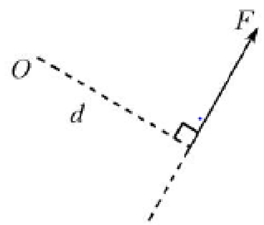
# 第7讲 刚体平衡条件

## 知识点睛

### 力矩平衡

力的三要素是**大小**、**方向**和**作用点**。由作用点和力的方向所确定的射线称为力的作用线。讲力矩，首先要规定矩心，就是对什么点的力矩。力作用于物体，常能使物体发生转动，这时外力的作用效果不仅取决于外力的大小和方向，而且取决于外力作用线与轴的距离——力臂($d$)。




力与力臂的乘积称为力矩，记为$M$，则 $M=Fd$，如图，$O$为垂直于纸面的固定轴，力在纸面内。

**①力矩的作用：**

力矩是改变物体转动状态的原因。力的作用线与轴平行时，此力对物体绕该轴转动没有作用。若力不在与轴垂直的平面内，可先将力分解为垂直于轴的分量

$F_{\perp}$和平行于轴的分量$F_{\parallel}$ ， $F_{\parallel}$对转动不起作用，这时力的力矩为：

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

通常规定绕逆时方向转动的力矩为正。当物体受到多个力作用时，物体所受的总力矩等于各个力产生力矩的代数和。

**②力矩的方向：**

力矩是矢量，其方向通常按右手螺旋定则确定：力矩$M$同时垂直于力臂与力，当右手螺旋从$r$的方向转到$F$的方向时大拇指的方向即为$M$的方向。

**③叉乘：**

$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$称“矢量的叉积”，它是一个新的矢量。

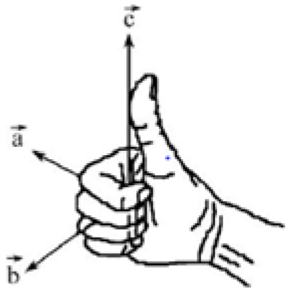
叉乘的大小定义为：

$$|c|=ab\cdot\sin\alpha$$

其中，$\alpha$为$a$和$b$的夹角。

意义：$\vec{c}$的大小对应由$\vec{a}$和$\vec{b}$作成的平行四边形的面积。

叉积的方向：垂直$\vec{a}$和$\vec{b}$确定的平面，并由右手螺旋定则确定方向，如图所示。




注意：$\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$，但有$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

**④转轴：**

转轴可以随意选取，力矩计算的核心技巧是巧选转轴，总的原则是未知力作用线不能通过转轴，其次是其他未知力作用线尽量过轴。

## 平衡条件

**①刚体：**

是指整体及其各部分的形状和大小均保持不变的物体，显然这也是对客观物体的一个抽象，但是质点的抽象更具体一些，因为给出了形状。同时刚体也正因为有了形状，其运动方式要比质点更复杂，除了平动以外，还有刚体可以绕着任意一点做转动。

**②刚体的平衡：**

单纯力给出物体的平动，而力矩可以使物体绕着某个点转动，因此，要让刚体平衡，必须满足两个条件：合力为0以及相对于任意一点的合力矩为0。

$$\begin{cases}\sum F_i=0\\\sum M_i=0\end{cases}$$

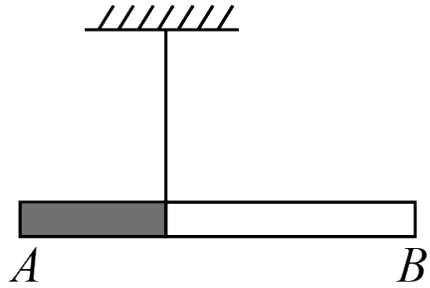
注意：作用在同一刚体（或系统）但不同作用点的力可以平移到同一点进行合力，不同作用点的效果由力矩来体现。

## 例题精讲

基础训练

1

如图所示，将粗细均匀、直径相同的均匀棒$A$和$B$粘合在一起，并在粘合处用绳悬挂起来，恰好处于水平位置而平衡，如果$A$的密度是$B$的2倍，那么$A$的重力大小是$B$的 ______ 倍．

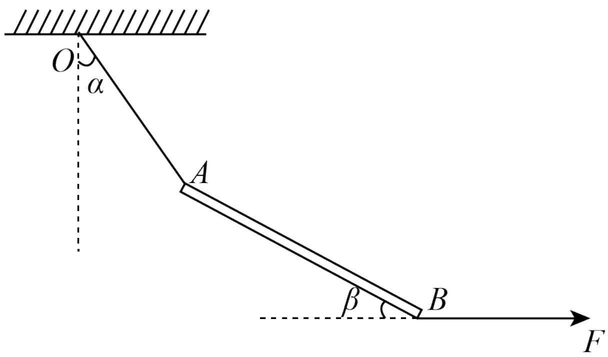



答案 $\sqrt{2}$

解析 设$A$长$l_A$，$B$长$l_B$，那么$A$所受的重力的力的力矩为$\frac{G_A l_A}{2}$，$B$所受的重力力矩为$\frac{G_B l_B}{2}$，两者大小相等，符号相反．由$A$、$B$的密度关系不难推出$\frac{G_A}{G_B}=\frac{2l_A}{l_B}$，由此即可列方程解出$\frac{G_A}{G_B}=\sqrt{2}$．

故答案为：$\sqrt{2}$．

2 如图所示，一根重8N的均质直棒$AB$，某$A$端用悬线悬挂在$O$点，现用$F=6\text{N}$的水平恒力作用于$B$端，当达到静止平衡后，试求：




（1）悬绳与竖直方向的夹角$\alpha$．

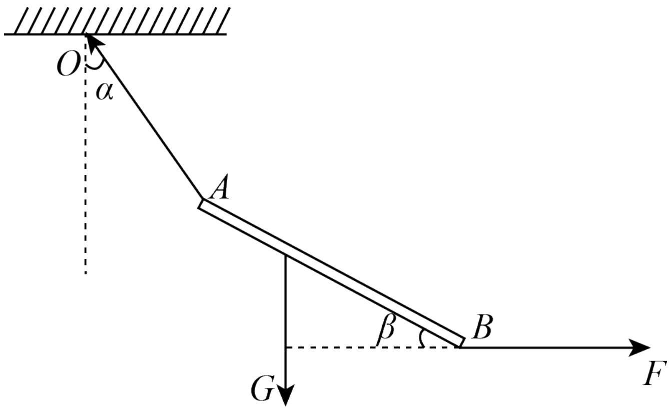
（2）直棒与水平方向的夹角$\beta$．

答案 （1）$37^\circ$

（2）$\arctan\frac{2}{3}$

解析 （1）受力分析如图：$\tan\alpha=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$，$\alpha=37^\circ$．

故答案为：$37^\circ$．

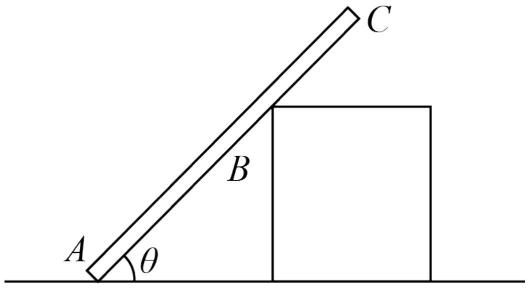



（2）以$A$点为转动轴，由转动平衡可知：$G\times\frac{L}{2}\cos\beta=F\times L\sin\beta$．

解得：$\beta=\arctan\frac{2}{3}$．

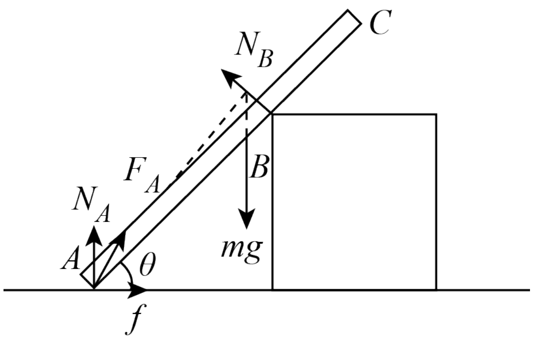
故答案为：$\arctan\frac{2}{3}$．

3 如图所示，均匀直杆一端放在地上，一端斜靠在立方体上（$B$处光滑）作图画出对杆作用力的方向．如果杆长$L$，重$mg$，立方体边长为$a$，杆与水平面成$\theta$角，具体求出$A$处弹力$N_A$和摩擦力$f$．




答案 $N_A=mg-\left[\frac{mgL}{2a}\right]\sin\theta\cos^2\theta$；$f=\left[\frac{mgL}{2a}\right]\sin^2\theta\cos\theta$

解析 地面对杆的作用力（弹力和摩擦力的合力，即为全反力）必和$N_B$、$mg$交于一点，如图所示，




以$A$点为轴，有

$\frac{N_B a}{\sin\theta}=mg\left(\frac{L}{2}\right)\cos\theta$，

$N_A + N_B\cos\theta = mg$，

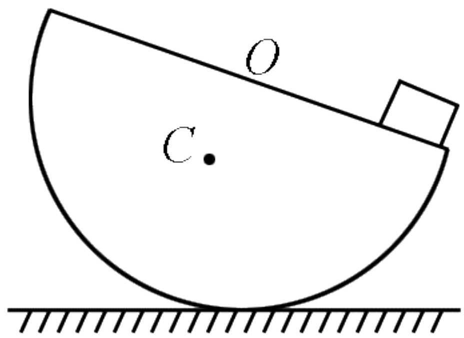
$f = N_B\sin\theta$，

得$f = \left[\dfrac{mgL}{2a}\right]\sin^2\theta\cos\theta$，

$N_A = mg - \left[\dfrac{mgL}{2a}\right]\sin\theta\cos^2\theta$．

故答案为：$N_A = mg - \left[\dfrac{mgL}{2a}\right]\sin\theta\cos^2\theta$；$f = \left[\dfrac{mgL}{2a}\right]\sin^2\theta\cos\theta$．

4 半径为$R$的匀质半球体置于水面上，其重心在球心$O$正下方$C$点处．$OC = \dfrac{3R}{8}$，半球质量为$m$．半球质量为$m$．在半球的平面上放一质量为$\dfrac{m}{8}$的物体，它与半球平面间的动摩擦系数为0.2，如图所示，则物体刚要开始滑动时离球心的最大距离为______．




答案 $0.6R$

解析 设临界情况下直径与水平面夹$\theta$角，如图所示．对整体有$mg\cdot\left(\dfrac{3R}{8}\right)\sin\theta = \left(\dfrac{mg}{8}\right)x\cos\theta$

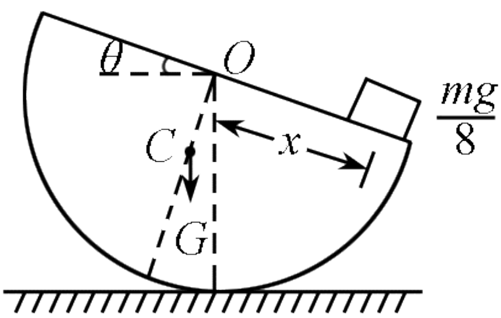
，

得$x = 3R\tan\theta$，

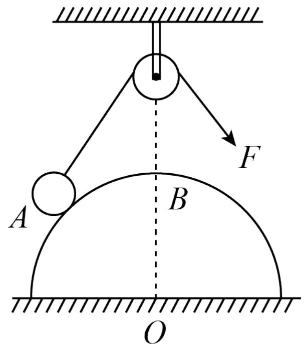
而对物体有$\left(\dfrac{mg}{8}\right)\sin\theta = \mu\left(\dfrac{mg}{8}\right)\cos\theta$，

得$\tan\theta = \mu$，

所以$x = 3\mu R = 0.6R$．



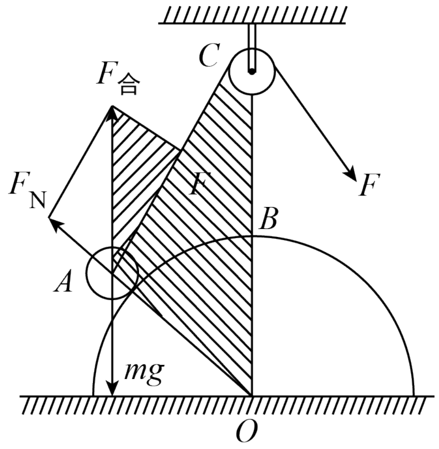
5 如图所示，固定在水平面上的光滑半球，半径为$R$，球心$O$的正上方固定一个小定滑轮，细线一端拴一小球，置于半球面的$A$点，另一端绕过定滑轮．现缓慢地将小球从$A$点拉到$B$点，则此过程中，小球对半球的压力大小$F_N$，细线的拉力大小$F$的变化情况是（　　）




A. $F_N$变大，$F$不变　　B. $F_N$变小，$F$变大　　C. $F_N$不变，$F$变小　　D. $F_N$变大，$F$变小

答案　C

解析　小球受力情况如图所示，合成$F_N$与$F$，其合力$F$应与重力$mg$等大反向，



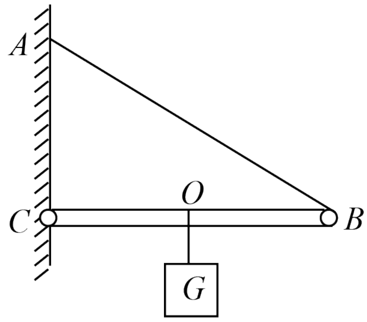

由几何知识：力三角形与几何三角形$\triangle OAC$相似，则有

$$\frac{F_N}{R}=\frac{mg}{OC}=\frac{F}{AC}$$

所以$F_N=\dfrac{R}{OC}mg$ $F=\dfrac{AC}{OC}mg$

拉动过程中，$AC$变小，$OC$与$R$不变，因此$F_N$不变，$F$变小．

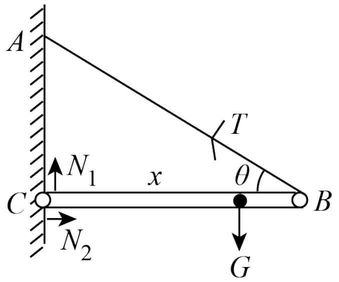
6 如图所示，轻杆$BC$的$C$端铰接于墙，$B$点用绳子拉紧，挂重物$G$．当重物$G$从$C$缓慢移动到$B$的过程中，墙对杆$BC$的作用力大小变化为______，绳子上拉力的大小变化为______．




答案 1．先变小后变大

2．持续变大

解析 如图：




选$C$处为轴，则，$Tl\sin\theta=Gx$，

随$x$增大，$T$从0开始逐渐增大，

选$B$处为转轴，

$N_1l=G(l-x)$，所以$N_1$从$G$逐渐减小为0，

选$A$处为转轴，

$N_2l\tan\theta=Gx$，所以$N_2$从0开始逐渐增加为$\dfrac{G}{\tan\theta}$，

综合得到：

$N^2=N_1^2+N_2^2=\dfrac{G^2}{l^2}[(l-x)^2+x^2\cot^2\theta]$，

得到$x=l\sin\theta$时，$N$取最小，

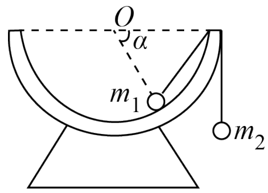
所以随$x$增大，$N$先变小，后变大．

故答案为：先变小后变大；持续变大．

## 进阶拓展

1

如图所示，一个半球形的碗放在桌面上，碗口水平，$O$点为其球心，碗的内表面及口均光滑，一根细线跨在碗口上，线的两端分别系有质量为$m_1$何$m_2$的小球，当它们处于平衡状态时，质量为$m_1$的小球与$O$点的连线与水平线的夹角为$\alpha = 60^\circ$．则两小球的质量比$m_2 : m_1$为（　　）

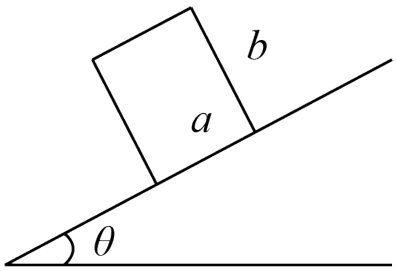



A. $\sqrt{3} : 3$　　B. $\sqrt{2} : 3$　　C. $\sqrt{3} : 2$　　D. $\sqrt{2} : 2$

答案　A

解析　略．

2　底边长为$a$、高度为$b$的长方形匀质物块置于斜面上．斜面和物块之间的静摩擦因数为$\mu$，斜面的倾角为$\theta$，当$\theta$足够小时，当$\theta$足够小时，物块静止于斜面上如图，如逐渐将倾角增大，当$\theta$取某个临界值$\theta_0$时，物块或开始滑动，或翻倒．试分别求出发生滑动和翻倒时的$\theta_0$，并说明在什么条件下出现滑动？在什么条件下出现翻倒？

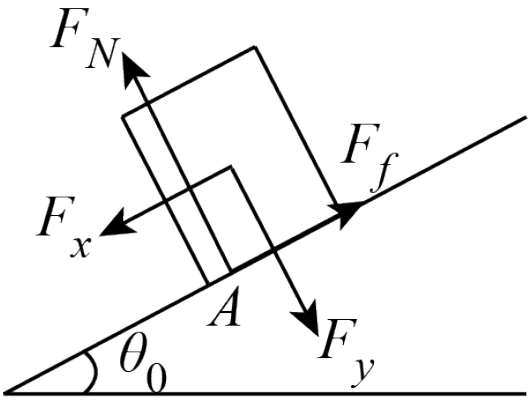



答案　如$\mu < \frac{a}{b}$，则当$\theta = \arctan\mu$时物块开始滑动．如$\mu > \frac{a}{b}$，则当$\theta$增大至$\theta = \arctan\frac{a}{b}$时物块开始翻倒．$\mu = \frac{a}{b}$的情况，不要求讨论

解析　分别求出开始出现滑动和出现翻倒倒计时的$\theta_0$，

1．出现滑动

设重力$G = mg$沿斜面与垂直与斜面的两个分离为$G_x$与$G_y$，斜面对物体的支承力为$F_N$，摩擦了$F_f$，如$\theta = \theta_0$时物体开始滑动如图，必有$G_x = F_f = \mu F_N$，$G_y = F_N$；用$G_x = mg\sin\theta_0$，$G_y = mg\cos\theta_0$代入，得$mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$，$\tan\theta = \mu$．



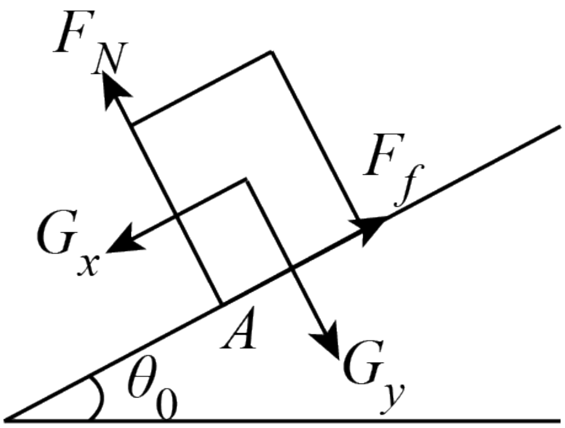

2．出现翻倒

如$\theta=\theta_0$时物体将要翻倒，则物体必是绕通过下角处的$A$轴翻转如图．这时支承力$F_N$与摩擦力$F_f$都通过$A$轴，不产生对$A$轴的力矩．翻倒的临界条件是$\frac{b}{2}G_x=\frac{a}{x}G_y$，

可得$bmg\sin\theta_0=amg\cos\theta_0$，$\tan\theta_0=\frac{a}{b}$．

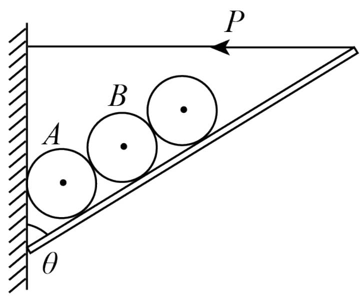
因此，得出结论：

如$\mu<\frac{a}{b}$，则当$\theta=\arctan\mu$时物块开始滑动．如$\mu>\frac{a}{b}$，则当$\theta$增大至$\theta=\arctan\frac{a}{b}$时物块开始翻倒．$\mu=\frac{a}{b}$的情况，不要求讨论．




故答案为：如$\mu<\frac{a}{b}$，则当$\theta=\arctan\mu$时物块开始滑动．如$\mu>\frac{a}{b}$，则当$\theta$增大至$\theta=\arctan\frac{a}{b}$时物块开始翻倒．$\mu=\frac{a}{b}$的情况，不要求讨论．

3 有一轻木板，其自重可忽略，长为$l$，$A$端用铁链固定在竖直墙面上，另一端用水平绳拉住，板上依次放着三个圆柱体，其半径均为$r$，重力均为$G$，如图所示，木板与墙面的夹角为$\theta$，一切摩擦均忽略不计，求水平绳对板的拉力多大？

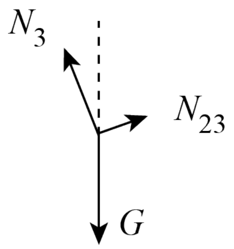



答案 $P=\dfrac{3Gr}{l\cos\theta}\left(2\sin\theta+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)$

解析 从左至右依次对小球编号1，2，3．

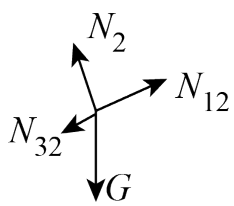
从最右侧的球3向左依次进行受力分析，

对于3：




$\begin{cases}N_3=G\sin\theta\\N_{23}=G\cos\theta\end{cases}$，

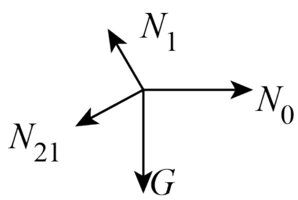
对球2：




$\begin{cases}N_{12}-N_{32}=G\cos\theta\\N_2=G\sin\theta\end{cases}$，

得到：$N_{12}=2G\cos\theta$．

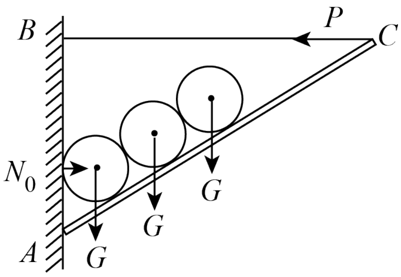
对球1：




$\begin{cases}N_0\sin\theta=N_{21}+G\cos\theta\\N_1\sin\theta=G+N_{21}\cos\theta\end{cases}$，

得到$N=3G\cot\theta$．

最后，对整体（将球和木板视为一个整体）得到下图：




对$A$点分析力矩，只有$N_0$，和3个球的重量$G$，及绳的拉力$P$对$A$有力矩：

$N_0 r\cot\dfrac{\theta}{2}+Gr+G(r+2r\sin\theta)+G(r+4r\sin\theta)=Plcos\theta$，

化简得：$3Gr\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+3Gr+6Gr\sin\theta=Pl\cos\theta$，

得$P=\dfrac{3Gr}{l\cos\theta}\left(2\sin\theta+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)$．

故答案为：$P=\dfrac{3Gr}{l\cos\theta}\left(2\sin\theta+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)$．