第7讲 功与动能定理

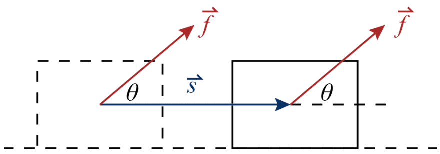
我们知道力是改变物体速度的原因，在外力的作用下物体的速度会发生变化。之前学过的牛顿第二定律就是这一现象的集中表现，另外在第二定律的基础上我们还发展出了动量定理，它告诉我们力对时间的积累，也就是所谓的作用于物体的冲量会使该物体的动量发生变化。除了动量还有一个物理量可以用来描写物体运动的性质，它称之为运动物体的动能。在讲解动能之前，我们先要了解什么是做功。

用力做功，起源于人们在生活中的感觉。手提重物，将它从地面上提升到高处，感觉是要费“功夫”的。提炼成科学的观念，便是手施加的力做了功。“功”的概念在一般人的感觉中是现实的，具体的什么是“能量”？按照麦克斯韦的定义，它是一个物体所具有的做功能力。一个运动着的物体（如冲床上的冲头）具有做功的本领，所以说它具有与物体运动相联系的能量。

一、知识点睛

1. 功的概念

如图，如果一个物体在恒力$\vec{f}$的作用下其方向与物体移动的方向成θ角，产生的位移为$\vec{s}$，那么力$\vec{f}$所做的功$W=\left|\vec{f}\right||\vec{s}|\cos\theta$。



我们看到，功的大小等于力$\vec{f}$、位移$\vec{s}$的模与它们夹角θ的余弦的乘积。

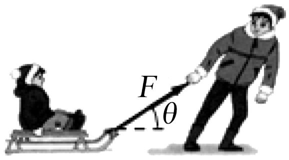
显然当$0\leqslant\theta<90^\circ$时，$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$；当$\theta=90^\circ$时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；当$90^\circ<\theta\leqslant180^\circ$时，$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$。这也是某个力做功会有正功、负功和不做功的原因。

如果力F是一个变力，且物体运动路径为曲线，我们可以把物体的运动分成无限多个小位移，每个小位移上，可以近似认为作用力的大小和方向不变。物体由始点到终点，外力做的功用无限多个元功之和表示：

$$W=\sum\vec{F_i}\cdot\Delta\vec{s_i}$$

头脑风暴

1 如图所示，坐在雪橇上的人与雪橇的总质量为m，在与水平面成角的恒定拉力F作用下，沿水平地面向右移动了一段距离l．已知雪橇与地面间的动摩擦因数为μ，雪橇受到的（　　）



A. 支持力做功为0

B. 重力做功为mgl

C. 滑动摩擦力做功为$-\mu mgl$

D. 拉力做功为$Fl\cos\theta$

答案 AD

解析 A选项：支持力做功$W_N=Nl\cos 90^\circ=0$，故A正确；

B选项：重力做功$W_G=mgl\cos 90^\circ=0$，故B错误；

C选项：雪橇竖直方向受力平衡：$N+F\sin\theta=mg$，则$N=mg-F\sin\theta$，

$f=\mu N=(mg-F\sin\theta)$，则摩擦力做功$W_f=-fl=-\mu(mg-f\sin\theta)$，故C错误；

D选项：拉力做功为$W_F=Fl\cos\theta$，故D正确．

故选AD.

2. 矢量的点乘（数量积）

定义

一般地，如果两个非零矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角为θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$），那么我们把$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$叫做矢量$\vec{a}$与矢量$\vec{b}$的**点乘**（或称**数量积**）（dot product; scalar product），记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$，即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

如果矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$中有一个是零矢量，那么规定它们的数量积为零。两个矢量的数量积是一个标量。上述问题中的功W是力矢量$\vec{f}$与位移矢量$\vec{s}$的数量积。

运算法则

根据向量数量积的定义，不难证明数量积的运算满足下列性质：

对于$\lambda\in R$，有

①$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\geqslant 0$，当且仅当$\vec{a}\cdot\vec{a}=0$时，$\vec{a}=\vec{0}$

②$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

③$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

④$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

对于用坐标表示的向量$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，由数量积运算的性质④，它们的数量积为：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\hat{i}+y_1\hat{j})\cdot(x_2\hat{i}+y_2\hat{j})=(x_1x_2)\hat{i}^2+(x_1y_2+x_2y_1)\hat{i}\cdot\hat{j}+(y_1y_2)\hat{j}^2$$

因为$\hat{i}$、$\hat{j}$是互相垂直的单位向量，所以$\hat{i}^2=1$，$\hat{j}^2=1$，$\hat{i}\cdot\hat{j}=0$，

于是有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$$

即两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积之和。

3. 常见力做功

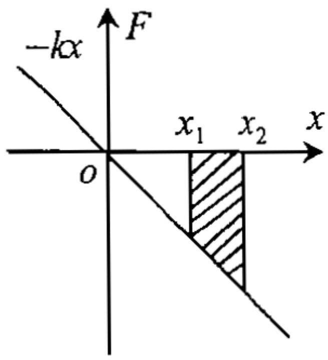
重力

重力是常力。设竖直向下为y轴正方向，物体初始位置y_1，末态位置y_2，则重力所做的功为：

$$W=mg(y_2-y_1)$$

弹簧弹力

弹簧的弹力是变力，力和位移在同一直线上。物体在弹力$\vec{F}=-k\vec{x}$作用下由位置x_1移到位置x_2（x_1、x_2分别为相对于弹簧自然长度的位移量）。弹力做功可以从F~x图中面积计算得到，如图所示



$$W=\frac{1}{2}k(x_1^2-x_2^2)$$

注意，由于弹力是回复力，方向总是指向平衡位置，所以物体从x_1移动到x_2，弹力做负功。

4. 功率

在物理学中，做功的快慢用功率表示。如果从开始计时到时刻t这段时间间隔内，力所做的功为W，则功W跟完成这些功所用时间的比值叫做**平均功率**。用P表示功率，则有：

$$P=\frac{W}{t}$$

与平均功率对应的是**瞬时功率**，根据做功的定义，瞬时功率满足：

$$P=\frac{\Delta W}{\Delta t}=\vec{F}\cdot\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

头脑风暴

2 质量为m的物体，在水平力F的作用下，在光滑水平面上从静止开始运动，则有（　　）

A. 若时间相同，则力对物体做功的瞬时功率跟力F成正比

B. 若作用力相同，则力对物体做功的瞬时功率跟时间t成正比

C. 某时刻力F的瞬时功率大于这段时间内力F的平均功率

D. 某时刻力F的瞬时功率等于这段时间内力F的平均功率

答案 BC

解析 A．物体做匀加速运动，根据牛顿第二定律得：$a=\frac{F}{m}$，则瞬时速度$v=at=\frac{Ft}{m}$，瞬时功率$P=Fv=\frac{F^2t}{m}$，若时间相同，则力对物体做功的瞬时功率跟力F的平方成正比，若作用力相同，则力对物体做功的瞬时功率跟时间t成正比，故A错误，B正确；

C．设某时刻的速度为v，则瞬时功率$P=Fv$，平均功率$\bar{P}=F\bar{v}=F\frac{v}{2}$，所以瞬时功率大于平均功率，故C正确，D错误．

故选BC．

5. 动能定理

考虑一段微小时间Δt内，某物体位移为Δs，根据力做功的定义，结合牛顿第二定律，有以下表达式：

$$\Delta W=F\Delta s=ma\Delta s$$

利用加速度的定义$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$，得到：

$$\Delta W=m\frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta s$$

运用数学技巧化简：

$$\Delta W=m\frac{\Delta s}{\Delta t}\Delta v$$

即：

$$\Delta W=mv\Delta v$$

用计算弹力做功类似的方法，我们可以得到：

$$\Delta W=\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

若在一段时间内，力做的功为W，物体的初、末速度分别为v_0、v的话，可以得到：

$$W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

我们定义$E_k=\frac{1}{2}mv^2$为这个**物体的动能**，则：

$$W=E_k-E_{k0}$$

即合力对物体做功等于物体动能的增加量，这就是**动能定理。**

动量定理是力的**时间积累**效应，**动能定理**是力的**空间积累**效应。

头脑风暴

3 某人用力将一质量为m的物体从离地面高为h的地方竖直上抛，上升的最大高度为H（相对于抛出点）设抛出时初速度为v_0落地时速度为v_t，那么此人在抛出物体过程中对物体所做的功不正确的表达式为（　）

A. mgH　　B. mgh　　C. $\frac{1}{2}mv_t^2-mgh$　　D. $\frac{1}{2}mv_0^2$

答案　B

解析　A．对于从开始抛到最高点由动能定理得$W-mgh=0$．故$W=mgH$．故A正确B错误．

C．对全过程分析可知，在球运动的过程中，球受人的抛击力做功．重力做功且已知被动能和末动能．由动能定理可得$W+mgh=\frac{1}{2}mv_t^2-0$，解得人对球所做的功：$W=\frac{1}{2}mv_t^2-mgh$．故C正确．

D．在人抛击物体的过程中，由动能定理可知$W=\frac{1}{2}mv_0^2$．故D正确．

故选B．

6.质点系动能定理

由N个质点组成的质点系，每个质点都有一个动能定理，作用在质点上的力，既可以是内力，也可以是外力，在质点运动时，这些力将做功。把这N个质点的N个动能定理方程相加，得到：

$$W_{外}+W_{内}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_iv_i^2-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_iv_{i0}^2=E_k-E_{k0}$$

此式表示作用于质点系所有外力做功之和加上所有内力做功之和等于质点系总动能的增量。这就是**质点系的动能定理。**

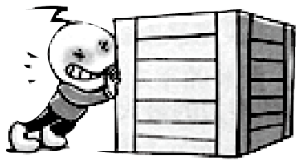
这里应特别指出，质点系的内力对质点系总动量的改变没有贡献，但**内力的作用一般会改变系统的总动能**。这是因为成对出现的力作用时间总是相等的，故其冲量的矢量和必为零；而以内力相互作用的两质点的沿连线方向的位移一般并不相同，故其做功之和不能相互抵消。

有一例外的特例，如果质点系是一个刚体，内力做功之和为零。这是因为刚体在运动中刚体内任意两质点之间的距离保持不变，则沿任意两质点连线方向的一对作用力做功之和必为零。

二、例题精讲

基础训练

4 如图所示，某同学将一木箱沿地面推行$5\mathrm{m}$，他推木箱的力与地面平行，木箱与地面间的动摩擦因数处处相同．他分别按下面两种情形推：①沿水平地面加速推行；②沿水平地面匀速推行．关于木箱受到的力做功情况，分析正确的是（　　）



A. 在①过程中，推力做功较多　　B. 在②过程中，推力做功较多

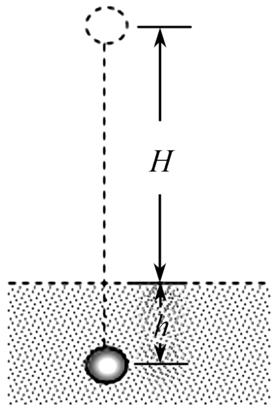
C. 在①过程中，克服摩擦力做功较多　　D. 在②过程中，克服摩擦力做功较多

答案　A

解析　在①过程中，木箱加速运动，则$F_1 = F + ma$，在②过程中木箱匀速运动，则$F_2 = f$．根据$W = Fs\cos\theta$可知，两次位移相同，则①过程中推力做功较多．

故选A．

5 如图所示，将质量m的一块石头从离地面H高处由静止释放，落入泥潭并陷入泥中h深处，不计空气阻力，若$H = 3h$．则（　　）



A. 石头受到平均阻力为$3mg$　　B. 石头受到平均阻力为$4mg$

C. 石头克服阻力所做的功为$3mgh$　　D. 石头克服阻力所做的功为$4mgh$

答案　BD

解析　对石头运动的整个过程，由动能定理可得：

$mg(H+h)-fh=0-0$

又$H=3h$

解之得石头受到平均阻力为：$f=4mg$．

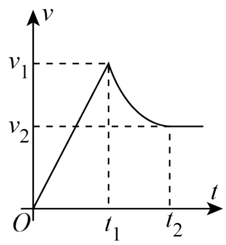
石头克服阻力所做的功为：

$W_f=fh=4mgh$．

故AC错误，BD正确．

所以BD选项是正确的．

6 将一质量为m的小石块从水面上方某处无初速度释放，石块在空气中运动时不计空气阻力，在水中运动时阻力与速度的平方成正比，比例系数为k．其$v-t$图象如图所示，以下判断正确的是（　）



A. t_1时刻至t_2时刻，石块在水中的阻力越来越大

B. 石块初始位置与水面的高度差为$\frac{1}{2}v_1t_1$

C. t_1时刻至t_2时刻，重力的平均功率为$\frac{1}{2}mg(v_1+v_2)$

D. v_2大小为$\sqrt{\frac{mg}{k}}$

答案 BD

解析 A选项：t_1时刻至t_2时刻，石块在水中做加速度减小的减速运动，$ma=f-mg$，速度减小，加速度减小，阻力f减小，故A错误；

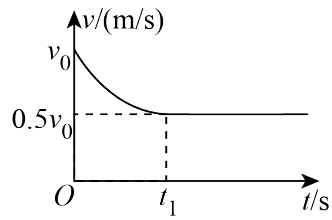
B选项：不计空气阻力，$0-t_1$做自由落体运动，$h=\bar{v}t_1=\frac{1}{2}v_1t_1$，故B正确；

C选项：t_1-t_2做加速度减小的减速运动，平均速度不等于$\frac{1}{2}(v_1+v_2)$，故重力的平均功率不为$\frac{1}{2}mg(v_1+v_2)$，故C错误；

D选项：t_2后做匀速直线运动，$mg=f=kv_2^2$，得$v_2=\sqrt{\frac{mg}{k}}$，故D正确．

故选BD.

7 汽车在平直公路上以速度v_0匀速行驶，发动机的功率为P，司机为合理进入限速区，减小了油门，使汽车功率立即减小一半并保持该功率继续行驶，设汽车行驶过程中所受阻力大小不变，从司机减小油门开始，汽车的速度v与时间t的关系如图所示，则在$0-t_1$时间内下列说法正确的是（　　）



A. 汽车的牵引力不断减小

B. $t=0$时，汽车的加速度大小为$\frac{P}{mv_0}$

C. 汽车行驶的位移为$\frac{v_0t_1}{2}+\frac{3m{v_0}^3}{8P}$

D. 阻力所做的功为$\frac{P}{2}t_1-\frac{3}{8}m{v_0}^2$

答案 C

解析 在$0\sim t_1$时间内：

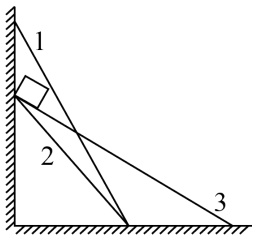
A．减小油门后，机车的功率保持不变，当速度减小时，根据$P=Fv$可知，牵引力增大，故A错误；

B．汽车以速度v_0匀速行驶时，牵引力等于阻力，即有：$F=f$，发动机的功率为P，由$P=Fv_0=fv_0$，得阻力$f=\frac{P}{v_0}$，$t=0$时，功率为原来的一半，速度没有变，则$F=\frac{\frac{P}{2}}{v_0}=\frac{P}{2v_0}$，根据牛顿第二定律得：$a=\frac{F-f}{m}=-\frac{P}{2mv_0}$，故大小为$\frac{P}{2mv_0}$，故B错误;

CD．根据动能定理得：$0.5Pt_1+W_f=\frac{1}{2}m(0.5v_0)^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2$，解得阻力做功为$W_f=-\frac{3}{8}m{v_0}^2-\frac{P}{2}t_1$，设汽车通过的位移为$x$，由$W_f=-fx$，解得，$x=\frac{v_0t_1}{2}+\frac{3m{v_0}^3}{8P}$．故C正确，D错误．

故选C．

8 将三个木板1、2、3固定在墙角，木板与墙壁和地面构成了三个不同的三角形，如图所示，其中1与2底边相同，2和3高度相同．现将一个可以视为质点的物块分别从三个木板的顶端由静止释放，并沿木板下滑到底端，物块与木板之间的动摩擦因数μ均相同．在这三个过程中，下列说法正确的是（　　）



A. 沿着1和2下滑到底端时，物块的速度不同；沿着2和3下滑到底端时，物块的速度相同

B. 沿着1下滑到底端时，物块的速度最大

C. 物块沿着3下滑到底端的过程中，产生的热量是最多的

D. 物块沿着1和2下滑到底端的过程中，产生的热量是一样多的

答案 BCD

解析 对物块从高为h的斜面上由静止滑到底端时，根据动能定理有：

$mgh-W_f=\frac{1}{2}mv^2$①

其中W_f为物块克服摩擦力做的功，

因滑动摩擦力$f=\mu N=\mu mg\cos\theta$，所以物块克服摩擦力做的功为

$W_f=fL=\mu mg\cos\theta\times L=\mu mgL\cos\theta=\mu mgL_{底}$②

由图可知，$L\cos\theta$为斜面底边长，

可见，物体从斜面顶端下滑到底端时，克服摩擦力做功与斜面底端长度$L_{底}$成正比．

A．B因沿着1和2下滑到底端时，物体克服摩擦力做功相同，沿着1重力做功大于沿2重力做功，根据①式得知，沿着1下滑到底端时物块的速度大于沿2下滑到底端时速度；

沿着2和3下滑到底端时，重力做功相同，而沿2物体克服摩擦力做功小于沿3克服摩擦力做功，则由①式得知，沿着2下滑到底端时物块的速度大于沿3下滑到底端时速度；

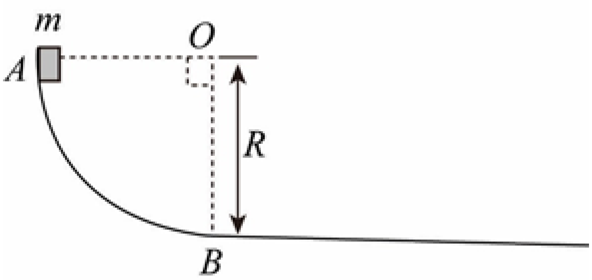
所以沿着1下滑到底端时，物块的速率最大，而沿着3下滑到底端时，物块的速率最小．故A错误．B正确；

C．沿3时克服摩擦力做的功最多，物体的机械能损失最大，产生的热量最多．故C正确；

D．同理，根据以上分析知，物块沿1和2下滑到底端的过程中，产生的热量一样多，故D正确．

故选BCD．

9 AB是竖直平面内的四分之一光滑圆弧轨道，在下端B与水平长直轨道相切，如图所示．一小木块（可视为质点）自A点起由静止开始沿轨道下滑．已知圆轨道半径为R，小木块的质量为m，与水平轨道的动摩擦因数为μ，重力加速度为g．求：



(1) 木块运动到B点时的速度大小v．

(2) 木块在水平轨道上滑行的最大距离s．

答案 (1) $v=\sqrt{2gR}$

(2) $\dfrac{R}{\mu}$

解析 (1) 木块由A到B，由功能定理$mgR=\dfrac{1}{2}mv^2$，

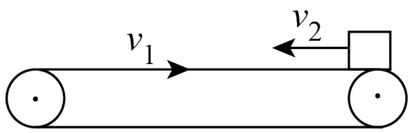
解得$v=\sqrt{2gR}$．

(2) B点到最大位移由动能定理，

$-\mu mgs=0-\dfrac{1}{2}mv^2$，

解得$s=\dfrac{R}{\mu}$，木块在水平轨道上滑行的最大距离为$\dfrac{R}{\mu}$．

10 如图，在匀速转动的电动机带动下，足够长的水平传送带以恒定速率v_1匀速向右运动．一质量为m的滑块从传送带右端以水平向左的速率$v_2(v_2>v_1)$滑上传送带，最终滑块又返回至传送带的右端．就上述过程，下列判断正确的有（　）



A. 滑块返回传送带右端的速率为v_1

B. 此过程中传送带对滑块做功为$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$

C. 此过程中电动机对传送带做功为$2mv_1^2$

D. 此过程中滑块与传送带间摩擦产生的热量为$\frac{1}{2}m(v_1+v_2)^2$

答案　AD

解析　A．由于传送带足够长，滑块受向右的摩擦力，减速向左滑行，至速度为0，之后，再加速向右滑行，由于$v_1<v_2$，物体会先在滑动摩擦力的作用下加速，当速度增大到等于传送带速度时，物体还在传送带上，之后不受摩擦力，故物体与传送带一起向右匀速运动，有$v\prime_2=v_1$，故A正确；

B．此过程中只有传送带对滑块做功根据动能定理$W'=\Delta E_k$得：$W=\Delta E_k=\frac{1}{2}m{v_1}^2-\frac{1}{2}m{v_2}^2$，故B错误；

D．设滑块向左运动的时间t_1，位移为x_1，则：$x_1=\overline{v_2}t_1=\frac{v_2}{2}t_1$，

摩擦力对滑块做功：$W_1=fx_1=f\frac{v_2}{2}t_1$①

又摩擦力做功等于滑块动能的减小，即：$W_1=\frac{1}{2}m{v_2}^2$②

该过程中传送带的位移：$x_2=v_1t_1$，

摩擦力对传送带做功：$W_2=fx_2=fv_1t_1=fv_1\frac{2x_1}{v_2}=2fx\frac{v_1}{v_2}$③

将①②代入③得：$W_2=mv_1v_2$，

设滑块向右匀加速运动的时间t_2，位移为x_3，则：$x_3=\frac{v_1}{2}t_2$，

摩擦力对滑块做功：$W_3=fx_3=\frac{1}{2}m{v_1}^2$，

该过程中传送带的位移：$x_4=v_1t_2=2x_3$，

滑块相对传送带的总位移：$x_{相对}=x_1+x_2+x_4-x_3=x_1+x_2+x_3$，

滑动摩擦力对系统做功：$W_{总}=fx_{相对}=W_1+W_2+W_3=m(v_1+v_2)^2$，

滑块与传送带间摩擦产生的热量大小等于通过滑动摩擦力对系统做功，

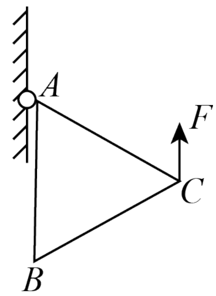
$Q=W_{总}=f\cdot x_{相对}=\frac{1}{2}m(v_1+v_2)^2$，故D正确；

C．全过程中，电动机对皮带做的功与滑块动能的减小量之和等于滑块与传送带间摩擦产生的热量，即$Q=W+\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2$，整理得：$W=Q-\frac{1}{2}mv_2{}^2+\frac{1}{2}mv_1{}^2=mv_1{}^2+mv_1v_2$，故C错误．

故选AD．

进阶拓展

11 如图，框架ABC由三根长度均为l、质量均为m的均匀细棒组成，A端用光滑铰链铰接在墙壁上．现用竖直方向的力F作用在C端，使AB边处于竖直方向且保持平衡，则力F的大小为 ______ ．若在C点施加的作用力改为大小为$1.5mg$、方向始终垂直于AC边的力F'，使框架从图示位置开始逆时针转动，运动过程中当框架具有最大动能时，力F'所做的功为 ______ ．

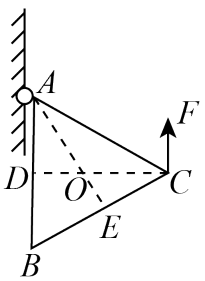


答案 1．mg

2．$0.25\pi mgl$

解析 对框架ABC受力分析，其整体重心在O点，由数学知识可知，$OD=\frac{1}{3}CD$，框架ABC保持平衡，则重力的力矩应等于F的力矩，根据力矩平衡得：$F\cdot CD=3mg\cdot OD$，解得$F=mg$．

使框架从图示位置开始逆时针转动，运动过程中当F'的力矩等于重力力矩时，动能最大，



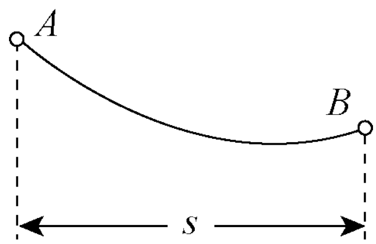
则有：$F'l = 3mg \cdot L$，解得$L = \frac{1}{2}l$，即重心位置距离墙壁的距离为$\frac{1}{2}l$时，动能最大，根据几何关系可知，转过的圆心角为$\theta = \frac{\pi}{6}$．此过程中力F'做的功为：

$W = F'l\theta = 1.5mgl \times \frac{\pi}{6} = 0.25\pi mgl$．

故答案为：mg；$0.25\pi mgl$．

12 滑雪者在图(a)中的A点从静止出发，沿山坡自由下滑，中间不回返、不停顿，滑行中摩擦系数处处为常数μ．设他滑到B点时恰好停止，此时水平位移量为s．

求：A、B两点之间的高度差．(由于下滑速度较小，因各处弯曲而造成的对雪面附加压力可以忽略．空气阻力也可略去，并认为μ与滑雪者的速度无关．)

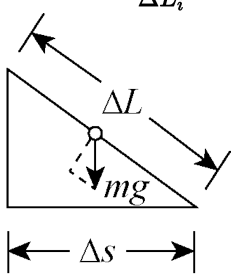


(a)

答案 μs

解析 滑雪者在滑动过程中取一段足够小的水平位移Δs_i，对应的滑行路线可视为小直线段，其长设为ΔL_i，如图(b)所示．滑雪者所受摩擦力易得：

$f_i = \mu mg \cdot \frac{\Delta s_i}{\Delta L_i}$．



(b)

其中m为滑雪者质量．摩擦力所做功为：

$W_i = -\mu mg\frac{\Delta s_i}{\Delta L_i} \cdot \Delta L_i = -\mu mg\Delta s_i$．

滑行全过程中，可通过求和得到摩擦力所做总功：

$W = \sum W_i = -\mu mg\sum s_i = -\mu mgs$．

再根据功能原理，为满足题文要求初、末态速度均为零，摩擦力做的功应等于重力势能的增加量(或根据动能定理，摩擦力和重力做功之和为零)：

$W=mg(-h)$.

因此，A、B两点间高度差为：$h=\mu s$.

故答案为：μs .

13 一列火车质量为M，在额定功率推动下行驶，阻力恒定．火车经过时间t，前进距离s，使速度从v_0达到最大值$v_{\rm m}$，求火车的额定功率P和所受的阻力f .

答案 火车的额定功率P为$\dfrac{\frac{1}{2}Mv_{\rm m}^2-\frac{1}{2}Mv_0^2}{t-\frac{s}{v_{\rm m}}}$；所受的阻力$f$为$\dfrac{\frac{1}{2}Mv_{\rm m}^2-\frac{1}{2}Mv_0^2}{v_{\rm m}t-s}$

解析 由题给出的火车初、末态的速度，即可确定火车动能的增量：

$\Delta E_{\rm k}=\frac{1}{2}Mv_{\rm m}^2-\frac{1}{2}Mv_0^2$ ，

在此过程中，火车受到牵引力F和阻力f的共同作用．写出这两个力在此过程中所做的功，就可以写出动能定理．

阻力在此过程中做的功，表达为：$W_f=-f\cdot s$ ，

牵引力F是变力，它在此过程中做的功可以通过功率写出：$W_F=P\cdot t$ ，

因此，动能定理可以写成：$P\cdot t-f\cdot s=\frac{1}{2}Mv_{\rm m}^2-\frac{1}{2}Mv_0^2$……①

此式有两个未知量：P和f，再找一个方程．考虑到，当火车速度达最大时，火车加速度为零，此时，火车的最大牵引力等于阻力，即$F_{\rm m}=f$ ，

功率表示为：$P=F_{\rm m}\cdot v_{\rm m}=f\cdot v_{\rm m}$……②

联立式①和②，解出火车的额定功率P和所受阻力f为：

$P=\dfrac{\frac{1}{2}Mv_{\rm m}^2-\frac{1}{2}Mv_0^2}{t-\frac{s}{v_{\rm m}}}$ ，

$f=\dfrac{\frac{1}{2}Mv_{\rm m}^2-\frac{1}{2}Mv_0^2}{v_{\rm m}t-s}$.

故答案为：火车的额定功率P为$\dfrac{\frac{1}{2}Mv_{\rm m}^2-\frac{1}{2}Mv_0^2}{t-\frac{s}{v_{\rm m}}}$；所受的阻力$f$为$\dfrac{\frac{1}{2}Mv_{\rm m}^2-\frac{1}{2}Mv_0^2}{v_{\rm m}t-s}$.

三、阅读材料

1.永动机发展史

“力学(mechanics)”和“机械装置(mechanism)”二词，在欧洲各国的语言里是同源的，因为除天文学外，推动力学产生和发展的主要动力是对机械装置原理的研究。机械装置可以有动力传动、运输、工艺、控制，逻辑等各种功能。在第一次工业革命（18世纪60年代到19世纪80年代）以前，工业作坊和手工业工场里使用的机械基本上是工艺机械。那时在生产中代替人力作为动力的，只有畜力、水力和风力。这些能源受到地域、季节等各种条件的限制，使用起来很不方便。由于工业和科学水平的限制，当时人们还不大可能想象出通用的动力机械装置，但是用机械来代替繁重的体力劳动早就是人门的夙愿，很多人把这种愿望的实现寄托在永动机上。

永动机是人们幻想的一种机械装置，它启动后，就自行运转下去，不断做功。企图制造永动机的最早记载，大约出现在13世纪。此后各种永动机的设计层出不穷，一直延续到19世纪工业革命后，势头才有所减弱。即使到今天,还不时有人提出一些实质上并不是永动机的装置，只不过它们伪装得更好，更不易被识破罢了。

历史上最有名的机械永动装置之一是17世纪30年代英国渥塞斯特侯爵制造的。其原理性结构如上图所示，在转动着的大轮子下降的一侧，所有重物都移到比上升的一侧离轴较远的地方，从而可以施加较大的力矩，推动轮子不断地旋转下去。渥塞斯特的轮子直径14英尺，载有50镑的重物40个。他本人的记载中只提到，查理一世和官廷显贵们观看过此轮的运行试验，但未宣布它是否实现了永动的设想。另一有名的例子，是个名叫奥菲罗伊斯的人的发明装置。按照荷兰物理学家赫拉弗桑德的记载，此装置是个用帆布蒙在木架上做成的大鼓，其直径约12英尺，厚14英寸，装在一个铁轴上，可以旋转。他描写道：此鼓从1717年11月到1718年1月在一个锁住的房间里连续地转了两个月，但发明人不让他观察装置的内

部结构。后来，发明人的一位女仆宣称，是她在隔壁的房间里操纵着这个装置。也不知这话是否可信，可是主人感到赫拉弗桑德来者不善，就自己把装置拆掉了。

千万次的失败并没有使所有的人认输，总有一些人陷在永动机梦想的泥潭里不能自拔，并死死纠缠着要别人接受他们的设计方案，在这种情况下巴黎科学院在1775年不得不通过决议，正式宣告拒绝受理永动机方案。直到现在，美英等许多国家的专利局都订有限制接受永动机方案的条款。