨足够长，导体棒ef的质量是棒gh的2倍，导体棒ef的电阻是棒gh的2倍．现给导体棒ef一个水平向左的恒力$F=\frac{mg}{5}$，使它由静止开始沿导轨向左运动，求电路达到稳定时，回路中的电流强度．



答案 $I=\frac{4mg}{55BL}$．

解析 最终的稳定状态可不可能是两者都做匀速直线运动？根据题目所给数据关系可知，两棒所受安培力$F_{ef}:F_{gh}=I\cdot B\cdot 2L:I\cdot 3B\cdot L=2:3$，且棒$ef$一个水平向左的恒力$F=\frac{mg}{5}$，棒$gh$受到摩擦力$\frac{mg}{5}$，显然二者不可能同时受力平衡，因此本题的稳定状态不是两棒都做匀速直线运动．那么最终的稳定状态是怎样的呢？当电路中达到稳定时，应有两棒受力恒定⇔电流恒定，两棒将做匀加速直线运动．下面求解稳定后的回路电流．

电流恒定⇔总电动势恒定．即$\varepsilon=\varepsilon_{ef}-\varepsilon_{gh}=B2Lv_{ef}-3BLv_{gh}$恒定．

两导棒均做匀变速直线运动，因此达到稳定状态后，

$\varepsilon=B2Lv_{ef}-3BLv_{gh}=2BL(v_{0ef}+a_{ef}t)-3BL(v_{0gh}+a_{gh}t)$恒定，

$\Rightarrow 2BLa_{ef}-3BLa_{gh}=0$，

$\Rightarrow 2a_{ef}=3a_{gh}$．

对棒ef有：$\frac{mg}{5}-I\cdot B\cdot 2L=2ma_{ef}$．

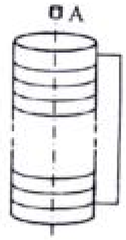
对棒gh有：$I\cdot 3B\cdot L-\frac{mg}{5}=ma_{gh}$．

联立解得：$I=\frac{4mg}{55BL}$．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 电磁感应综合问题 > 双棒轨道模型

例题说明：下面这道题目用能量求解比较简单。

38 如图所示，电阻为R的长直螺线管，其两端通过电阻可忽略的导线相连接．一个质量为m的小条形磁铁A从静止开始落入其中，经过一段距离后以速度v做匀速运动．假设小磁铁在下落过程中始终沿螺线管的轴线运动且无翻转．



(1) 定性分析说明：小磁铁的磁性越强，最后运动的速度就越小．

(2) 小磁铁做匀速运动时在回路中产生的感应电动势约为多少？

答案 (1) 根据楞次定律，小磁铁的磁性越强，通过导线环的磁通量越大，磁通量变化越大，因此下落过程中在导线环中产生的感应电流越大，感应电流产生的磁场也就越强，从而对小磁铁的阻碍也就越大，小磁铁向下运动的加速度就越小，因此小磁铁最后匀速运动的速度就越小

(2) $E=\sqrt{mgRv}$

解析 (1) 根据楞次定律，小磁铁的磁性越强，通过导线环的磁通量越大，磁通量变化越大，因此下落过程中在导线环中产生的感应电流越大，感应电流产生的磁场也就越强，从而对小磁铁的阻碍也就越大，小磁铁向下运动的加速度就越小，因此小磁铁最后匀速运动的速度就越小．

(2) 设小磁铁匀速运动时，下落距离h，在此过程中有：$Q=mgh$

式中Q为小磁铁匀速下落高度h过程中螺线管中产生的热量，

又因$Q=\dfrac{E^2}{R}t$，$h=vt$

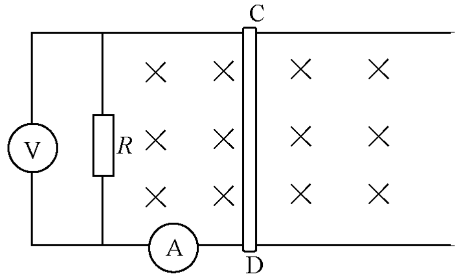
所以$mgh=\dfrac{E^2}{R}\dfrac{h}{v}$解得$E=\sqrt{mgRv}$．

标注 电磁感应及其应用 > 楞次定律和右手定则

教师版说明：下面几道题目涉及微元法。

39 如图所示，电阻$r=0.3\Omega$、质量$m=0.1\text{kg}$的金属棒CD垂直跨搁在位于水平面上的两条平行光滑金属轨道上，两导轨间距为L，棒与导轨间接触良好，导轨左端接有$R=0.5\Omega$的电阻，量程为$0\sim3.0\text{A}$

的电流表串接在一条轨道上，量程为0~1.0V的电压表接在电阻R两端，垂直导轨平面的匀强磁场向下穿过平面，现以向右恒定外力F使金属棒右移，当金属棒以$v = 2\mathrm{m/s}$的速度在导轨平面上匀速滑动时，观察到电路中一个电表正好满偏，而另一个电表未满偏．求：



(1) 拉动金属棒的外力F多大？

(2) 此时撤去外力F，金属棒将逐渐慢下来，最终停止在导轨上，求从撤去外力到金属棒停止运动的过程中通过电阻R的电量．

答案 (1) 1.6N

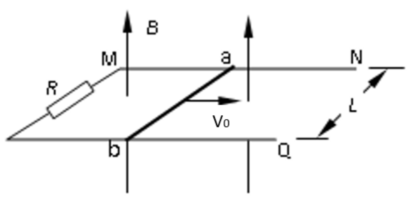
(2) 0.25C

解析 (1) 略

(2) 略

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律

40 质量为m的跨接杆可以无摩擦地沿水平的平行导轨滑动，两轨之间宽为l．导轨和电阻为R的电阻器连接，放在竖直方向的均匀磁场中，磁感应强度为B，跨接杆初速度为v_0，如图所示．试求跨接杆到停下来所滑行的距离．



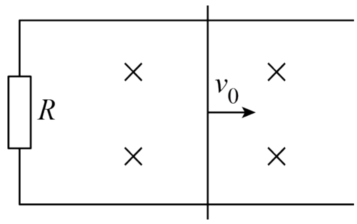
答案 $s = \dfrac{mRv_0}{B^2l^2}$

解析 $s = \dfrac{mRv_0}{B^2l^2}$

标注 磁场 > 安培力

下面再补充一道类似的问题，老师可以作为练习。

41 如图所示，两个光滑的水平导轨间距为l，左侧连接有阻值为R的电阻，磁感应强度为B的匀强磁场垂直穿过导轨平面，有一质量为m的导体棒以初速度v_0向右运动，设除左边的电阻R外，其他电阻不计．棒向右移动最远距离为s，问当棒运动到λs时$\lambda\in 0-1$，证明此时电阻R上的热功率为$P=\dfrac{B^2l^2(1-\lambda)^2v_0^2}{R}$．



答案 当导棒向右运动速度为v时，由法拉第电磁感应定律，产生的感应电动势$\varepsilon=Blv$，

感应电流$I=\dfrac{\varepsilon}{R}$；

导棒受到的安培力$F=BIl$；

联立可得：$F=\dfrac{B^2l^2v}{R}$

在Δt时间内，由动量定理得$-\dfrac{B^2l^2v}{R}\Delta t=m\Delta v$，即$-\dfrac{B^2l^2}{R}\Delta x=m\Delta v$ ①

在从初始运动到向右移动距离最远的过程中，①式为$-\dfrac{B^2l^2}{R}s=0-mv_0$ ②

在从初始运动到向右移动λs的过程中，①式为$-\dfrac{B^2l^2}{R}\lambda s=mv-mv_0$ ③

联立②③解得：$v=(1-\lambda)v_0$

此时电阻上的热功率$P_Q=P=Fv=\dfrac{B^2l^2(1-\lambda)^2v_0^2}{R}$

解析 当导棒向右运动速度为v时，由法拉第电磁感应定律，产生的感应电动势$\varepsilon=Blv$，

感应电流$I=\dfrac{\varepsilon}{R}$；

导棒受到的安培力$F=BIl$；

联立可得：$F=\dfrac{B^2l^2v}{R}$

在Δt时间内，由动量定理得$-\dfrac{B^2l^2v}{R}\Delta t=m\Delta v$，即$-\dfrac{B^2l^2}{R}\Delta x=m\Delta v$ ①

在从初始运动到向右移动距离最远的过程中，①式为$-\dfrac{B^2l^2}{R}s=0-mv_0$ ②

在从初始运动到向右移动λs的过程中，①式为$-\dfrac{B^2l^2}{R}\lambda s=mv-mv_0$ ③

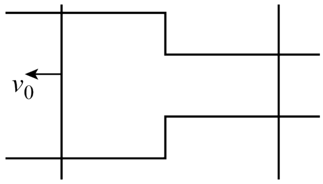
联立②③解得：$v=(1-\lambda)v_0$

此时电阻上的热功率$P_Q=P=Fv=\dfrac{B^2l^2(1-\lambda)^2v_0^2}{R}$.

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律

42 **2017~2018学年北京海淀区清华大学附属中学高二下学期期中第26题8分**

如图所示，水平光滑导轨上垂直放置两根质量均为m且有电阻的金属杆，导轨宽处与窄处间距比为$2:1$，空间存在竖直向下匀强磁场，现给左边的杆一个初速度v_0，在系统稳定时，左杆仍在宽轨上运动，右杆仍在窄轨上运动，则这个过程产生的热量Q= ______ .



答案 $\dfrac{2}{5}mv_0^2$

解析 当系统稳定时，设左杆速度为v_1，右杆速度为v_2，在此过程中金属杆的平均电流为$\bar{I}$，根据动量定理，有：

$-2B\bar{I}l\Delta t=mv_1-mv_0$， ①

$B\bar{I}l\Delta t=mv_2$. ②

联立式①和式②，得$v_1+2v_2=v_0$.

③

系统稳定时，回路中无电流，则有$2Blv_1-Blv_2=0$.

④

即$2v_1=v_2$. ⑤

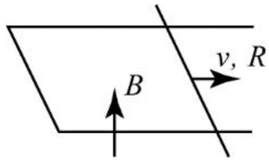
联立式③和式⑤，得$v_1=\dfrac{1}{5}v_0$，$v_2=\dfrac{2}{5}v_0$.

产生的热量为$Q=\dfrac{1}{2}mv_0^2-\left(\dfrac{1}{2}mv_1^2+\dfrac{1}{2}mv_2^2\right)=\dfrac{2}{5}mv_0^2$.

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律

43 **2015年北京清华大学自主招生领军计划第4题**

如图所示，光滑且不计电阻的导轨上有一金属棒，金属棒电阻为R，初速度为$v_0=1\mathrm{m/s}$，空间中有恒定的垂直于导轨平面的磁场，感感应强度为B，当金属棒减速到$\frac{v_0}{10}$时，用时$1\mathrm{s}$．速度识别器最低记录是$0.001\mathrm{m/s}$，求总共记录的该导体棒运动时间为多少？



答案 3s

解析 设导轨宽度为L，t时刻速度v，则

$\varepsilon=BLv$，$I=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{BLv}{R}$

金属棒受力大小为$F=-BIL=-\frac{B^2L^2v}{R}$负号表示$F$方向与$v$方向相反

由牛顿第二定律，可得

$F=ma=m\frac{dv}{dt}$

即$m\frac{dv}{dt}=-\frac{B^2L^2v}{R}$，

$\frac{dv}{dt}=-\frac{B^2L^2v}{mR}$

积分$\int_{v_0}^{\frac{v_0}{10}}\frac{dv}{v}=\int_0^{t_1}-\frac{B^2L^2\mathrm{d}t}{mR}$

$\int_{v_0}^{\frac{v_0}{1000}}\frac{dv}{v}=\int_0^{t_2}-\frac{B^2L^2\mathrm{d}t}{mR}$（其中$t_1=1\mathrm{s}$，$t_2$即为要求的时间）

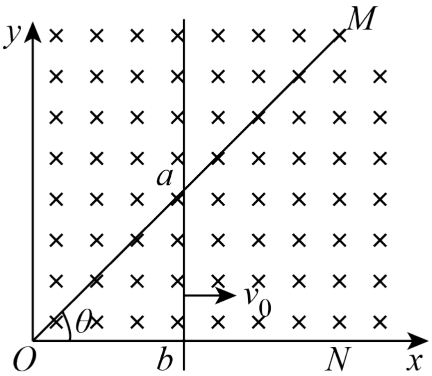
即$-\frac{B^2L^2t_1}{mR}=\ln v\Big|_{v_0}^{\frac{v_0}{10}}=\ln\frac{1}{10}=-\ln 10$，

$-\frac{B^2L^2t_2}{mR}=\ln v\Big|_{v_0}^{\frac{v_0}{1000}}=\ln\frac{1}{1000}=-\ln 1000=-3\ln 10$

所以$t_2=3t_1=3\mathrm{s}$

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律

44 如图所示，顶角$\theta=45^\circ$的金属导轨MON固定在水平面内，导轨处在方向竖直、磁感应强度为B的匀强磁场中．一根与ON垂直的导体棒在水平外力作用下以恒定速度v_0沿导轨MON向右滑动，导体棒的质量为m，导轨与导体棒单位长度的电阻均为r．导体棒与导轨接触点为a和b，导体棒在滑动过程中始终保持与导轨良好接触．$t=0$时，导体棒位于顶角O处．求：



(1) t时刻流过导体棒的电流强度I和电流方向．

(2) 导体棒作匀速直线运动时水平外力F的表达式．

(3) 导体棒在$0-t$时间内产生的焦耳热Q．

(4) 若在t_0时刻将外力F撤去，导体棒最终在导轨上静止时的坐标x．

答案

(1) $I=\dfrac{E}{R}=\dfrac{Bv_0}{(2+\sqrt{2})r}$、由$b$向$a$．

(2) $F=F=BIl=\dfrac{B^2v_0^2t}{(2\sqrt{2})r}$．

(3) $Q=\dfrac{P}{2}t=\dfrac{B^2v_0^3t^2}{2(2\sqrt{2})r}$．

(4) $x=\sqrt{\dfrac{2(2+\sqrt{2})mv_0r}{B^2}(v_0t_0)^2}$．

解析

(1) 0到t时间内，导体棒的位移：$x=v_0t$，

t时刻，导体棒的长度：$L=x$，

导体棒的电动势： $E=Blv_0$，

回路总电阻：$R=(2x+\sqrt{2}x)r$，

电流强度：$I=\dfrac{E}{R}=\dfrac{Bv_0}{(2+\sqrt{2})r}$，

电流方向为b到a．

(2) 匀速直线运动时，安培力等于拉力．

$F=BlI=\dfrac{B^2v_0^2t}{(2+\sqrt{2})r}$．

(3) t时刻导体棒的电功率$P=I^2R'$，

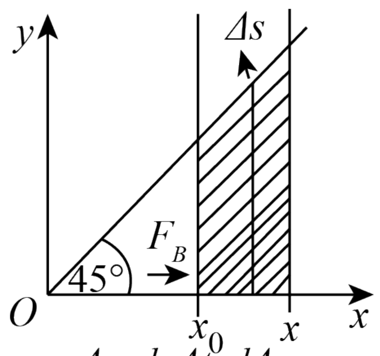
由于I恒定，$R'=v_0rt$正比于t，

因此$\overline{P}=I^2\overline{R}=\dfrac{1}{2}I^2R'$，

$Q=\overline{P}t=\dfrac{B^2v_0^3t^2}{2(2+\sqrt{2})r}$．

(4) 撤去外力后，设任意时刻t导体棒的坐标为x，速度为v，取很短时间Δt或很短距离Δx

，



在$t \sim t+\Delta t$时间内，由动量定理得：

$BlI\Delta t = m\Delta v \sum \frac{B^2}{(2+\sqrt{2})r}(lv\Delta t) = \sum m\Delta v = \frac{B^2}{(2+\sqrt{2})r}\Delta S = mv_0$，

扫过面积$\Delta S = \frac{(x_0+x)(x-x_0)}{2} = \frac{x^2-x_0^2}{2}(x_0 = v_0 t_0)$得，

$x = \sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})mv_0 r}{B^2} + (v_0 t_0)^2}$，

或设滑行距离为d，

则$\Delta S = \frac{v_0 t_0 + (v_0 t_0 + d)}{2} d$．

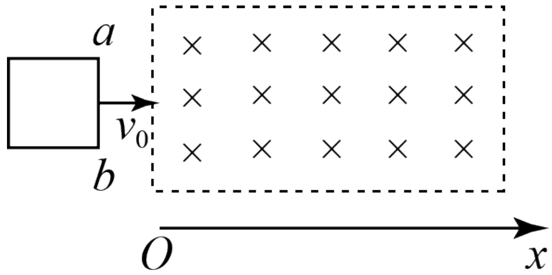
即$d^2 + 2v_0 t_0 d - 2\Delta S = 0$，

解之$d = -v_0 t_0 + \sqrt{2\Delta S + (v_0 t_0)^2}$，

得$x = v_0 t_0 + d = \sqrt{2\Delta S + (v_0 t_0)^2} = \sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})mv_0 r}{B^2} + (v_0 t_0)^2}$．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律

45 如图所示，阻值为R，质量为m，边长为l的正方形金属框位于光滑水平面上金属框的ab边与磁场边缘平行，并以一定的初速度进入矩形磁场区域，运动方向与磁场边缘垂直．磁场方向垂直水平面向下，在金属框运动方向上的长度为$L(L > l)$．设金属框的ab边进入磁场后，框的运动速度与ab边在磁场中的位置坐标之间关系为$v = v_0 - cx\,(x < l)$，式中c为未知的正值常量．若金属框完全通过磁场后恰好静止，求：



(1) 磁场的磁感应强度．

(2) 从线框进入磁场区域到线框ab边刚出磁场区域的运动过程中安培力所做的功．

答案

(1) $\sqrt{\dfrac{mv_0R}{2l^3}}$

(2) $-\dfrac{3}{8}mv_0^2$

解析

(1) 线框进入磁场过程中，设某时刻ab边的速度为$，此时有：$\varepsilon = Blv$，回路电流$I = \dfrac{\varepsilon}{R}$，线框所受安培力$F = IBl$，联立解得：$F = \dfrac{B^2l^2v}{R}$$．

从ab边进入磁场到速度为$时，由动量定理得：$\sum -F\Delta t = mv - mv_0$$；

即$-\dfrac{B^2l^2}{R}\sum v\Delta t = mv - mv_0$；

解得：$-B^2l^2x = mR(v - v_0)$，即$v = v_0 - \dfrac{B^2l^2x}{mR}$．

对照题设关系$v = v_0 - cx$，易知$c = \dfrac{B^2l^2}{mR}$．

而金属框完全通过磁场后恰好静止，即$v = v_0 - cl - cl = 0$，则$c = \dfrac{v_0}{2l}$

联立可得：$B = \sqrt{\dfrac{mv_0R}{2l^3}}$．

故答案为：$\sqrt{\dfrac{mv_0R}{2l^3}}$．

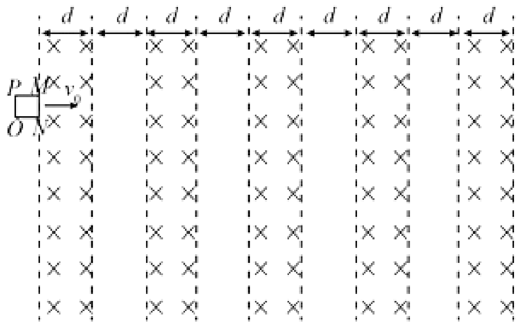
(2) 根据上述分析，在线框进入磁场区域的运动过程中安培力使线框的运动速度的减少量和线框出磁场区域的运动过程中线框速度的减少量是相同的，即$v_0 \to v_0/2$．而整个线框都在磁场区域内运动时，整个线框中无感生电动势，也没有安培力作用．

由动能定理，从线框进入磁场区域到线框ab边刚出磁场区域的运动过程中安培力所做的功为：$W = \left[\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{v_0}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2\right] = -\dfrac{3}{8}mv_0^2$．

故答案为：$-\dfrac{3}{8}mv_0^2$．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 电磁感应综合问题 > 线框模型

46 如图所示，空间等间距分布水平方向的条形匀强磁场，竖直方向磁场区域足够长，磁感应强度$B=1\mathrm{T}$，每一条形磁场区域的宽度及相临条形磁场区域的间距均为$d=0.5\mathrm{m}$．现有一边长$L=0.2\mathrm{m}$、质量$m=0.1\mathrm{kg}$、电阻$R=0.1$的正方形线框$MNOP$以$v_0=7\mathrm{m/s}$的初速度从左侧磁场边缘水平进入磁场．求线框能穿过完整条形磁场区域的个数n．



答案 4个

解析 由题意知，线框在进入和离开磁场的过程中，在水平方向由于安培力的作用将做减速运动．水平速度减小为零以后线框竖直下落，此时穿过完整磁场区域的个数即为所求的n．

设线框穿过一个条形磁场区域磁通量的变化量为$\Delta\varphi_1$，则$\Delta\varphi_1=2BL^2$，设从开始进入磁场到水平速度减小为零，所用时间为Δt，线框磁通量的变化量为$\Delta\varphi$，

由动量定理可知$-F\Delta t=\dfrac{BL\Delta\varphi}{R}=0-mv_0$，故有$\Delta\varphi=\dfrac{Rmv_0}{BL}$．

穿过条形磁场区域的个数$n=\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi_1}=\dfrac{Rmv_0}{2B^2L^3}=4.4$．

所以线框能穿过4个完整条形磁场区域．

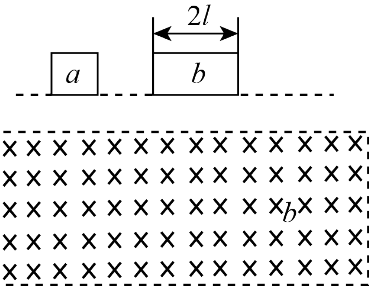
故答案为：4个．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 电磁感应综合问题 > 线框模型

电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 动生电动势

下面再补充一道类似的问题，老师可以选用。

47 如图所示，空间某区域内存在着匀强磁场，磁场的上下边界水平，方向与竖直平面（纸面）垂直；两个由完全相同的导线制成的刚线材框a和b，其形状分别是周长为$4l$的正方形和周长为$6l$的矩形．线框a和b在竖直面内从图示位置自由下落．若从开始下落到线框完全离开磁场的过程中安培力对两线框的冲量分别为I_a、I_b，则$I_a:I_b$为（　　）



A. 3 : 8

B. 1 : 2

C. 1 : 1

D. 3 : 2

答案 A

解析 为了叙述方便，设线框水平长度为d，竖直长度为h，电阻为R．线框只在进、出磁场的两个过程中，安培力有冲量；线圈整体在磁场中时，不受安培力．

在线框进、出磁场的过程中，当线圈速度为v时，产生的感应电动势$\varepsilon=Bdv$，感应电流$I=\dfrac{\varepsilon}{R}=\dfrac{Bdv}{R}$，安培力$F=IBl=\dfrac{B^2d^2v}{R}$．$\Delta t$时间内，安培力的冲量$I=F\Delta t=\dfrac{B^2d^2v}{R}\Delta t=\dfrac{B^2d^2}{R}\Delta x$，则线框进、出磁场过程中安培力的总冲量$I=\sum\dfrac{B^2d^2}{R}\Delta x=\dfrac{B^2d^2}{R}2h$．

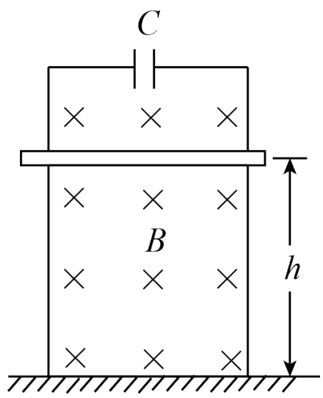
依题意：$\dfrac{d_a}{d_b}=\dfrac{l}{2l}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{R_a}{R_b}=\dfrac{4}{6}$，因此，$\dfrac{I_a}{I_b}=\dfrac{3}{8}$．

故选A．

标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 电磁感应综合问题 > 线框模型

教师版说明：下面的题目涉及电容。

48 如图所示，金属框架竖直放置在绝缘地面上，框架的上端接有一电容为C的电容器，框架上有一质量为m、长为l的金属棒平行于地面放置，与框架接触良好无摩擦，离地高为h．金属框架处在一磁感应强度为B的匀强磁场中，且磁场方向与框架平面相垂直．开始时电容器不带电．现从静止起将棒释放，求棒落到地面的时间．（不计各处电阻）



答案 $\sqrt{\dfrac{2h(m+CB^2l^2)}{mg}}$

解析 棒下落时，切割磁感线产生感应电动势，电容器被充电，回路中有感应电流，棒受到向上的安培力F，它的加速度大小为$a=\dfrac{mg-F}{m}=\dfrac{mg-BIl}{m}$，

$I=\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}=\dfrac{C\Delta U}{\Delta t}=\dfrac{C\cdot Bl\Delta v}{\Delta t}=CBla$，

联立两式可解得：$a=\dfrac{mg}{m+CB^2l^2}$，为定值，

可见金属棒做匀加速直线运动，落地时间为$t=\sqrt{\dfrac{2h}{a}}=\sqrt{\dfrac{2h(m+CB^2l^2)}{mg}}$．

故答案为：$\sqrt{\dfrac{2h(m+CB^2l^2)}{mg}}$．

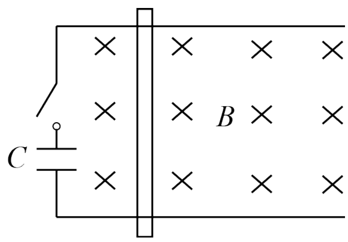
标注 电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 动生电动势

电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 电磁感应综合问题 > 单棒轨道模型

科学思维 > 科学推理

科学思维 > 模型建构

49 如图所示，一根质量为m的导体棒，放置于光滑水平导轨上；两导轨间所接电容值为C，导轨间距为L，整个空间存在磁感应强度为B的匀强磁场．初始时导体棒以速度v匀速运动．某时刻突然合上开关，求导体棒稳定后的速度.



答案 $v_t=\dfrac{mv_0}{m+B^2L^2C}$

解析 当开关闭合后，导体棒切割磁感线产生感应电动势，电容器被充电，回路中有感应电流，导体棒受到安培力，减速运动，感应电动势变小．当感应电动势与电容两端电压相等时，回路中不再有感应电流产生，导体棒不受力，达到稳定状态，此后做匀速直线运动．

设导体棒达到稳定状态后，速度为v_t，此时有$U=\dfrac{Q}{C}$，$\varepsilon=BLv_t$，$U=\varepsilon$，联立化简得

$Q=CBLv_t$①

在整个过程中，对导体棒应用动量定理（以v_0方向为正）：

$\sum -F\Delta t=mv_t-mv_0\Rightarrow -BL\sum I\Delta t=m(v_t-v_0)\Rightarrow BLQ=m(v_0-v_t)$

与①式联立解得：$v_t=\dfrac{mv_0}{m+B^2L^2C}$．

标注 科学思维 > 模型建构

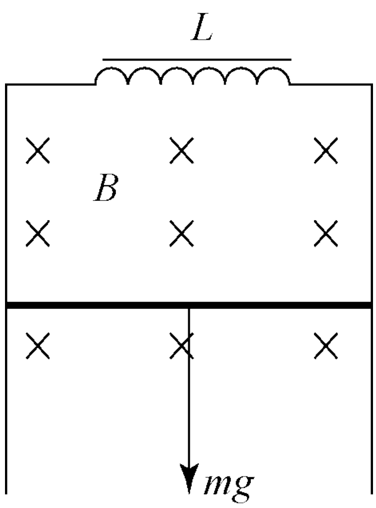
科学思维 > 科学推理

电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 电磁感应综合问题 > 单棒轨道模型

电磁感应及其应用 > 法拉第电磁感应定律 > 动生电动势

教师版说明：下面这道题目与自感线圈结合，老师可以选讲

50 如图所示，电阻不计的足够长光滑导轨竖直放置，宽度为l，上端接一理想自感线圈，自感系数为L（电阻不计），垂直纸面有磁感应强度为B的匀强磁场穿过，电阻不计、质量为m的导体棒，在重力作用下从静止开始竖直向下运动，假设在下滑过程中导体棒和导轨间保持良好接触，试分析导体棒的运动性质．



答案　导棒做简谐振动

解析　由于理想的电感是没有直电阻的，因此接在恒定电流两端视为短路，而导体棒在下降过程中，速度变化，电流是变化的，因此，电感线圈会对电流变化产生阻碍作用．

设t时刻导棒下落位移为y，速度为v，加速度为a，电流为i．

绕回路一圈电势降落为零，故$L\frac{\Delta i}{\Delta t}=Blv=Bl\frac{\Delta y}{\Delta t}$，即$\sum L\Delta i=\sum Bl\Delta y$，解得：$Li=Bly$．

对导棒由牛顿运动定律：$mg-Bil=ma$，

联立可得：$mg-\frac{B^2l^2}{L}y=ma$，

即$a=g-\frac{B^2l^2}{mL}y$，说明导棒做简谐振动．

故答案为：导棒做简谐振动．

标注　科学思维 > 科学推理

科学思维 > 模型建构

电磁感应及其应用 > 自感、互感和涡流 > 自感和互感

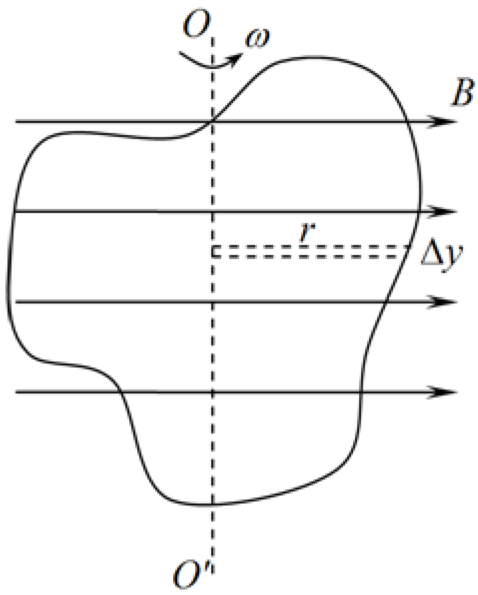
电磁感应及其应用 > 自感、互感和涡流 > 自感现象和互感现象

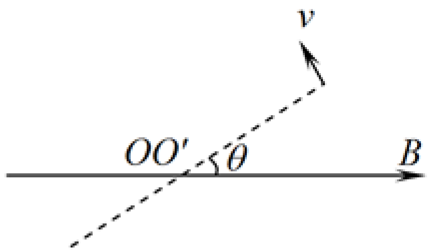
六、交流电

1.知识点睛

在高中课程中，我们推导过矩形线圈绕垂直磁场方向的转轴旋转产生交流电的情况，下面我们来推导更一般的情况。

如图所示，不规则的平面线圈（面积为S）在匀强磁场中绕垂直磁场方向的轴OO'以角速度ω匀速转动，磁感应强度大小为B，初始时刻，线圈平面与磁场方向平行。则t时刻，线圈平面与磁场方向夹角$\theta=\omega t$。由于线圈形状不规则，为了计算此时的感应电动势，需要利用微元法，将线圈分成很多小段。对于Δy的小段，产生的感应电动势$\Delta\varepsilon=B\cdot\Delta y\cdot(\omega r)\cdot cos\theta$；则线圈产生的总感应电动势$\varepsilon=\sum\Delta\varepsilon=\sum B\cdot\Delta y\cdot(\omega r)\cdot cos\theta=B\omega cos\omega t\sum r\Delta y=BS\omega cos\omega t$。若线圈匝数为$N$匝，初始相位为$\varphi$，则感应电动势可写成$\varepsilon=NBS\omega cos(\omega t+\varphi)$。



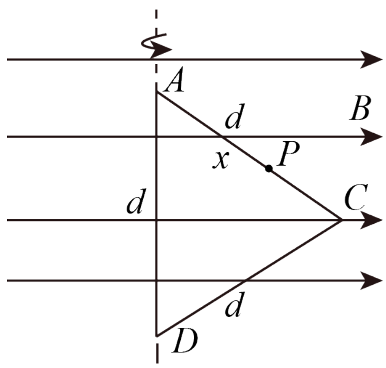


上述推导也可以通过求导的方法完成，t时刻，线圈的磁通量$\Phi = BSsin(\omega t + \varphi)$，则感应电动势$\varepsilon = N\frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega cos(\omega t + \varphi)$，与上述结果相同。

由此可见，我们在高中课程中对矩形线圈推导的结论对不规则形状的线圈仍然适用。上述感应电动势成立的条件只要求：(1) 匀强磁场；(2) 绕垂直于磁场方向的转轴匀速转动；(3) 平面线圈。与线圈的具体形状和转轴的具体位置无关。

2. 例题精讲

51 如图所示，ACD是由均匀细导线制成的边长为d的等边三角形线框，它以AD为转轴，在磁感应强度为B的恒定的匀强磁场中以恒定的角速度ω转动（俯视为逆时针旋转），磁场方向与AD垂直．已知三角形每条边的电阻都等于R．取图示线框平面转至与磁场平行的时刻为$t = 0$，求任意时刻t线框中的电流．

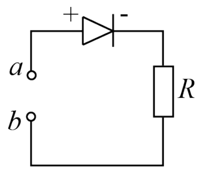


答案 $i = \frac{\sqrt{3}}{12R}B\omega d^2\cos\omega t$

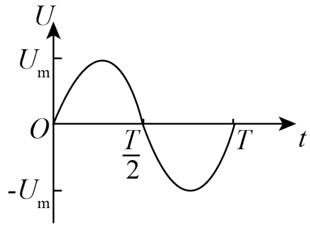
解析　暂无

标注　电磁感应及其应用 > 交变电流 > 认识交变电流

52 已知二极管具有单向导通性，当“+”接高电势、“−”接低电势（即正向电压）时，二极管导通（电路处于通路，电阻不计）；当“+”接低电势、“−”接高电势（即反向电压）时，二极管处于断路状态；但当反向电压大于击穿电压U_0时，二极管被击穿（相当于电路导通）在甲图中ab两端接入乙图所示交流电，其中$U_m > U_0$，求电阻R两端输出电压波形．

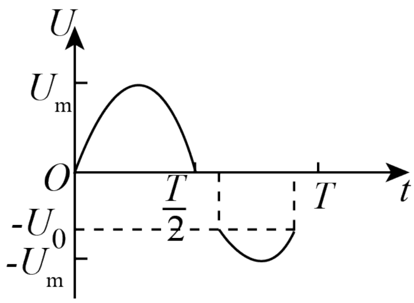


甲



乙

答案



解析　略

标注　电磁感应及其应用 > 交变电流 > 正弦式交变电流

电磁感应及其应用 > 交变电流 > 正弦式交变电流的描述 > 正弦交流电图像解析式