第12讲 万有引力定律的应用——引力势能与航天

一、知识点睛

1.引力势能

对于重力和弹簧弹力，它们对物体做功大小，仅与物体初、末位置相关，而与具体路径无关，被称作是保守力。对于保守力，我们可以引入势能的概念来对物体的能量变化进行研究。

对于万有引力$F=-\frac{GMm}{r^2}$，物体只有在沿位置矢量$\vec{r}$方向运动时，万有引力才会做功，在沿垂直于$\vec{r}$的方向运动时，力与运动的方向垂直，万有引力不做功。事实上，万有引力的做功大小只与物体的初、末位置的$\vec{r}$相关。也就是说，万有引力是保守力，我们可以引入引力势能这一概念。

关于引力势能，有如下性质：

①没有特殊说明的情况下，一般选取无穷远处为系统引力势能零点。

②万有引力做正功，引力势能减小；万有引力做负功，引力势能增加。

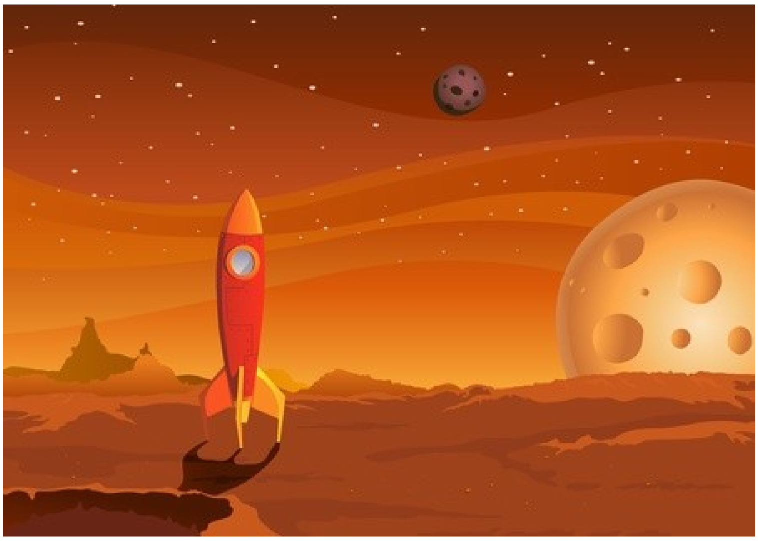
引力势能的表达式

① 相距为r的质点m_1和m_2的引力势能为$E_p=-\frac{Gm_1m_2}{r}$；

② 质量为M均匀分布的球体（或球壳）与其外部距离球心为r的质点m组成系统的引力势能为$E_p=-\frac{GMm}{r}$。

引力势能公式的推导，不要求大家掌握。上述引力势能公式对于两个质量均匀分布的球体也适用。

我们可以将引力势能归为机械能的一部分，这样的话，航天飞行器或是天体在万有引力的作用下做的各种运动就应该**满足机械能守恒定律**，在运动过程中动能和引力势能互相转化。



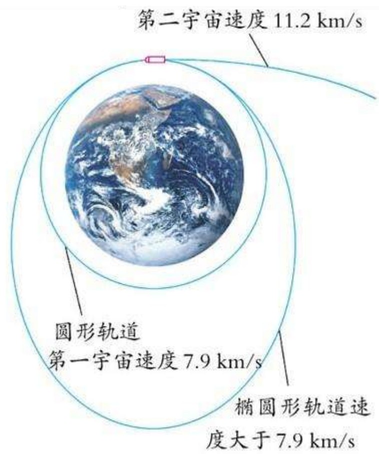
2. 宇宙速度

第一宇宙速度

设地球质量为M，绕地球做匀速圆周运动的卫星质量为m，速度为v，它到地心的距离为r。卫星做圆周运动所需的向心力由万有引力提供，则有$G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v_1^2}{r}$，解得$v_1=\sqrt{\frac{GM}{r}}$。当物体在地球表面附近环绕地球运转时，由$r_{\min}\approx R$，则$v_1=\sqrt{\frac{GM}{R}}=\sqrt{gR}\approx 7.9\mathrm{km/s}$，这就是**地球表面附近卫星的运行速度，称为第一宇宙速度。**

第二宇宙速度

在地面附近发射人造卫星，如果发射速度大于7.9km/s，而小于11.2km/s，那么它绕地球运行的轨迹将是椭圆。当发射速度等于或大于11.2km/s时，**卫星会克服地球的引力而永远离开地球**，我们把11.2km/s叫做**第二宇宙速度。**



第三宇宙速度

达到第二宇宙速度的人造卫星还受到太阳的引力。在地面附近发射一颗人造卫星，要使它挣脱太阳引力的束缚，飞到太阳系外，需要的最小发射速度为$16.7\mathrm{km/s}$，这个速度叫做第三宇宙速度。

头脑风暴1

1 一颗人造地球卫星以速度v发射后，可绕地球做匀速圆周运动，若使发射速度变为$2v$，则该卫星可能（　　）

①绕地球做匀速圆周运动，周期变大

②绕地球运动，轨道变为椭圆

③不绕地球运动，成为绕太阳运动的人造卫星；

④挣脱太阳引力的束缚，飞到太阳系以外的宇宙．

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①②③

答案　C

解析　第一宇宙速度是发射人造地球卫星必须具有的最小速度，一颗人造卫星以初速度v从地面发射后，可成为地球的一颗卫星，知发射的速度：$7.9\mathrm{km/s} < v < 11.2\mathrm{km/s}$．若使发射速度为$2v$，$15.8\mathrm{km/s} < 2v < 22.4\mathrm{km/s}$．若$2v$介于第二宇宙速度与第三宇宙速度之间，该卫星不绕地球运动，成为太阳系的人造“行星”；$2v$若大于第三宇宙速度$16.7\mathrm{km/s}$，将挣脱太阳的引力，飞到太阳系以外去．故③④正确，①②错误．

故选C．

2 在科学技术高度发达的今天，人类不仅发射了人造卫星，实现了登月飞行且迈出了奔向火星、木星、土星，乃至冲出太阳系的步伐．发射人造卫星、发射能完全脱离地球的天体（可以乘坐人造行星）、发射冲出太阳系的人造天体首先要知道发射速度是多少，这就需要依靠万有引力定律和机械能守恒定律来解决．（已知地球半径$R = 6.37 \times 10^3\mathrm{km}$，地球表面重力加速度$g = 9.8\mathrm{m/s^2}$）

(1) 试推导出地球第一宇宙速度的表达式．（用已知量g、R表示．）

(2) 万有引力做功与路径无关，对应有引力势能，已知引力势能的表达式为$E_\mathrm{p} = -\dfrac{GMm}{r}$（以无穷远处引力势能为零，$G$为引力常量，$M$为地球质量，$m$为物体质量，$r$表示物体到地心

的距离．）在地面附近的重力势能表达式$E_{\mathrm{p}}=mgh$实际上是引力势能的一种近似表达式，请在$h<<R$的条件下由引力势能的表达式推导出重力势能表达式．

(3) 若物体只受万有引力作用，只要物体在地球表面具有足够大的速度，就可以脱离地球的引力而飞离地球（即达到势能为零的地方），这个速度叫第二宇宙速度．试推导出地球的第二宇宙速度的表达式，并计算其大小．

答案 (1) $\sqrt{gR}$

(2) 见解析

(3) $11.2\mathrm{km/s}$

解析 (1) 对地球表面物体：$\frac{GMm}{R^2}=mg$；对近地卫星：$\frac{GMm'}{R^2}=m'\frac{v^2}{R}$；解得$v=\sqrt{gR}$；

(2) 重力势能

$$E_{\mathrm{p}}=-\frac{GMm}{R+h}-(-\frac{GMm}{R})=GMm(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h})=mgR^2\frac{h}{R(R+h)}=mgh\frac{R^2}{R(R+h)}\approx mgh$$

(3) 只有引力做功时，引力势能与动能之和保持不变，

由$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{R}=0+0$可得$v_2=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{2gR}\approx 11.2\mathrm{km/s}$

3. 卫星运动

卫星的运动近似看成匀速圆周运动，其向心力都来源于万有引力，设卫星的轨道半径为r、线速度大小为v、角速度为ω、周期为T、向心加速度为a，那么有：

$$G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}=m\omega^2r=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2r=ma$$

由此得出：

①线速度：$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$，$v\propto\sqrt{\frac{1}{r}}$；

②角速度：$\omega=\sqrt{\frac{GM}{r^3}}$，$\omega\propto\sqrt{\frac{1}{r^3}}$；

③周期：$T=\sqrt{\frac{4\pi^2r^3}{GM}}$，$T\propto\sqrt{r^3}$；

④向心加速度：$a=\frac{GM}{r^2}$，$a\propto\frac{1}{r^2}$。

地球同步卫星

同步卫星是指在赤道平面内，以和地球自转角速度相同的角速度绕地球运动的卫星，同步卫星又叫同步通信卫星。同步卫星有以下几个特点：

①周期一定：同步卫星在赤道上空相对地球静止，它绕地球的运动与地球自转同步，它的运动周期就等于地球自转的周期，即$T=24\mathrm{h}$。

②角速度一定：同步卫星绕地球运动的角速度等于地球自转的角速度。

③轨道一定：所有同步卫星的轨道都在赤道平面内，且由于所有同步卫星的周期都相同，由$r=\sqrt[3]{\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}}$可得，所有同步卫星的轨道半径都相同，即在同一轨道上运动，其确定的高度约为$3.59\times10^4\mathrm{km}$。

④环绕速度大小一定：所有同步卫星绕地球运动的线速度的大小是一定的，都是$3.08\mathrm{km/s}$。环绕方向与地球自转方向相同。

⑤向心加速度大小一定：所有同步卫星由于到地心距离相同，所以，它们绕地球运动的向心加速度大小都相同，约为$0.23\mathrm{m/s^2}$。

近地卫星

近地卫星其轨道半径r近似等于地球半径R。运动速度$v=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}=\sqrt{gR}\approx7.9\mathrm{km/s}$，是所有圆轨道卫星中的最大绕行速度；运行周期$T_{\min}=\sqrt{\dfrac{4\pi^2r^3}{gR^2}}\approx84\,\mathrm{min}$，是所有卫星中的最小周期，向心加速度$a=g=9.8\mathrm{m/s^2}$，是所有卫星的最大加速度。

头脑风暴2

3 同步卫星相对地面静止，犹如悬在高空中，下列说法中不正确的是（　　）

A. 同步卫星处于平衡状态

B. 同步卫星的速率是唯一的

C. 各国的同步卫星都在同一圆周上运行

D. 同步卫星加速度大小大于静止在赤道上物体的向心加速度大小

答案　A

解析　A．同步卫星受到地球的万有引力提供向心力做匀速圆周运动，加速度不为零，故A错误；

B．因为同步卫星要和地球自转同步，即ω相同，根据$F=G\dfrac{Mm}{r^2}=m\omega^2r$，因为$\omega$是一定值，所以$r$也是一定值，所以它运行的轨道半径是确定的值，所以同步卫星的高度是唯一的．根据卫星的速度公式$r=\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$，所以同步卫星的速率是唯一的，故B正确；

C．根据同步卫星与地球自转同步，与地面相对静止，同时卫星受到地球的万有引力提供向心力，指向圆心，万有引力指向地心，故同步卫星只能在赤道上空，所以各国的同步卫星都在同一圆周上运动，故C正确；

D．静止在地面的物体，角速度和同步卫星的角速度相同，但是半径小，根据$a=\omega^2R$，显然半径大的向心加速度大，故D正确．

故选A．

二、例题精讲

基础训练

4 下列有关天体运动的说法中正确的是（　　）

A. 第一宇宙速度是发射卫星必须具备的最小发射速度，也是卫星绕地球做匀速圆周运动的最大运行速度

B. 地球同步卫星必须位于地球赤道的正上方，但高度可以是任意的

C. 在宇宙飞船中绕地球做匀速圆周运动的宇航员处于完全失重状态，所以宇航员不受地球的吸引力，即重力为零

D. 原来在同一轨道上沿着同一方向绕行的人造卫星一前一后，若要后一卫星追上前一卫星，只要将后者速率增大一些即可

答案　A

解析　A．第一宇宙速度是卫星紧贴地球表面时运动的速度，所以紧贴地球表面运动的卫星的运行速度等于其发射速度．

根据万有引力等于向心力$G=\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$可得卫星运行的线速度$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$故轨道半径越大，运行速度越小．故第一宇宙速度是最大的运行速度．由于卫星的轨道半径越大，卫星的机械能越大，故轨道半径越大，发射速度越大，故第一宇宙速度是最小的发射速度．故A正确；

B．同步卫星所受万有引力完全提供向心力，且其运动周期等于地球的自转周期，故有 $G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{4\pi^2}{T^2}r$，故$r=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$，同步卫星的周期固定，所以轨道半径固定．

故B错误；

C．在宇宙飞船绕地球做匀速圆周运动时，宇航员所受万有引力完全提供向心力，故宇航员对宇宙飞船的地板的压力为0，故宇航员处于完全失重状态，但失重不是不受重力而是重力提供了向心加速度．故C错误；

D．根据A的分析可知后面的卫星要想追上前面的卫星，不能加速，因为加速后所需向心力增大，卫星做离心运动．根据B的分析可知后面的卫星加速后周期变的更大，线速度更小，和目标卫星之间的距离变的更大，更难以追上，所以要想追上前面的卫星后面的卫星应该减速后变速到低轨道上，加速度变大，追上后前星后后星再加速才能实现追上（对接）．故D错误．

故选A．

5 2011年中俄联合实施探测火星活动计划，由中国负责研制的“萤火一号”火星探测器将与俄罗斯研制的“福布斯—土坡”火星探测器一起由俄罗斯“天顶”运载火箭发射前往火星．已知火星的质量约为地球的$1/9$，火星的半径约为地球半径的$1/2$．下列关于火星探测器的说法中正确的是（　　）

A. 在地球的发射速度只要大于地球第一宇宙速度即可

B. 在地球的发射速度只有达到地球第三宇宙速度才可以

C. 在地球的发射速度应大于地球第二宇宙速度、小于地球第三宇宙速度

D. 火星探测器环绕火星运行的最大速度约为地球第一宇宙速度的$\frac{\sqrt{2}}{9}$倍

答案　C

解析　A、火星探测器前往火星，脱离地球引力束缚，还在太阳系内，发射速度应大于第二宇宙速度、可以小于第三宇宙速度，故A、B错误，C正确；

D、由$G\frac{Mm}{R^2}=\frac{mv^2}{R}$得，$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$

已知火星的质量约为地球的$\frac{1}{9}$，火星的半径约为地球半径的$\frac{1}{2}$，

火星的第一宇宙速度是地球第一宇宙速度的$\frac{\sqrt{2}}{3}$倍，

火星探测器环绕火星运行的最大速度即为火星的第一宇宙速度，故D错误．

6 宇航员在一行星上以速度v_0竖直上抛，物体经t秒钟后落回手中，已知该行星半径为R，要使物体不再落回星球表面，沿星球表面抛出的速度至少应是多少？

答案 $\sqrt{2Rv_0/t}$

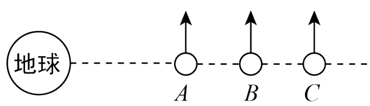
解析 根据匀变速运动的规律可得，该星球表面的重力加速度$g=\dfrac{2v_0}{t}$．

该星球的第一宇宙速度，即为卫星在其表面附近绕它做匀速圆周运动的线速度，该星球对卫星的引力（重力）提供卫星做圆周运动的向心力，则$mg=\dfrac{mv_1^2}{R}$．

该星球表面的第一宇宙速度为$v_1=\sqrt{gR}=\sqrt{\dfrac{2v_0R}{t}}$．

故答案为：$\sqrt{2Rv_0/t}$．

7 如图所示，在同一轨道平面上的几个质量不等的人造地球卫星A、B、C，均绕地球做匀速圆周运动，它们在某一时刻恰好在同一直线上，下列说法中正确的是（　　）



A. 轨道线速度$v_A<v_B<v_C$

B. 万有引力$F_A>F_B>F_C$

C. 向心加速度$a_A>a_B>a_C$

D. 运动一周后，它们将同时回到图示位置

答案 C

解析 A．根据$G\dfrac{Mm}{r^2}=ma=m\dfrac{v^2}{r}=mr\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2$知，轨道半径越大，向心加速度越小，线速度越小，周期越大．故A错误，C正确；

B．因为不知道人造地球卫星A、B、C的质量大小关系，无法比较它们所受的万有引力．故B错误；

D．三个人造卫星的周期不同，运动一周后，不会同时回到图示位置．故D错误．

故选C．

8 在圆周轨道上运行的质量为m的人造地球卫星，它到地面的距离等于地球半径R，设地球表面上的重力加速度为g，则（　　）

A. 卫星运行的速度为$\sqrt{2gR}$

B. 卫星运行的周期为$4\pi\sqrt{2R/g}$

C. 卫星运行的加速度为$\frac{1}{2}g$　　D. 卫星运行的角速度为$\sqrt{g/8R}$

答案　BD

解析　由于此卫星绕地球做轨道半径是$2R$的匀速圆周运动，且重力等于万有引力，由“黄金代换”规律可得：在地球表面：$G\frac{Mm}{R^2}=mg$，①

在卫星的轨道上：$\frac{GMm}{(2R)^2}=mg'$，②

由①②两式得，$g'=\frac{1}{4}g$．③

此即为在距地球表面高为R处的重力加速度．

对选项A，由于人造地球卫星的向心力由其重力提供，则$mg'=mv^2/2R$．④

由③④两式可得$v=\sqrt{gR/2}$．故选项A错误．

对选项B，由于是人造地球卫星的重力提供了向心力，则有$mg'=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 2R$．⑤

由③⑤两式可得$T=4\pi\sqrt{2R/g}$．故选项B正确．

对选项C，由于卫星绕地球做圆周运动的向心力是由重力提供的，则$mg'=ma_{向}$．⑥

由③⑥两式得，$a_{向}=\frac{1}{4}g$．故选项C错误．

对选项D，因为人造地球卫星的向心力由其重力提供，则有$mg'=m\omega^2(2R)$．⑦

由③⑦两式可得$\omega=\sqrt{g/8R}$．故选项D正确．

故选BD．

9　已知近地卫星线速度大小为v_1、向心加速度大小为a_1，地球同步卫星线速度大小为v_2、向心加速度大小为a_2．设近地卫星距地面高度不计，同步卫星距地面高度约为地球半径的6倍．则以下结论正确的是（　）

A. $\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sqrt{6}}{1}$　　B. $\frac{v_1}{v_2}=\frac{7}{1}$　　C. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{7}{1}$　　D. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{49}{1}$

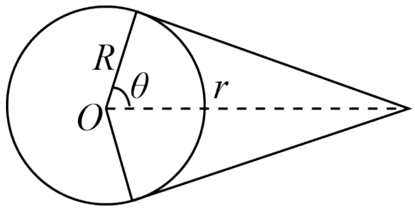
答案　D

解析　A、B．近地卫星和同步卫星都是绕地球做匀速圆周运动，根据万有引力提供向心力$G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v^2}{R}$，$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$，两卫星的轨道半径比为$1:7$，所以$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sqrt{7}}{1}$．故A、B错误；

C、D．同步卫星与随地球自转的物体具有相同的角速度，根据$a=r\omega^2$得，地球的半径与同步卫星的轨道半径比为$1:7$，所以$\frac{a_1}{a_2}=\frac{7}{1}$．故C错误，D正确．

故选D．

10 至少要几颗同步卫星才能“覆盖”整个地球赤道．（已知地球半径$6400\mathrm{km}$，取$g=10\mathrm{m/s^2}$，$\cos 81.3^\circ=0.15$）



答案 3颗

解析 设同步卫星的轨道半径为r，则$G\frac{Mm}{r^2}=mr(\frac{2\pi}{T})^2$，

在地球表面处有$g=\frac{GM}{R^2}$，解得$r=\sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}}=4.3\times10^4\mathrm{km}$．

如图所示为一颗同步卫星覆盖赤道区域的示意图，由几何知识可得$\cos\theta=\frac{R}{r}=0.15$解得$\theta=81.3^\circ$，

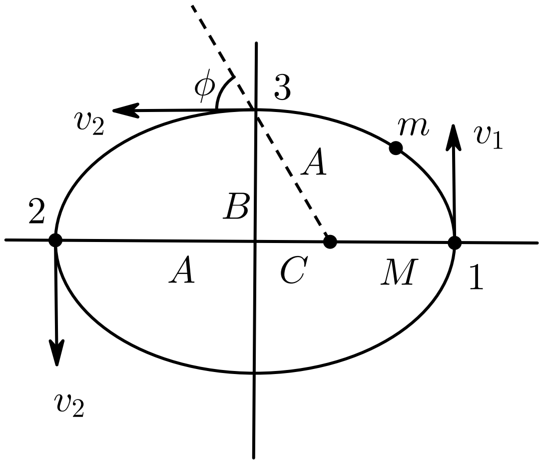
因此，赤道上空需要的同步卫星的颗数为$n=\frac{360^\circ}{2\times81.3^\circ}=2.2$，

可见，最少需要3颗同步卫星．

故答案为：3颗

进阶拓展

11 将太阳质量记为M，行星椭圆轨道的半长轴记为A，半短轴记为B，试求行星在图中1，2，3处的速度大小v_1，v_2，v_3．



答案 $v_1=\frac{A+C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}$，$v_2=\frac{A-C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}$，$v_3=\sqrt{\frac{GM}{A}}$．

解析 1，2两处间的能量关系式和面积速度关联式分别为$\frac{1}{2}mv_1^2-G\frac{Mm}{A-C}=\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{Mm}{A+C}$，

$\frac{1}{2}v_1(A-C)=\frac{1}{2}v_2(A+C)$，

即可解得$v_1=\frac{A+C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}$，$v_2=\frac{A-C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}$．

在3处的面积速度为$\frac{1}{2}v_3A\sin\phi=\frac{1}{2}v_3B$，

由 $\frac{1}{2}v_3B=\frac{1}{2}v_1(A-C)$，

得$v_3=\sqrt{\frac{GM}{A}}$．

三、阅读材料

1.行星运动的机械能

我们知道行星运动的轨道是圆锥曲线（圆，椭圆，抛物线，双曲线），行星在轨道上运动的机械能为动能与引力势能之和，我们可以证明行星的机械能只与轨道参数和星体质量有关。

1.圆轨道

以圆周运动为例，容易得到$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$，则机械能

$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=-\frac{GMm}{2r}$。

2.椭圆轨道

我们不加证明的给出结论，椭圆运动机械能

$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=-\frac{GMm}{2A}$

其中A为椭圆轨道的半长轴，可将圆轨道视作椭圆轨道的一种特殊情况。

3.抛物线

行星轨道呈抛物线轨道对应的是一种特殊情况，行星速度为第二宇宙速度，即行星恰好可以脱离中心天体的束缚。

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=0$$

当行星运行到无穷远处时，速度恰好为0。但需要提到的是，这仅代表行星相对原中心天体（地球）的速度为零，相对其它星体（太阳）速度为日地相对速度，这一点在求解第三宇宙速度时有所应用。

4.双曲轨道

双曲轨道并不是封闭轨道，对应的是行星动能很大，从而脱离中心天体束缚的情形。当行星速度超过第二宇宙速度时，行星的运动轨道为双曲线的一支，此时有

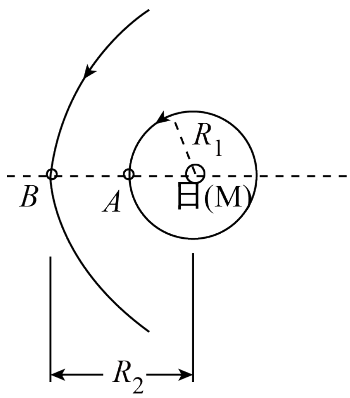
$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=\frac{GMm}{2A}$$

其中A为双曲轨道的半长轴。从公式中可以看出$E>0$，即当行星脱离束缚，即运动到无穷远处时，行星拥有的速度并不为0，若此时行星被其它天体的引力俘获，那么参照3中的原因，行星的速度和机械能会有所改变。

综上所述，我们通过行星的机械能符号来判断它的轨道类型。$E<0$时为椭圆（圆）轨道，$E=0$时为抛物线轨道，$E>0$时为双曲线轨道。

下面这道题可以作为阅读材料后的能力提升

12 如图，太阳系中星体A绕太阳做半径为R_1的圆周运动，星体B作抛物线运动，B在近日点处与太阳的相距为$R_2=2R_1$，且两轨道在同一平面上，两星体运动方向如图中箭头所示．设B运动到近日点时，A恰好运动到B与太阳连线上．A、B随即发生某种强烈的相互作用而迅速合并成一个新的星体，其间的质量损失可忽略，试证明新星体绕太阳的运动轨道为椭圆．



答案 新星体的轨道为椭圆．

解析 发生碰撞前，两星体机械能．

星体A：$E_1=\dfrac{GMm_1}{2R_1}=-\dfrac{GMm_1}{R_1}+\dfrac{1}{2}m_1v_1^2$．

星体B：$E_2=0=-\dfrac{GMm_2}{R_2}+\dfrac{1}{2}m_2v_2^2$．

得$v_1=\sqrt{\dfrac{GM}{R_1}}$，$v_2=\sqrt{\dfrac{2GM}{R_2}}=\sqrt{\dfrac{GM}{R_1}}$．

碰撞过程可视为完全非弹性碰撞吗，有机械能损失，碰撞后星体机械能．

$E<E_1+E_2=-\dfrac{GMm_1}{2R_1}<0$．

因此新星体轨道为椭圆或圆，采用反证法：

假设新轨道为圆轨道，由碰撞过程质心位置不变．

$r=r_c=\dfrac{m_1R_1+m_2R_2}{m_1+m_2}$．

碰撞后$v=\sqrt{\dfrac{GM}{r}}=\sqrt{\dfrac{GM(m_1+m_2)}{m_1R_1+m_1R_2}}=\sqrt{\dfrac{GM}{R_1}}\sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{m_1+2m_2}}$，

碰撞过程动量守恒$m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v$

$v=\sqrt{\dfrac{GM}{R_1}}$矛盾．

综上所述，新星体的轨道为椭圆．