第4讲 简单的曲线运动

知识点睛

平抛运动

思考：水平的扔出一个小石子（忽略空气阻力），石子会怎么运动？如果同时有两组平行光源分别从上面和水平方向照射，那么这个石子的两个影子会分别做什么样子的运动？他们运动的时间有什么关系？

物理建模：竖直方向重力加速度为g；水平初速度v_0的运动。

分析：把石子的运动看作水平运动与竖直运动的合成。不同方向的运动互不影响。水平方向是匀速直线运动，竖直方向是自由落体（一个初速度为零的加速度为g的匀加速直线运动）速度满足关系：

$$v_x = v_0$$

$$v_y = -gt$$

位移满足关系：

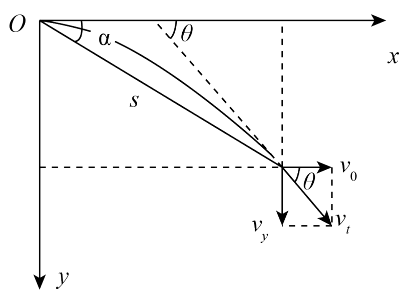
$$x = v_0 t$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

头脑风暴

1 如果用角度θ，φ分别表示最终状态时候的位移方向，速度方向和初速度方向的夹角．请证明：$2\tan\theta = \tan\varphi$．

答案



解析 略．

考点 —曲线运动
　└平抛运动

斜抛运动

与平抛类似，只是初速度方向不是水平，而是和水平方向成θ角。

速度方程：

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

位移方程：

$$x = v_0 \cos\theta t$$

$$y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

头脑风暴

1 求初速度为v_0，与水平夹角为θ的斜抛运动，能到达的最高高度为多少？若θ可任意取值，能达到的高度为多少？

答案 $v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$；$90^\circ$

解析 （1）题意为求二次方程$y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$的最大值．

（2）$\theta = 90^\circ$时，也就是物体做初速度向上的自由落体运动时，能达到最高的高度．

考点 —曲线运动
　└平抛运动

2 初速度为v_0，与水平夹角为θ的斜抛运动，最远距离（射程）为多少?若θ可任意取值，射程为多少？

答案 $x = v_0 \cos\theta t$；45

解析

（1）当斜抛运动达到射程时，$y=v_0\sin\theta t-\dfrac{1}{2}gt^2=0$，可以得到时间$t$与$v_0$和$\theta$的关系．将时间的表达式代入水平方向位移方程$x=v_0\cos\theta t$，再求$x$的最大值．

（2）45度．

故答案为：$x=v_0\cos\theta t$；45．

考点

—曲线运动

　└平抛运动

曲线运动的轨迹方程

一个物体运动的轨迹所满足的方程就是我们的轨迹方程。一般的在二维空间中，轨迹方程就是x和y所满足的方程。

头脑风暴

1 计算初速度为v_0，与水平夹角为θ的平抛运动的轨迹方程．

答案 $y=x\tan\theta-\dfrac{gx^2}{2(v_0\cos\theta)^2}$

解析 $\begin{cases}x=v_0\cos\theta t\\ y=v_0\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$，

要求得轨迹方程，联立消去t可得：

$y=x\tan\theta-\dfrac{gx^2}{2(v_0\cos\theta)^2}$．

故答案为：$y=x\tan\theta-\dfrac{gx^2}{2(v_0\cos\theta)^2}$．

考点

—曲线运动

　└平抛运动

圆周运动

研究圆周运动需要定义几个新名词：类比位置，定义角度；类比速度，定义角速度；类比加速度，定义角加速度。而圆周运动本身还具有一个之前我们学习的直线运动没有的性质，那就是周期和频率。这些都对我们研究圆周运动的本质十分有用。

概念

(1) **角度**：给定一个起始位置后，圆周运动的物体的任意一个位置和圆心的连线，和初始的位置线之间的角度我们可以看做是角度θ。

(2) **角速度**：单位时间内转过的角度，换句话讲，就是角度随时间的变化率：

$$\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

类似速度的定义，这里的时间也是极小，但是大于零的时间。注意角速度是矢量。

①角速度和线速度的关系： $v=r\omega$或者 $\omega=\frac{v}{r}$。

②值得注意的是角速度也有相对运动一说。从矢量角度理解就更容易一些。

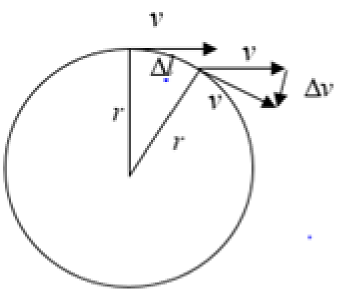
③对于同一个刚体，或者固连在一起的一组物体，选取任意相对平动的参考系，看到的角速度都相同。也可以理解为：选取任意点做参考“圆心”，也就是“瞬心”看到的角速度都相同。

(3) **角加速度**：角速度的变化率$\beta=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$。角加速度也是矢量。

(4) **周期**为转一圈的时间：$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi r}{v}$

(5) **频率**定义为单位时间内转的圈数：$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{v}{2\pi r}$

(6) **向心加速度**：匀速圆周运动的速度变化情况：



经过时间Δt，走过路程Δl，速度变化量为Δv，加速度$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$。

$$\frac{\Delta l}{r}=\frac{\Delta v}{v}$$

$$\frac{v\Delta t}{r}=\frac{\Delta v}{v}$$

由此得到：

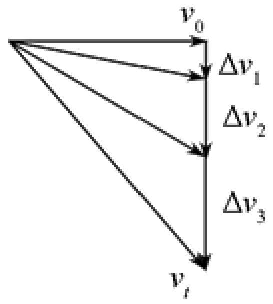
$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r$$

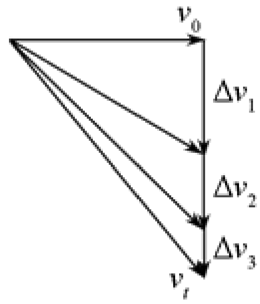
从图中可以看出，只要时间足够短则这个加速度的方向必然垂直于速度矢量，也就是指向圆心，所以这个加速度也被叫做“向心加速度”。加速度与速度方向垂直，速度只改变方向而不改变大小。

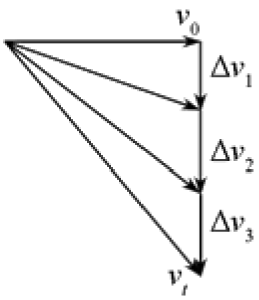
例题精讲

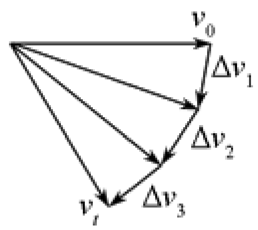
基础训练

1 人站在楼上水平抛出一个小球，球离手时速度v_0，落地时速度为v_t，忽略空气阻力，图中正确表示在几段相等时间内速度矢量的变化情况的是图（　　）

A.


B.


C.


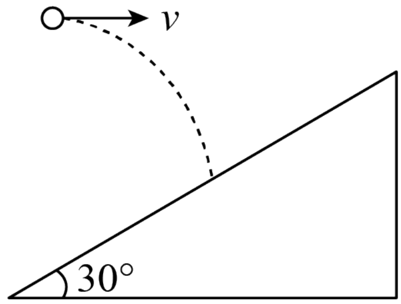
D.


答案 C

解析 小球做平抛运动，水平方向做匀速直线运动，速度不变，竖直方向做自由落体运动，加速度不变，所以单位时间内速度的变化量相等，所以C正确．

考点 —曲线运动
　└平抛运动

2 如图所示，以$9.8\mathrm{m/s}$的初速度水平抛出的物体，飞行一段时间后，垂直地撞在倾角θ为$30°$的斜面上，则物体完成这段飞行的时间为（　　）（$g=9.8\mathrm{m/s^2}$）



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$s　　B. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$s　　C. $\sqrt{3}$s　　D. 2s

答案　C

解析　分解速度，速度方向与竖直方向的夹角为θ，则$\tan\theta=\frac{v_0}{gt}$，故$t$等于$\sqrt{3}$s．

故选C．

考点　一曲线运动

　　└平抛运动

3　高为H处平抛一物体，同时在其正下方水平地面斜抛一物体，二者同时落到同时，则斜抛物体的射高为______．

答案　$\frac{H}{4}$

解析　斜抛运动物体轨迹是对称的，对斜抛运动，设高度为h，考虑到达最高点的后半段运动，经历时间$t_2=\sqrt{2gh}$．

由整个过程的对称性得总时长$T_2=2t_2=2\sqrt{2gh}$．

回过头看自由落体运动的物体$T_1=\sqrt{2gH}$．

则$T_1=T_2$．

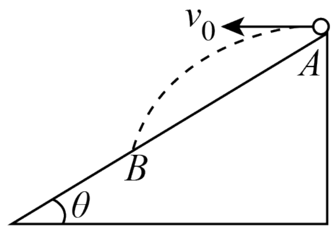
$h=\frac{H}{4}$．

考点　一曲线运动

　　└平抛运动

4

如图所示，在倾角为θ的顶端A处以速度v_0水平抛出一小球，落在斜面上的某一点B处，设空气阻力不计．求：



（1）小球从A运动到B所需要的时间落到B点的速度大小及A、B间的距离．

（2）从抛出开始计时，经过多长时间小球离斜面的距离达到最大？这个最大距离是多少？

答案 （1）$\dfrac{2v_0^2\tan\theta}{g\cos\theta}$．

（2）$\dfrac{v_0\tan\theta}{g}$；$\dfrac{v_0^2\sin^2\theta}{2g\cos\theta}$．

解析 （1）设小球从A运动到B处所需的时间为t，小球做平抛运动，则：水平位移为：$x=v_0t$，竖直位移为：$y=\dfrac{1}{2}gt^2$，根据题意和数学关系可知合位移与水平位移的夹角即为θ，则有：$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，

联立以上三式解得：$t=\dfrac{2v_0\tan\theta}{g}$，

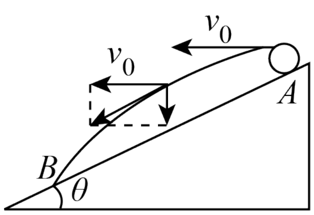
落到B点的速度大小$v_B=\sqrt{v_0^2+(gt)^2}=v_0\sqrt{1+4\tan^2\theta}$，

A、B间的距离$S=\dfrac{v_0t}{\cos\theta}=\dfrac{2v_0^2\tan\theta}{g\cos\theta}$．

故答案为：$\dfrac{2v_0^2\tan\theta}{g\cos\theta}$．

（2）当小球垂直平面向上的分速度为零时，离斜面的距离最大，此时西小球的速度与斜面平行．设小球从抛出开始计时，经时间t_1小球离斜面的距离达到最大，如图甲所示，则有：$v_y=gt_1=v_0\tan\theta$，

解得：$t_1=\dfrac{v_0\tan\theta}{g}$．



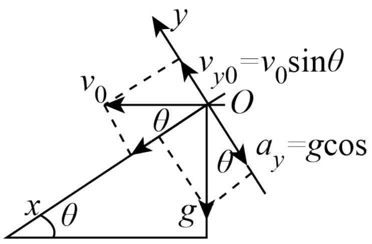
甲

如图乙所示，将小球的运动分解为沿斜面和垂直于斜面两个方向分运动，建立如图所示的坐标系，小球在y轴方向做匀减速运动，初速度为$v_{y0}=v_0\sin\theta$，加速度

为：$a_y = g\cos\theta$，小球离斜面的最大距离$h_{\max} = \frac{0v_{y0}^2}{2a_y} = \frac{-(v_0\sin\theta)^2}{2\times(-g\cos\theta)} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g\cos\theta}$

.

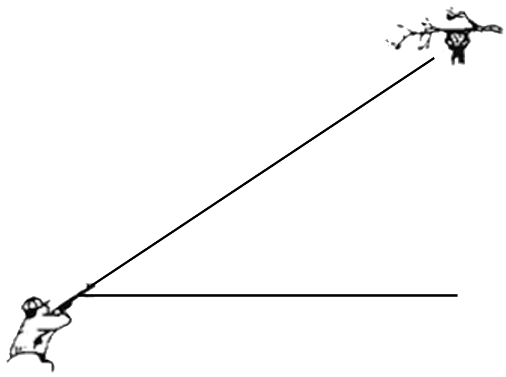
故答案为：$\frac{v_0\tan\theta}{g}$；$\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g\cos\theta}$.



乙

考点 —曲线运动
└平抛运动

5 如图所示，猎人直接瞄准攀在一根树枝上的猴子．当猴子看到枪直接瞄准它时，一见火光立即脱离树枝自由下落．猴子会不会被子弹打中，为什么？



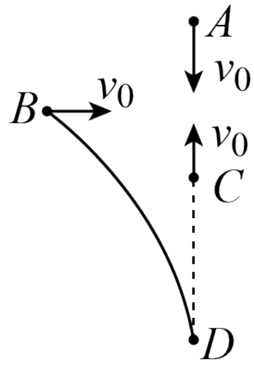
答案 能

解析 略

考点 —匀变速直线运动的探究
└自由落体运动

6 有A、B、C三个小球，A距地面较高，B其次，C最低，A、C两球在同一竖直线上，相距10m，如图所示．三球同时开始运动，A球下抛，B球平抛，C球上抛．三球初速度大小相同，5s后三球相

遇，不考虑空气阻力，求：



（1）三球的初速度大小是多少．

（2）开始运动时，B球离C球的水平距离和竖直高度各是多少．

答案 （1）$1\mathrm{m/s}$

（2）$5\mathrm{m}$

解析 （1）在以加速度g竖直加速向下运动的参考系中看，三个球分别向上、下、右做匀速直线，

故答案为：$1\mathrm{m/s}$．

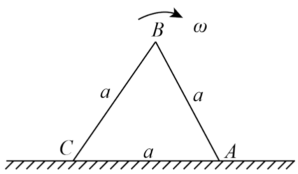
（2）略

考点 —曲线运动

└平抛运动

进阶拓展

1 如图所示，每边长都为a的三角形面板在水平直线上朝一个方向不停地无滑动的翻滚．每次翻滚都是绕着右侧着地顶点(例如图中的A点)转动，转动角速度为常量ω，当一条边(例如AB边)着地时，又会立即绕着另一个右侧着地顶点(例如B点)继续做上述匀角速度旋转．如此继续下去，三角板的每一个顶点在翻滚的一个周期过程中，其平均速率记为$\bar{v}$．对板的这种运动，下面4个表述中正确的是（　　）



A. $\bar{v}=\omega a$，且为面板上所有点各自平均速率的共同值

B. $\bar{v}=\frac{2}{3}\omega a$，且为面板上所有点各自平均速度的最大值

C. 面板上应有一个点做匀速率曲线运动，其速度为$\frac{\sqrt{3}}{3}\omega a$

D. 面板上应有一个点做匀速率曲线运动，其速率为$\frac{1}{3}\omega a$

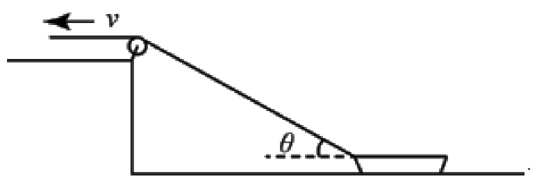
答案 BD

解析 三角板的每一个顶点在翻滚的一个周期过程中，经过的路程为$\frac{4}{3}\pi a$，平均速率$\bar{v}=\frac{\frac{4}{3}\pi a}{T}=\frac{\frac{4}{3}\pi a}{\frac{2\pi}{\omega}}=\frac{2}{3}\omega a$．在三角板上任取一点，它到三个顶点的距离分别为$r_A$、$r_B$、$r_C$，该点在一个周期内经过的路程为$s=\frac{2}{3}\pi(r_A+r_B+r_C)$．根据几何知识，有$r_A+r_B+r_C\leqslant 2a$，故$s\leqslant\frac{4}{3}\pi a$，即顶点通过的路程最大，平均速率最大，故B正确；三角板的几何中心到三个顶点的距离均为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$，故该点速率不变，为$\frac{\sqrt{3}}{3}\omega a$，故C正确．

故选BC．

考点
- 曲线运动
  - 圆周运动
    - 线速度、角速度

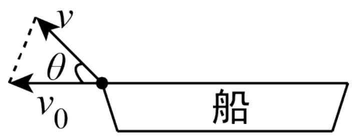
2 一个人在岸上以匀速v水平拉船，岸高度为h，绳子与河夹角为θ．此时船的速度和加速度为？



答案 $v_0=\frac{v}{\cos\theta}$；$a=\frac{v^2}{h}\cdot\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}$

解析 （1）船的速度：v_0，因为船不会离开水面，所以v_0为水平方向．

有下图可以得到$v_0=\frac{v}{\cos\theta}$．



（2）求船的加速度：事实上，由于船不会离开水面，所以船的加速度为水平方向．

根据加速度定义：$a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{dv_0}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt}$．①

①式中，$\dfrac{dv_0}{d\theta}=\dfrac{v\sin\theta}{\cos^2\theta}$②

$\dfrac{d\theta}{dt}$可以由下式求得：

设绳长为l_0，则如图t时刻的绳长$l=l_0-vt$，

$\sin\theta=\dfrac{h}{l_0-vt}$，

$\dfrac{d(\sin\theta)}{dt}=\cos\cdot\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{hv}{(l_0-vt)^2}$③

由②③，得到$a=\dfrac{v\sin\theta}{\cos^2\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{hv}{(l_0-vt)^2}=\dfrac{v^2}{h}\cdot\dfrac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}$．

故答案为：$\dfrac{v^2}{h}\cdot\dfrac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}$．

考点

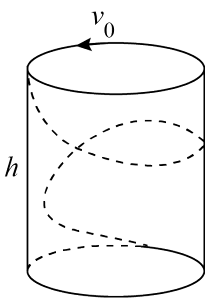
一曲线运动

　├曲线运动基础

　│　└运动的合成和分解

3 如图所示，竖直放置的内壁光滑圆筒，高为h，以初速度v_0沿内壁水平放出一小球，筒底半径为R

．



（1）多长时间小球能到筒底？

（2）从上往下滑小球经过多长时间转过一圆？

（3）如果h足够大．（螺距定义为相邻两圈间的竖直距离）相邻的两圈，螺距差为多少？

答案

（1）$\sqrt{2gh}$

（2）$\dfrac{2\pi R}{v_0}$

（3）$\dfrac{4\pi^2R^2g}{v_0^2}$

解析

（1）小球在竖直方向的加速度为g，

所以$t_1=\sqrt{2gh}$．

故答案为：$\sqrt{2gh}$．

（2）小球的水平初始速度v_0，决定了小球转过一周的时间，$t_2=\dfrac{2\pi R}{v_0}$．

故答案为：$\dfrac{2\pi R}{v_0}$．

（3）首先来看，设某时刻，小球竖直方向的速度为v_y，则第1圈中的螺距

$h_1=v_yt_2+\dfrac{1}{2}gt_2^2$，

对于相临的下一个螺距，

$v_y'=v_y+gt_2$，

$h_2=v_y't_2+\dfrac{1}{2}gt^2$，

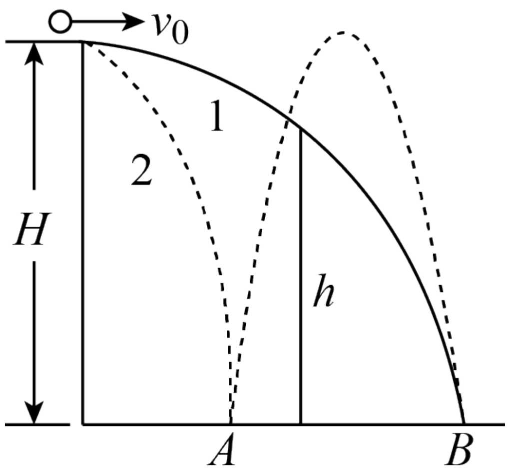
螺距差$\Delta h=h_2-h_1=(v_y'-v_y)t_2=gt_2^2=\dfrac{4\pi^2R^2g}{v_0^2}$．

故答案为：$\dfrac{4\pi^2R^2g}{v_0^2}$．

考点

—曲线运动
- 生活中的圆周运动
  - 竖直平面内的圆周运动

4 从高H处的一点O先后平抛两个小球1和2，球1直接恰好越过竖直挡板A落到水平地面上的B点；球2则与地面碰撞一次后，也恰好越过竖直挡板，而后也落在B点，如图所示．设球2与地面碰撞遵循类似的反射定律，且反弹速度大小与碰撞前相同，求竖直挡板的高度h．



答案 $h=\dfrac{3H}{4}$

解析 本题要从运动的独立性着手考虑，由斜上抛运动特点，易得球2的运动时间是球1的3倍．

设球1、2运动的时间分别为t_1和t_2，则两球在水平方向有$v_2t_2=v_1t_1$．

因为$t_2=3t_1$，所以$v_1=3v_2$．又因两球飞过竖直挡板的水平位移相同，故它们过挡板的飞行时间满足$t'_2=3t'_1$．

设球2从第一次落到飞至挡板顶端所用时间为t，则有

$\sqrt{\frac{2H}{g}}+t=3\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$，

球2落地时速度的竖直分量为$v'_2=\sqrt{2gH}$

到达挡板顶端时速度的竖直分量为$v''_2=\sqrt{2g(H-h)}$

两者满足$v'_2=v''_2+gt$，

解①、②两方程可得$h=\frac{3H}{4}$．

考点 —曲线运动

└—平抛运动