

第5讲 动量定理

知识点睛

冲量与动量

如果我们用手臂在一个轻的物体上推一下，它很容易运动；如果我们用同样的力气去推另一个通常所谓的重得多的物体，它的运动就会慢得多。

我们在牛顿第二定律中已经学过，这种现象的产生原因是，在给定力的情况下，物体的加速度与物体质量成反比，即：

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

而回顾我们在运动学中对加速度的定义，它写为：

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

那么我们就可以得到，在 $\Delta t \rightarrow 0$ 的条件下，牛顿第二定律可以变成：

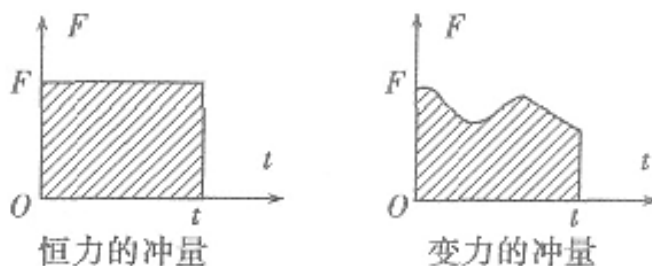
$$\vec{F}\Delta t = m\Delta \vec{v}$$



定义

作用于质点的力，在时间上的累积量称为力的**冲量**，记为 \vec{I} （在恒力 \vec{F} 的作用下，一段时间 t 内，冲量 $\vec{I} = \vec{F}t$ ）。有力且有作用时间就有冲量，与物体的运动状态无关。

在图象中，**图象与时间轴所围成的面积**就代表物体所受冲量的大小。



另外，物体的运动能力与物体本身的质量以及物体的速度有关，所以我们定义一个物体相对于某惯性系的**动量**为它的质量与在此惯性系中运动速度的乘积，记为 $\vec{p} = m\vec{v}$ 。

质点受到力 \vec{F} 经过在的时间段 Δt 内的作用，产生的冲量 $\Delta \vec{I}$ 则可写成：

$$\Delta \vec{I} = \vec{F}\Delta t$$

它在这段时间内速度增加，所以动量的增加 $\Delta\vec{p}$ 可以。：

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$$

头脑风暴

1 对于力的冲量的说法正确的是（ ）

- A. 作用在物体上的力大，力的冲量一定大
- B. 恒力的作用时间越长，则它的冲量就越大
- C. F_1 与其作用的时间 t_1 的乘积 F_1t_1 等于 F_2 与其作用的时间 t_2 的乘积 F_2t_2 ，则这两个冲量相同
- D. 置于水平面上的物体在水平力 F 作用下仍然静止，则力 F 的冲量一定为零

答案 B

解析 略

2 关于物体的动量，下列说法中正确的是（ ）

- A. 物体的动量越大，其惯性也越大
- B. 同一物体的动量越大，其速度一定越大
- C. 物体的加速度不变，其动量一定不变
- D. 运动物体在任一时刻的动量方向一定是该时刻的位移方向

答案 B

解析 A. 惯性大小的唯一量度是物体的质量，如果物体的动量大，但也有可能物体的质量很小，所以不能说物体的动量大其惯性就大，故A错误；

B. 动量等于物体的质量与物体速度的乘积，即 $P = mv$ ，同一物体的动量越大，其速度一定越大，故B正确；

C. 加速度不变，速度是变化的，所以动量一定变化，故C错误；

D. 动量等于物体的质量与物体速度的乘积，即 $P = mv$ ，动量是矢量，动量的方向就是物体运动的方向，不是位移方向，故D错误。

故选B。

动量定理

定理

将上面冲量和动量的表达式，对比牛顿第二定律的推导结果我们可以得到：

$$\Delta \vec{I} = \Delta \vec{p}$$

将这些微小的时间内力的作用与质点动量的增加分别累加起来，我们就可以得到：

$$\vec{I} = \vec{p}_t - \vec{p}_0$$

即，力（合力）对物体的冲量等于物体动量的增加，这就是**动量定理**。

如果用一段时间内的平均作用力来表示冲量 $I = \bar{F}t$ ，再与动量结合 $I = p_t - p_0$ ，故可得 $\bar{F} = \frac{p_t - p_0}{t}$ ，可通过这种方法求得**平均作用力**。

头脑风暴

- 3 一质量为 m 的铁锤，以速度 v 竖直打在木桩上，经过 Δt 时间而停止。则在打击时间内，铁锤对木桩的平均冲力的大小是（ ）

A. $mg \cdot \Delta t$

B. $\frac{mv}{\Delta t}$

C. $\frac{mv}{\Delta t} + mg$

D. $\frac{mv}{\Delta t} - mg$

答案 C

解析 对铁锤应用动量定理，设木桩对铁锤的平均作用力为 F ，则 $(F - mg) \cdot \Delta t = 0 - (-mv)$ ，解得 $F = \frac{mv}{\Delta t} + mg$ ，所以由牛顿第三定律知，铁锤对木桩的平均冲力 $F' = F = \frac{mv}{\Delta t} + mg$ 。

系统动量定理

对于存在多个物体的系统来说，它总体的动量 \vec{p} 应该定义为各个物体动量 \vec{p}_i 之和，即：

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$$

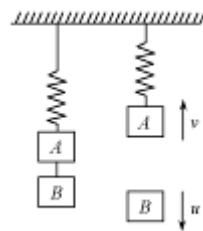
将系统中各物体所受力分为内力与外力两类，内力冲量之和记为 $\vec{I}_{\text{内}}$ ，外力冲量和记为 $\vec{I}_{\text{外}}$ ，根据牛顿第三定律，我们可以将内力挑选组成一系列作用力、反作用力，它们等大反向。所以内力的冲量和 $\vec{I}_{\text{内}}$ 必为零。这样就有：

$$\vec{I}_{\text{外}} = \vec{p}_t - \vec{p}_0$$

即，外力为系统提供的冲量和等于系统的动量增加，这就是**系统动量定理**。

头脑风暴

- 4 物体A和B用轻绳相连挂在轻质弹簧下静止不动，如图所示，A的质量为 m ，B的质量为 M ，当连接A、B的绳突然断开后，物体A上升经某一位置时的速度大小 v ，这时物体B的下落速度大小为 u ，在这段时间里，弹簧的弹力对物体A的冲量为（ ）



- A. mv B. $mv - Mu$ C. $mv + Mu$ D. $mv + mu$

答案 D

解析 以A和B的整体作为研究对象，根据动量定理，取竖直向上的方向为正方向，有：

$$I - (M + m)gt = mv - Mu$$

由于B做自由落体运动，故 $u = gt$ ，最终得到 $I = mv + mu$

二维动量定理

冲量与动量作为矢量和力与速度一样，是**矢量**。

我们常用处理二维矢量问题的方法是**正交分解法**，即建立直角坐标系(x, y)。在静力学中，我们学过，可以把力分解到 x 、 y 方向，那么同理，作用在这个物体上的冲量也就可以分解到 x 、 y 方向。由于运动的独立性，物体的动量在 x 、 y 方向的分量也是相互独立的，这样我们就可以得到**动量定理的二维表述**形式：

$$\begin{cases} I_x = p_{xt} - p_{x0} \\ I_y = p_{yt} - p_{y0} \end{cases}$$

原则上可随意选取互相垂直的两个方向作为 x 、 y 方向。

例题精讲

基础训练

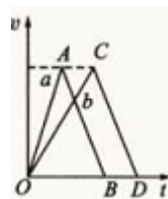
5 人从高处往下跳，一般都是脚尖先着地，接着让整个脚着地，并且曲腿，这样是为了（ ）

- A. 减少人受到的冲量
- B. 减少人的动量变化
- C. 延长与地面的作用时间，从而减小人受到的作用力
- D. 延长与地面的作用时间，使人受到地面给他的弹力小于人所受的重力

答案 C

解析 人在和地面接触时，人的速度减为零，由动量定理可知 $(F - mg)t = \Delta mv$ ，而脚尖着地可以增加人着地的时间，由公式可知可以减小受到地面的冲击力，动量的变化和冲量不变，故C正确，A、B、D错误。
故选C。

6 水平推力 F_1 和 F_2 分别作用于水平面上等质量的 a 、 b 两物体上，作用一段时间后撤去推力，物体将继续运动一段时间后停止，两物体的 $v - t$ 图象如图所示，图中 $AB \parallel CD$ ，则（ ）



- A. F_1 的冲量大于 F_2 的冲量
- B. F_1 的冲量等于 F_2 的冲量
- C. 两物体受到的摩擦力大小相等
- D. 两物体受到的摩擦力大小不等

答案 C

解析 设 F_1 、 F_2 的作用时间分别为 t_1 、 t_2 ，则由题图知 $t_1 < t_2$ 。当只有摩擦力 F_f 作用时，由 $AB \parallel CD$ 知图线斜率相同，则加速度相同，由牛顿第二定律知，摩擦力 F_f 相同，故C选项正确，D选项错误；对 a ，由动量定理得 $F_1 t_1 - F_f t_1 = mv_A$ ；对 b 同理 $F_2 t_2 - F_f t_2 = mv_C$ 。由图象知： $v_A = v_C$ ， $t_1 < t_2$ ，所以有： $mv_A = mv_C$ ，即 $F_1 t_1 - F_f t_1 = F_2 t_2 - F_f t_2$ ，因此 $F_2 t_2 > F_1 t_1$ ，即A、B选项均错。此题还可根据动能定理比较 F_1 和 F_2 所做功的大小关系。

- 7 水平地面上有一木块，质量为 m ，它与地面间的动摩擦因数为 μ ，在水平恒力 F 作用下由静止开始运动，经过时间 t 撤去此力，木块又向前滑行一段时间 $2t$ 才停下，此恒力 F 的大小为（ ）

A. μmg B. $2\mu mg$ C. $3\mu mg$ D. $4\mu mg$

答案 C

解析 A、B、C、D. 设物体在 F 作用下的加速度为 a_1 ，撤去 F 后的加速度大小为 a_2 ，撤去 F 时的速度为 v 。

根据 $v = at$ 知，对于匀加速运动有 $v = a_1 t$ ，对于匀减速运动有 $v = a_2 \cdot 2t$ ，

可得 $a_1 : a_2 = 2 : 1$ ，

根据牛顿第二定律得：

匀加速过程有 $F - \mu mg = ma_1$ 。

匀减速过程有 $\mu mg = ma_2$ 。

解得： $F = 3\mu mg$ 。

故选C。

- 8 质量为 $m = 1\text{kg}$ 的小球由高 $h_1 = 0.45\text{m}$ 处自由下落，落到水平地面后，反弹的最大高度为 $h_2 = 0.2\text{m}$ ，从小球下落到反跳到最高点经历的时间为 $\Delta t = 0.6\text{s}$ ，取 $g = 10\text{m/s}^2$ 。求：小球撞击地面过程中，球对地面的平均压力的大小 F 。

答案 $F = 60\text{N}$

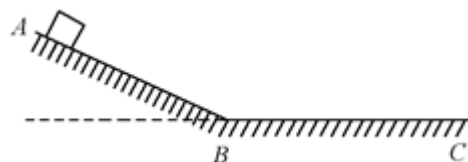
解析 $F = 60\text{N}$

- 9 小球以初速度 v_0 竖直上抛，受到空气阻力 $f = kv$ ，运动到最高点的时间为 t ，求小球运动到最高点的高度 H 。

答案 $H = \frac{mv_0 - mgt}{k}$

解析 $H = \frac{mv_0 - mgt}{k}$

- 10 如图所示， AB 为斜轨道，与水平面夹角 30° ， BC 为水平轨道，两轨道在 B 处通过一小段圆弧相连接，一质量为 m 的小物块，自轨道 AB 的 A 处从静止开始沿轨道下滑，最后停在轨道上的 C 点，已知 A 点高 h ，物块与轨道间的动摩擦因数为 μ ，求：物块沿轨道 AB 段滑动的时间 t_1 与沿轨道 BC 段滑动的时间 t_2 之比 t_1/t_2 等于_____。



答案 $\frac{2\mu}{1 - \sqrt{3}\mu}$

解析 物体在从 A 到 B 再到 C 的过程中，根据动量定理得

$$(mg \sin 30^\circ - \mu mg \cos 30^\circ)t_1 - \mu mgt_2 = 0$$

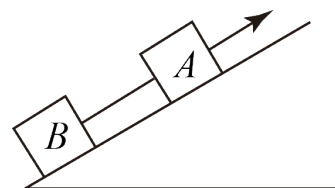
$$\text{则 } \frac{t_1}{t_2} = \frac{\mu mg}{mg \sin 30^\circ - \mu mg \cos 30^\circ} = \frac{2\mu}{1 - \sqrt{3}\mu}$$

- 11 跳伞运动员从2000m高处跳下，开始下落过程未打开降落伞，假设初速度为零，所受空气阻力与下落速度大小成正比，最大降落速度为 $v_m = 50\text{m/s}$ 。运动员降落到离地面 $s = 200\text{m}$ 高处才打开降落伞（可以认为此时恰达到最大速度），在1s内速度均匀减小到 $v_1 = 5.0\text{m/s}$ ，然后匀速下落到地面，试求运动员在空中运动的时间。

答案 76.5s

解析 76.5s

- 12 如图， A 、 B 两小物体被平行于斜面的轻细线相连，均静止于斜面上。以平行于斜面向上的恒力拉 A ，使 A 、 B 同时由静止起以加速度 a 沿斜面向上运动。经时间 t_1 ，细线突然被拉断。再经时间 t_2 ， B 上滑到最高点。已知 A 、 B 的质量分别为 m_1 、 m_2 ，细线断后拉 A 的恒力不变，求 B 到达最高点时 A 的速度。

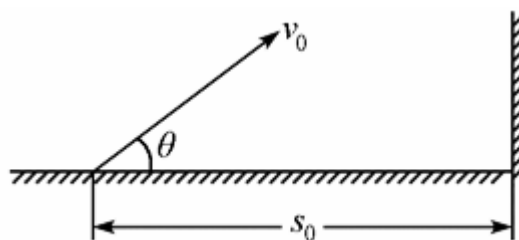


答案 $\frac{(m_1 + m_2)(t_1 + t_2)a}{m_1}$

解析 本题中，由于恒力大小、斜面的倾角及、与斜面间的动摩擦因数均未知，故分别对、运动的每一个过程应用动量定理建立方程时有一定的困难．但若以系统为研究对象，系统合外力为 $\sum F = (m_1 + m_2)a$ ，且注意到，细绳拉断前后，系统所受各个外力均未变化，全过程中， B 的动量增量为零，对系统运动的全过程，有： $(m_1 + m_2)a(t_1 + t_2) = m_1 V_A$ ，解出 $V_A = \frac{(m_1 + m_2)(t_1 + t_2)a}{m_1}$ ．故 B 到达最高点时 A 的速度为 $\frac{(m_1 + m_2)(t_1 + t_2)a}{m_1}$ ．故答案为： $\frac{(m_1 + m_2)(t_1 + t_2)a}{m_1}$ ．

进阶拓展

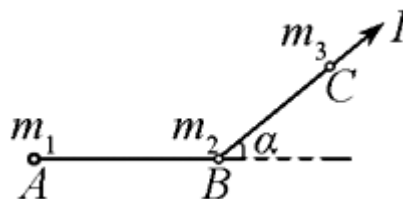
- 13 军训时，战士距离 s_0 以速度 v_0 起跳，再用脚蹬墙一次，如图所示，使身体变为竖直向上的运动以继续升高，墙面与鞋底之间的静摩擦力因素为 μ ，求能使人体重心有最大总升高的起跳角正切值．



答案 $\frac{1}{\mu}$ （水平方向和竖直方向分别列一个动量定理）

解析 略

- 14 质量分别为 m_1 、 m_2 和 m_3 的三质点 A 、 B 和 C 位于光滑水平桌面上，用已拉直的、不可伸长的柔软轻绳 AB 和 BC 连接， $\angle ABC = \pi - \alpha$ ， α 为一锐角，如图所示．今有一冲量为 I 的冲击力沿 BC 方向作用于质点 C ，求质点 A 开始运动时的速度．



答案

$$\frac{Im_2 \cos \alpha}{m_2(m_1 + m_2 + m_3) + m_1 m_3 \sin^2 \alpha}$$

解析

略

阅读材料

动力学术语的起源

16~17世纪，基于运动总量总是守恒的哲学思想，人们开始寻找量度机械运动的合适物理量来表达运动量的守恒。

讨论运动守恒要比质量守恒更为困难，因为运动是一个复合的概念，它既涉及物体的大小（质量），又与运动的快慢和方向（速度矢量）有关。所以历史上围绕什么是“运动之量”问题的争论更为激烈。

早在十七世纪初，意大利物理学家伽利略首先引入了“动量”这个名词。不过他有时使用当时通用的“运动物体之力”的说法。他指出，这个“力”正比于质量（他称之为重量）和速度的乘积。

法国杰出的数学家和哲学家笛卡尔继承了利略的说法，把物体的大小（质量）和速度乘积定义为“运动之量（quantity of motion）”，并提出了宇宙间运动之量的总和不变的原理。然而笛卡尔的运动之量 mv 未考虑运动的方向，它是个标量。笛卡尔崇尚理性，忽视经验，它的运动不灭原理是思辨的产物，充满着先验和空想的色彩。可是由于笛卡尔巨大的声望，他的门徒把他的运之量 mv 为运动唯一的量度。

荷兰科学家惠更斯在研究物体碰撞问题时做出了突出的贡献。他在研究中发现动量是个矢量。但是惠更斯与笛卡尔一样还没有明确的质量概念，并常常把重量概念与质量概念混用，因此这时的动量概念还是处在形成与发展过程中。1687年，英国物理学家牛顿在《自然哲学之数学原理》的巨著中，首次十分明确地定义了质量的概念，紧接着就定义了动量。他说：“运动的量是用它的速度和质量一起来量度的。”

笛卡尔、惠更斯、牛顿等关于动量概念的思想，并没有得到一些科学家的赞同，并由此引起了一场长达半个多世纪的关于物质运动量度的争论，这场争论使动量概念得到了进一步的明确与发展。

德国哲学家、科学家莱布尼兹在1686年发表的《关于笛卡尔和其他人在确定物体的运动量中的错误的简要论证》一文中公开向笛卡尔提出挑战。他通过计算得到伽利略所说足以使下落物体回升到同一高度的“力”，应该用 mv^2 来量度，并把这种“力”称为“活力”。后来，科里奥利又将活力改为 $\frac{1}{2}mv^2$ ，这就是今天所说的动能。

笛卡尔和莱布尼兹两派各一是，互不相让，形成一场欧洲许多名人都卷入的著名争论，延续达五十余年。直到1743年法国力学家达朗贝尔在《动力学论》一书的序言中对这场争论给了一个“最后的判决”。他说这只是一场“毫无益处的咬文嚼字的争论”，两种量度的同样有效。

今天我们早已清楚，关于运动的两种量度，笛卡尔指的是动量；莱布尼兹指的是动能。双方各自反映了问题的一个方面，两者都是必需的。