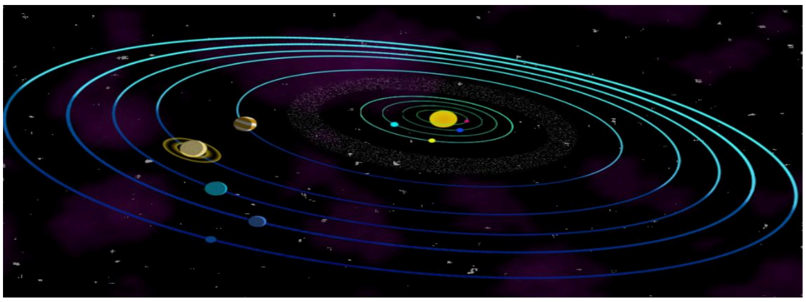
第11讲 开普勒定律和万有引力定律

一、知识点睛

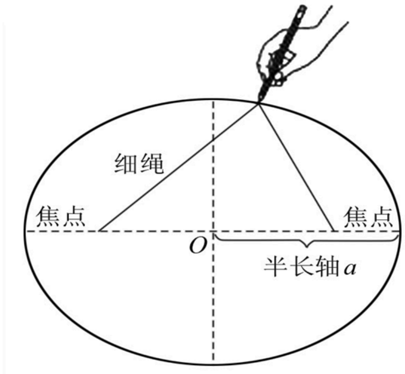
故事要从古人对行星在恒星中间运动的观察，并且最终作出了它们在围绕太阳运行的推论开始，这是后来为哥白尼所重新发现一个事实。行星究竟怎样围绕太阳运行，并且究竟用什么样的运动绕之运行要发现这些，就要稍微多作一点工作。15世纪初叶，在行星到底是不是围绕太阳运行这个问题上曾有过剧烈的争论。第谷·布拉赫有一个想法，它与古人提出的任何观点都不相同，他认为：如果能足够精确地测得行星在天空中实际的位置，那么这些有关行星运动本性的争论就会得到最好的解决。如果测量能精确地显示出行星在如何运动,那么或许有可能去建立这种或那种观点。这是一个非同小可的想法：如果要想发现什么东西，那么去细致地做一些实验要比展开冗长的哲学争辩好得多。在这个想法的指引下，第谷在哥本哈根附近的希恩岛上他的天文台里，花了多年时间来研究行星的位置。他编制了一种篇幅庞大的星表；在第谷死后，数学家开普勒对这些星表进行了研究。从这些数据中，开普勒发现了涉及行星运动的一些非常优美、卓越而又简单的定律。

1. 开普勒三定律

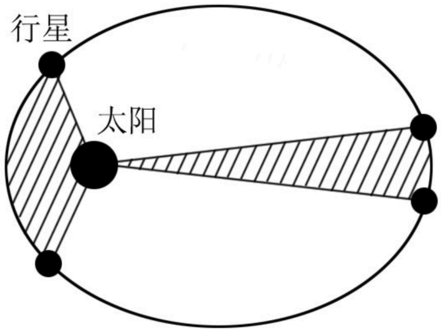
开普勒首先发现，每个行星沿一条称为椭圆的曲线绕太阳运行，而太阳处在椭圆的一个焦点上。



椭圆不仅仅是呈现为一个卵形的图形，而是一条非常独特和精确的曲线，这条曲线可以用两只图钉（在每个焦点上各钉一只）一段线和一支铅笔把它画出来；从数学观点上来看，它是这样一些点的轨迹，从两个定点（焦点）到其上每一点的距离之和是一个常数。或者，如果你们愿意的话，可以把它说成是一个“压扁”了的圆。



开普勒的第二个发现是，行星并不以均匀速率绕太阳转动，而是当它们接近太阳时跑得较快，远离太阳时则跑得较慢。确切地说便是这样：设在任意相继的两个时间，比如说相隔为一周的时间内观察一个行星，并且对每个观察位置向行星画一条矢径。那么行星在一周中所经过的轨道上一段弧线和两条矢径一起围成一定的平面面积，如下图所示的那个阴影面积。如果在离太阳较远的那部分轨道上（此时行星运动得较慢），也作时间相隔一周的与前类似的两次观察，那么这时围的面积与前一情况下的面积完全相等。因此，按照开普勒第二定律，每个行星围绕太阳运动的面积速度相同。



开普勒第三定律发现得较晚，这条定律与前两条不同，各属于不同的范畴，因为它不是只涉及单独的行星，而涉及一个行星与其他行星之间的关系。这条定律表明：如果把任何两个行星的轨道周期和轨道大小进行比较，则周期与轨道大小的$\frac{3}{2}$次方成正比。这里所说的周期是行星在其轨道上完全绕一圈所需的时间间隔，而所谓轨道的大小是用椭圆轨道最大直径（术语叫“长轴”）的长度来量度的。更简单一些，如果行星绕圆周运动（实际上确实近似如此），那么绕圆周走一圈所需的时间将正比于直径(或半径)的$\frac{3}{2}$次方。

总结开普勒的三条定律：

①每个行星都沿椭圆轨道绕太阳运行太阳位于椭圆的一个焦点上。

②从太阳指向行星的矢径,在相等时间间隔内扫过相等的面积。

③任何两个行星的周期平方正比于它们各自轨道半长轴的立方，或者表述为$\frac{a^3}{T^2}=K$，其中K是常量，这个常量与行星本身无关，是太阳系的常量。

头脑风暴1

1 “坦普尔一号”彗星绕太阳运行的轨道是一个椭圆，其运动周期为5.74年，则关于“坦普尔一号”彗星的下列说法中正确的是（　）

A. 绕太阳运动的角速度不变

B. 近日点处线速度大于远日点处线速度

C. 近日点处加速度大于远日点处加速度

D. 其椭圆轨道半长轴的立方与周期的平方之比是一个与太阳质量有关的常数

答案 BCD

解析 AB．根据开普勒第二定律知：彗星绕太阳做椭圆运动时，彗星与太阳连线在相等时间内扫过的面积相等，要使面积相等，连线越短，在相等时间内，彗星转过的弧长越大，彗星的线速度越大，即在近日点彗星的线速度大于远日点处线速度，可知其角速度是变化的，故A错误，B正确；

C．太阳与彗星的质量不变，在近日点两者间的距离小，由万有引力定律可知，彗星受到的引力大，由牛顿第二定律可知，引力越大，加速度越大，所以彗星在近日点的加速度大于在远日点的加速度，故C正确；

D．由开普勒第三定律可知，彗星绕太阳做圆周运动时，周期的平方与其椭圆轨道半长轴的三次方之比是一个与太阳质量有关的常量，故D正确．

故选BCD．

2.万有引力定律

（1）科学家对行星运动原因的猜想

①开普勒：行星的运动是由于太阳磁力吸引的缘故，磁力与距离成反比；

②伽利略：行星的运动与地面物体的运动遵从不同的规律，行星运动是由“惯性”自行维持的；

③笛卡尔：宇宙由不停旋转着的微粒所组成，微粒的运动形成旋涡。太阳和行星在各自的旋涡中心。行星旋涡带动卫星运动，太阳的旋涡带动行星和卫星一起运动；

④胡克： 行星的运动是太阳引力的缘故，并且力的大小与到太阳距离的平方成反比，重力是由地球引力产生的；

⑤牛顿： 以任何方式改变速度（包括方向）都需要力，因此，使行星沿圆或椭圆运动，需要指向圆心或椭圆焦点的力，这个力应该是太阳对它的引力。

（2）太阳对行星的引力

利用开普勒三定律我们可以得到很多有用的内容，首先，行星绕太阳运动的轨道十分接近圆形，我们可以近似地认为太阳在圆心处；其次，由开普勒第二定律可以得到，行星近似在做匀速圆周运动；最后，结合开普勒第三定律，我们实际上可以得到，万有引力与距离是平方反比关系，具体分析如下：

①设行星质量是m，速度是v，行星到太阳的距离是r，则行星受到太阳的引力

$$F=m\frac{v^2}{r}$$

②天文观测难以观测行星运行的速度，但可观测其公转周期T。将$v=\frac{2\pi r}{T}$代入，将会有：

$$F=\frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

③将开普勒第三定律$\frac{r^3}{T^2}=K$代入，有：

$$F=4\pi^2 K\frac{m}{r^2}$$

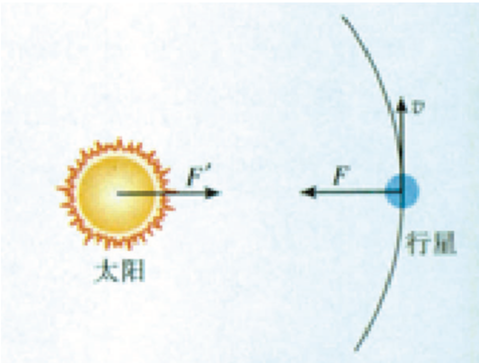
（3）太阳对行星的引力

①根据对称性，行星对太阳的引力应该有

$$F'=4\pi^2 K'\frac{M}{r^2}$$

其中K'与太阳无关。M是太阳的质量。

②根据牛顿第三定律，有$F=F'$。这就是说，太阳与行星之间的这个引力，既要与M成正比，又要与m成正比，还要与r的平方成反比。



$$F=G\frac{Mm}{r^2}$$

G叫做引力常量，与太阳、行星均无关。引力的方向沿着二者的连线。从纷繁的数据到开普勒行星运动定律，再到一个公式，形式越来越简单，但意义却越来越深刻。

（4）万有引力定律

实际上，不光是天体运动，自然界中任何两个物体都相互吸引，引力的大小与物体的质量m_1和m_2的乘积成正比，与它们之间距离r的二次方成反比，即

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

叫做引力常量，适用于任何两个物体，它的大小最先由英国物理学家卡文迪许通过几个铅球之间的万有引力测得，$G=6.67\times10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$

头脑风暴2

2 请估算两位成年人在相距10m时，他们之间的万有引力大小的数量级约为（　　）

A. $10^{-9}\mathrm{N}$　　B. $10^{9}\mathrm{N}$　　C. $10^{-11}\mathrm{N}$　　D. $10^{11}\mathrm{N}$

答案　A

解析　两个成年人的质量大约50kg，根据$F=G\frac{Mm}{r^2}$得，$F=6.67\times10^{-11}\times\frac{2500}{100}\mathrm{N}\approx1.67\times10^{-9}\mathrm{N}$，故A正确．

故选A．

3. 重力与万有引力

重力是地面附近的物体受到地球的万有引力而产生的；万有引力是物体间的作用力，如图所示，它可产生两个效果：一是提供物体随地球自转所需的向心力；二是产生物体的重力。由于，$F_{\text{向心}}=m\omega^2r$，随纬度的增大而减小，所以物体的重力随纬度的增大而增大，即重力加速度从赤道到两极逐渐增大。在赤道处，物体受到地球的万有引力F_G分解成两个分力$F_{\text{向心}}$和mg刚好在一条直线上，则有$F_G=F_{\text{向心}}+mg$。但$F_{\text{向心}}$一般很小，在一般情况下可认为重力和万有引力近似相等，即：$G\frac{Mm}{R^2}=mg$，得：

$$g=G\frac{M}{R^2}$$

我们把这样的表达式叫**“黄金代换”**。

①在地球表面附近的重力加速度，在忽略地球自转影响的情况下，可用万有引力定律来估算：

$$g=G\frac{M}{R^2}\approx6.67\times10^{-11}\times\frac{6\times10^{24}}{(6400\times10^3)^2}\mathrm{N/kg}\approx9.78\mathrm{N/kg}\approx9.78\mathrm{m/s^2}$$

即在地球表面附近，物体的重力加速度$g\approx9.78\mathrm{m/s^2}$。这一结果表明，在重力作用下，物体加速度的大小与物体质量无关。

②计算地球上空距地面h处的重力加速度g'。由万有引力定律可得：

$$g'=\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 g$$

③计算任意天体表面附近的重力加速度g'。由万有引力定律可得：

$$g'=\frac{GM'}{R'^2}$$

其中，M'为该星球的质量，R'为该星球的半径。对比地球的数据可以得到：

$$\frac{g'}{g}=\frac{M'}{M}\left(\frac{R}{R'}\right)^2$$

头脑风暴3

3 设地球表面的重力加速度为g_0，物体在距地面$3R$（R是地球半径）处，由于地球作用而产生的加速度为g，则$g:g_0$为（　　）

A. $1:16$　　B. $16:1$　　C. $1:9$　　D. $9:1$

答案 A

解析 根据万有引力等于重力，列出等式：$\frac{GMm}{r^2}=mg$

$g=\frac{GM}{r^2}$

其中M是地球的质量，r应该是物体在某位置到球心的距离．

$$\frac{g}{g_0}=\frac{\frac{1}{(4R)^2}}{\frac{1}{R}}=\frac{1}{16}$$

故选A．

二、例题精讲

基础训练

4 关于开普勒行星运动定律下列表述正确的是（　　）

A. 地球绕太阳运动的轨道是椭圆，太阳位于椭圆的中心

B. 地球在远日点速度大，近日点速度小

C. 所有行星半长轴的三次方与周期的平方的比值相等

D. 地球绕太阳运动的半长轴三次方与周期平方的比值等于月球绕地球转动的半长轴三次方与周期平方的比值

答案 C

解析 A．所有行星绕太阳运动的轨道都是椭圆，太阳处在椭圆的一个焦点上．这是开普勒第一定律，故A错误；

B．对任意一个行星来说，它与太阳的连线在相等时间内扫过的面积相等．这是开普勒第二定律，即地球在远日点速度小，近日点速度大，故B错误；

C．根据开普勒第三定律内容，太阳系中所有行星的轨道半长轴的3次方与其公转周期的平方的比值都相等，即$\frac{r^3}{T^2}=k$，对围绕同一中心天体运行的行星（或卫星）都相同，故C正确；

D．由开普勒第三定律可知，绕太阳运动的所有行星轨道半长轴的三次方跟公转周期的平方的比值都相同，但是对于不同的中心天体k值不同，D错误．

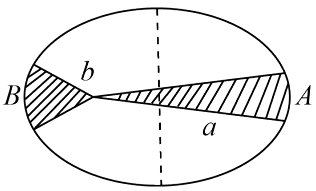
故选C．

5 某行星沿椭圆轨道运行，远日点离太阳的距离为a，近日点离太阳的距离为b，过远日点时，行星的速率为v_a，则过近日点时，行星的速率v_b为（　　）

A. $v_b=\frac{b}{a}v_a$　　B. $v_b=\sqrt{\frac{a}{b}}v_a$　　C. $v_b=\frac{a}{b}v_a$　　D. $v_b=\sqrt{\frac{b}{a}}v_a$

答案 C

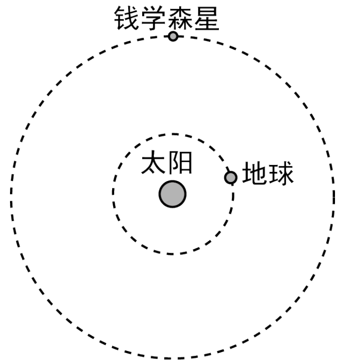
解析 如图所示，



A、B分别为远日点、近日点，由开普勒第二定律知，太阳和行星的连线在相等的时间里扫过的面积相等，取足够短的时间Δt，则$\frac{1}{2}v_a\cdot\Delta t\cdot a=\frac{1}{2}v_b\cdot\Delta t\cdot b$，故$v_b=\frac{a}{b}v_a$．

故选C．

6 1980年10月14日，中国科学院紫金山天文台发现了一颗绕太阳运行的小行星，2001年12月21日，经国际小行星中心和国际小行星命名委员会批准，将这颗小行星命名为“钱学森星”，以表彰这位“两弹一星”的功臣对我国科技事业做出的卓越贡献．若将地球和“钱学森星”绕太阳的运动看作匀速圆周运动，它们的运行轨道如图所示．已知“钱学森星”绕太阳运行一周的时间约为3.4年，设地球绕太阳运行的轨道半径为R，则“钱学森星”绕太阳运行的轨道半径约为（　　）



A. $\sqrt[3]{3.4}R$　　B. $\sqrt[2]{3.4}R$　　C. $\sqrt[3]{11.56}R$　　D. $\sqrt[2]{11.56}R$

答案　C

解析　根据开普勒第三定律，有$\frac{R_{钱}^{3}}{T_{钱}^{2}}=\frac{R^{3}}{T^{2}}$，解得$R_{钱}=\sqrt[3]{\frac{T_{钱}^{2}}{T^{2}}}R=\sqrt[3]{11.56}R$．

故选C．

7 在质量与地球质量相同、半径为地球半径两倍的某天体表面与在地球表面相比，下列说法正确的是（　　）

A. 跳高运动员会跳的更高　　B. 称物体的重力时，数值较小

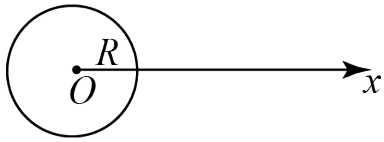
C. 自由下落的物体，加速度较小　　D. 称同一物体的质量时，数值较小

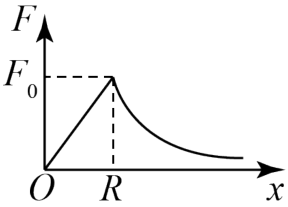
答案　ABC

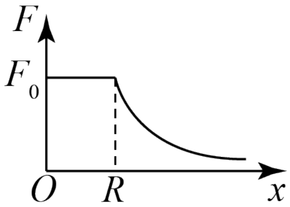
解析　略

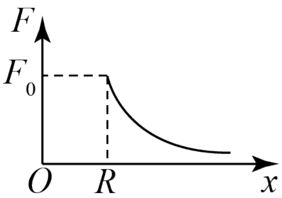
8 理论上已经证明：质量分布均匀的球壳对壳内物体的万有引力为零．现假设地球是一半径为R、质量分布均匀的实心球体，O为球心，以O为原点建立坐标轴Ox，如图所示．一个质量一定的小

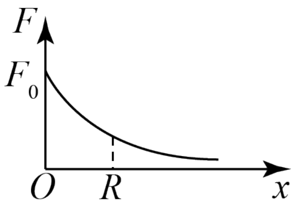
物体（假设它能够在地球内部移动）在x轴上各位置受到的引力大小用F表示，则下图所示的四个F随x的变化关系图正确的是（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

答案　A

解析　在球外$F=G\dfrac{Mm}{r^2}$，球内时外面球壳对物体万有引力为零，只计算内部球体的吸引．

故选A．

9 根据英国天空新闻等多家媒体3月14日消息，史蒂芬•威廉•霍金去世，享年76岁，这一消息已经得到霍金家人确认，霍金的主要研究领域是宇宙论和黑洞，证明了广义相对论的奇性定理和黑洞面积定理，提出了黑洞蒸发现象和无边界的霍金宇宙模型，若某黑洞的半径R约为$45\mathrm{km}$，质量M和半径R的关系满足$\dfrac{M}{R}=\dfrac{c^2}{2G}$，其中$c$为光束，$G$为引力常量，则该黑洞表面重力加速度的数量级为（　　）

A. $10^8\mathrm{m/s^2}$　　B. $10^{10}\mathrm{m/s^2}$　　C. $10^{12}\mathrm{m/s^2}$　　D. $10^{14}\mathrm{m/s^2}$

答案　C

解析　黑洞实际为一天体，天体表面的物体受到的重力近似等于物体与该天体之间的万有引力，对黑洞表面的某一质量为m物体有：$G\dfrac{Mm}{R^2}=mg$，

又有$\dfrac{M}{R}=\dfrac{c^2}{2G}$，

联立解得：$g=\dfrac{c^2}{2R}$，

代入数据得重力加速度的数量级为$10^{12}\mathrm{m/s^2}$，故C正确，ABD错误．

故选C．

10 我国已经成功地向太空发射了“神舟”号载人飞船．如果“神舟”号飞船由地球飞向月球，地球的质量约为月球质量的81倍，那么，当地球对它的引力和月球对它的引力大小相等时，求此时飞船距地心的距离与距月心的距离的比值．

答案 $9:1$

解析 方法一：

设月球质量为M，地球质量就为$81M$．飞行器距地心距离为r_1，飞行器距月心距离为r_2．由于地球对它的引力和月球对它的引力相等，根据万有引力定律得：$\dfrac{G(81M)m}{r_1^2}=\dfrac{GMm}{r_2^2}$；解得：$\dfrac{r_1}{r_2}=\sqrt{\dfrac{81}{1}}=9$．故答案为：$9:1$．

方法二：设地球质量为M，月球质量为M'，飞船距地心的距离R，距月心的距离r，

由$G\dfrac{Mm}{R^2}=G\dfrac{M'm}{r^2}$，得出$\dfrac{R^2}{r^2}=\dfrac{M}{M'}=\dfrac{81}{1}$，故$R:r=9:1$．

故答案为：$9:1$．

11 宇航员在一星球表面上的某高处，沿水平方向抛出一小球．经过时间t，小球落到星球表面，测得抛出点与落地点之间的距离为L．若 抛出时初速度增大到2倍，则抛出点与落地点之间的距离为$\sqrt{3}L$．已知两落地点在同一水平面上，该星球的半径为R，万有引力常数为G．求该星球质量M．

答案 $M=\dfrac{2\sqrt{3}LR^2}{3Gt^2}$

解析 设抛出点的高度为h，

$2\sqrt{L^2-H^2}=\sqrt{\sqrt{3}L^2-h^2}$可得$h$

设该星球上的重力加速度为g，由平抛运动的规律得：

$h=\dfrac{1}{2}gt^2$可得g

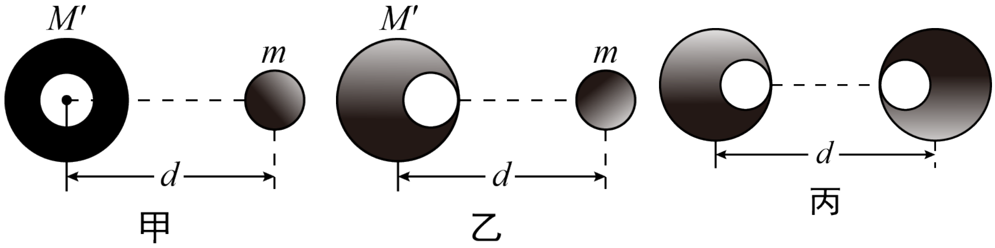
由万有引力定律与牛顿第二定律得：

$mg=G\dfrac{Mm}{R^2}$，

联立以上各式解得$M=\frac{2\sqrt{3}LR^2}{3Gt^2}$

进阶拓展

12 如图所示，一个质量为M的匀质实心球，半径为R．如果从球上挖去一个直径为R的球，放在相距为d的地方．求下列三种情况下，两球之间的引力分别是多大．



(1) 从球的正中心挖去．

(2) 从与球面相切处挖去．

(3) 将两个挖掉小球后的部分放在球心相距为d的位置．

答案

(1) $\frac{7GM^2}{64d^2}$

(2) $\frac{GM^2}{8d^2}-\frac{GM^2}{64\left(d-\frac{R}{2}\right)^2}$

(3) 将两个球分割出来的部分分别记为1，2，3，4，则两个完整的大球之间的万有引力为：$F=\frac{GM^2}{d^2}=F_{13}+F_{14}+F_{23}+F_{24}$，其中$F_{13}=F_{24}$可算，故可求出$F_{14}$．

解析

(1) 第一问中可以将这个球壳与小球均视为匀质球体物，故可直接使用万有引力定律计算，$F_{万}=\frac{G\frac{1}{8}M\cdot\frac{7}{8}M}{d^2}=\frac{7GM^2}{64d^2}$．

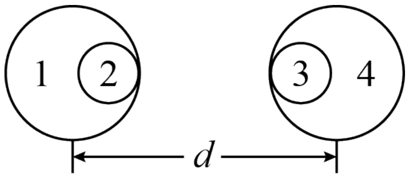
故答案为：$\frac{7GM^2}{64d^2}$．

(2) 第二问由于大球不再是匀质球体，故需使用割补法：

$F_{万}=G\cdot M\cdot\frac{1}{8}Md^2-\frac{G\cdot\frac{1}{8}M\cdot\frac{1}{8}M}{\left(d-\frac{1}{2}R\right)^2}$，整理后可得答案的表达式，在计算两实心小球时要注意球心距的变化．

故答案为：$\frac{GM^2}{8d^2}-\frac{GM^2}{64\left(d-\frac{R}{2}\right)^2}$．

(3)



三、阅读材料

1. 开普勒三定律的发现

人类从未停止过对星空的观测，最早在人们的认知中，地球处于“宇宙”的中心，星空中各种围绕着地球运动，托勒密还第一次提出“运行轨道”的概念，设计出了一个本轮均轮模型。按照这个模型，人们能够对行星的运动进行定量计算，推测行星所在的位置。在16世纪“日心说”创立之前的1000多年中，“地心说”一直占统治地位。

到了中世纪后期，随着观察仪器的不断改进，行星位置和运动的测量越来越精确，观测到的行星实际位置同本轮均轮模型的计算结果的偏差，就逐渐显露出来了。这时哥白尼通过自己的观测结果提出了“日心说”的假说，尽管很长一段时间他并不敢将自己的理论公之于众，但临去世之时，哥白尼将自己的长篇巨著《天体运行论》发表了出来，这也为之后开普勒发现行星运动三定律奠定了基础。

开普勒的老师第谷一生致力于对天体的观测，他的观测数据已经接近肉眼能到达的极限。但同时，他也是地心说的坚持拥护者，尽管他提出了许多种理论试图解释行星的运动规律，却始终不能得到一个令人满意的答案。

开普勒能够发现行星运动遵循的规律，很大程度上得益于他的老师得到的精确观测数据。第谷去世后，开普勒在老师实验数据的基础上继续寻找规律。不同的是，开普勒认为行星轨道数据是与太阳相联系的，在反复尝试之后，开普勒发现了行星周期与轨道半径之间的联系。开普勒最终认为行星围绕太阳的运动是圆轨道，但是在经过计算后，却与观测得到的火星行星运动表不符，于是开普勒将轨道调整为偏心圆，却依旧与第谷的观测数据有着“八分”的偏差，开普勒并不认为这源于实验的误差，而是继续对假说进行修正，一番尝试之后，开普勒发现，行星的真实运行轨道是椭圆，这项发现也成为天文学上一次革命性的创举。

进入17世纪，威廉·赫歇尔和其他天文学家通过观测发现太阳位于一个由恒星构成的盘状星系中，地球是其中的一颗行星，日心说也逐渐被科学界广泛接受。