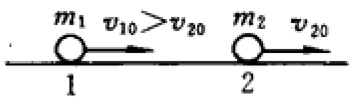
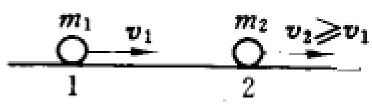
第9讲 碰撞问题

知识点睛

碰撞规律

碰撞是一种十分普遍的现象，例如冰壶比赛中，两只冰壶可能会发生碰撞；发生交通事故时，两辆汽车也可能会发生碰撞。在了解微观粒子的结构与性质的过程中，碰撞的研究也起着重要的作用。那么在碰撞的过程有什么特点呢，下面我们一起来进行总结。





（1）碰撞的特点

①碰撞过程是在瞬间发生的，作用时间极短。

②碰撞过程是瞬时过程，可以忽略物体的位移，认为物体在碰撞前后，仍在同一位置。

③由于碰撞过程作用时间极短，因此平均作用力很大，有些碰撞尽管合外力不为零，但仍属于内力远远大于外力的情况，系统的总动量守恒。

④碰撞过程是一个没有能量输入的过程，因此，系统的总机械能不会增加。如果碰撞过程中，系统的机械能守恒，这样的碰撞称为弹性碰撞；如果碰撞的过程中，机械能有损失，这样的碰撞叫做非弹性碰撞；其中机械能损失最大的情况，称为完全非弹性碰撞。

（2）碰撞的分类

碰撞的情景种类很多，根据碰撞前后动量是否共线可以将碰撞分为两类。如果碰撞前后两物体速度共线，这种碰撞称为**正碰**，也叫**对心碰撞**；如果碰撞前后两物体的速度不在一条直线上，这样的碰撞称为**斜碰**，也叫**非对心碰撞**。发生对心碰撞的两个物体，运动始终发生在一条直线上，比较简单，在后续课程的讨论中我们主要是针对**正碰**的情况；对于斜碰的情况，是平面内的二维问题，我们将在高二的课程中与大家讨论。

（3）碰撞合理性的判断

物体在弹性碰撞和完全非弹性碰撞过程中的规律，我们首先要解决的问题是：并不是任意想象的碰撞过程都可以存在，也不是任意给定一组满足动量守恒的速度关系，就一定对应某种实际的碰撞过程。

实际可能发生的碰撞过程，一定要满足下列判断标准。

①系统的动量守恒，即：$p_1+p_2=p_{10}+p_{20}$。

②系统的机械能（由于不涉及势能问题，因此主要是指动能）不会增加，即：$E_{k1}+E_{k2}\geqslant E_{k10}+E_{k20}$

③碰撞物体的速度要符合实际情景。例如：

(a) 碰前两物体同向运动，则后面物体的速度一定大于前面物体的速度，即$v_{10}>v_{20}$，否则无法实现碰撞。

(b) 同向运动的两物体碰撞后，原来在前的物体的速度一定增大，而且原来在前面的物体速度大于或等于原来在后的物体的速度。即$v_2\geqslant v_1$，否则碰撞没有结束。

(c) 相向运动的两物体碰撞后，运动方向不可能都不改变，除非两物体碰撞后速度均为零。

弹性碰撞

如果在碰撞的过程中，系统的机械能（在碰撞过程中，一般不涉及势能，因此主要是动能）守恒，这样的碰撞称为弹性碰撞，这个模块中我们通过下面的实际情景对弹性碰撞的情况进行一些定量的讨论。

质量为m_1与质量为m_2的物体分别以速度v_{10}、v_{20}运动并发生对心碰撞，碰撞过程中无机械能损失，那么碰撞后物体的速度为多少呢？

设碰撞之后，两物体的速度分别为v_1、v_2，

动量守恒：$m_1v_{10}+m_2v_{20}=m_1v_1+m_2v_2$

机械能守恒：$\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2=\frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2$

联立这两个方程，我们可以解得：

$$v_1=\frac{(m_1-m_2)v_{10}+2m_2v_{20}}{m_1+m_2}$$
$$v_2=\frac{(m_2-m_1)v_{20}+2m_1v_{10}}{m_1+m_2}$$

实际上，我们还可以发现，在弹性碰撞中，两个小球碰撞前的相对速度大小等于碰撞后的相对速度大小，即接近速度大小等于分离速度大小：

$$v_2-v_1=v_{10}-v_{20}$$

完全非弹性碰撞

如果碰撞的过程中，系统的机械能有损失，这样的碰撞叫做非弹性碰撞；其中机械能损失最大的情况，称为完全非弹性碰撞。

对于完全非弹性碰撞，碰后两物体合二为一，以共同的速度v运动，系统没有机械能守恒，只有动量守恒，表达式可以写为：

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = (m_1 + m_2)\, v$$

我们可以解得：

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

根据碰撞之后的速度v，我们可以反过来推出，这样碰撞后与碰撞前的能量损失表达式：

$$\Delta E_{kmax} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{10} - v_{20})^2$$

非弹性碰撞

对于一般的非弹性碰撞，机械能在碰撞过程中存在损失，且两个物体在碰撞之后也不会完全粘合在一起。但是，实验指出，一般非弹性碰撞后的相对分离速度与碰撞前的相对接近速度满足关系：

$$v_2 - v_1 = e(v_{10} - v_{20})$$

其中e被称为弹性恢复系数，它仅与物体材料的性质（即材料本身相应的弹性）有关。对于弹性碰撞，$e = 1$，对于完全非弹性碰撞，$e = 0$。

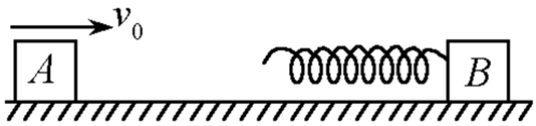
将相对运动速度满足的方程与动量守恒方程联立，我们可以得到：

$$v_1 = v_{10} - \frac{(1+e)m_2(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2}$$
$$v_2 = v_{20} - \frac{(1+e)m_1(v_{20} - v_{10})}{m_1 + m_2}$$

类碰撞问题

相互作用的两个物体在很多情况下运动特征与碰撞问题类似，可以运用动量、能量守恒来分析，其中最典型的的一类问题是物块弹簧模型。

如果两物体是在光滑水平面上运动，系统的动量守恒。在这个过程中只有两物体的动能和弹簧弹性势能的相互转化，物体“相撞”会使弹簧压缩，动能转化成弹性势能；当两物体的速度相等时，弹簧缩短到最短，此时弹簧的弹性势能最大；随后，当弹簧恢复至原长时，弹性势能为零，两物体完成整个接触的过程。



我们可以发现，这样一个过程的初末状态和弹性碰撞是一致的，所以，我们完全可以按照处理弹性碰撞的方式来处理这类问题。

例题精讲

基础训练

1 在光滑水平面上，两球沿球心连线以相等速率相向而行，并发生碰撞，下列现象可能的是（　　）

A. 若两球质量相同，碰后以某一相等速率互相分开

B. 若两球质量相同，碰后以某一相等速率同向而行

C. 若两球质量不同，碰后以某一相等速率同向而行

D. 若两球质量不同，碰后以某一相等速率互相分开

答案 AC

解析 光滑水平面上两小球的对心碰撞符合动量守恒的条件，因此碰撞前、后两小球组成的系统总动量守恒．碰撞前两球总动量为零，碰撞后也为零，动量守恒，所以A项是可能的；若碰撞后两球以某一相等速率同向而行，则两球的总动量不为零，而碰撞前为零，所以B项不可能；碰撞前、后系统的总动量的方向不同，所以动量不守恒，D项不可能；碰撞前后总动量不为零，碰后也不为零，方向可能相同，所以C项是可能的．

2 在光滑水平面上，一质量为m、速度大小v的A球与质量为$2m$静止的B球碰撞后，A球的速度方向与碰撞前相反．则碰撞后B球的速度大小可能是（　　）

A. $0.8v$　　B. $0.6v$　　C. $0.4v$　　D. $0.2v$

答案 B

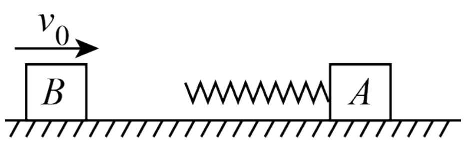
解析 此题实际场景没有可供讨论的条件，直接判断动量守恒定律，设A的初速度方向为正：

$mv=-mv_A+2mv_B \Rightarrow v_A=2v_B-v>0 \Rightarrow v_B>\frac{v}{2}$①；再判断机械能不增加；

$\frac{1}{2}mv^2 \geqslant \frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}\cdot 2mv_B^2$，将①式代入整理：$v_B \leqslant \frac{2}{3}v$，故$\frac{1}{2}v<v_B \leqslant \frac{2}{3}v$，$B$在区间之中．

故选B．

3 在足够大的光滑水平面上放有两物块A和B，已知$m_A>m_B$，A物块连接一个轻弹簧并处于静止状态，B物体以初速度v_0向着A物块运动，在B物块与弹簧作用过程中（B与弹簧接触后不再分开），两物块在同一条直线上运动，下列判断正确的是（　　）



A. 弹簧恢复原长时，B物块的速度为零

B. 弹簧恢复原长时，B物块的速度不为零，且方向向右

C. 在弹簧压缩过程中，B物块动能先减小后增大

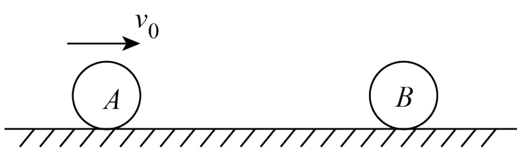
D. 在与弹簧相互作用的整个过程中，B物块的动能先减小后增大

答案　D

解析　本题中的情形可视为弹性碰撞，由于$m_A>m_B$，故碰撞结束，即弹簧恢复原长后，B的速度v_B向左，A速度v_A向右，A、B错．在弹簧压缩过程中，B速度大于A速度，直至AB速度相等，在此过程中，B始终做减速运动，故其动能一直减小，C错．在与弹簧相互作用的整个过程中，B始终受到弹簧对其向左的弹力，B先减速到零，再加速到v_B，D对．

故选D．

4 如图所示，以速度v_0向右运动的A球与静止在光滑水平面上的B球发生弹性正碰，碰后瞬间A的动能是初动能的$\frac{1}{4}$，已知碰撞过程中机械能守恒，则碰后瞬间B球的速度是______．

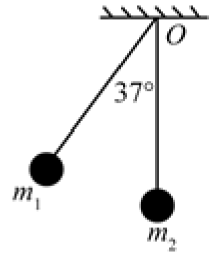


答案　$\frac{3}{2}v_0$

解析　$v_1'=\frac{(m_1-m_2)v_1}{m_1+m_2}=\frac{1}{2}v_1 \Rightarrow m_1=3m_2$；再由$v_2'=\frac{2m_1v_1}{m_1+m_2}=\frac{3}{2}v_0$．

故答案为：$\frac{3}{2}v_0$．

5 两个质量$m_1=20\mathrm{g}$、$m_2=80\mathrm{g}$的小球，用等长的细线悬挂在O点．悬挂m_2的细线处于竖直状态，悬挂m_1的细线处于伸直状态，且与竖直方向成$37°$角，如图所示．先将m_1由静止释放，m_1与m_2碰撞后连在一起．若线长$L=1\mathrm{m}$，重力加速度g取$10\mathrm{m/s^2}$，取$\sin 37°=0.6$，$\cos 37°=0.8$．求



(1) 碰撞前瞬间m_1速度的大小．

(2) 碰撞中损失的机械能．

答案 (1) $2\mathrm{m/s}$

(2) $0.032\mathrm{J}$

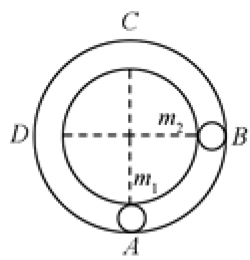
解析 (1) m_1释放后，因只有重力做功，机械能守恒，$m_1gL(1-\cos 37°)=\frac{1}{2}m_1v_0^2$，得$v_0=\sqrt{2gL(1-\cos 37°)}=2\mathrm{m/s}$．

故答案为：$2\mathrm{m/s}$．

(2) m_1与m_2碰撞时，动量守恒，$m_1v_0=(m_1+m_2)v$，得$v=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_0=0.4\mathrm{m/s}$，损失的机械能$\Delta E=\frac{1}{2}m_1v_0^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2v^2)=0.032\mathrm{J}$．

故答案为：$0.032\mathrm{J}$．

6 如图所示，在水平桌面上固定着一个光滑圆轨道，在轨道的B点静止着一个质量为m_2的弹性小球乙，另一个质量为m_1的弹性小球甲以初速v_0从A点开始运动，与乙球发生第一次碰撞后，恰在C点发生第二次碰撞．则甲、乙两球的质量之比$m_1:m_2$可能是（　　）



A. $5:3$　　B. $1:9$　　C. $1:7$　　D. $2:3$

答案　AC

解析　设碰撞后m_1 、m_2 的速度分别为v_1、v_2 ，取v_1、v_2正方向与v_0方向相同．由题分析可知小球开始的运动方向不明，要分情况讨论，但总有动量定理成立：

$m_1v_0=m_1v_1+m_2v_2$

以及弹性碰撞接近速度等于远离速度的结论：

$v_0=v_2-v_1$

可解出：$m_1:m_2=\dfrac{v_2}{v_2-2v_1}$

接下来分情况讨论

①v_0方向向右，碰撞后m_1反向运动，m_2正向运动，则

路程比$s_2:s_1=1:3$

速度比$v_2:v_1=-1:3$

质量比$m_1:m_2=1:7$

②v_0方向向右，碰撞后m_1正向运动，m_2正向运动，则

路程比$s_2:s_1=5:1$

速度比$v_2:v_1=5:1$

质量比$m_1:m_2=5:3$

③v_0方向向左，碰撞后m_1反向运动，m_2正向运动，则

路程比$s_2:s_1=3:1$

速度比$v_2:v_1=-3:1$

质量比$m_1:m_2=3:5$

④v_0方向向右，碰撞后m_1正向运动，m_2正向运动，则

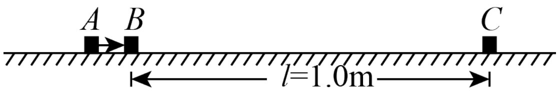
路程比$s_2:s_1=7:3$

速度比$v_2:v_1=7:3$

质量比$m_1:m_2=7:1$

综上所述，答案选AC

7 如图，水平地面上静止放置着物块B和C，相距$l=1.0\mathrm{m}$．物块A以速度$v_0=10\mathrm{m/s}$沿水平方向与B正碰．碰撞后A和B牢固地粘在一起向右运动，并再与C发生正碰，碰后瞬间C的速度$v=2.0\mathrm{m/s}$．已知A和B的质量均为m，C的质量为A质量的k倍，物块与地面间的动摩擦因素$\mu=0.45$．设碰撞时间很短，g取$10\mathrm{m/s^2}$．求：



(1) A与B碰撞后的速度v_1的大小．

(2) 与C碰撞前瞬间AB的速度v_2的大小．

(3) 若AB与C的碰撞过程是弹性碰撞，求k的取值．

答案 (1) $v_1=5\mathrm{m/s}$

(2) $v_2=4\mathrm{m/s}$

(3) $k=6$

解析 (1) 由动量守恒定律：$mv_0=2mv_1$，

解得$v_1=5\mathrm{m/s}$．

故答案为：$v_1=5\mathrm{m/s}$．

(2) 由动能定理得$-\mu mgl=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$，

联立以上各式计算得出$v_2=4\mathrm{m/s}$该过程为完全非弹性碰撞.

故答案为：$v_2=4\mathrm{m/s}$.

(3) 若AB与C发生弹性碰撞，由动量守恒有能量守恒得$\begin{matrix}2mv_2=2mv_3+kmv\\ \frac{1}{2}\cdot 2mv_2^2=\frac{1}{2}\cdot 2mv_3^2+\frac{1}{2}\cdot kmv^2\end{matrix}$，

联立以上两式计算得出$\begin{matrix}v_3=\dfrac{2-k}{2+k}v_2\\ v=\dfrac{4}{2+k}v_2\end{matrix}$，

代入数据计算得出$k=6$，此时AB的运动方向与C相反．

故答案为：$k=6$.

8 小球A和B的质量分别为m_A和m_B（$m_A>m_B$），在某高度处将A和B先后由静止释放．A与水平地面碰撞后向上弹回，在释放处的下方与释放处距离为H的地方恰好与正在下落的B发生正碰．设所有碰撞都是弹性的，碰撞时间极短，求A、B碰撞后B上升的最大高度．

答案 $\left(\frac{3m_A-m_B}{m_A+m_B}\right)^2H$

解析 小球与地面的碰撞是弹性的，且A、B从同一高度释放，因此A、B碰撞前的速度大小相等，设为v_0．由机械能守恒，$m_AgH=\frac{1}{2}m_Av_0^2$，解得$v_0=\sqrt{2gH}$．

设A、B碰撞后的速度分别为v_A和v_B，取竖直向上为正方向，由弹性碰撞得，

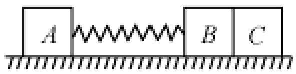
$$\begin{cases}m_Av_0-m_Bv_0=m_Av_A+m_Bv_B\\ \frac{1}{2}m_Av_0^2+\frac{1}{2}m_Bv_0^2=\frac{1}{2}m_Av_A^2+\frac{1}{2}m_Bv_B^2\end{cases}$$

解得$v_B=\frac{3m_A-m_B}{m_A+m_B}v_0=\frac{3m_A-m_B}{m_A+m_B}\sqrt{2gH}$．

所以B能上升的最大高度$h=\frac{v_B^2}{2g}=\left(\frac{3m_A-m_B}{m_A+m_B}\right)^2H$．

故答案为：$\left(\frac{3m_A-m_B}{m_A+m_B}\right)^2H$．

9 如图所示，物块A、B、C静止在光滑的水平面上，三者的质量均为$m=2\text{kg}$．轻弹簧的左端与A连接，右端与B连接．弹簧处于原 长，B和C紧靠在一起（不粘连）．现给物块A方向水平向右、大小为$v_0=6\text{m/s}$的初速度，在以后的运动过程中物块A、B没有相碰，求弹簧被拉伸最长时的弹性势能（设弹簧处于原长时的弹性势能为零）．



答案 18J．

解析 轻弹簧先被压缩然后恢复至原长，此时物块B、C刚要分离，设此时物块A的速度 为v_A，物块B、C的速度为v_B，对A、B、C组成的系统根据动量守恒定律得：$mv_0=mv_A+2mv_B$

根据机械能守恒定律得：$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}\cdot 2mv_B^2$

两式联立解得：$v_A=-2\text{m/s}$，$v_B=4\text{m/s}$（$v_A=6\text{m/s}$，$v_B=0\text{m/s}$不符合题意，舍去）．

B、C分离后，C做匀速直线运动，因弹簧被拉伸，B做减速运动，当A、B达到速度相同时，弹簧被拉伸最长，设此时A、B的速度为v，对A、B组成的系统根据动量守恒定律得：

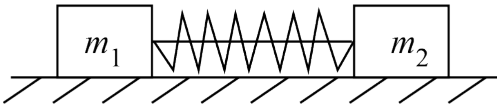
$mv_A+mv_B=2mv$，解得$v=1\text{m/s}$

设 此时弹簧的弹性势能为E_p，根据机械能守恒定律得：$E_p=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}\cdot 2mv^2=18\text{J}$

．

进阶拓展

10 如图所示，滑块A、B的质量分别为m_1与m_2，$m_1 < m_2$，由轻质弹簧相连接置于水平的气垫导轨上，用一轻绳把两滑块拉至最近，使弹簧处于最大压缩状态后绑紧．两滑块一起以恒定的速率v_0向右滑动，突然轻绳断开．当弹簧伸至本身的自然长度时，滑块A的速度正好为0．求：



(1) 绳断开到第一次恢复自然长度的过程中弹簧释放的弹性势能E_P．

(2) 在以后的运动过程中，滑块B是否会有速度为0的时刻?试通过定量分析证明你的结论．

答案 (1) $E_P = \dfrac{m_1(m_1+m_2){v_0}^2}{2m_2}$

(2) 不可能出现滑块B的速度为0的情况

解析 (1) 当弹簧处压缩状态时，系统的机械能等于两滑块的动能和弹簧的弹性势能之和，当弹簧伸长到自然长度时，弹性势能为0，因这时滑块A的速度为0，故系统的机械能等于滑块B的动能．设这时滑块B的速度为v，则有$E=\dfrac{1}{2}m_2v^2$．因系统所受外力为0，由动量守恒定律$(m_1+m_2)v_0=m_2v$，解得$E=\dfrac{(m_1+m_2)^2{v_0}^2}{2m_2}$．由于只有弹簧的弹力做功，系统的机械能守恒$\dfrac{1}{2}(m_1+m_2){v_0}^2+E_P=E$，解得$E_P=\dfrac{m_1(m_1+m_2){v_0}^2}{2m_2}$．

故答案为：$E_P=\dfrac{m_1(m_1+m_2){v_0}^2}{2m_2}$．

(2) 假设在以后的运动中滑块B可以出现速度为0的时刻，并设此时A的速度为v_1，弹簧的弹性势能为E'_P，由机械能守恒定律得 $\dfrac{1}{2}m_1v_1^2+E'_P=\dfrac{(m_1+m_2)v_0^2}{2m_2}$

根据动量守恒得$(m_1+m_2)v_0=m_1v_1$，

求出v_1代入上式得:$\dfrac{(m_1+m_2)v_0^2}{2m_1}+E'_P=\dfrac{(m_1+m_2)v_0^2}{2m_2}$

因为$E'_P \geqslant 0$，故得:

$\dfrac{(m_1+m_2)v_0^2}{2m_1} \leqslant \dfrac{(m_1+m_2)v_0^2}{2m_2}$

即$m_1 \geqslant m_2$，这与已知条件中$m_1 < m_2$不符．可见在以后的运动中不可能出现滑块B的速度为0的情况．

故答案为：不可能出现滑块B的速度为0的情况．

11 一质量为m的入射粒子与一质量为M的原来静止的靶粒子发生正碰．若已知碰后会有定量的能量E转移到靶粒子的内部（即作为靶粒子内能的增值），问入射粒子至少应具有多大的初始动能.

答案 $\sqrt{\frac{2(M+m)}{Mm}E}$

解析 设入射粒子的初始速度为v_0，则初动能为：

$E=\frac{1}{2}mv_0^2$．

m与M正碰，有动量守恒和能量守恒关系式：

$mv_0=mv+Mv'$，

$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Mv'^2+E$．

其中v和v分别为碰后入射粒子和靶粒子的速度．这两个方程中，v'、v、v_0三个量未知，联立消去v'，用v_0表达v．联立消去v后，整理得v的二次方程：

$\left(m+\frac{m^2}{M}\right)v^2-2\frac{m^2}{M}v_0v+\left(\frac{m^2}{M}v_0^2-mv_0^2+2E\right)=0$．

由于v必须为实数，即v要求实数解，必满足条件：

$\left(2\frac{m^2}{M}v_0\right)^2-4\left(m+\frac{m^2}{M}\right)\left(\frac{m^2}{M}v_0^2-mv_0^2+2E\right)\geqslant 0$

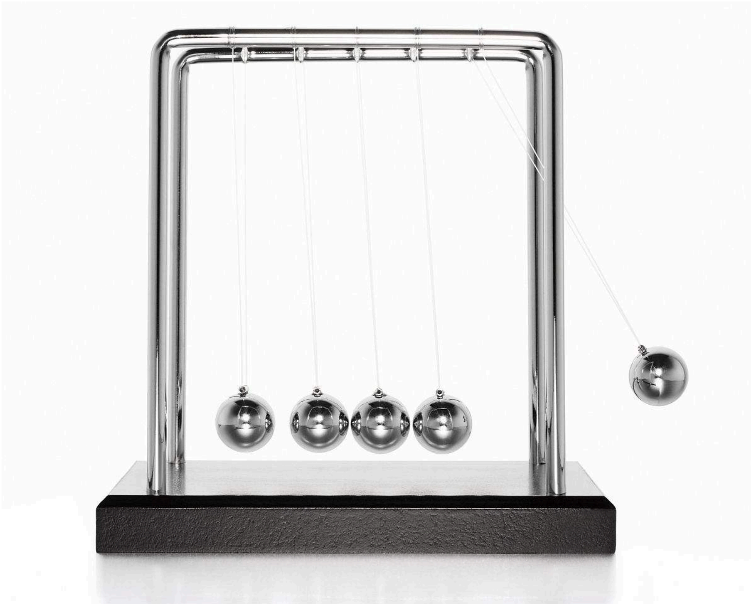
解得：$v_0\geqslant\sqrt{\frac{2(M+m)}{Mm}E}$．

故答案为：$\sqrt{\frac{2(M+m)}{Mm}E}$．

阅读材料

牛顿摆

牛顿摆是一个1960年代发明的桌面演示装置，五个质量相同的球体由吊绳固定，彼此紧密排列。又叫：牛顿摆球、动量守恒摆球、永动球、物理撞球、碰碰球等。牛顿摆是由法国物理学家伊丹·马略特最早于1676年提出的。当摆动最右侧的球并在回摆时碰撞紧密排列的另外四个球，最左边的球将被弹出，并仅有最左边的球被弹出。



牛顿摆中的每个金属球用两根细线悬挂在支架上，两根线成一定的角度，金属球彼此之间恰好接触，保持静止。细线约束小球的摆动，以使其能运动到原位。在理想情况下，完全弹性碰撞的物理过程满足动量守恒和能量守恒。如果两个碰撞小球的质量相等，联立动量守恒和能量守恒方程时可解得：两个小球碰撞后交换速度。如果被碰撞的小球原来静止，则碰撞后该小球具有了与碰撞小球一样大小的速度，而碰撞小球则停止。多个小球碰撞时可以进行类似的分析。