第四部分 自招综合训练-曲线运动与万有引力运动专题

在高中课程中，我们重点研究过两种曲线运动——平抛运动和圆周运动。在研究的过程中，我们用到两种运动分解方法：一种是沿水平、竖直方向进行正交分解（例如平抛运动）；另一种是沿速度和垂直速度方向进行正交分解（例如圆周运动）。在本模块中，我们将利用运动分解的方法进一步研究斜抛运动和曲率半径的问题。在此基础上，我们将进一步学习角动量、天体运动中椭圆轨道运动及轨道能量等更加深入、复杂的内容。

斜抛运动

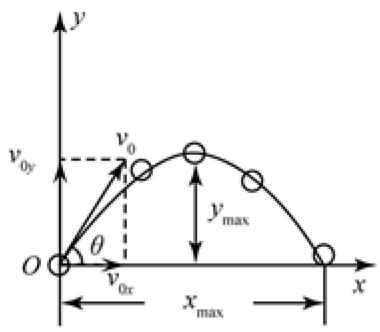
知识点睛

在高中课程中，我们学习过自由落体、竖直上抛、平抛等运动，它们都是物体只在重力作用下的运动，只是初速度的方向有所不同。在实际情景中，物体不一定是向上或水平抛出的，更多的可能是斜向上或斜向下抛出的。下面我们就来研究这些运动。

将物体以一定的初速度沿斜上方（或斜下方）抛出，如果物体只受重力作用，我们就把物体所做的运动称为斜抛运动。为了研究方便，下面只讨论斜上抛的情况，斜下抛的情况类似，同学们可以按照同样的研究方法自己进行分析。

（1）在水平、竖直坐标系中研究

对于斜抛运动，我们同样采取运动分解的方法来研究。一般情况下，我们选择抛出点为坐标原点，物体运动的水平方向为x轴的正方向，竖直向上为y轴的正方向，如图所示。



设物体抛出方向与x轴正方向之间的夹角为θ（即抛射角），故v_0可以分解为沿水平方向

$v_{0x} = v_0\cos\theta$和沿竖直方向的$v_{0y} = v_0\sin\theta$。

公式

在水平方向上，物体不受力，做匀速直线运动；在竖直方向上，物体受到重力作用，做初速度为v_{0y}的竖直上抛运动。由此，我们可以根据已经学过的知识，推导出物体做斜抛运动的规律：

①速度公式

水平速度：$v_x = v_0 \cos\theta$

竖直速度：$v_y = v_0 \sin\theta - gt$

t时刻速度大小$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$，设合速度与水平方向夹角α，则$\tan\alpha = \dfrac{v_y}{v_x}$。

②位移公式

水平分位移：$x = v_x t = v_0 t \cos\theta$

竖直分位移：$y = v_0 t \sin\theta - \dfrac{1}{2}gt^2$

时间内合位移的大小$s = \sqrt{x^2 + y^2}$，设合位移与水平方向夹角为β，则$\tan\beta = \dfrac{y}{x}$。

沿水平方向和竖直方向正交分解是分析斜抛运动比较常用的一种方法，但并不是唯一的方法。

（2）斜抛运动的其它分解方法

在一些特殊情况下，采用其它分解方法可能会简化问题，常见的有两种：

①将斜抛运动分解为沿初速度方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动；

②在涉及斜面的问题中，将斜抛运动沿斜面和垂直斜面方向进行分解。

这些方法的技巧性较强，需要不断总结，大家可以结合例题学习。

（3）斜抛运动中有几个常用的物理量大家需要熟悉一下：

①飞行时间：从物体抛出到落地所用的时间；

②射程：由物体抛出点到其水平面落点的水平距离；

③射高：从抛出点的水平面到物体运动轨迹最高点的高度。

例题精讲

1 将同一物体分别以不同的初速度、不同的仰角做斜抛运动，若初速度的竖直分量相同，则下列哪个量相同（抛出点和落地点在同一高度）（　　）

A. 落地时间　　　　B. 水平射程

C. 自抛出至落地的速度变化量　　D. 最大高度

答案 ACD

解析 A、C．由于各物体初速度的竖直分量相同，落地时的下落高度相同，由$y=v_yt-\frac{1}{2}gt^2$可知，下落时间t相同，自抛出到落地的速度变化量$\Delta v=gt$相同，A、C正确；

B．由于物体初速度、倾角都不同，而速度的竖直分量相同，由$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$可知水平分量v_x一定不同，因此，水平射程$x=v_xt$不同，B错误；

D．各物体在竖直方向上做竖直上抛运动，且竖直方向初速度相同，因此上升的最大高度相同，D正确．

故ACD正确．

2 两物体自同一地点分别与水平方向成$\theta_1=60°$、$\theta_2=30°$的仰角抛出，若两物体所达到的射程相等（抛出点和落地点在同一高度），则它们的抛射速度之比为

A. $1:1$　　B. $1:3$　　C. $3:1$　　D. $1:\sqrt{3}$

答案 A

解析 物体初速度为v_0、与水平夹角为θ时，落回同一高度时的水平射程为$x=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$．

由于两次物体抛射的射程相同，因此有$\frac{v_1^2\sin 2\theta_1}{g}=\frac{v_2^2\sin 2\theta_2}{g}$，带入数据可得：$v_1=v_2$．

故选A．

3 将一个小球以初速度v_0，与水平方向成θ角斜向上从地面处抛出，求：

(1) 小球落回地面时的水平射程．

(2) θ取何值时，水平射程有最大值．

(3) 此过程中的射高．

答案 (1) $x=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$

(2) 当$\theta=45°$时，水平射程有最大值

(3) $h=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$

解析 (1) 以抛出点为原点，沿水平和竖直向上方向建立坐标轴，由位移公式得：

$y=(v_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2$，①

$x=(v_0\cos\theta)t$，②

当小球落回地面时，$y=0$，解得：$t=\frac{2v_0\sin\theta}{g}$，

因此，水平射程$x=\frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$．③

故答案为：$x=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$．

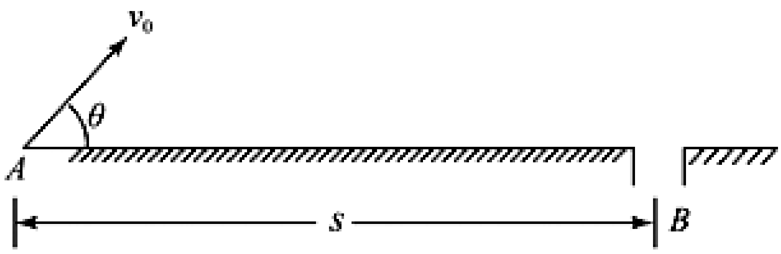
(2) 由③式可知，当$\theta=45°$时，水平射程有最大值．

故答案为：当$\theta=45°$时，水平射程有最大值．

(3) 物体在竖直方向上做初速度为$v_0\sin\theta$的竖直上抛运动，因此，射高可由竖直上抛运动规律求得：$h=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$．

故答案为：$h=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$．

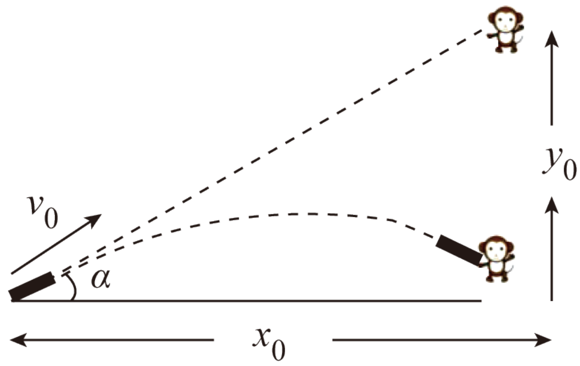
4 如图所示，有一完全弹性的光滑水平面，在该平面的A点处，以初速度v_0斜抛出一个完全弹性的小球．若忽略空气阻力，试讨论当抛射角θ满足什么条件时，能使小球最后恰好落到与A点相距为s的小孔B中．



答案 $\theta=\frac{1}{2}\arcsin\frac{gs}{nv_0^2}$或$\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{gs}{nv_0^2}$，（$n\geqslant\frac{gs}{v_0^2}$，为正整数）

解析 略

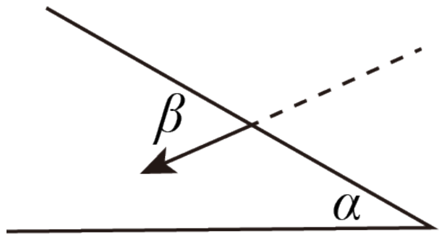
5 如图在距离猎人水平距离x_0处的一棵树上有一只猴子，猴子所处竖直高度为y_0．现在猎人开枪射击，使得子弹以某一初速度射出．与此同时，猴子因为听见枪声，受惊从树上自由下落．请问如果忽略空气阻力，猎人要射中猴子，枪口应该瞄准哪里？子弹的初速度应满足什么条件？



答案 枪口应该瞄准猴子，$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{g}{2y_0}({x_0}^2+{y_0}^2)}$

解析 在猴子的参考系中看，子弹为匀速直线运动，因此枪口需瞄准猴子且猴子落地前，子弹打中猴子，临界情况下．$y_0=\frac{1}{2}gt^2$，$v_0t=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$,可知$v_0=\sqrt{\frac{g}{2y_0}(x_0^2+y_0^2)}$．所以$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{g}{2y_0}({x_0}^2+{y_0}^2)}$．

6 倾角为α的光滑斜面固定在水平地面上，一个小钢球以与斜面成β角的速度撞击斜面，如图所示，设钢球与斜面碰撞前后，钢球的速度大小不变．求β为何值时，球可以返回它第一次与斜面相碰的点．



答案 $\cot\beta=n\tan\alpha$（$n=1,2,3\cdots$）

解析 小球与斜面碰后做斜抛运动，如果沿水平、竖直方向建立坐标系求解显然比较困难．

可以以小球与斜面第一次碰撞点为原点，沿斜面向上建立x轴，垂直斜面向上建立y轴．

由于小球与斜面碰撞是弹性的，故小球每次碰撞后y方向的分速度大小不变，小球连续两次碰撞斜面的时间间隔不变．而且，小球自第一次撞击到最后返回该点的时间一定是上述时间间隔的整数倍．

设小球第一次撞击斜面的速度大小为v_0，则$v_x=v_0\cos\beta$，$v_y=v_0\sin\beta$．小球与斜面连续两次碰撞的时间间隔为：$T=\frac{2v_y}{g_y}=\frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\alpha}$．

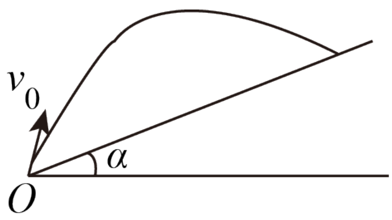
小球自第一次与斜面碰撞到最后返回的过程中，小球沿斜面方向位移为零，则：

$(v_0\cos\beta)t-\frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t^2=0$，

其中，$t=nT$（$n=1,2,3\cdots$）

解得：$\cot\beta=n\tan\alpha$（$n=1,2,3\cdots$）

7 大炮在山脚直接对着倾角为α的山坡发射炮弹，炮弹初速度为v_0，要使炮弹打到山坡上尽可能远的地方，则大炮的瞄准角为多少？打到山坡上的最远距离为多少？



答案 $\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$时，射到斜坡上的距离最远，最远距离为$x_m=\frac{v_0^2(1-\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$

解析 解法一：

如图所示，以发射点为原点，以水平向右为x轴的正方向、竖直向上为y轴的正方向，设抛射角(与水平方向夹角)为β，射到斜坡上的$P(x,y)$点，沿斜坡的距离为x'，有：

$x=v_0\cos\beta\cdot t$

$y=v_0\sin\beta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$

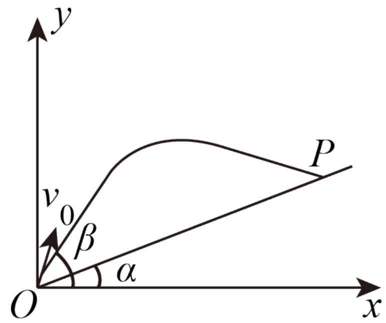
P点在斜面上，因此$y=x\tan\alpha$

有几何关系得：$x'=\frac{x}{\cos\alpha}$

联立解得：$x'=\frac{2v_0^2\cos\beta\sin(\beta-\alpha)}{g\cos^2\alpha}=\frac{v_0^2[\sin(2\beta-\alpha)-\sin\alpha]}{g\cos^2\alpha}$，

可见，当$2\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$，即$\beta=\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}$时，射到斜坡上的距离最远，最远距离为

$x_m'=\frac{v_0^2(1-\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$；



解法二：

设炮弹初速度与斜坡成θ角，建立如图所示的坐标系，则：

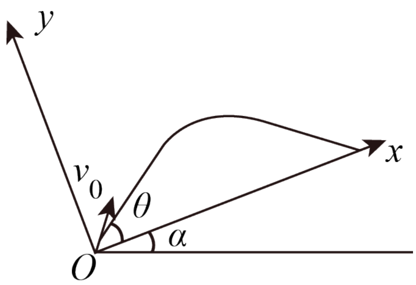
$x=v_0\cos\theta\cdot t-\frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t^2$

$y=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}g\cos\alpha\cdot t^2$

打到斜坡上时$y=0$，联立可得，沿斜坡的距离$x=\frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g\cos\alpha}-\frac{2v_0^2\sin\alpha\sin^2\theta}{g\cos^2\alpha}$；

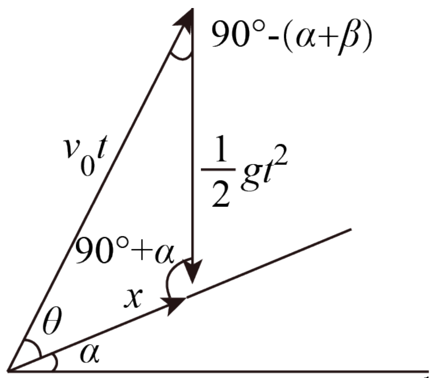
化简得到：$x=\frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}[\sin(\alpha+2\theta)-\sin\alpha]$；

显然当$\alpha+2\theta=\frac{\pi}{2}$，即$\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$时，有$x_m=\frac{v_0^2(1-\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$；



解法三：

设炮弹初速度与斜坡成θ角，如图所示，将炮弹运动分解为沿初速度方向的斜向上的匀速直线运动和自由落体运动．炮弹沿斜面的位移x为两个方向位移的矢量和，



由正弦定理可得：$\frac{v_0t}{\sin(90^\circ+\alpha)}=\frac{\frac{1}{2}gt^2}{\sin\theta}$，得$t=\frac{2v_0\sin\theta}{g\cos\alpha}$，

又由正弦定理得：$\frac{v_0t}{\sin(90^\circ+\alpha)}=\frac{x}{\sin(90^\circ-\theta-\alpha)}$，可得$x=\frac{v_0t\cos(\theta+\alpha)}{\cos\alpha}$，

联立可得：$x=\frac{2v_0^2\cos(\theta+\alpha)\sin\theta}{g\cos^2\alpha}=\frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}[\sin(\alpha+2\theta)-\sin\alpha]$；

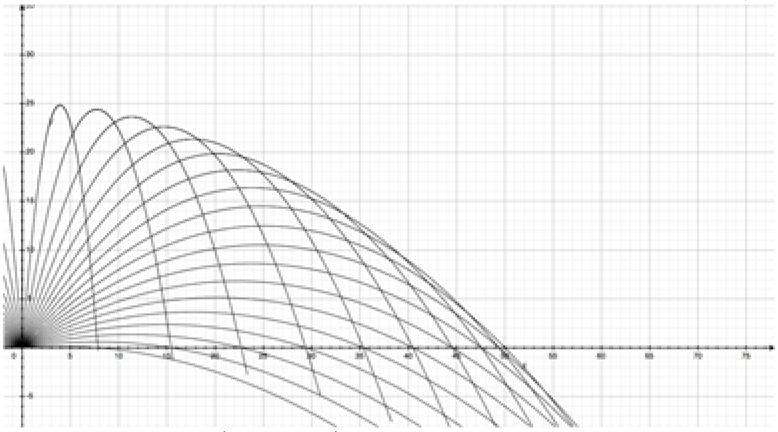
当$\alpha+2\theta=\frac{\pi}{2}$，即$\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$时，射到斜坡上的距离最远，最远距离为$x_m=\frac{v_0^2(1-\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$．

故答案为：$\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$时，射到斜坡上的距离最远，最远距离为$x_m=\frac{v_0^2(1-\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$．

8 二次世界大战中物理学家曾经研究，当大炮的位置固定，以同一速度v_0沿各种角度发射炮弹，求飞机在哪一区域之外飞行时不会有危险．换句话说，求一条曲线，这个曲线包围了所有可能被打到得范围（这条曲线叫做包络线）．

答案 $\dfrac{v_0^2}{2g}-\dfrac{gx^2}{2v_0^2}$ ．

解析 结论是这一区域为一抛物线，此抛物线为，在大炮上方$h=\dfrac{v_0^2}{2g}$处，以v_0平抛物体的轨迹．



证明如下：$\begin{cases} x=(v_0-\cos\theta)t \\ y=(v_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$，

消掉t得到，$y=x\tan\theta-\dfrac{g}{2v_0^2}\dfrac{1}{\cos^2\theta}x^2=x\tan\theta-\dfrac{g}{2v_0^2}x^2\tan^2\theta-\dfrac{g}{2v_0^2}x^2$，

下面有两种方法来处理这个式子，

方法一：当做一个关于$\tan\theta$的方程来处理：$\dfrac{g}{2v_0^2}x^2\tan^2\theta-x\tan\theta+\dfrac{g}{2v_0^2}x^2+y=0$，

$\tan\theta$有重根的时候可能取到包络线，因为包络线内的任意点都有两种打击方式．

$\Delta=x^2-4\left(\dfrac{gx^2}{2v_0^2}\right)\left(y+\dfrac{gx^2}{2v_0^2}\right)=0$，得到：$y=\dfrac{v_0^2}{2g}-\dfrac{gx^2}{2v_0^2}$，这就是所求包络线．

方法二：

可以看出，当任意给定一个x，都存在一个y的最大值．这个最大的(x,y_m)一定是包络线上的点．把y当做一个关于$\tan\theta$日的函数，当$\tan\theta=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{v_0^2}{gx}$时$y$可以取到极值，也就是

$y_m=\dfrac{v_0^2}{gx}x-\dfrac{g}{2v_0^2}x^2\left(\dfrac{v_0^2}{gx}\right)^2-\dfrac{g}{2v_0^2}x^2=\dfrac{v_0^2}{2g}=\dfrac{gx^2}{2v_0^2}$，上式就是所求包络线的数学表达式，与方法一结果相同．

曲率半径

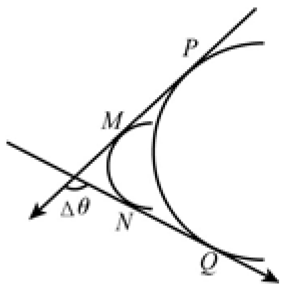
知识点睛

在高中课程中，我们已经学习过：物体做匀速圆周运动（设线速度为v，半径为r）时，任意时刻的加速度$a=\frac{v^2}{r}$指向圆心，称为向心加速度；物体做变速圆周运动时，任意时刻的加速度a可以分解为沿切线方向（速度方向）的加速度a_τ和沿半径方向（法向）的向心加速度$a_n=\frac{v^2}{r}$（v为对应时刻的瞬时速度），其中a_τ改变速度的大小，a_n改变速度的方向。那么物体做一般曲线运动时，情况如何呢？

定义

当物体做一般曲线运动时，在任意位置（时刻），仍然可以将加速度分解为沿切线方向（速度方向）的加速度a_τ和沿法向的加速度a_n，其中a_τ改变速度的大小，a_n改变速度的方向，设该位置（时刻）物体的速度为v，则有$a_n=\frac{v^2}{\rho}$，其中ρ称为**曲率半径**。

在究一些实际问题时，常常需要考虑曲线的弯曲程度。曲线的弯曲程度与曲线弧的长度及端点处切线的转角两个因素有关。若两个曲线MN、PQ在端点处切线转角相同，但长度不同，如图所示，显然MN弯曲得更厉害。



设弧MN长度为Δs，点M、N处切线的转角为$\Delta\theta$，则比值$\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$称为平均曲率。当$\Delta s\to 0$时，平均曲率的极限定义为曲线在某点的曲率，记作$k$，即$k=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$。若在该点附近取一小段曲线，恰好与某个圆的一小段圆弧重合，则该圆称为曲率圆，它的半径称为曲率半径ρ，可以证明$\rho=\frac{1}{k}$。

（1）物理方法求解曲率半径：

如果已知曲线方程，可以由数学方法求得任意点的曲率半径，但是用到数学知识较多，我们不做要求。在一些特殊问题中，也可结合物理知识求解曲率半径，思路如下：

①求出物体通过某一点的速度v；

②结合牛顿定律及矢量合成与分解的知识，求出该点的法向加速度a_n；

③则曲率半径为$\rho=\frac{v^2}{a_n}$。

（2）数学方法求解曲率半径：

如果已知曲线的方程$y=f(x)$，曲率半径可以按以下公式进行计算$\rho=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$

例题精讲

9 一般的曲线运动可以分成很多小段，每小段都可以看成圆周运动的一部分，即把整条曲线用一系列不同半径的小圆弧来代替．如图（a）所示，曲线上的A点的曲率圆定义为：通过A点和曲线上紧邻A点两侧的两点作一圆，在极限情况下，这个圆就叫做A点的曲率圆，其半径ρ叫做A点的曲率半径．现将一物体沿与水平面成α角的方向以速度v_0抛出，如图（b）所示．则在其轨迹最高点P处的曲率半径是（　　）

图 a　　图 b

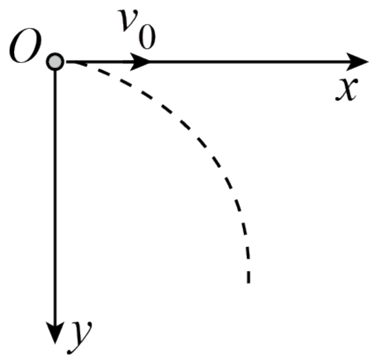
A. $\dfrac{v_0^2}{g}$　B. $\dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}$　C. $\dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$　D. $\dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{g\sin\alpha}$

答案　C

解析　物体在其轨迹最高点P处只有水平速度，其水平速度大小为$v_0\cos\alpha$，在最高点，把物体的运动看成圆周运动的一部分，物体的重力作为向心力，由向心力的公式得：$mg=m\dfrac{(v_0\cos\alpha)^2}{\rho}$，所以在其轨迹最高点$P$处的曲率半径是$\rho=\dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$．

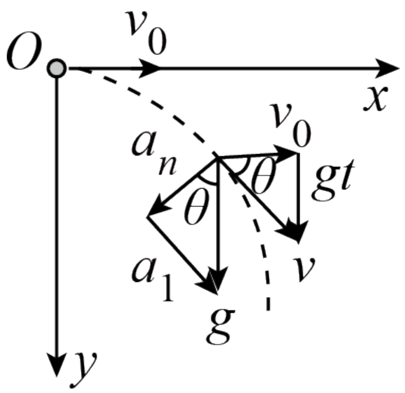
故选C．

10 如图所示，一物体做初速度为v_0的平抛运动，它的轨迹是半支抛物线，求在抛物线上任一点处的曲率半径（重力加速度记为g）



答案 $\rho=\dfrac{\left(v_0^4+g^2x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{gv_0^4}$

解析 如图所示，设t时刻物体运动到了$P\,(x,y)$点．



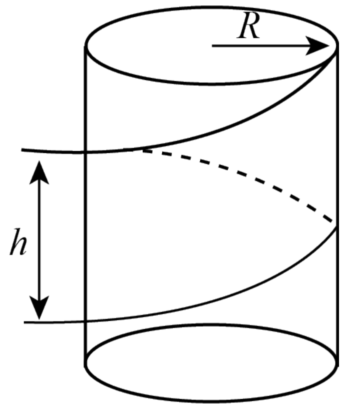
物体的合加速度为g，g可分解为法向加速度和切向加速度，其中法向加速度为

$a_n=g\cos\theta=g\dfrac{v_0}{v}$，而速度$v=\sqrt{v_0^2+(gt)^2}$，因此，$\rho=\dfrac{v^2}{a_n}=\dfrac{\left[v_0^2+(gt)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{gv_0}$．

又由$x=v_0t$消去t，可得：$\rho=\dfrac{\left(v_0^4+g^2x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{gv_0^4}$．

故答案为：$\rho=\dfrac{\left(v_0^4+g^2x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{gv_0^4}$．

11 有一等距螺旋线，螺旋半径为R，螺距为h，如图所示，求在任一点处的曲率半径．



答案 $\rho=\dfrac{4\pi^2R^2+h^2}{4\pi^2R}$.

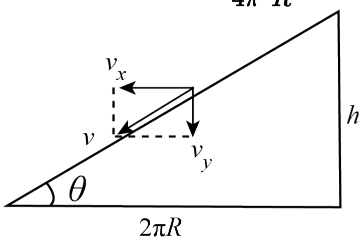
解析 设想有一质点沿等距螺旋线做匀速率运动，质点的切向加速度a_z为零，因此，合加速度
$a=a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$.

该质点的运动轨迹展开以后如图所示，它的运动可分解为水平方向的匀速圆周运动和竖直方向的匀速直线运动，$a_y=0$，所以水平方向做匀速圆周运动的$a_{向}$等于合加速度，有

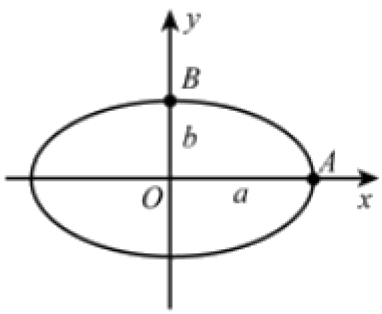
$a=a_{向}=\dfrac{v_x^2}{R}$，其中，$v_x=v\cos\theta=v\cdot\dfrac{2\pi R}{\sqrt{(2\pi R)^2+h^2}}$.

联立可解得$\rho=\dfrac{4\pi^2R^2+h^2}{4\pi^2R}$.

故答案为：$\rho=\dfrac{4\pi^2R^2+h^2}{4\pi^2R}$.

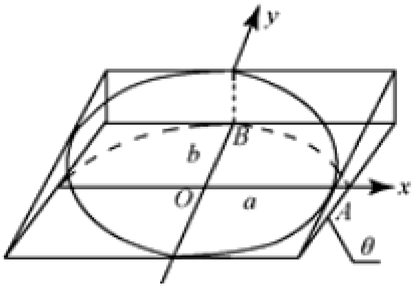


12 如图所示，质点运动的椭圆轨道方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，试求$A(a,0)$，$B(0,b)$两点的曲率半径．



答案 $\rho_A=\dfrac{b^2}{a}$，$\rho_B=\dfrac{a^2}{b}$

解析 如图所示，将长半轴为a，短半轴为b的椭圆看成是半径$R=a$的圆在xOy平面上的投影，圆平面与xOy平面的夹角θ满足关系式$\cos\theta=\frac{b}{R}=\frac{b}{a}$．



设一个质点以速率v在圆上做匀速圆周运动，此运动在xOy平面上的投影是椭圆运动，该质点的向心加速度$a_n=\frac{v^2}{a}$．从图中可以看出，质点的投影刚好在椭圆的长轴上的A点时，其速率和法向加速度分别为$v_A=v\cos\theta=\frac{vb}{a}$，$a_A=a_n=\frac{v^2}{a}$，因此，$\rho_A=\frac{v_A^2}{a_A}=\frac{b^2}{a}$．同理，该质点的投影在椭圆的短轴上的$B$点时，其速率和法向加速度分别为$v_B=v$，$a_B=a_n\cos\theta=\frac{bv^2}{a^2}$，则$\rho_B=\frac{v_B^2}{a_B}=\frac{a^2}{b}$．

故答案为：$\rho_A=\frac{b^2}{a}$，$\rho_B=\frac{a^2}{b}$．

曲线运动综合问题

知识点睛

研究一般的曲线运动的主要方法是运动的合成与分解，将复杂的曲线运动分解为已经研究过的简单运动。在有些问题中，通过转换参考系可以简化情景，这时需要用到前面章节介绍过的参考系变换和相对运动的知识，特别提醒大家注意：在非惯性系中使用牛顿第二定律时，一定要注意惯性力的问题。这些内容请大家结合例题学习。

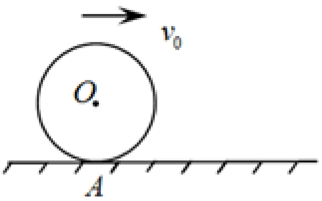
下面我们介绍两个概念。

（1）纯滚动

纯滚动是指滚动的物体（我们一般研究刚体，即大小、形状不发生改变的物体）与平面（或曲面）的接触点在接触的一瞬间与接触面相对静止，没有任何的相对滑动。

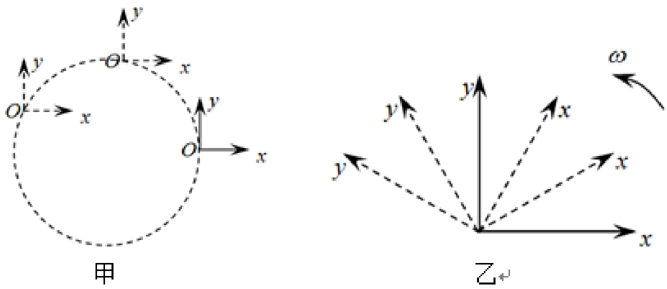
在研究纯滚动时，我们一般将该运动分解为质心的平动和绕质心的转动。

如图所示情景，圆盘O在地面上向右做纯滚动，质心O的平动速度为v_0，圆盘上任意点绕圆心转动的角速度为ω，圆盘半径为r。设某时刻圆盘与地面的接触点为A，由于圆盘做纯滚动，故此时A点相对地面静止，即$v_A=0$。由于$v_A=v_{\text{圆心对地}}+v_{A\text{对圆心}}=v_0-\omega r$，联立可得$\omega$和$v_0$应满足：$v_0=\omega r$。



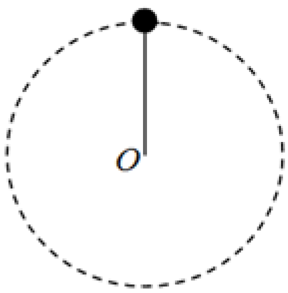
（2）惯性离心力

在牛顿运动定律模块中，我们已经学习过在有平动加速度的非惯性系中使用牛顿定律，要引入$f_{惯}=-ma_{惯}$。如果平动参考系做的是圆周运动，这时的惯性力又称为惯性离心力。这里请大家特别要注意区分做圆周运动的平动参考系和转动参考系。如图甲所示为做圆周运动的平动参考系，如图乙所示为转动参考系。转动参考系中的惯性力比较复杂，我们的课程中不研究这类情况。



甲　　　　乙

如图所示情景中，一个质量为m的小球被一根长为l的轻绳拉着，在光滑水平面内绕O点以速度v做匀速圆周运动。

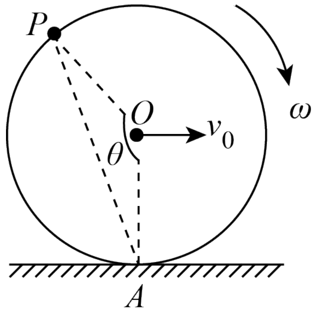


如果在地面参考系中研究这个问题，轻绳的拉力提供小球的向心力，由牛顿第二定律得：$T=m\frac{v^2}{l}$。

如果选择随小球一起做圆周运动的平动参考系，则参考系的加速度$a_{参}=\frac{v^2}{l}$，指向圆心，$f_{惯}=m\frac{v^2}{l}$，与绳的拉力反向。在该参考系中，小球静止，由平衡条件得：$T-f_{惯}=0$，解得：$T=m\frac{v^2}{l}$，与地面参考系中结果相同。

例题精讲

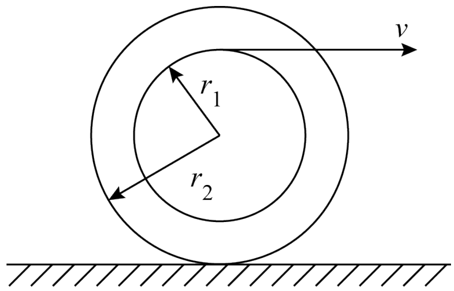
13 如图所示，半径为r的轮子在水平面上做无滑动的滚动，已知轮子中心的速度为v_0，试求轮子边缘上任一点P相对地面的速度大小，P点的位置用θ角表示．



答案 $2v_0\sin\dfrac{\theta}{2}$

解析 略．

14 握着线头以恒定速度v拉线轴，如图所示，线轴在地面上无滑动地滚动，求线轴转动的角速度．



答案 $\omega=\dfrac{v}{r_1+r_2}$

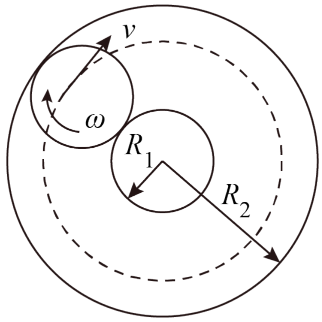
解析 由线轴和绳、地接触点的速度

$v=\omega r_1+v_0$

$0=\omega r_2-v_0$

得$\omega=\dfrac{v}{r_1+r_2}$．

15 如图所示，由两个圆环所组成的滚珠轴承，其内环半径为R_1，外环半径为R_2，在两环之间分布的小球半径为r，外环以线速度v_1顺时针方向转动，内环以线速度v_2顺时针方向转动，试求小球中心绕圆环中心转动的线速度v和小球自转的角速度ω，设小球圆环之间无滑动发生．



答案 $v=\dfrac{v_1+v_2}{2}$，$\omega=\dfrac{v_1-v_2}{2r}$

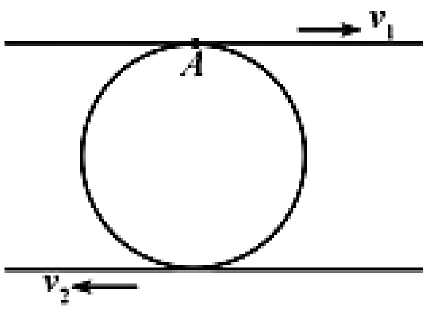
解析 根据两个接触点的速度公式

$v_1=v+\omega r$

$v_2=v-\omega r$

得$v=\dfrac{v_1+v_2}{2}$,$\omega=\dfrac{v_1-v_2}{2r}$

16 如图所示，半径为R的圆柱夹在互相平行的两板之间，两板分别以速度v_1，v_2反向匀速运动，圆柱与板之间无相对滑动，求圆柱上与板接触处的A点的加速度大小．



答案 $\dfrac{(v_1+v_2)^2}{4R}$

解析 A点的运动可以分解为随圆柱中心的平动和绕圆柱中心的转动，设圆柱中心的平动速度为v，圆柱转动角速度为ω．由于圆柱与两板都无滑动，因此有$v+\omega R=v_1$，$\omega R-v=v_2$，联立解得：$v=\dfrac{v_1-v_2}{2}$，$\omega=\dfrac{v_1+v_2}{2R}$．因此，$A$点相对于圆柱中心的转动速度为$v_A=\omega R=\dfrac{(v_2+v_1)}{2}$，可得$A$点相对于圆柱中心的加速度大小为$\dfrac{v_A^2}{R}=\dfrac{(v_1+v_2)^2}{4R}$，由于圆柱中心匀速运动，无加速度，因此，$A$点相对于地面的加速度也为$\dfrac{(v_1+v_2)^2}{4R}$．

故答案为:$\dfrac{(v_1+v_2)^2}{4R}$．

17 一个半径为R硬币，固定在水平面上，再用一个半径为r的硬币与其接触，让小硬币绕大硬币无滑动的滚动一周，求小硬币自转了多少圈．

答案 $\dfrac{R+r}{r}$

解析 将R硬币的周长展开，周长即为r硬币走的长度，可得：

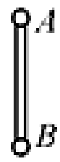
$\dfrac{2\pi R}{v}=\dfrac{2\pi R}{\omega r}=t=\dfrac{N\cdot 2\pi}{\omega}$

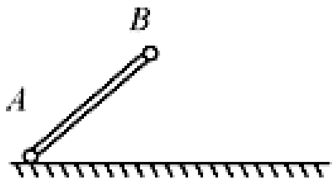
可得，展开情况下转过的圈数为$N=\dfrac{R}{r}$，

再将小硬币环绕回去，多走一圈，因此圈数为$\dfrac{R+r}{r}$．

故答案为：$\dfrac{R+r}{r}$．

18 两个质量相同的小球用长为L的轻杆连接，起初放于高空，先单给A一个水平速度v_0，AB就会翻滚着飞出，已知落地时AB与地面成$45°$角，且在空中转了不到一圈，求初始时刻B距离地面的高度及落地时A的水平位移．





答案 初始时B距离地面高度$=h+\dfrac{\sqrt{2}}{4}L-\dfrac{L}{2}=\dfrac{9g\pi^2L^2}{32{v_0}^2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}L-\dfrac{1}{2}L$，

落地时A的水平位移$=x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}L=\dfrac{3\pi}{8}L+\dfrac{\sqrt{2}}{4}L$

解析 AB系统的运动可以分解为质心的平抛运动和AB绕质心转动．设质心初始的水平速度为v_C，AB绕质心转动的角速度为ω．

则$v_C=\dfrac{v_0}{2}$，$\omega=\dfrac{v_0-v_c}{\frac{L}{2}}=\dfrac{v_0}{L}$，

整个运动时间$t=\dfrac{\frac{3}{4}\pi}{\omega}=\dfrac{3\pi L}{4v_0}$，

质心下落高度$h=\frac{1}{2}gt^2=\frac{9g\pi^2L^2}{32v_0^2}$，

质心水平位移$x=v_Ct=\frac{3\pi L}{8}$，

由几何关系易知：初始时B距离地面高度$=h+\frac{\sqrt{2}}{4}L-\frac{L}{2}=\frac{9g\pi^2L^2}{32{v_0}^2}+\frac{\sqrt{2}}{4}L-\frac{1}{2}L$，

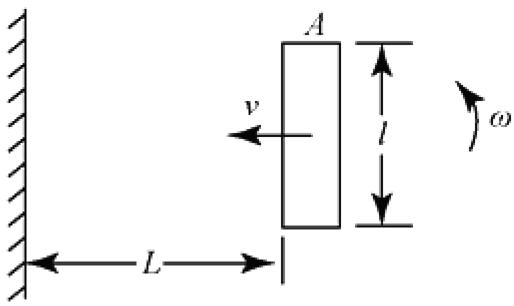
落地时A的水平位移$=x+\frac{\sqrt{2}}{4}L=\frac{3\pi}{8}L+\frac{\sqrt{2}}{4}L$．

故答案为：

初始时B距离地面高度$=h+\frac{\sqrt{2}}{4}L-\frac{L}{2}=\frac{9g\pi^2L^2}{32{v_0}^2}+\frac{\sqrt{2}}{4}L-\frac{1}{2}L$，

落地时A的水平位移$=x+\frac{\sqrt{2}}{4}L=\frac{3\pi}{8}L+\frac{\sqrt{2}}{4}L$．

19 如图所示，长度$l=10\mathrm{cm}$的棒在光滑水平面上转动，同时以速度$v=10\mathrm{cm/s}$朝着左侧墙滑动，某时刻棒与墙平行，且两者相距$L=50\mathrm{cm}$，要使棒与墙平行相撞，则棒的角速度应该多大．



答案 $\omega_1=0.63\mathrm{rad/s}$，$\omega_2=1.26\mathrm{rad/s}$和$\omega_3=1.89\mathrm{rad/s}$

解析 棒的中心经过距离L与墙相撞所经历时间$t=\frac{L}{v}=5\mathrm{s}$，为使棒平着与墙相撞必须在这段时间内，棒转动的次数为半圈的整数倍，因此$\omega_nt=n\pi$，$n=1$、2、$3\cdots$，

故$\omega_n=\frac{n\pi}{t}$……（1），

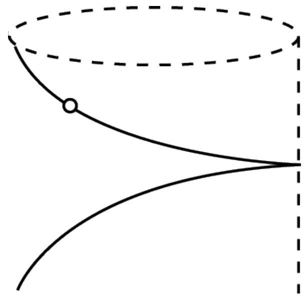
但是，并非(1)式所表示的一切ω值符合题目的要求，因为当ω足够大时，棒在运动中将会发生一端碰到墙，未能平行靠墙的情况．

当棒平行撞墙时，棒的两端的速度方向不可能是离开墙的方向，否则，在此之前端点已在墙上，这是不可能的．因此，要求$v-\frac{1}{2}\omega l>0$，解得$\omega<\frac{2v}{l}=2\mathrm{rad/s}$……（2），

结合（1）（2）可得：$\omega_1=0.63\mathrm{rad/s}$，$\omega_2=1.26\mathrm{rad/s}$和$\omega_3=1.89\mathrm{rad/s}$．

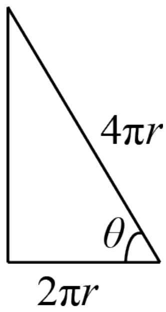
故答案为：$\omega_1=0.63\mathrm{rad/s}$，$\omega_2=1.26\mathrm{rad/s}$和$\omega_3=1.89\mathrm{rad/s}$．

20 如图所示，把一根长$4\pi r$的光滑钢丝，绕在半径为r的圆柱上，刚好绕一整圈后，从圆柱上取下，即完成一个单匝的弹簧．现在固定弹簧，再把一掏空的小球穿在弹簧上，从顶部静止释放，计算小球脱离弹簧的时间．



答案 $t=\sqrt{\dfrac{16\pi r}{\sqrt{3}g}}$

解析 将单匝弹簧展开成平面如图，小球沿弹簧下滑等效于沿图示的斜面下滑，由几何关系易知$\theta=60^\circ$．



小球下滑加速度$a=g\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}g$

设小球下滑时间为t，则$4\pi r=\dfrac{1}{2}at^2$

解得：$t=\sqrt{\dfrac{16\pi r}{\sqrt{3}g}}$

故答案为：$t=\sqrt{\dfrac{16\pi r}{\sqrt{3}g}}$．

21 如图7所示，有一等距螺旋线轨道，截面半径为R，螺距$H=2\pi R$，一质量为m的小球在轨道上匀速下滑，忽略一切摩擦．

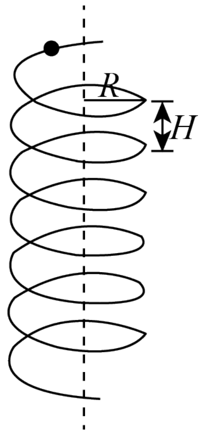


图7

(1) 为使小球匀速下滑，可对小球施加一个沿轨道切向的力T，求力T的大小．

(2) 在（1）问中，若小球速度为v，求轨道对小球的弹力N．

答案 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}mg$．

(2) $m\sqrt{\frac{g^2}{2}+\frac{v^4}{4R^2}}$．

解析 (1) 如图8所示，以倾角为θ的直角三角形薄片紧贴于半径为R的圆柱面，圆柱面的轴线与直角三角形薄片的沿竖直方向的直角边平行，若把此三角形薄片卷绕在柱面上，则三角形薄片的斜边就相当于题中的螺旋线轨道．根据题意，有

$\tan\theta=\frac{H}{2\pi R}=1$．

可得

$\theta=45^\circ$．

小球沿螺旋线的运动可视为在竖直方向的匀速直线运动和水平内的匀速圆周运动的合成．在竖直平面内，有

$T=mg\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}mg$．

$N_1=mg\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}mg$．

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}mg$．

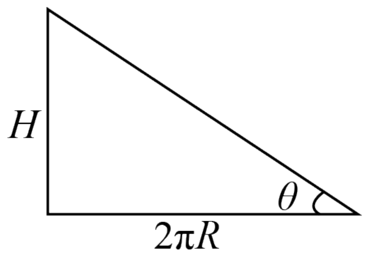


图8

(2) 在水平面内，有

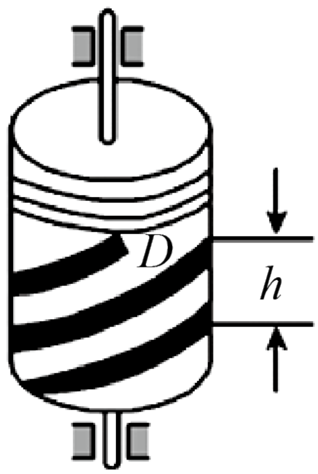
$$N_2 = m\frac{(v\cos 45^\circ)^2}{R} = \frac{mv^2}{2R}.$$

所以轨道对小球的弹力为

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = m\sqrt{\frac{g^2}{2} + \frac{v^4}{4R^2}}.$$

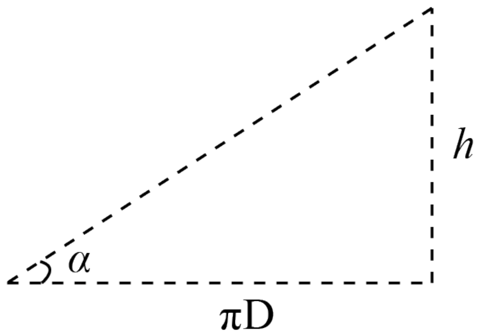
故答案为：$m\sqrt{\frac{g^2}{2} + \frac{v^4}{4R^2}}$.

22 如图所示，一个直径为D的圆柱体侧面刻有螺距为h的螺旋形凹槽，槽内有一小球，为使小球能自由落下，必须要以多大的加速度来缠在圆柱体侧面的绳子．



答案 $a = \frac{\pi D}{h}g$

解析 把等距螺旋线展开为如右图所示三角形．



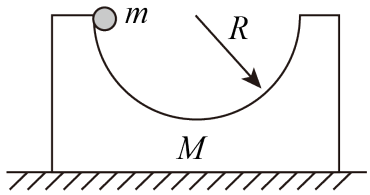
设圆柱体加速转n周所需时间为t，则$n\pi D=\frac{1}{2}at^2$，

在此过程中小球自由下落nh的高度，即$nh=\frac{1}{2}gt^2$，

解得：$a=\frac{\pi D}{h}g$．

故答案为：$a=\frac{\pi D}{h}g$．

23 如图所示，质量为M的光滑半圆形凹槽放在光滑水平面上，凹槽的半径为R，质量为m的小球从凹槽的左侧最高点由静止释放，求当小球滑至凹槽的最低点时，小球对凹槽的压力．



答案 $3mg+\frac{2m^2g}{M}$

解析 小球下滑时，凹槽会运动，相对于地面来讲，小球的运动轨迹不是圆．而以半圆形凹槽为参考系，小球做圆周运动．当小球运动到最低点时，分析凹槽受力可知，其加速度为零，此时刻凹槽是一个惯性系，因此不用考虑惯性力．由动量守恒定律有：$mv_1=Mv_2$，

根据机械能守恒定律有：$mgR=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}Mv_2^2$，

解得：$v_1=\sqrt{\frac{M}{M+m}2gR}$，$v_2=\sqrt{\frac{m^2}{M(M+m)}2gR}$

小球在凹槽最低点时有：$N-mg=m\frac{v_{球对槽}^2}{R}=m\frac{(v_1+v_2)^2}{R}$

解得：$N=3mg+\frac{2m^2g}{M}$

24 把两个质量均为m的小球用长度为$2r$的轻绳连接，放于光滑水平地面，分别对两球施加瞬时冲量产生一对初速度v与$-v$，两位同学为计算绳子上张力出现了矛盾．

甲同学认为：以绳子中心为圆心，那么拉力为$\dfrac{mv^2}{r}$

乙同学认为：以右端球为圆心，拉力为$\dfrac{m(2v)^2}{2r}=\dfrac{2mv^2}{r}$

哪位同学考虑不周？为什么？

答案 乙同学考虑不周

解析 乙同学考虑不周，在以右球为参考系时，该参考系为非惯性系，需要考虑非惯系力．

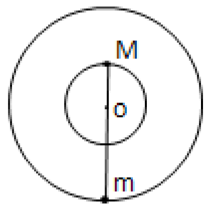
以右球为参考系，对左球

$T+T_{惯}=\dfrac{m(2v)^2}{2r}$，$T_{惯}=m\dfrac{v^2}{r}$，

解得$T=\dfrac{mv^2}{r}$，与甲同学结果相同．

故答案为：乙同学考虑不周．

25 在天文学中，把两颗相距较近的恒星叫双星，已知两恒星的质量分别为m和M，两星之间的距离为L，两恒星分别围绕共同的圆心作匀速圆周运动，如图所示，求恒星运动的半径和周期．



答案 $r=\dfrac{M}{M+m}L$，

$R=\dfrac{m}{M+m}L$ ，

$T=2\pi\sqrt{\dfrac{L^3}{(M+m)G}}$

解析 两颗恒星在万有引力作用下围绕共同点O（物理学上把它叫做质心）作匀速圆周运动，O点在两颗恒星的连线 上，设两颗星到O的距离分别为r、R，它们运动的周期为T，由万有引力定律和牛顿第二定律

对质量为m的恒星有$G\dfrac{Mm}{L^2}=m\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2r$，

对质量为M的恒星有$G\dfrac{Mm}{L^2}=M\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2R$

$r+R=L$，

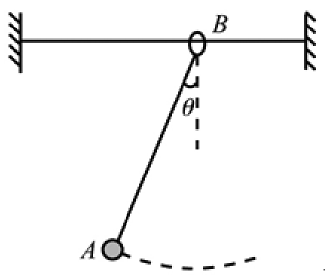
由以上三式解得

$r=\dfrac{M}{M+m}L$，

$R=\dfrac{m}{M+m}L$ ，

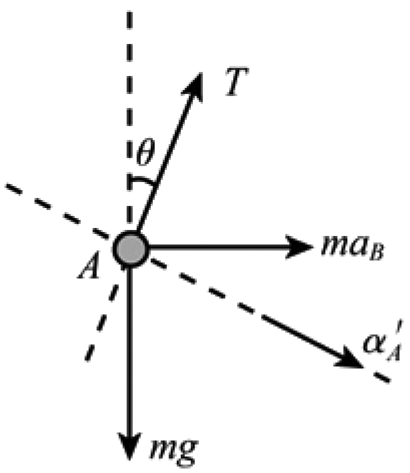
$T=2\pi\sqrt{\dfrac{L^3}{(M+m)G}}$

26 一轻绳的两端分别连接小球A和小环B，球与环的质量相等，小环B可在拉紧的钢丝上做无摩擦的滑动，如图所示．现使小球在图示的平面内摆动．求小球处于离铅垂线的最大角度θ时，小环B和小球A的加速度大小．



答案 $\dfrac{g\sin\theta\sqrt{3\sin^2\theta+1}}{1+\sin^2\theta}$；$\dfrac{g\sin 2\theta}{2\left(1+\sin^2\theta\right)}$

解析 设球和环的质量为m，以小环B为参照系，小球A处在最大摆角时，受力分析如图所示．



在此参考系中，小球此时速度为零，故向心加速度为零，因此其加速度a'_A沿圆弧的切线方向，

由牛顿定律有：$T+ma_B\sin\theta=mg\cos\theta$，$mg\sin\theta+ma_B\cos\theta=ma'_A$ ．

在地面参考系中，对小环有$T\sin\theta=ma_B$ ．

联立解得：$a_B=\dfrac{g\sin2\theta}{2\left(1+\sin^2\theta\right)}$，$a'_A=\dfrac{2g\sin\theta}{1+\sin^2\theta}$

因此，小球A相对地的加速度：

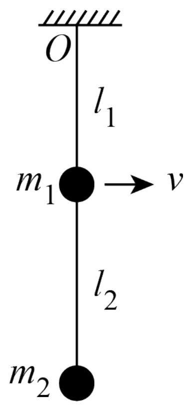
$a_{Ax}=a'_A\cos\theta-a_B=\dfrac{\sin2\theta}{2\left(1+\sin^2\theta\right)}g$，

$a_{Ay}=a'_A\sin\theta=\dfrac{2\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}g$，

得$a_A=\sqrt{a_{Ax}^2+a_{Ay}^2}=\dfrac{g\sin\theta\sqrt{3\sin^2\theta+1}}{1+\sin^2\theta}$．

故答案为：$\dfrac{g\sin\theta\sqrt{3\sin^2\theta+1}}{1+\sin^2\theta}$；$\dfrac{g\sin2\theta}{2\left(1+\sin^2\theta\right)}$．

27 长度分别为l_1和l_2的两根不可伸长的细绳悬挂着质量分别为m_1和m_2的两个小球，处于静止状态，如图所示．中间小球突然受到一水平方向的冲击力，瞬间获得水平向右的速度v，求此时两绳中的拉力．



答案 $T_1=m_1g+m_1\dfrac{v^2}{l_1}+m_2g+m_2\left(\dfrac{v^2}{l_1}+\dfrac{v^2}{l_2}\right)$

$T_2=m_2g+m_2\left(\dfrac{v^2}{l_1}+\dfrac{v^2}{l_2}\right)$

解析 m_1相对于悬点O做圆周运动，根据牛顿第二定律，有

$T_1-m_1g-T_2=m_1\dfrac{v^2}{l_1}$，①

m_2相对于m_1做圆周运动，此时m_1的向心加速度为$\dfrac{v^2}{l_1}$，m_1是一个非惯性系，故m_2所受惯性力为$m_2\dfrac{v^2}{l_1}$，方向竖直向下，根据牛顿第二定律，有

$T_2-m_2g-m_2\dfrac{v^2}{l_1}=m_2\dfrac{v^2}{l_2}$，②

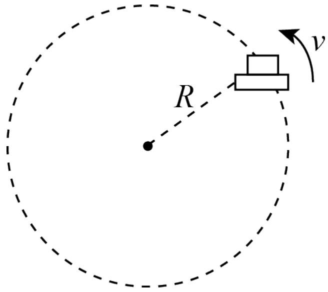
联立式①和式②，得

$T_1=m_1g+m_1\dfrac{v^2}{l_1}+m_2g+m_2\left(\dfrac{v^2}{l_1}+\dfrac{v^2}{l_2}\right)$，

$T_2=m_2g+m_2\left(\dfrac{v^2}{l_1}+\dfrac{v^2}{l_2}\right)$．

故答案为：$T_1=m_1g+m_1\frac{v^2}{l_1}+m_2g+m_2\left(\frac{v^2}{l_1}+\frac{v^2}{l_2}\right)$；$T_2=m_2g+m_2\left(\frac{v^2}{l_1}+\frac{v^2}{l_2}\right)$．

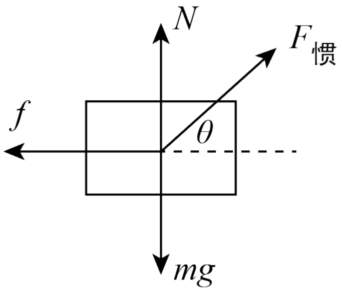
28 一水平放置的木板上放上砝码，砝码与木板间的静摩擦因数为μ，如果让木板在竖直平面内做半径为R的匀速圆周运动，如图所示．假如运动中木板始终保持水平，试问：匀速圆周运动的速度为多大时，砝码才能始终保持在木板上不滑动．



答案 $v\leqslant\sqrt{\frac{\mu gR}{\sqrt{1+\mu}}}$

解析 木板做圆周运动的向心加速度$a=\frac{v^2}{R}$，选择和木板一起做圆周运动的平动参考系，在此参考系中砝码静止，

设砝码质量为m，当木板运动到与水平方向夹角为θ处时，砝码受力如图所示，



由平衡条件得：$mg-N-F_{惯}\sin\theta=0$，$f-F_{惯}\cos\theta=0$，

其中$F_{惯}=m\frac{v^2}{R}$，

若砝码不滑动，要求$f\leqslant\mu N$，

联立解得：$v\leqslant\sqrt{\frac{\mu gR}{\cos\theta+\mu\sin\theta}}$，

若上式对任意θ都成立，则要求$v\leqslant\sqrt{\frac{\mu gR}{\sqrt{1+\mu}}}$．

故答案为：$v\leqslant\sqrt{\frac{\mu gR}{\sqrt{1+\mu}}}$．

29 一辆质量为m的汽车以速度v在半径为R的水平弯道上做匀速圆周运动．汽车左、右轮相距为d，重心离地的高度为h，车轮和路面之间的静摩擦因数为μ_0．求：

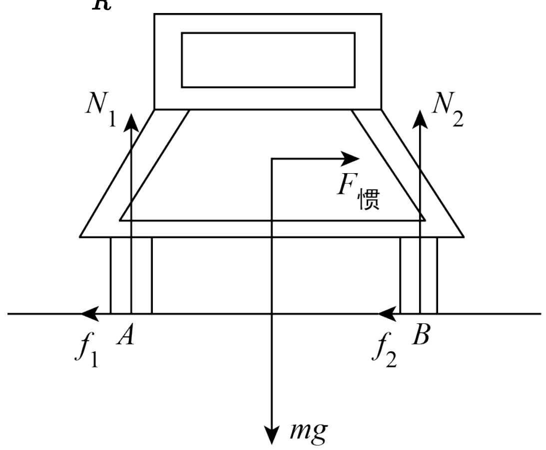
(1) 汽车内外轮各承受多大支持力．

(2) 汽车能安全行驶的最大速度是多少．

答案 (1) $N_1=mg-N_2=\frac{1}{2}mg-\frac{mv^2h}{Rd}$

(2) $\sqrt{gR\mu_0}$和$\sqrt{\frac{dRg}{2h}}$中较小的一个

解析 (1) 假设汽车左转弯行驶，此时汽车的向心加速度为$a=\frac{v^2}{R}$，选取一个和汽车一起做圆周运动的平动参考系，则汽车在此参考系中静止，受力情况如图，其中，惯性离心力$F_{惯}=\frac{mv^2}{R}$，方向向右，



以内轮着地点A为转轴，由力矩的平衡条件有：$mg\cdot\frac{d}{2}+F_{惯}\cdot h=N_2\cdot d$，

将$F_{惯}=\frac{mv^2}{R}$代入上式得：$N_2=\frac{1}{2}mg+\frac{mv^2h}{Rd}$，

由汽车在竖直方向的受力平衡有：$N_1+N_2=mg$，

解得：$N_1=mg-N_2=\frac{1}{2}mg-\frac{mv^2h}{Rd}$．

故答案为： $N_1=mg-N_2=\frac{1}{2}mg-\frac{mv^2h}{Rd}$．

(2) 汽车安全行驶时，要求汽车既不向外侧滑动，又不翻倒，

①要使汽车不向外侧滑动，必须满足：$F_{惯}=f_1+f_2\leqslant\mu_0(N_1+N_2)$，

即$\mu_0 mg\geqslant m\frac{v^2}{R}$，解得：$v\leqslant\sqrt{gR\mu_0}$；

②要使汽车不翻倒，应满足：$N_1\geqslant 0$，

即$\frac{1}{2}mg-\frac{mv^2h}{Rd}\geqslant 0$，

解得：$v\leqslant\sqrt{\frac{dRg}{2h}}$，

因此，汽车安全行驶的最大速度应为$\sqrt{gR\mu_0}$和$\sqrt{\frac{dRg}{2h}}$中较小的一个．

故答案为：$\sqrt{gR\mu_0}$和$\sqrt{\frac{dRg}{2h}}$中较小的一个．

角动量、角动量守恒定律

知识点睛

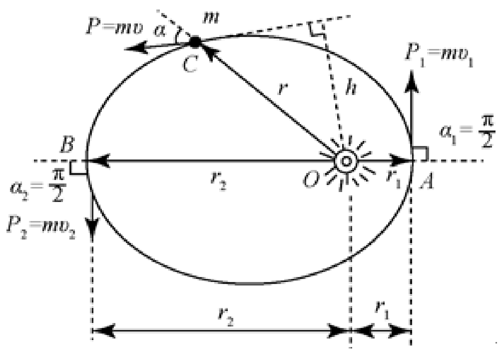
定义

研究质点的运动时，经常用动量$p=mv$描述质点的运动状态，它包含了质点运动速度的大小和方向特征。但是当质点（或质点系）绕某一固定点（或轴线）运动时，不仅质点的动量时刻改变，质点离固定点的距离和方位也在改变，这时很难用动量完整地揭示其规律，我们可以尝试引入新的物理量来更方便的描述这类运动。

例如，当行星绕太阳公转时，行星的轨迹是以太阳为焦点的一个椭圆，如图所示。行星在不同位置的速度大小和方向都不同。由开普勒第二定律可知，行星与太阳连线在相等时间内扫过的面积相等，在A、B、C位置分别取$\Delta t\to 0$的相等时间$\Delta t\to 0$，有：$r_1\left(v_1\Delta t\right)\sin\frac{\pi}{2}=r_2\left(v_2\Delta t\right)\sin\frac{\pi}{2}=r\left(v\Delta t\right)\sin\alpha=\text{常数}$，即：

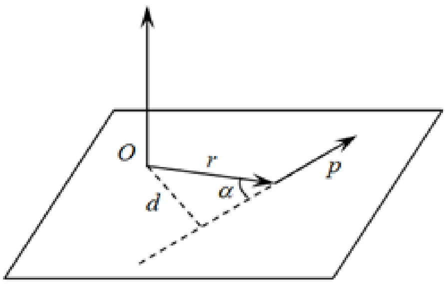
$$rv\sin\alpha=\text{常数}$$

考虑到不同行星质量不同，因此对任一行星$r\left(mv\right)\sin\alpha=\text{常数}$，这表明$r\left(mv\right)\sin\alpha$也是反映物体运动属性的物理量，我们把这个物理量叫做**角动量**，也叫动量矩。



①当质点在平面内绕某一固定点（或者认为是通过该点且垂直于平面的固定轴）运动时，类比于力矩，将动量也用带箭头的有向线段描述，角动量L的大小可以定义为：动量×动量臂。（其中动量臂为固定点到动量作用线的距离）

如图所示，质点在平面内绕O点运动，则质点相对于O点的角动量$L = pd = mvr\sin\alpha$。

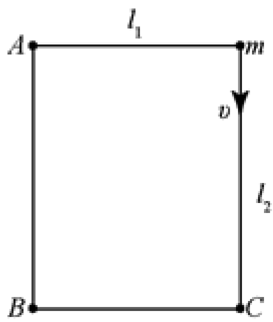


②一般情况下，我们也可以利用矢量的叉乘来定义角动量。设质量为的m质点相对于固定点O的位置矢量为$\vec{r}$，瞬时速度为$\vec{v}$（动量$\vec{p} = m\vec{v}$），则质点相对于O点的角动量$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$。

③角动量也是矢量，角动量的方向较为复杂（可以根据叉乘的定义由右手螺旋定则判断），同学们只要会判断质点在平面内绕固定点运动时，角动量是顺时针方向还是逆时针方向即可。如果规定顺时针方向为正，则逆时针方向为负，反之亦可。

例题精讲

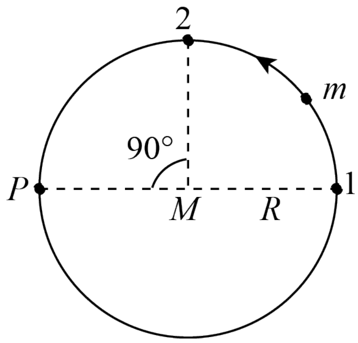
30 如图所示，质量为m的小球自由下落，某时刻具有速度v，此时小球与图中的A、B、C三点恰好位于某长方形的四个顶点，且小球与A，C两点的距离分别为l_1、l_2，求小球相对A、B、C三点的角动量L_1、L_2、L_3的大小．



答案 $L_1 = mvl_1$，$L_2 = mvl_1$，$L_3 = 0$

解析 略

31 质量为M的质点固定不动，在万有引力作用下，质量为m的质点绕着它做半径为R的圆周运动．取圆轨道上的P点为参考点，如图所示，试求：



(1) 在图中点1处，m相对P点的角动量大小L_1．

(2) 在图中点2处，m相对P点的角动量大小L_2．

答案 (1) $L_1 = 2m\sqrt{GMR}$．

(2) $L_1 = m\sqrt{GMR}$．

解析 (1) 略．

(2) 略．

32 在光滑的水平面上，两个质量分别为m_1和m_2的小球，用长为l的轻线连结．开始时，线正好拉直，m_1和m_2的速度分别为v_1和v_2（$v_1 > v_2$），它们的方向相同，且垂直于连线，求系统相对质心的总角动量为多大．

答案 $\dfrac{m_1 m_2 l}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$

解析 略

知识点睛

定理

下面我们不加证明地给出角**动量守恒定律。**

当物体相对某一固定点的**合外力矩**等于零时，物体相对这一点的角动量保持不变，此即**角动量守恒定律。**

注意：角动量守恒定律不仅可以对质点应用，也可以对质点组应用，这时只要求合外力矩为零，不需要考虑内力力矩。当质点组对固定点的合外力矩为零时，质点组对固定点的总角动量守恒。

当所选参考系不是惯性系时，要考虑非惯性力的力矩，当然我们一般不涉及这些复杂情况。

具体来说，角动量守恒的成立条件有以下情况：

①物体不受外力；

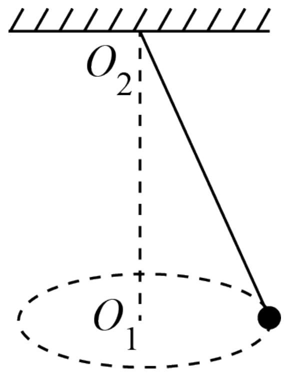
②物体所受外力均通过固定点，故各力相对该点的力矩均为零；

③物体所受各个外力的力矩不为零，但外力矩的矢量和为零。

回到上面的行星绕太阳运动的例子，行星所受万有引力通过太阳，故行星所受外力相对于太阳的合外力矩为零，因此，行星的角动量守恒。开普勒第二定律本质上反映的正是角动量守恒定律。

例题精讲

33 如图所示，对于圆锥摆，摆球相对于运动中心O_1的角动量是否守恒．

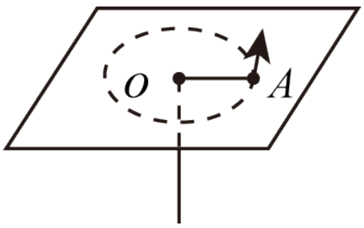


答案 守恒

解析 摆球所受重力和拉力的合力为圆周运动的向心力，刚好指向O_1，故合外力矩为零，角动量守恒．

故答案为：守恒．

34 如图所示，一个质量为m的小球系于一根不能伸长的轻绳一端，放在光滑水平桌面上，绳的另一端穿过桌面上的小孔用手拉住，先给小球一个大小为v_1的速度，使它沿半径为r_1的圆轨道运动，然后慢慢向下拉绳，使小球的转动半径减小至r_2，试求这时小球的速率．

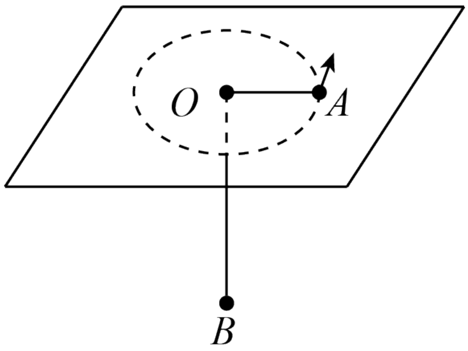


答案 $v_2=\frac{r_1}{r_2}v_1$.

解析 小球对O点的合外力矩为零，因此小球对O点的角动量守恒，即$mv_1r_1=mv_2r_2$，解得：

$v_2=\frac{r_1}{r_2}v_1$.

35 光滑水平面上有一小球A被一轻绳拴住，轻绳穿过平面上小孔O与小球B连接．开始时A球在水平面上绕O做匀速圆周运动，B球静止地向下垂挂着，如图所示．今使小球B的质量缓慢增加，直到A球绕O点做圆周运动的半径缩小一半，试问此时B球质量为初始质量的多少倍．



答案 8

解析 设B球初始质量为m_B，最终质量为$m_B{}'$；A球质量为m_A；初始时A球做圆周运动的半径为R．

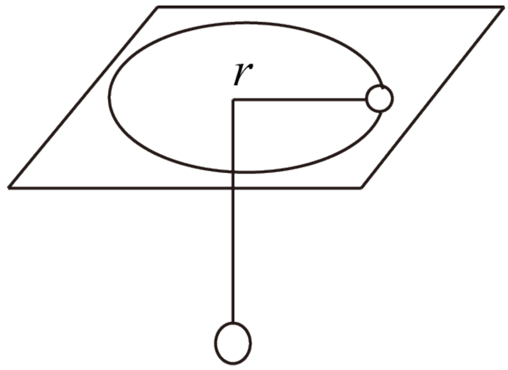
由牛顿第二定律得：$m_Bg=m_A\frac{v_A^2}{R}$，$m'_Bg=m_A\frac{{v'_A}^2}{\frac{R}{2}}$.

A球对O点的角动量守恒，有：$m_Av_AR=m_Av'_A\frac{R}{2}$，

联立解得：$\frac{m_B{}'}{m_B}=8$.

故答案为：8 .

36 如图所示，在水平的光滑桌面上开有一个小孔，条绳穿过小孔，其两端各系由一质量为m的物体，开始时，用手握住下面的物体，桌上的物以$v_0=\frac{3}{2}\sqrt{2gr_0}$速率作半径为$r_0$ (即桌上部分绳长)的匀速圆周运动，然后放手，求以后运动中桌上绳索的最大长度．



答案 $r_1=3r_0$.

解析 放手后，上面小球做匀速圆周运动所需向心力$\frac{mv_0^2}{r_0}=\frac{m\cdot\frac{9}{4}\cdot 2gr_0}{r_0}=\frac{9}{2}mg>mg$，所以小球必“甩”出去，$r$会被拉长，

设r_1为桌上部分绳索的最大长度，桌面上物体对小孔的角动量守恒，因此有：

$mv_0r_0=mv_1r_1$ ，

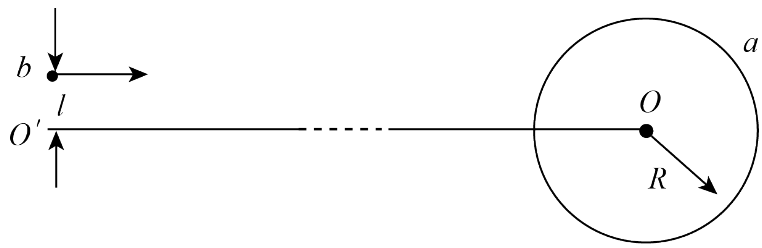
以桌面为重力势能零点，设绳长为l，对两物体系统，机械能守恒，有：

$\frac{1}{2}mv_0^2-mg(l-r_0)=\frac{1}{2}mv_1^2-mg(l-r_1)$ ，

联立可得：$r_1=3r_0$.

故答案为：$r_1=3r_0$.

37 如图所示，a为一固定放置的半径为R的均匀带电球体，O为球心．已知取无限远处的电势为零时，球表面处的电势为$U=1000\mathrm{V}$．在离球心O很远的O'点附近有一质子b，它以$E_\mathrm{k}=2000\mathrm{eV}$的动能沿与$OO'$平行的方向射向$a$．以表示$b$与$OO'$线之间的垂直距离，要使质子$b$能够与带电球体$a$的表面相碰，试求$l$的最大值．

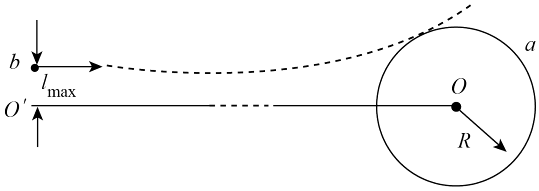


答案 $\frac{\sqrt{2}}{2}R$.

解析

设质子的质量为m，v_0、v分别表示质子的初速度和到达a球球面处的速度，e表示元电荷，由能量守恒定律有：$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+eU$．

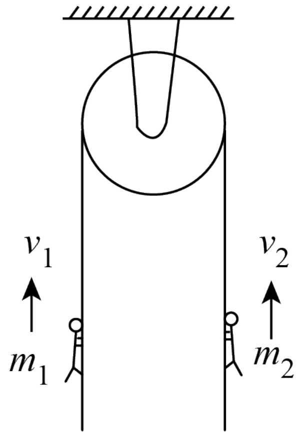
由于质子所受的库仑力总是通过a球的球心，此力对O点的力矩始终为零，因此，质子对O点的角动量守恒．所求l的最大值对应于质子到达a球表面处时其速度方向刚好与该处球面相切，如图所示，以l_{max}表示l的最大值，根据角动量守恒有：$mv_0l_{max}=mvR$．



联立解得：$l_{max}=\sqrt{1-\frac{eU}{mv_0^2/2}}R$，代入数据，解得$l_{max}=\frac{\sqrt{2}}{2}R$．

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}R$．

38 如图所示，两个同样重的小孩，各抓着跨过滑轮绳子的两端．一个孩子用力向上爬，另一个小孩则抓住绳子不动．若滑轮的质量和轴上的摩擦都可忽略，不计绳子质量，哪个小孩先到达滑轮．



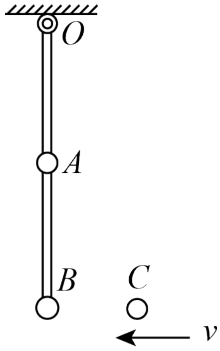
答案 同时到达滑轮

解析 设两个小孩的质量为m，向上的速度分别为v_1、v_2，滑轮的半径为R．由于两个小孩对轴的重力矩大小相等、方向相反，因此两个小孩组成的系统对转轴的角动量守恒，有：

$mv_1R=mv_2R$，解得：$v_1=v_2$，因此他们同时到达滑轮．

故答案为：同时到达滑轮．

39 轻杆可以围绕固定点O自由无阻力转动，质量为$2m$的A球开始固定在轻杆的中点，质量为m的B球固定在杆的下方端点处，一个质量也为m的球C以速度v入射，并且入射后与B粘连在一起，求碰后B的速度多大．



答案 $\frac{2v}{5}$

解析 设碰后A球速度为v_A、B球速度为v_B，设杆长为l．

A、B、C球及杆组成的系统对O点角动量守恒，有：

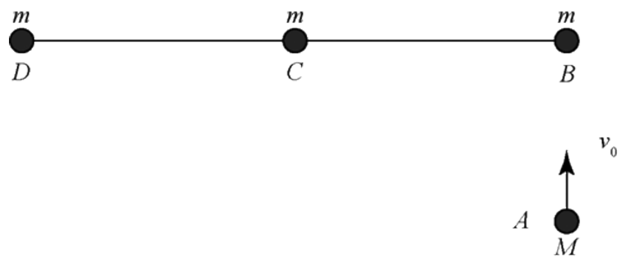
$mv\cdot l=2mv_A\frac{l}{2}+2m\cdot v_B\cdot l$，

由于A、B绕O点运动角速度相同，因此$\frac{v_A}{v_B}=\frac{1}{2}$，

联立解得：$v_B=\frac{2v}{5}$．

故答案为：$\frac{2v}{5}$．

40 如图所示，一根质量可以忽略的细杆，长为$2l$，两端和中心处分别固连着质量为m的小球B、D和C，开始时静止在光滑的水平桌面上．桌面上另有一质量为M的小球A，以一给定速度v_0沿垂直于杆DB的方向与右端小球B作弹性碰撞．求刚碰后小球A、B、C、D的速度．



答案 $v_A=\frac{5M-6m}{5M+6m}v_0$，$v_B=\frac{10M}{5M+6m}v_0$，$v_C=\frac{4M}{5M+6m}v_0$，$v_D=-\frac{2M}{5M+6m}v_0$

解析 小球A、B碰撞瞬间，球A挤压B，其作用力方向垂直于杆，使球B获得沿v_0方向的速度v_B．由杆上各点的速度关联关系可知：在碰撞后瞬间小球C、D的速度也沿v_0方向．

设碰撞后瞬间A、B、C、D的速度分别为v_A、v_B、v_C、v_D．

对A、B、C、D及杆系统，碰撞前后动量守恒，因此有：$Mv_0=Mv_A+mv_B+mv_C+mv_D$；

由于是弹性碰撞，故系统机械能守恒，有：$\frac{1}{2}Mv_0^2=\frac{1}{2}Mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}mv_D^2$；

对质点组B、C、D及杆系统，碰撞过程中在B处受到A球的作用力，若取B（与B球重合的空间固定点）为参考点，合外力矩等于零，因此角动量守恒，有：$0=mlv_C+2mlv_D$；

由B、D绕C转动的角速度相同，有：$\frac{v_B-v_C}{l}=\frac{v_C-v_D}{l}$；

联立解得：$v_A=\frac{5M-6m}{5M+6m}v_0$，

$v_B=\frac{10M}{5M+6m}v_0$，

$v_C=\frac{4M}{5M+6m}v_0$，

$v_D=-\frac{2M}{5M+6m}v_0$．

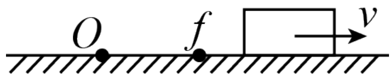
故答案为：$v_A=\frac{5M-6m}{5M+6m}v_0$，

$v_B=\frac{10M}{5M+6m}v_0$，

$v_C=\frac{4M}{5M+6m}v_0$，

$v_D=-\frac{2M}{5M+6m}v_0$．

41 如图所示，给静止在水平粗糙地面上的木块一初速度，使之开始运动．一学生利用角动量来考查此木块以后的运动过程："把参考点设于如图所示的地面上一点O，此时摩擦力f的力矩为零，从而地面上木块的角动量将守恒，这样木块将不减速而做匀速运动"．请指出上述推理的错误，并给出正确的解释．



答案 证明见解析．

解析 该学生未考虑竖直方向木块所受的支持力和重力的力矩．由于木块不发生偏转，故支持力的作用线不可能在质心上，否则绕质心的合力矩不可能为零．实际上支持力的作用线在重力作用线的右侧，支持力与重力的合力矩不为零，木块的角动量不守恒，与木块做减速运动不矛盾．

故答案为：该学生未考虑竖直方向木块所受的支持力和重力的力矩．由于木块不发生偏转，故支持力的作用线不可能在质心上，否则绕质心的合力矩不可能为零．实际上支持力的作用

线在重力作用线的右侧，支持力与重力的合力矩不为零，木块的角动量不守恒，与木块做减速运动不矛盾．

开普勒行星运动定律

知识点睛

定理

我们在高中课程中已经学习过开普勒行星运动定律，但是这部分内容在考试中不是考察重点。而且高考也不要求解决椭圆轨道的问题，因此很少用到开普勒定律。在后续课程中，我们将应用开普勒行星运动定律解决一些更复杂的问题，特别是椭圆轨道问题。

（1）开普勒行星运动定律

①开普勒第一定律：所有行星绕太阳运动的轨道都是椭圆，太阳处在椭圆的一个焦点上。

②开普勒第二定律：对任意一个行星来说，它与太阳的连线在相等的时间内扫过相等的面积。

在前面角动量模块中，我们已经阐述过开普勒第二定律本质上反映的是角动量守恒。并推导出行星在椭圆轨道中运动时，$rv\sin\alpha=\text{常数}$。r为太阳到行星所在位置的位移，v为行星在该位置的速度，α为r与v方向的夹角。

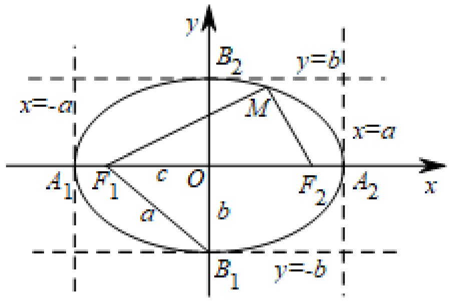
③开普勒第三定律：所有行星的轨道半长轴的三次方跟它的公转周期的二次方的比值都相等，即$\frac{a^3}{T^2}=k$，其中a代表椭圆轨道的半长轴，T代表公转周期，k是一个对所有行星都相同的常量。

定义

（2）椭圆的定义和性质

①平面内与两个定点F_1、F_2的距离之和等于常数（大于$|F_1F_2|$）的点的轨迹（或集合）叫做**椭圆**。这两个定点叫做椭圆的焦点，两焦点的距离叫做椭圆的焦距。

②如图所示，设椭圆焦点是$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，椭圆上任意点到椭圆两焦点的距离之和为$2a$（$a>c$），则椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，且$c^2=a^2-b^2$。



③椭圆的顶点：椭圆与它的对称轴的四个交点，如图中的A_1，A_2，B_1，B_2；

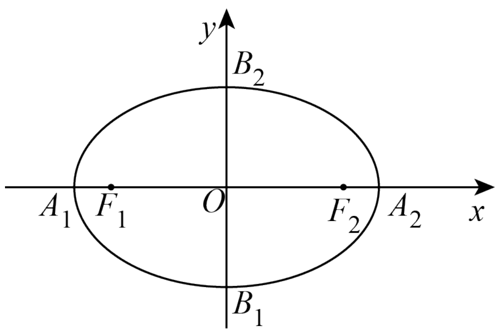
④长轴与短轴：焦点所在的对称轴上，两个顶点间的线段称为椭圆的长轴，如图中的线段A_1A_2；另一对顶点间的线段叫做椭圆的短轴，如图中的线段B_1B_2。椭圆的长轴长为$2a$，短轴长$2b$，由此可知a，b的几何意义，a是长半轴长，b是短半轴长。

⑤椭圆的离心率：$e=\frac{c}{a}$，焦距与长轴长之比，$0<e<1$。e越趋近于1，椭圆越扁；反之，越趋近于0，椭圆越趋近于圆。

⑥椭圆面积$S=\pi ab$

例题精讲

42 如图所示，行星的轨道为椭圆，恒星位于交点F_1位置，已知今日点到恒星距离$A_1F_1=r_1$，远日点到恒星距离$A_2F_1=r_2$，行星在近日点A_1的速率为v_1，求行星在远地点A_1及椭圆短轴端点B_2位置的速率．

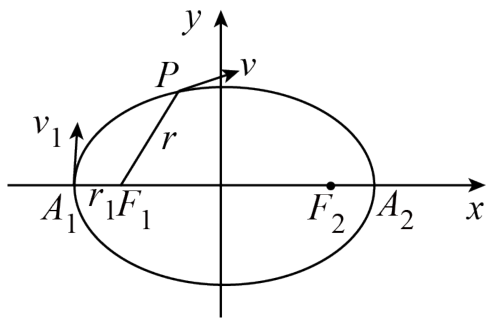


答案 A_2点速率$v_2=\frac{r_1}{r_2}v_1$，B点速率$v_3=v_1\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$．

解析 A_2点速率$v_2=\frac{r_1}{r_2}v_1$，B点速率$v_3=v_1\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$．

故答案为：A_2点速率$v_2=\frac{r_1}{r_2}v_1$，B点速率$v_3=v_1\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$．

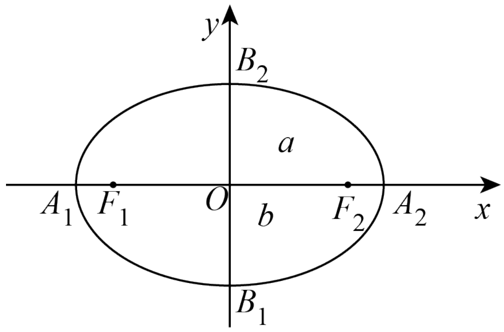
43 如图所示，行星的轨道为椭圆，恒星位于焦点F_1位置，已知近日点A_1到恒星距离r_1，行星在近日点A_1处速度为v_1，某时刻行星运动到P点，此时行星速度为v，$F_1P=r$，已知恒星质量为M，万有引力常数为G，求P点曲率半径．



答案 $\dfrac{r^3v^3}{GMr_1v_1}$

解析 略．

44 如图所示，行星的轨道为椭圆，恒星位于焦点F_2位置，且轨道的长短轴之比$a:b=5:3$，计算行星从近日点A_2运动到远日点A_1的过程中，前半段路程A_2B_2与后半段路程B_2A_1所用的时间之比．



答案 $\dfrac{5\pi-8}{5\pi+8}$．

解析 $\dfrac{t}{t'}=\dfrac{S_{A_2F_2B_2}}{S_{F_2B_2A_1}}=\dfrac{0.25\pi ab-0.5ab}{0.25\pi+0.5bc}=\dfrac{5\pi-8}{5\pi+8}$．

故答案为：$\dfrac{5\pi-8}{5\pi+8}$．

45 已知地球半径R，地面附近重力加速度g，在距地面高R处静止释放一个物体，经过多少时间该物体落地？忽略空气阻力．

答案

$\frac{\pi+2}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$

解析 把自由落体看成无尽扁的椭圆，焦点长轴端点都会拉到地球球心处．

则长轴$2a=2R$，短轴$2b\to 0$，$c\to a$．

由开普勒第二定律可知：$\frac{t}{T}=\frac{S}{S_{总}}$，即$t=T\cdot\frac{S}{S_{总}}$，

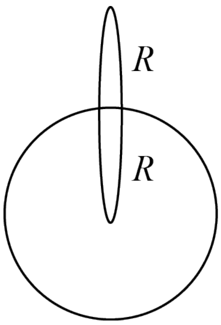
其中$S=\frac{\pi ab}{4}+\frac{ab}{2}$，$S_{总}=\pi ab$，

由开普勒第三定律可知，该轨道卫星运动周期与近地卫星运动周期相同，因此有：

$T=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{R^2g}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$．

联立解得：$t=\frac{\pi+2}{4\pi}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}=\frac{\pi+2}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$．

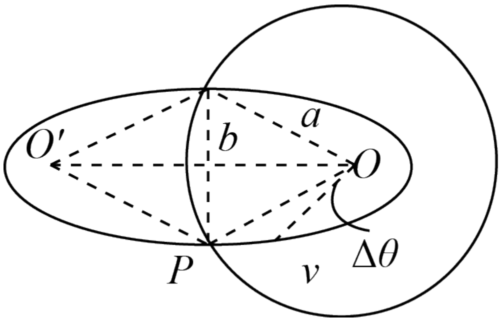
故答案为：$\frac{\pi+2}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$．



46 要发射一艘探测太阳的宇宙飞船，使其具有与地球相等的绕日运动周期，以便发射1年后又将与地球相遇而发回探测资料．由地球发射这一艘飞船时，应使其具有多大的绕日速度．已知地球绕日公转速度为v_0

答案 $v=v_0$

解析 如图所示，圆轨道为地球绕日运行轨道，椭圆为所发射的飞船绕日运行轨道，O点（太阳）为此椭圆的一个焦点．由于飞船与地球具有相等的绕日运行周期，由开普勒第三定律可知，椭圆轨道的半长轴a与日地距离R相等．设椭圆另一个焦点为O'，由椭圆性质有$OP+O'P=2a$，又由于$OP=R$，联立可得：$OP=O'P$，即P为椭圆半短轴的端点．飞船发射时，速度应平行于椭圆长轴的方向．



设飞船发射速度为v，在Δt时间内飞船与太阳连线扫过的面积$\Delta S_{椭圆}=\frac{1}{2}(v\Delta t)\,b$；

在这段时间中，地球与太阳连线扫过的面积$\Delta S=\frac{1}{2}(v_0\Delta t)\,R$；

依题意，飞船与地球绕太阳运行周期T相同，根据开普勒第二定律可得：

$\Delta S_{椭圆}=\frac{\pi ab}{T}\Delta t==\frac{\pi Rb}{T}\Delta t$，$\Delta S_{圆}=\frac{\pi R^2}{T}\Delta t$，

联立解得：$v=v_0$．

故答案为：$v=v_0$．

行星内部引力问题（选讲）

知识点睛

我们在高中课程中学习过万有引力$F=G\frac{Mm}{r^2}$，此公式的适用条件为：

①两质点之间；

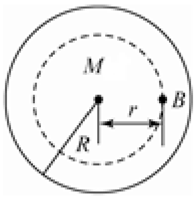
②质量均匀分布的球体与外部质点（或另一个质量均匀分布的球体）之间，此时等效于把球体的全部质量集中在球心处对外部产生的引力。

那么球壳内部、球体内部的万有引力如何计算呢？显然不能简单套用公式，下面我们先给出两个结论，证明过程请大家结合例题自己完成。

公式

①质量均匀分布的球壳对球壳内部任意位置的质点产生的引力均为零；

②如图所示，均匀球体质量为M、半径为R，质量为m的质点B在球内距球心$r<R$处，则质点B所受万有引力大小可表达为：$F=G\frac{Mmr}{R^3}$。

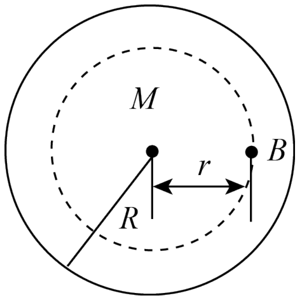


例题精讲

47 解答下列各题：

(1) 用微元法证明均匀球壳对内部任意点引力处处为零．

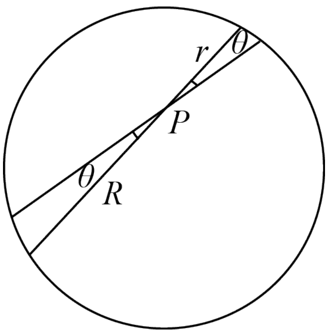
(2) 如图所示，均匀球体质量为M、半径为R，质量为m的质点B在球内距球心$r<R$处，证明：质点B所受万有引力大小可表达为：$F=G\dfrac{Mmr}{R^3}$．



答案 (1) $F_1=F_2=Gm\rho\pi d\sin^2\theta$

(2) 证明见解析

解析 (1) 如图所示，在球壳内部任取一点P，在P点放一质量为m的质点，过P点作两条直线，设两条直线之间的夹角为θ，让θ无限小，在球壳上以两条直线与球壳的交点为直径画图．由于θ无限小，所以在球壳上所取的就是两个近似的密度为ρ，则这两个微小圆柱的质量分别为：



$m_1=\rho\cdot\pi(r\sin\theta)^2d$①，

$m_2=\rho\cdot\pi(R\sin\theta)^2d$②，

由万有引力可知：

$F_1=G\frac{m_1m}{r^2}$③，

$F_2=G\frac{m_2m}{R^2}$④，

由以上4个式子可得：

$F_1=F_2=Gm\rho\pi d\sin^2\theta$．

由于F_1和F_2方向相反，故这两个微小圆柱对质点的引力的合力为零，由对称性可知，整个球壳对方在P点的质点的引力为零．

故答案为：$F_1=F_2=Gm\rho\pi d\sin^2\theta$．

(2) 由第一问得知，$r<r_1<R$部分球体对内部的引力为0，所以，该均匀球壳对质点B的引力为0，只需考虑$r_2<r$部分球体对质点B造成的万有引力．

48 假设地球是一半径为R、质量分布均匀的球体．一矿井深度为d．已知质量分布均匀的球壳对壳内物体的引力为零．矿井底部和地面处的重力加速度大小之比为（　　）

A. $1-\frac{d}{R}$　　B. $1+\frac{d}{R}$　　C. $(\frac{R-d}{R})^2$　　D. $(\frac{R}{R-d})^2$

答案　A

解析　在地球表面$mg=G\frac{M}{R^2}m$，又$M=\rho\frac{4}{3}\pi R^3$，所以$g=G\frac{M}{R^2}=\frac{4}{3}\pi G\rho R$，因为球壳对球内物体的引力为零，所以在深为$d$的矿井内$mg'=G\frac{M}{(R-d)^2}m$，得$g'=G\frac{M}{(R-d)^2}=\frac{4}{3}\pi G\rho(R-d)$，所以$\frac{g'}{g}=\frac{R-d}{R}=1-\frac{d}{R}$．

故选A．

引力势能

知识点睛

在研究天体问题时，由于重力加速度g不是一个恒量，故一般不能用重力势能讨论相关的能量变化，这时必须引入引力势能。

注意：

（1）没有特殊说明的情况下，一般选取无穷远处为系统引力势能零点。

（2）万有引力做正功，引力势能减小；万有引力做负功，引力势能增加。

下面我们不加证明的给出关于引力势能的结论，引力势能公式的推导，不要求大家掌握。

公式

① 相距为r的质点m_1和m_2的引力势能为$E_p=-\dfrac{Gm_1m_2}{r}$；

② 质量为M均匀分布的球体（或球壳）与其外部距离球心为r的质点m组成系统的引力势能为$E_p=-\dfrac{GMm}{r}$。

上述引力势能公式对于两个质量均匀分布的球体也适用。

例题精讲

49 已知地球质量为M，半径为R，推导第二宇宙速度表达式．

答案 $\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$

解析 第二宇宙速度又称脱离速度．在地球上以第二宇宙速度发射的卫星，刚好能脱离地球引力的束缚飞到离地球无穷远处（卫星飞到无穷远处时，刚好动能为零，引力势能为零），在卫星以v_2发射后到飞到无穷远处的过程中，由能量守恒得：

$$\frac{1}{2}mv_2^2+\left(-\frac{GMm}{R}\right)=0+0\ .$$

解得：$v_2=\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$，实际上，$v_2=\sqrt{2v_1}=\sqrt{2}\times 7.9\mathrm{km/s}=11.2\mathrm{km/s}$．

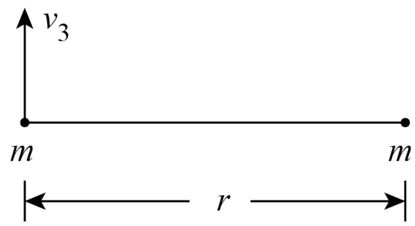
故答案为：$\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$．

50 现有质量均为m，间距为r的两个小球．若两个小球能相距无穷远，速度需要满足什么条件？（两个质量分别为m_1、m_2的质点相距r时，其间万有引力势能为$E_P=-G\dfrac{m_1m_2}{r}$．）

(1) 一小球固定，另一小球以速度v_1沿两球连线方向离开．

(2) 两小球同时以速度v_2朝相反方向运动．

(3) 一小球静止，另一小球以速度v_3垂直两球连线运动（如图）．



答案 (1) $v_1 \geqslant \sqrt{\frac{2Gm}{r}}$.

(2) $v_2 \geqslant \sqrt{\frac{Gm}{r}}$.

(3) $v_3 \geqslant 2\sqrt{\frac{Gm}{r}}$.

解析 (1) 根据机械能守恒定律有：

$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{m^2}{r} \geqslant 0$ ，

解得：$v_1 \geqslant \sqrt{\frac{2Gm}{r}}$.

故答案为：$v_1 \geqslant \sqrt{\frac{2Gm}{r}}$.

(2) 根据机械能守恒定律，有：

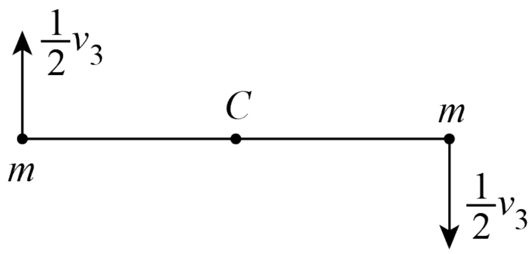
$\frac{1}{2}mv_2^2 \times 2 - G\frac{m^2}{r} \geqslant 0$ ，

解得：$v_2 \geqslant \sqrt{\frac{Gm}{r}}$.

故答案为：$v_2 \geqslant \sqrt{\frac{Gm}{r}}$.

(3) 两个小球组成的系统不受外力，故质心做匀速直线运动，质心速度为$v_C = \frac{1}{2}v_3$ ，

如图所示，



以质心为惯性参考系，两个小球的初速度均为$\frac{1}{2}v_3$ ，方向相反．在以后的运动过程中，两个质点的速度总是等值反向．在质心系中，两个质点能相距无穷远的最小速度为零，则有：

$\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v_3\right)^2 \times 2 - G\frac{m^2}{r} \geqslant 0$ ，

解得：$v_3 \geqslant 2\sqrt{\frac{Gm}{r}}$.

故答案为：$v_3 \geqslant 2\sqrt{\frac{Gm}{r}}$.

51 质量为m的行星在质量为M的恒星引力作用下，沿半径为r的圆轨道运行，要使该行星运行的轨道半径增大1%，外界要做多少功？

答案 $\frac{GMm}{202r}$

解析 卫星绕中央天体做圆周运动时万有引力提供向心力：$\frac{GMm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$.

因此，行星的东能为$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{GMm}{2r}$ ，

行星的总能量$E=E_k+E_p=\frac{GMm}{2r}-\frac{GMm}{r}=-\frac{GMm}{2r}$ ，

要使轨道半径增大1%，则外界做功

$$W=\Delta E=E'-E=\left(-\frac{GMm}{2}\frac{1}{1.01r}\right)-\left(-\frac{GMM}{2}\frac{1}{r}\right)=\frac{GMm}{202r}\ .$$

故答案为：$\frac{GMm}{202r}$.

52 质量为m的人造地球卫星沿半径为r_0的圆轨道飞行，地球质量为M，若卫星运动中受到微弱的摩擦阻力f（常量），则将缓慢地沿一螺旋形轨道接近地球，因f很小，轨道半径变化非常缓慢，每周的旋转均可近似处理成半径为r的圆轨道运动，但r将逐周缩短．试求在r轨道上旋转一周，r的改变量Δr及卫星动能E_K的该变量ΔE_K .

答案 $2\pi rf$

解析 由能量守恒关系，考虑卫星转一周过程得：$-2\pi r\cdot f=-\frac{GMm}{2(r+\Delta r)}-\left(-\frac{GMm}{2r}\right)=\frac{GMm}{2r^2}\Delta r$

，

解得：$\Delta r=-\frac{4\pi r^3f}{GMm}$ ，负号表示半径减小．

转一周过程中，卫星动能的改变量为$\Delta E_K=\frac{GMm}{2(r+\Delta r)}-\frac{GMm}{2r}=-\frac{GMm}{2r^2}\cdot\Delta r=2\pi rf$.

故答案为：$2\pi rf$.

53 黑洞是一种密度和引力极大的颇具神秘感的天体，它的引力如此之强，以至于以光速运动的光子也不能逃离黑洞的引力作用范围．1997年8月26日在日本举行的国际天文学大会上，德国Max Planck学会的一个研究组宣布了他们的研究成果：银河系的中心可能存在一个黑洞．

他们发现，距离银河系中心约60亿公里的星体正以2000km/s的速度围绕银河系中心旋转（只考虑银河系中心对星体的引力作用）．根据上面的数据，试在经典力学的范围内计算，如果银河系中心确实存在黑洞的话，其最大半径是多少．

答案　如果银河系中心存在黑洞的话，黑洞的半径小于$5.3\times10^{8}\mathrm{m}$

解析　设引力源质量为M、半径为r_B．根据题目中关于黑洞的描述，以光速运动的光子也不能逃出黑洞的引力作用范围可知，初速度为c的光子也不能运动到无穷远处，即

$\frac{1}{2}mc^2+\left(-G\frac{Mm}{r_B}\right)<0$（实际是要求黑洞的第二宇宙速度$v_2>c$）

解得：$r_B<\frac{2GM}{c^2}$①

由距银河系中心$r=6\times10^{12}\mathrm{m}$的星体，以$v=2\times10^{6}\mathrm{m/s}$的速度绕银河系中心做圆周运动可得：

$G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$②

由①②联立解得：$r_B<\frac{2v^2}{c^2}r$．

带入数据可得：$r_B<5.3\times10^{8}\mathrm{m}$．

故答案为：如果银河系中心存在黑洞的话，黑洞的半径小于$5.3\times10^{8}\mathrm{m}$．

54 两质量均为m的小球，放在劲度系数为k，原长为l的弹簧两端，自由静止释放．设两个小球中心与整个弹簧都始终在一条直线上，小球半径$r\ll l$．

(1) 问仅在两球间万有引力的作用下，弹簧的最大压缩量为多大?

(2) 若体系整体绕中心以角速度ω旋转，要求弹簧保持原长，ω应为多大？

答案　(1) $\Delta l_{\mathrm{m}}=\frac{2Gm^2}{kl^2}$

(2) $\omega=\sqrt{\frac{2Gm}{(l+2r)^3}}$

解析　(1) 因题中只考虑两球间的万有引力，故两球组成系统的引力势能可以表示为：

$E_{\mathrm{P}}=-G\frac{m^2}{x}$，$x$为两球球心间距．

弹簧有最大压缩量Δl_{m}时两球速度又都变为0，由能量守恒关系得

$\frac{1}{2}k\Delta l_{\mathrm{m}}^2=\left(-G\frac{m^2}{l+2r}\right)-\left(-G\frac{m^2}{l+2r-\Delta l_{\mathrm{m}}}\right)$．

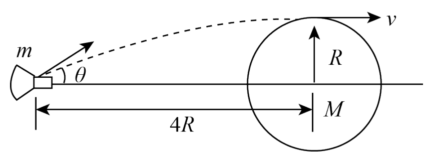
考虑到两球间万有引力很小，故$\Delta l_{\mathrm{m}} \ll l$，则$\left(1-\frac{\Delta l_{\mathrm{m}}}{l}\right)^{-1}=1+\frac{\Delta l_{\mathrm{m}}}{l}$，且$r \ll l$，因此能量守恒关系式可简化为$\frac{1}{2}k\Delta l_{\mathrm{m}}^{2}=G\frac{m^{2}\Delta l_{\mathrm{m}}}{l^{2}}$．

解得$\Delta l_{\mathrm{m}}=\frac{2Gm^{2}}{kl^{2}}$．

(2) 弹簧保持原长时，两球间的万有引力提供每个球绕两球连线中点做圆周运动的向心力，即：$m\omega^{2}\left(\frac{l}{2}+r\right)=\frac{Gm^{2}}{(l+2r)^{2}}$．

解得：$\omega=\sqrt{\frac{2Gm}{(l+2r)^{3}}}$．

55 如图所示，发射一宇宙飞船考察一质量为M，半径为R的行星．当飞船静止于空间，距行星中心为$4R$时，以速率v_0发射一质量为m（$m \ll M$）的仪器．要使仪器恰好掠着行星的表面着陆，θ角应是多少？着陆滑行的速度v大小如何？



答案 $\sin\theta=\frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{3GM}{2Rv_0^{2}}}$；$v=v_0\sqrt{1+\frac{3GM}{2Rv_0^{2}}}$

解析 飞船对行星中心的角动量守恒，有$mv_0 4R\sin\theta=mvR$；又根据机械能守恒定律有：$\frac{1}{2}mv_0^{2}-\frac{GMm}{4R}=\frac{1}{2}mv^{2}-\frac{GMm}{R}$；联立解得：$\sin\theta=\frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{3GM}{2Rv_0^{2}}}$，$v=v_0\sqrt{1+\frac{3GM}{2Rv_0^{2}}}$．

故答案为：$\sin\theta=\frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{3GM}{2Rv_0^{2}}}$，$v=v_0\sqrt{1+\frac{3GM}{2Rv_0^{2}}}$．

天体的椭圆轨道运动

知识点睛

在高中课程中，天体运动轨道都近似为圆轨道。实际上，行星绕恒星运动轨道为椭圆轨道。在这个模块中，我们将研究涉及椭圆轨道的问题。

（1）解决天体的椭圆轨道运动问题时，我们主要使用的守恒定律有以下两条：

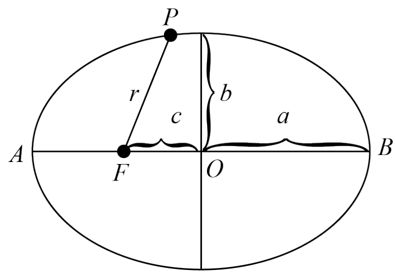
①机械能守恒；

②角动量守恒，也可以认为是开普勒第二定律。

（2）假设中心天体质量为M，环绕天体质量为m，当环绕天体绕中心天体做椭圆运动，且椭圆轨道的半长轴为a时，环绕天体的总机械能$E=-\dfrac{GMm}{2a}$保持不变。这个结论是解决椭圆轨道问题时，经常用到的结论，大家记住即可。推导过程大家可以结合后面的例题学习。

例题精讲

56 行星绕太阳运动的椭圆轨道如图所示，P为行星，F为焦点（太阳），a、b、$2c$分别为半长轴、半短轴和焦距，O为椭圆的中心．已知太阳质量为M、行星质量为m，椭圆面积$S=\pi ab$．试根据机械能守恒定律、开普勒第一、第二定律分别导出：（用G、M、m、a、b表示）



(1) 行星运动的总机械能E．

(2) 行星的公转周期T．

(3) 证明开普勒第三定律．

答案 (1) $-\dfrac{GMm}{2a}$

(2) $2\pi a\sqrt{\dfrac{a}{GM}}$

(3) 证明见解析

解析 (1) 设行星在A、B点速度分别为v_A、v_B，由于在这两点速度方向与椭圆长轴垂直，因此面积速度分别为：

$$\frac{\Delta S_A}{\Delta t}=\frac{1}{2}r_Av_A=\frac{1}{2}(a-c)v_A,$$
$$\frac{\Delta S_B}{\Delta t}=\frac{1}{2}r_Bv_B=\frac{1}{2}(a+c)v_B,$$

根据开普勒第二定律可得：$\dfrac{1}{2}(a-c)v_A=\dfrac{1}{2}(a+c)v_B$①，

行星运动的总机械能E等于其动能和势能之和，当它经过A、B点时，其机械能分别为：

$$E_A=\frac{1}{2}mv_A^2-\frac{GMm}{r_A}=\frac{1}{2}mv_A^2-\frac{GMm}{a-c},$$
$$E_B=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{GMm}{r_B}=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{GMm}{a+c},$$

根据机械能守恒$E_A=E_B$，可得$\frac{1}{2}m(v_A^2-v_B^2)=GMm\left(\frac{1}{a-c}-\frac{1}{a+c}\right)$②，

联立①②可解得：

$v_A^2=\frac{(a+c)GM}{a(a-c)}$，

$v_B^2=\frac{(a-c)GM}{a(a+c)}$，

$E_A=E_B=E=-\frac{GMm}{2a}$．

故答案为：$-\frac{GMm}{2a}$．

(2) 由（1）中结果可知，面积速度为$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{\Delta S_A}{\Delta t}=\frac{1}{2}(a-c)v_A=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{GM}{a}}$，

因此，$T=\frac{\pi ab}{\Delta S}=2\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}}$．

故答案为：$2\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}}$．

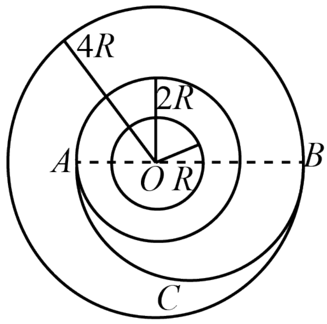
(3) 由$T=2\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}}$可得：$\frac{a^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}$，

对太阳系的各行星来说，$\frac{GM}{4\pi^2}$是一个恒星，即$\frac{a^3}{T^2}$为常量，这就是开普勒第三定律．

故答案为：由$T=2\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}}$可得：$\frac{a^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}$，

对太阳系的各行星来说，$\frac{GM}{4\pi^2}$是一个恒星，即$\frac{a^3}{T^2}$为常量，这就是开普勒第三定律．

57 质量为m的宇宙飞船绕地球中心O作圆周运动，已知地球半径为R，质量为M，飞船轨道半径为$2R$．现要将飞船转移到另一个半径为$4R$的新轨道上，如图所示，转移轨道最经济的路线是半椭圆双切轨道，如ACB所示，求飞船在两条轨道的交接处A点的速度变化Δv_A．



答案 $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}-1\right)\sqrt{\frac{GM}{2R}}$．

解析 飞船在半径为$2R$的圆轨道上运动时，万有引力提供向心力，设飞船速度为v_1，则：

$\frac{GMm}{(2R)^2}=\frac{mv_1^2}{2R}$，解得：$v_1=\sqrt{\frac{GM}{2R}}$．

设飞船在半椭圆轨道上运行时，在A、B两的速度分别为$v_1{}'$和$v_2{}'$，由开普勒第二定律可得：

$v_1'\cdot 2R=v_2'\cdot 4R$，①

由于飞船沿此半椭轨道运动时，机械能守恒，因此有：$\frac{1}{2}mv_1'^2-\frac{GMm}{2R}=\frac{1}{2}mv_2'^2-\frac{GMm}{4R}$，②

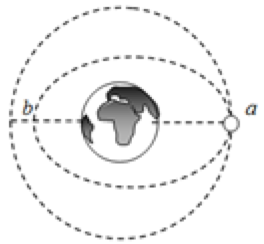
联立①②可解得：$v_1'=\sqrt{\frac{2GM}{3R}}$，

因此，$\Delta v_A=v_1'-v_1=\left(\sqrt{\frac{4}{3}}-1\right)\sqrt{\frac{GM}{2R}}$，

说明：在计算时，也可以直接利用椭圆轨道总机械能$E=\frac{GMm}{2a}$有：

$\frac{1}{2}mv_1'^2-\frac{GMm}{2R}=-\frac{GMm}{2(3R)}$，可快速解得$v_1'=\sqrt{\frac{2GM}{3R}}$．

58 卫星携带一探测器在半径为$3R$（R为地球半径）的圆轨道上绕地球飞行．在a点，卫星上的辅助动力装置短暂工作，将探测器沿运动方向射出（设辅助动力装置喷出的气体质量可忽略）．若探测器恰能完全脱离地球的引力，而卫星沿新的椭圆轨道运动，其近地点b距地心的距离为nR（n略小于3），求卫星与探测器的质量比．（质量分别为M，m的两个质点相距为r时的引力势能为$-\frac{GMm}{r}$，式中G为引力常量）



答案 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{\frac{2n}{3+n}}}$

解析 设地球质量为M，卫星质量为m，探测器质量为m'，当卫星与探测器一起绕地球做圆周运动时，由万有引力定律和牛顿第二定律得

$\frac{GM(m+m')}{(3R)^2}=(m+m')\frac{v^2}{3R}$ ①

解得：$v^2=\frac{GM}{3R}$ ②

设分离后探测器速度为v'，探测器刚好脱离地球引力应满足

$\frac{1}{2}m'v'^2-\frac{GMm'}{3R}=0$ ③

解得：$v'=\sqrt{\frac{2GM}{3R}}=\sqrt{2}v$ ④

设分离后卫星速度为u，由机械能守恒定律可得

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{nR}=\frac{1}{2}mu^2-\frac{GMm}{3R} ⑤$$

由开普勒第二定律有

$$nRv=3Ru ⑥$$

联立解得

$$u=\sqrt{\frac{2n}{3+n}}v ⑦$$

由卫星与探测器分离前后系统动量守恒可得

$$(m+m')\,v=mu+m'v' ⑧$$

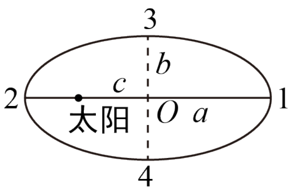
联立④⑦⑧式得

$$\frac{m}{m'}=\frac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{\frac{2n}{3+n}}} ⑨ .$$

59 地球绕太阳做椭圆运动，已知轨道半长轴为a，半短轴为b，试求地球在椭圆轨道各顶点处的速度大小及各顶点处的曲率半径，设太阳的质量为M，地球的质量为m .

答案 $\rho_1=\rho_2=\dfrac{b^2}{a}$，$\rho_3=\dfrac{a^2}{b}$

解析 如图所示，地球经过3、4两点的速率相等，设地球经过1、2、3点的速率分别为v_1、v_2、v_3，



由角动量守恒(或开普勒第二定律)及机械能守恒可得：

$$\frac{1}{2}(a+c)v_1=\frac{1}{2}(a-c)v_2=\frac{1}{2}bv_3 ,$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{a+c}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{a-c}=\frac{1}{2}mv_3^2-\frac{GMm}{a} ,$$

解得：$v_1=\dfrac{a-c}{b}\sqrt{\dfrac{GM}{a}}$，

$v_2=\dfrac{a+c}{b}\sqrt{\dfrac{GM}{a}}$，$v_3=\sqrt{\dfrac{GM}{a}}$，

设1、2、3点的曲率半径分别为ρ_1、ρ_2、ρ_3，则：

$$G\frac{Mm}{(a+c)^2}=m\frac{v_1^2}{\rho_1} ,\ G\frac{Mm}{(a-c)^2}=m\frac{v_2^2}{\rho_2} ,\ G\frac{Mm}{a^2}\cdot\frac{b}{a}=m\frac{v_3^2}{\rho_3} ,$$

解得：$\rho_1=\rho_2=\dfrac{b^2}{a}$，$\rho_3=\dfrac{a^2}{b}$，

说明：本题也可直接用椭圆轨道能量

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{a+c}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{a-c}=\frac{1}{2}mv_3^2-\frac{GMm}{a}=-\frac{GMm}{2a},$$

解出v_1、v_2、v_3．

60 由火箭将一颗人造卫星送入离地面很近的轨道，进入轨道时，卫星的速度方向平行地面，其大小为在地面附近作圆运动的速度的$\sqrt{1.5}$倍．试求该卫星在运行中与地球中心的最远距离．

答案 即该卫星在运行中与地球中心的最远距离为三倍地球半径

解析 设绕地球表面做匀速圆周运动的物体质量为m_0、速度为v_0，则：$G\frac{Mm_0}{R^2}=m_0\frac{v_0^2}{R}$．

设卫星质量为m：近地点距离地心r_1，卫星在此处速率为v_1，远地点距离地心r_2，卫星在处速率为v_2．

由角动量守恒和机械能守恒：

$mv_1r_1=mv_2r_2$，

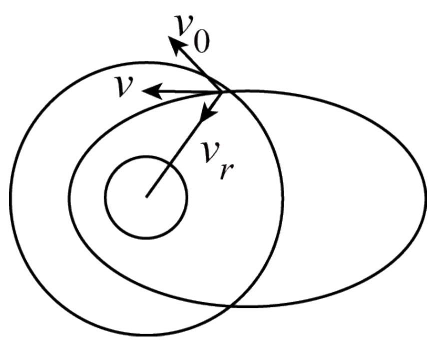
$$\frac{1}{2}mv_1^2-G\frac{Mm}{r_1}=\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{Mm}{r_2}$$

其中，$v_1=\sqrt{1.5}v_0$，$r_1=R$．

联立解得：$r_2=3R$，即该卫星在运行中与地球中心的最远距离为三倍地球半径．

故答案为：即该卫星在运行中与地球中心的最远距离为三倍地球半径．

61 如图所示，一卫星绕地球沿圆轨道运动，速度为v_0，卫星离地面高度为h，设卫星中辅助发动机向轨道外侧作短时间喷气，使它获得指向地球中心的径向速度v_r，此后卫星将沿新的椭圆轨道运动，试求卫星新轨道的近地点和远地点离地球表面的高度，设地球为球形，半径为R．



答案 $\frac{v_0h+v_rR}{v_0-v_r}$

解析 设卫星在近地点和远地点离开地心的距离分别为r_1和r_2，卫星的速度分别为v_1和v_2，由角动量守恒(或开普勒定律)和机械能守恒定律，可得：

$v_0(R+h)=v_1r_1=v_2r_2$，

$\frac{1}{2}m\left(v_0^2+v_r^2\right)-\frac{GMm}{R+h}=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{r_1}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{r_2}$，

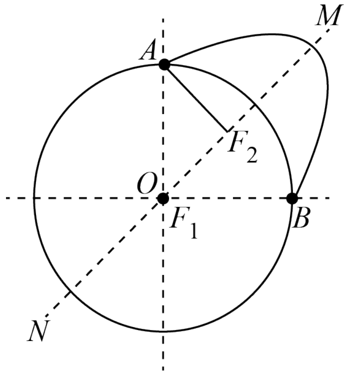
卫星喷气前做匀速圆周运动，万有引力提供向心力：$\frac{GMm}{(R+h)^2}=m\frac{v_0^2}{R+h}$，

联立解得：$r_1=\frac{v_0h+v_0R}{v_0+r_r}$，$r_2=\frac{r_0h+v_0R}{v_0-v_r}$，

故：$h_1=r_1-R=\frac{v_0h-v_rR}{v_0+r_r}$，$h_2=r_2-R=\frac{v_0h+v_rR}{v_0-v_r}$．

故答案为：$\frac{v_0h+v_rR}{v_0-v_r}$．

62 如图所示，图中A点是北极发射点，B点为导落地点，在赤道上．导弹在地球外部空间的轨道是椭圆的一部分，地心为其中一个焦点，根据对称性，椭圆长轴MN是直角$\angle AOB$的角平分线．



答案 $v=\sqrt{\frac{GM}{R}\left(2\sqrt{2}-2\right)}$．

解析 导弹在地球引力场中按椭圆轨道运动，机械能力为$E=\frac{GMm}{2a}$，为使发射能量最小，应取最小的半长轴a值．

设椭圆轨道的两焦点在F_1、F_2处，其中F_1在地球中心，因为北极发射点A在椭圆轨道上，依椭圆性质有：$AF_1+AF_2=2a$．

其中$AF_1=R$，所以只有当AF_2取最小值时，a才是最小值．在MN上的F_2满足$AF_2\perp F_1F_2$时，AF_2即为最小值，由图可知，$2a=R+\frac{\sqrt{2}}{2}R$．

利用A点处机械能表达式$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mn}{R}=\frac{GMm}{2a}$，

解得：$v=\sqrt{\frac{GM}{R}\left(2\sqrt{2}-2\right)}$．

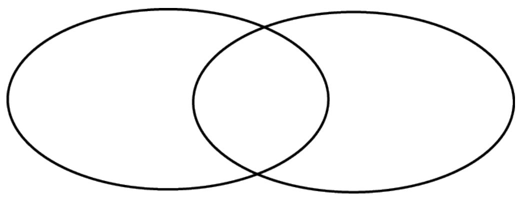
故答案为：$v=\sqrt{\frac{GM}{R}\left(2\sqrt{2}-2\right)}$．

知识点睛

在高中课程中，我们研究过双星模型：两颗星体在相互间的万有引力作用下绕某一固定点（即质心）做匀速圆周运动。实际上，两颗星体在相互间的万有引力作用下，可能都沿椭圆轨道运动，这时问题变得复杂的多，应该如何处理呢？实际上，我们在前面“曲线运动综合问题”模块中讲解惯性力时，已经给出了一种解决问题的方法：通过转换参考系，可以将双星问题转化为单星体运动问题，只是这时要增加惯性力（等效将中心星体质量用总质量代替）；并练习用这种方法处理了圆轨道的双星问题，对于椭圆轨道问题，我们可以采用同样的办法解决，请大家结合下面的例题学习。

例题精讲

63 两颗质量都为M的恒星构成一个双星体系，已知二星体的最近距离为$2r$，且最近时二星的速度都为$v=\sqrt{\dfrac{GM}{3r}}$，求最远的时候二天体的距离，以及双星的运行周期．



答案 二天体的距离：$4r$；双星的运行周期：$T=2\pi\sqrt{\dfrac{27r^3}{2GM}}$．

解析 解法一：

以其中某一星体A为参考系，则另一星体B受力$F_{合}=F_{万}+F_{惯}=\dfrac{2GM^2}{R^2}$，

相当于质量$2M$的中心天体对B产生万有引力，B绕$2M$的中心天体做椭圆轨道运动．

两星体相距最近时距离$2r$，$v_{相}=2v=2\sqrt{\dfrac{GM}{3r}}$，

设B绕$2M$的中心天体做椭圆轨道运动的椭圆长轴$2a$，

由总能$-\dfrac{GM(2M)}{2a}=\dfrac{1}{2}M\left(2\sqrt{\dfrac{GM}{3r}}\right)^2-\dfrac{GM(2M)}{2r}$．

解得：$a=3r$，

因此，两星体最远相距$2a-2r=4r$．

由开普勒第三定律：$\dfrac{a^3}{T^2}=\dfrac{G\cdot 2M}{4\pi^2}$(注意$2M$才是中心天体)

解得：$T=2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{2GM}}=2\pi\sqrt{\dfrac{27r^3}{2GM}}$．

解法二：

也可想像其中一个天体B所受的实际引力来源于质心处等效质量为M'的天体，

则$\frac{GM}{R^2}=\frac{GM'}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}$，解得：$M'=\frac{M}{4}$．

设天体B做椭圆轨道运动的椭圆长轴为$2a'$，

两星体相距最近位置的能量$-\frac{GM\left(\frac{M}{4}\right)}{2a'}=\frac{1}{2}Mv^2-\frac{GM^2}{4r}$．

解得：$a'=\frac{3}{2}r$，

综合对称性可知，两星体运动轨道参数相同，因此，两星体最远距离$2(2a'-r)=4r$．

由开普勒第三定律：$\frac{\left(\frac{3}{2}r\right)^3}{T^2}=\frac{G\cdot\frac{M}{4}}{4\pi^2}$，

$\therefore T=2\pi\sqrt{\frac{27r^3}{2GM}}$．

故答案为：二天体的距离：$4r$；双星的运行周期：$T=2\pi\sqrt{\frac{27r^3}{2GM}}$．

64 质量分别为M，m的两个质点相距L，将两质点从静止释放，求两质点相遇时间．（只考虑相互间万有引力的作用）

答案 $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L^3}{2G(M+m)}}$

解析 以M为参考系，m在运动过程中受力$F=F_{万}+F_{惯}=\frac{Gm(M+m)}{L^2}$，等效于$m$在质量为$M+m$的中心天体引力作用下，向中心天体运动（中心天体静止）．m的运动轨迹为直线，可以看做无尽扁的椭圆，焦点长轴端点都会拉到中心天体处．即该椭圆的半长轴$a=\frac{L}{2}$，由开普勒第三定律$\frac{a^3}{T^2}=\frac{G(M+m)}{4\pi^2}$，

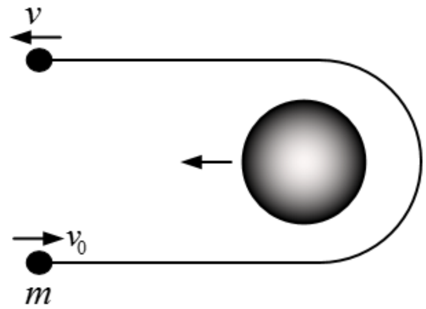
则m运动到M处的时间为该椭圆运动周期的一半，即$t=\frac{T}{2}$，

联立解得$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L^3}{2G(M+m)}}$，

说明：本题也可以相对质心来做，结果相同．

故答案为：$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L^3}{2G(M+m)}}$．

65 空间探测器从行星旁边绕过时，由于行星的引力作用，可以使探测器的运行速率增大，这种现象就称之为“弹弓效应”．在航天技术中，“弹弓效应”是用来增大人造小天体运动速率的一种有效方法．下图是“弹弓效应”示意图：



(1) 质量为m的空间探测器以相对于太阳的速度v_0飞向质量为M的行星，此时行星相对于太阳的速度为u_0，绕过行星后空间探测器相对于太阳的速度为v，行星的速度变为u，由于$m \ll M$，v_0、u_0、v、u的方向均可视为平行．试求出探测器与行星构成的系统在上述过程中动量守恒与能量守恒的方程，并在$m \ll M$的条件下用v_0和u_0来表示v．

(2) 若上述行星是质量为$M = 5.67 \times 10^{26}\mathrm{kg}$的土星，其相对于太阳的轨道速率为$u_0 = 9.6\mathrm{km/s}$，而空间探测器的质量$m = 150\mathrm{kg}$，相对于太阳迎向土星的速率$v_0 = 10.4\mathrm{km/s}$，则由于“弹弓效应”，探测器绕过土星后相对于太阳的速率将增为多大？

(3) 若探测器飞向行星时，其速率v_0与行星的速率u_0同向，则是否仍能产生使探测器速率增大的“弹弓效应”，简要说明理由．

答案

(1) $v = v_0 + 2u_0$

(2) $v = 29.6\mathrm{km/s}$

(3) 不能，探测器速度会减小

解析

(1) 以v_0的方向为坐标负方向，根据动量守恒有：

$$Mu_0 - mv_0 = mv + Mu$$

根据能量守恒定律有：

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}Mu_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu_2$$

解得：$v = \dfrac{M-m}{M+m}v_0 + \dfrac{2M}{M+m}u_0$

将$m \ll M$代入可得：$v = v_0 + 2u_0$

(2) 将所给数据代入（1）小问可得：$v = 29.6\mathrm{km/s}$

(3) 若探测器初始速度与行星速度相同，则根据动量守恒有：

$Mu_0+mv_0=mv+Mu$

根据能量守恒定律有：

$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}Mu_0^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Mu_2$

且必须满足$v_0>u_0$

解得：$|v|=|v_0-2u_0|<|v_0|$

因此不能产生"弹弓效应"．