13 自招综合训练-相对论

绝对的、真实的和数学的时间，尤其特性决定，自身均匀地流逝，与一切外在事物无关。
绝对空间，其自身特性与一切外在事物无关，处处均匀，永不移动。

——《自然哲学之数学原理》牛顿

空间本身和时间本身将消失在完全的阴影中，只有它们之间的某种结合才将得以生存。

——闵可夫斯基

19世纪中叶，麦克斯韦在总结前人研究电磁现象的基础上，建立了完整的电磁理论，即麦克斯韦电磁场方程组。麦克斯韦电磁理论不但能够解释当时已知的电磁现象，而且预言了电磁波的存在，确认光是波长较短的电磁波，电磁波在真空中的传播速度为一常数$c=3\times10^{8}m/s$，并很快为实验所证实。

从麦氏方程组中解出的光在真空中的传播速度与光源的速度无关。如果光波也和声波一样，是靠一种媒质（以太）传播的，那么光速相对于绝对静止的以太就应该是不变的。科学家们为了寻找以太做了大量的实验，其中以美国物理学家迈克耳孙和莫雷实验最为著名。这个实验不但没能证明以太的存在，相反却宣判了以太学说的死刑，证明光速相对于地球是各向同性的。但是这却与经典的运动学理论相矛盾。

为了调和理论与实验的矛盾，爱因斯坦分析了物理学的发展，特别是电磁理论，摆脱了绝对时空观的束缚提出了“狭义相对论”。

一、狭义相对论的基本原理

1.知识点睛

1．狭义相对论的两条基本原理

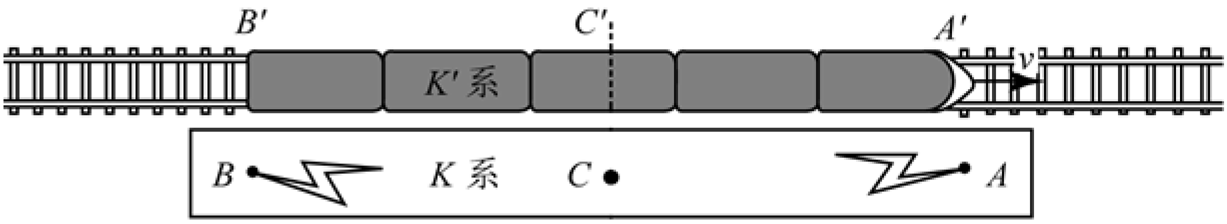
(1) **相对性原理：**所有惯性系都是平权的。在不同惯性参考系中，一切物理规律都是相同的。即不能通过任何物理实验判断出所处惯性参考系的“绝对运动”。

(2) **光速不变原理**：真空中的光速在不同的惯性参考系中都是相同的（$c = 3 \times 10^8 m/s$），与光源、观察者的运动无关。

2．异地同时性破坏

这两条原理的贯彻，特别是“光速不变原理”，对于我们看待时间、空间的看法有着革命性的影响。我们先来看一个例子：

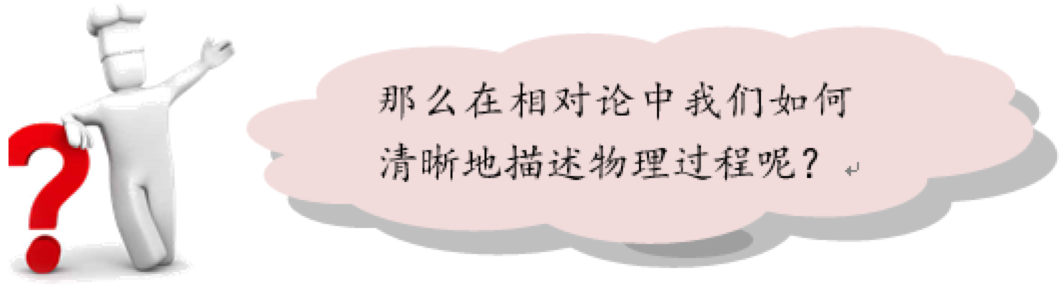
例如在某个站台的两端A、B设置管信号的发射器，我们希望它们同时闪光，可以预先用尺量出站台的中点C，并在C点设置接收器。如果C点的接收器同时接收到A、B发来的光信号（同一位置的同时性是很容易确定的），由于C到A、B的距离相同，光速又相同，我们就可以断言A、B同时发出了光信号。



如果恰好有一列火车它的车头和车尾分别记为A'和B'。列车沿着$B \to A$方向驶来。为了确定$A'A$点重合与$B'B$点重合是否同时发生，我们可以在列车上设置机关，使A'与A、B'与B相遇时分别发出闪光。只要闪光同时到达，就可以确认两个相遇事件同时发生。

这种检验异地同时性的方法对所有惯性系都是成立的。在列车上的观察者也会主张只有上述的光信号同时到达列车的中点C'，两次相遇才是同时的。可是由于列车的中点C'向着A行驶，所以它将先接收到来自$A'A$的闪光。在地面上观察这是很正常的，因为光从A遇到C'所运行的距离小于光从B追上C'所运行的距离，光速又相同，所以C'自然先收到来自AA'的闪光。然而车上的观察者认为两边闪光运行的距离相同，光速也相同，C'先收到来自$A'A$的闪光的唯一解释只能是$A'A$相遇事件发生在前。这就是说在列车上观察两次相遇不是同时发生的，A'与A先相遇然后B'与B相遇！

上面这个例子说明在不同的参照系中人们对时间的描述也是不同的。在一个参照系里看来同时发生的事件在别的参照系里看来就变成不同时发生的了。时刻、时间的概念不再是脱离参照系独立存在的了。我们常说的：①“A与B相遇的瞬间（时刻）”，②“A与B相遇到A与C相遇的过程中（时间）”都变得不再有意义。因为它们没有提及所依照的参考系是什么。



2．事件

为了精确地描述问题，我们把质点的运动拆解成一连串的“**事件**”。一个事件指某一时刻在空间某一位置发生了一件事。在某参考系中，**一个事件对应着一个位置坐标和一个时刻坐标**。在另外的参照系看来同一事件可能发生在不同的位置或时刻。所以定量表示事件必须说明相对哪个参考系。

(1) 过程

一段过程由它的起始事件和结束事件来定义，例如“A与B相遇到A与C相遇”的过程，被划分为一连串事件。第一个事件是“A与B相遇”，最后一个事件是“A与C相遇”。

(2) 时间

在某个参考系中观察，末事件的时刻减去初事件的时刻，就是此参考系中这**两个事件间的时间。**

(3) 距离

两事件间的距离：在某个参考系中观察，两个事件位置差的绝对值，就是此参考系中这**两个事件间的距离。**

两质点间的距离：两个质点a、b对应着两个系列的事件。在某个参照系中观察，**同一时刻**质点a对应事件的位置与质点b对应事件的位置差的绝对值，就是在此时刻该参考系中a、b**两质点间的距离。**

2. 例题精讲

1 回答下列问题：

(1) 火车上的乘客看到站台上警察开枪，子弹击中了一名嫌疑犯．

这个过程应该划分为哪些事件？

子弹飞行时间如何表示？

警察到嫌疑犯的距离如何表示？

(2) 站台上的行人看到火车上有甲乙二人同时开枪，子弹都击中了对方．

这个过程应该划分为哪些事件？

两发子弹的飞行时间如何表示？

甲乙二人的距离如何表示？

答案 (1) ①警察开枪，子弹到达嫌犯位置

②在站台上的人与火车上的人看到两个事件发生的时间不同，

子弹飞行时间应表示为两个事件发生的时间差．

③在站台上的人与火车上的人看到两个事件发生的位置也不同，

警察到嫌疑犯的距离（子弹飞行距离）应表示为两个事件发生的位置差．

(2) ①甲开枪，乙开枪，甲中弹，已中弹．

②甲射出子弹飞行时间=乙中弹时间−甲开枪时间

乙射出子弹飞行时间=甲中弹时间−乙开枪时间

③甲乙距离= $|乙位置-甲位置|$

解析 (1) 略

(2) 略

标注 近代物理 > 狭义相对论 > 爱因斯坦假设

二、时钟减缓与空间收缩

1.知识点睛

1．固有系

按照相对论，各个惯性参考系都是平等的，在其中物理规律的形式都相同，仅仅是各物理量的测量值不同而已。为研究问题方便起见，我们按下述方法定义“**固有系**”：

单一质点：相对某惯性参照系匀速运动的质点，自身也是惯性参照系。我们就称这个质点是它自身的“**固有系**”。在固有系中观察这个质点是静止的。

两个事件：一般来说两个事件之间没有什么关联。假如可以找到一个惯性系，在其中观察这两个事件在同一地点发生（位置坐标相同），那么这个惯性系就称为这**两个事件的**“**固有系**”。

注意：两个事件的固有系不一定存在。

两个质点：一般来说两个质点之间没有什么关联。假如可以找到一个惯性系，在其中观察这两个质点都是静止的，那么这个惯性系就称为这**两个质点的**“**固有系**”。

注意：两个质点的固有系不一定存在。

有了固有系的概念我们就可以进而定义固有时间、长度与固有长度了：

(1) 固有时间

在两个事件的固有系中测得的这两个事件的时刻差叫做这两个事件之间的“**固有时间**”。

例如，一个钟表的示数差表示的就是这个钟表经历的固有时间。

(2) 长度与固有长度

在某惯性系中测得的两个质点运动速度相同，则同一时刻它们之间位置差的绝对值叫做此时刻此参考系中的这两个质点之间的“**长度”**。

在两个质点的固有系中测得的这两个质点的位置差的绝对值叫做这两个质点之间的“**固有长度”**。

例如，一把尺子的刻度差表示的就是尺子上两点间的固有长度。

2．钟慢效应

在某惯性系K中测得两个事件的时间间隔为Δt。假设这两个事件的固有系K'存在，且K'相对"K"具有速度v，测得这两个事件之间的固有时间为$\Delta t'$。此二者的关系为：

$$\Delta t=\frac{\Delta f'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

这种效应叫做“爱因斯坦延缓”，“时间膨胀”，或“钟慢效应”。

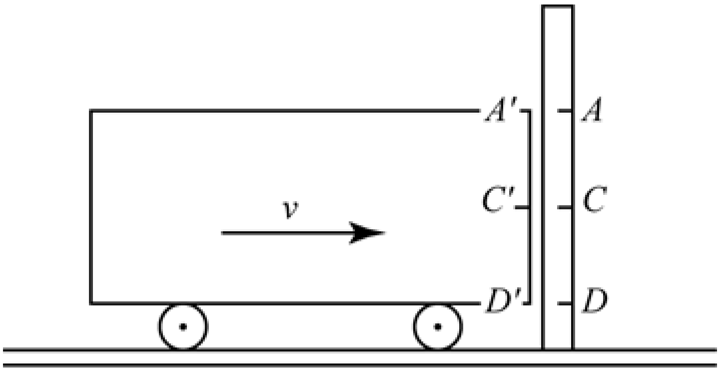
3．尺缩效应

假设存在惯性系K，相对K两质点在运动方向的长度存在，记为L。这两质点的固有系K'相对K具有速度v，测得这两个质点在运动方向的固有长度为L_0。此二者的关系为：

$$L=L_0 \sqrt{1-v^2/c^2}$$

这个结果说明运动物体（在K系中观察）在其运动方向上的长度比固有长度短。这种效应叫做“洛伦兹收缩”，或“尺缩效应”。

说明：尺缩效应只发生在物体运动的方向上。在与运动垂直的方向上，物体的长度看起来没有变化。



2. 补充材料

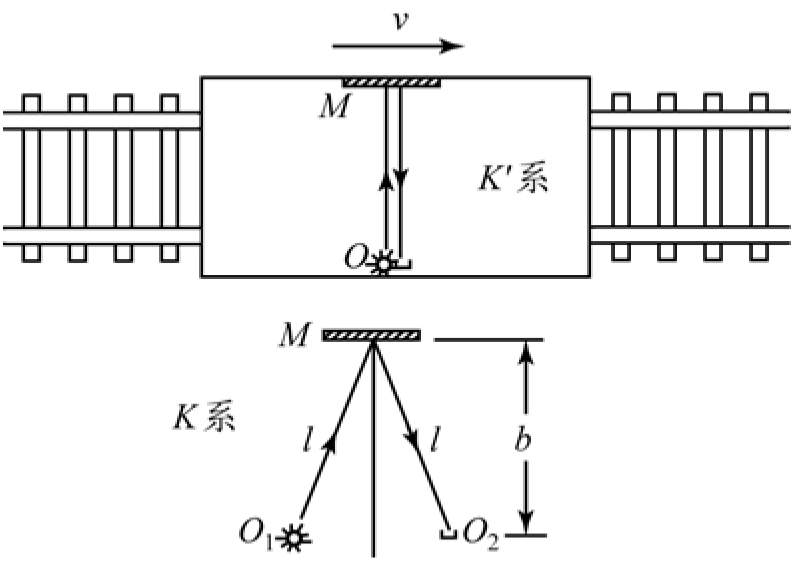
证明钟慢效应

假定列车（K'系）以匀速v相对于路基行驶，车厢里一边装有光源，紧挨着它有一标准钟。正对面放置一面反射镜M，可使横向发射的光脉冲原路返回。设车厢的宽度为b，则在光脉冲来回往返过程中，车上的钟走过的时间为$\Delta t' = 2b/c$。

从路基（K系）的观点看，由于列车在行进，光线走的是锯齿形路径，光线“来回”一次的时间为：$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{b^2 + (\frac{v\Delta t}{2})^2}$，解得$\Delta t = \frac{2b}{\sqrt{c^2 - v^2}}$。

注意，两参考系中车厢的宽度b是一样的。由两式消去b，得Δt和$\Delta t'$之间的关系：$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

。



证明尺缩效应

为了在相对静止的参考系K'（固有系）内测量一直杆的长度，可在直杆的一端加一脉冲激光器和一接收器，另一端设一反射镜，如图所示。精密测得光束往返的时间间隔$\Delta t'$后，即可得知直杆的长度

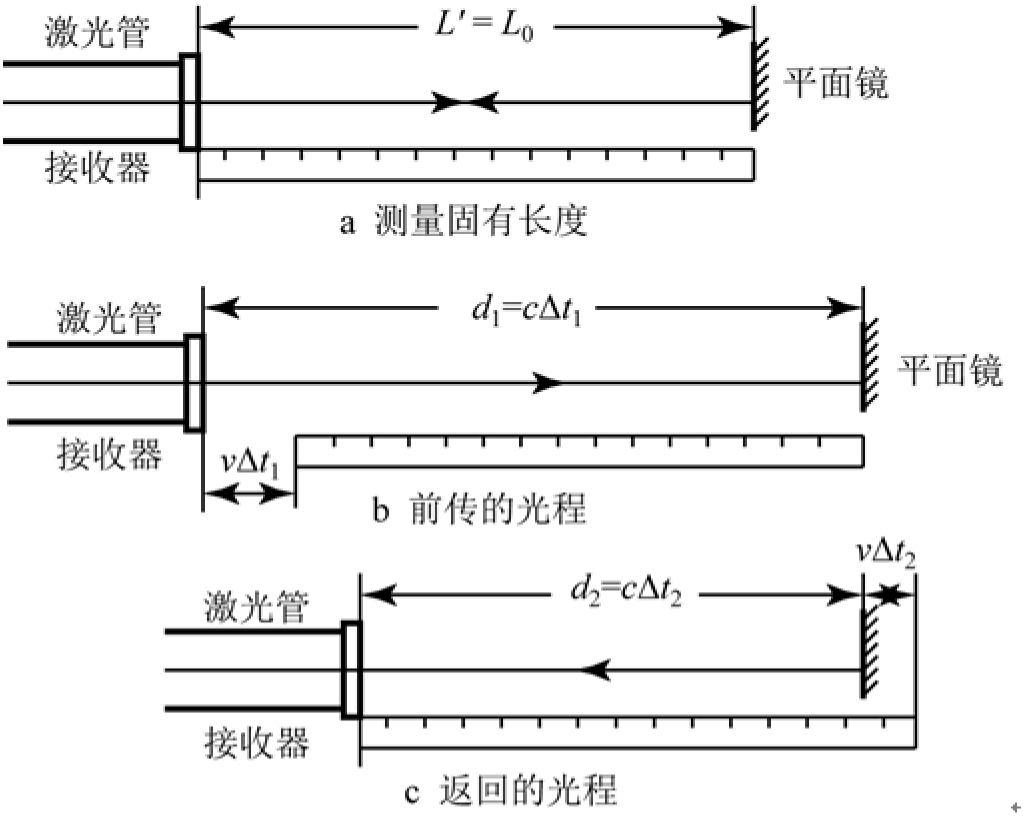
$L' = L_0 = c\Delta t'/2$。

根据公式$\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，从$K$系观测上述测量过程的时间间隔$\Delta t$与在$K'$系观测的时间间隔$\Delta t'$是可比的，式中$v$为直杆在$K$系中的速度。下面我们就来看，此测量过程在$K$系里是怎样表现的，并从中找到$\Delta t$和$L$的关系。

在K系中观测，光束往返的路径长度d_1和d_2是不等的，所需的时间Δt_1和Δt_2也不相等。设直杆以速度v沿自身长度的方向运动，它在时间间隔Δt_1内走过距离$v\Delta t_1$，故$d_1 = L + v\Delta t_1$，且$\Delta t_1 = d_1/c$，联立可得：$\Delta t_1 = \dfrac{L}{c-v}$；同理有：$d_2 = L - v\Delta t_2$，且$\Delta t_2 = d_2/c$，联立可得：$\Delta t_2 = \dfrac{L}{c+v}$。

因此，$\Delta t_1 + \Delta t_2 = \dfrac{L}{c-v} + \dfrac{L}{c+v} = \dfrac{2L/c}{1-v^2/c^2}$。由于$\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，带入$\Delta t$、$\Delta t'$可得：

$L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2}$



a 测量固有长度

b 前传的光程

c 返回的光程

3. 例题精讲

2 如果要实现“天上一日，地下一年”，按相对论钟慢效应计算，天上的“神仙”相对地面运动的速度是多少？

答案 $v = 0.999996c$

解析 天上的时间是“固有时”，记为$\Delta t' = 1d$．这个过程在地下看用时$\Delta t = 365d$．二者的关系为

$\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，其中$v$就是天上神仙相对地面的运动速度：

$v = \sqrt{1-\left(\dfrac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2}$，解得$v = 0.999996c$．

标注 科学思维 > 科学推理

牛顿力学的局限性和相对论初步 > 相对论初步 > 狭义相对论

牛顿力学的局限性和相对论初步 > 相对论初步 > 钟慢效应

3 运动员沿直跑道匀速奔跑，速度大小0.8c．跑道的起点和终点各有一位计时员，他们的表已经对准过了．运动员起跑的一瞬和起点的计时员一起看表，二人的表都显示0．等他冲过终点的瞬间又与终点的计时员一起看表．假如终点计时员的表显示为1秒，此刻运动员的表示数多少？

答案 0.6s

解析 以地面为参照系，起点和终点的计时员的表是对准的，可知从地面系观察运动员跑全程用时$\Delta t = 1\mathrm{s}$．运动员参照系是这个问题的固有系，按照钟慢效应公式运动员的表显示这一过程用时$\Delta t'$（$\Delta t'$为固有时），则$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-v^2/c^2} = 0.6\mathrm{s}$．过起点时运动员的表示数为0，所以到终点时运动员的表示数为0.6s．

标注 近代物理 > 狭义相对论 > 尺缩、钟慢

4 现有一个π介子，假设寿命（从产生到发生衰变的时间）为τ．它在距地面H处产生，从一产生起就以$0.8c$向地面飞来．已知$H > 0.8c\tau$．从地面上观察：请问这个π介子能否抵达地面？如果可能的话，抵达地面的条件是什么？

答案 只要$H \leqslant 1.33c\tau$，π介子能达到地面

解析 方法一：“π介子的寿命为τ”是以π介子自身为参照系观察到的，是固有时．当π介子对地以$0.8c$运动时，在地面上观察π介子的寿命为$\dfrac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1.67\tau > \tau$．所以在地面上观察$\pi$介子最远能运动的距离为$0.8c \div 1.67\tau = 1.33\tau c$．所以只要$H \leqslant 1.33c\tau$，$\pi$介子就能达到地面．

故答案为：所以只要$H\leqslant 1.33c\tau$，π介子能达到地面．

方法二：以π介子自身为参考系，其寿命为τ．地面以$0.8c$向π介子飞来，地面到π介子的初始距离$H'=H\sqrt{1-v^2/c^2}=0.6H$．所以$\pi$介子到达地面的条件为：$\tau\geqslant\dfrac{0.6H}{0.8c}$，即$H\leqslant 1.33c\tau$．

故答案为：$H\leqslant 1.33c\tau$．

标注　近代物理 > 狭义相对论 > 尺缩、钟慢

5 三体星系人从距离地球4.2光年的半人马星α出发，准备来毁灭人类．他们的速度达到了$0.01c$，那么：

(1) 在人类看来，他们多久到达地球？

(2) 他们自己觉得经过了多少时间？

(3) 人类是否有希望在这个时间里开发出比他们先进的科技？

答案　(1) 420年

(2) 419.979年

(3) 未来的事情现在不清楚

解析　(1) 距离4.2光年是在地面系中测得的，三体星人的速度0.01c也是相对地面的．所以在人类看来$\Delta t=\dfrac{4.2}{0.01c}=420$年．

(2) 三体星人看来时$\Delta t'$是固有时，$\Delta t'=\Delta t\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}=419.979$年．

(3) 略

标注　牛顿力学的局限性和相对论初步 > 相对论初步 > 狭义相对论

科学思维 > 科学推理

牛顿力学的局限性和相对论初步 > 相对论初步 > 钟慢效应

6 一枚竖直向上发射的火箭假设它本身的高度为10m，当火箭以相对地面$0.8c$向上运动的时候，它的长度在地面上看起来是多少？

答案　6m

解析 火箭本身的高度是固有长度．

在地面上看其长度为$10\sqrt{1-v^2/c^2}=6\mathrm{m}$．

故答案为：$6\mathrm{m}$．

标注 近代物理 > 狭义相对论 > 尺缩、钟慢

7 两个人，手里各拿一把尺子，静止长度都是L，尺子都水平方向放置．A静止在地面上，B匀速向右以速度$0.8c$水平运动．

(1) 那么B觉得A的运动状态是什么．

(2) 那么B看到A手中的尺子的长度是多少．

(3) 那么A看到B手中的尺子的长度是多少．

(4) 如果二人把尺子竖直放置，那么他们看到的对方手中的尺子的长度各是多少．

答案 (1) $0.8c$向左．

(2) $0.6L$．

(3) $0.6L$．

(4) 都是L．

解析 (1) B觉得A向左以速度$0.8c$水平运动．

故答案为：$0.8c$向左．

(2) 按照尺缩效应公式，B看到A手中的尺子的长度为$L\sqrt{1-v^2/c^2}=0.6L$．

故答案为：$0.6L$．

(3) 按照尺缩效应公式，A看到B手中的尺子的长度为$L\sqrt{1-v^2/c^2}=0.6L$．

故答案为：$0.6L$．

(4) 尺子与运动方向垂直时长度不随参照系变化，还是L．

故答案为：都是L．

标注 近代物理 > 狭义相对论 > 尺缩、钟慢

近代物理 > 狭义相对论 > 爱因斯坦假设

8 一个圆柱体，横截面积为S，长度为L，均匀分布电荷，电荷密度为ρ．那么一个人沿着圆柱的对称轴匀速v运动，他看到的电荷密度是多少？

答案 $\dfrac{\rho}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

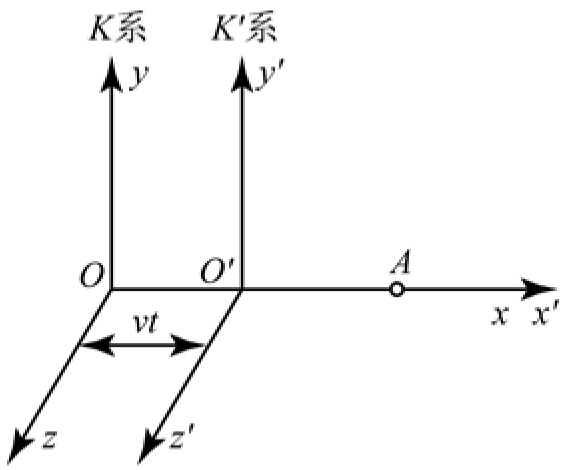
解析 总电荷量是不随参照系选择而改变的，$Q=\rho LS$．在人看来柱体沿轴线以速度v后退．柱体的横截面与其速度垂直，面积还是S．柱体的长度则变为$L\sqrt{1-v^2/c^2}$．在人看来电荷密度变为$\rho'=\dfrac{Q}{L\sqrt{1-v^2/c^2}S}=\dfrac{\rho}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$．

标注 近代物理 > 狭义相对论 > 尺缩、钟慢

三、洛伦兹变换

1.知识点睛

为了更进一步的研究“光速不变原理”的影响，我们仔细考察同一事件在不同参考系中测得的位置与时刻的数值关系。假设这样一个情景：有惯性系K和K'，在其上分别建立对应轴平行的直角坐标系。K'相对K沿着xx'方向以速度v匀速运动。并规定两个坐标系原点重合的时刻$t=t'=0$，如图所示。

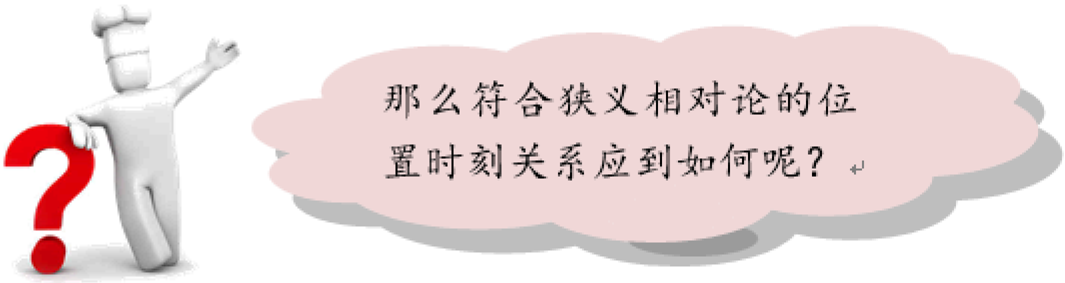


1．伽利略变换

在旧的物理学观念里时间与观察者无关，这种观点下K系和K'系测得时刻、位置关系称为“伽利略变换”：

位置、时刻关系为：$\begin{cases} t'=t \\ x'=x-vt \\ y'=y \\ z'=z \end{cases}$ 与 $\begin{cases} t=t' \\ x=x'+vt' \\ y=y' \\ z=z' \end{cases}$

速度关系为：$\begin{cases} v_x'=v_x-v \\ v_y'=v_y \\ v_z'=v_z \end{cases}$ 与 $\begin{cases} v_x=v_x'+v \\ v_y=v_y' \\ v_z=v_z' \end{cases}$



2．洛伦兹变换

伦兹变换：$$\begin{cases} x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma(x-\beta ct) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\dfrac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma\left(t-\dfrac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

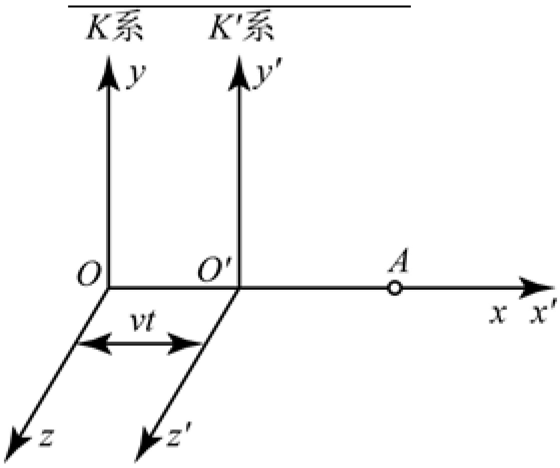
反变换：$$\begin{cases} x=\dfrac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma(x'+\beta ct') \\ y=y' \\ z=z' \\ t=\dfrac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma\left(t'+\dfrac{\beta}{c}x'\right) \end{cases}$$

上式中引入了简略记号：$\beta=\dfrac{v}{c}\leqslant 1$，$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\geqslant 1$，$\gamma^2(1-\beta^2)=1$。

说明：我们可以清楚地看到在相对论中参照系K'中某事件发生的时刻值不仅与另一参考系K中观察到的时刻有关，还与该事件在K系中的位置有关。时间、空间完全纠缠在了一起，在相对论中我们认为事件是在“时空”这一整体中发生的。

2. 补充材料

洛伦兹变换的推导



考虑某个事件A：在K系中观察它的坐标$x=\overline{OA}=\overline{OO'}+\overline{O'A}$。其中$\overline{OO'}=vt$；而$\overline{O'A}$为在$K$系中观察到的$O'$与$A$的距离，这个距离在$K'$系中为$x'$（对$\overline{O'A}$而言$K'$系是固有系），由于“尺缩效应”在$K$系中应有$\overline{O'A}=x'\sqrt{1-v^2/c^2}$。所以$x=vt+x'\sqrt{1-v^2/c^2}$，解得$x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$。如果$A$不在$x$、$x'$轴上，由于和相对运动垂直的方向上不发生“尺缩效应”，显然有$y'=y$，$z'=z$。

由于“相对性原理”，上述分析也适用于从K'系到K系的反变换式。我们将变换式中带撇的量和不带撇的量对应互换（即在K'系中观察），并将参照系相对速度v换成$-v$（K系相对于K'系的速度为$-v$），就得到了位置的反变换式：$x=\dfrac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$。

联立变换式与反变换式有$\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+vt'=x\sqrt{1-v^2/c^2}$，解得时刻的变换式为：$t'=\dfrac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$。同样交换撇号并将$v$换成$-v$，又得到时刻的反变换式：$t=\dfrac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$。

3. 例题精讲

9 一列火车以速度$0.6c$匀速通过站台．车上的乘客看到：站台上有一名警察，在和自己擦肩而过的时候向车行方向开枪射击，子弹出膛后相对火车不动，$1\mathrm{s}$后击中站台上的疑犯．我们在火车和站台上分别建立直角坐标系．以车行方向为x与x'的正方向，以观察者和警察为原点，并以二人擦肩

的时刻为两个参照系的计时起点．

(1) 以列车为参照系，写出开枪事件与击中事件发生的位置和时刻．

(2) 以站台为参照系，利用洛伦兹变换计算出开枪事件与击中事件发生的位置和时刻．

(3) 子弹飞行的时间在两个参照系里分别是多少？那个值是固有值？两个值得关系如何．

(4) 开枪时刻，警察和嫌疑犯之间的距离在两个参照系里分别是多少？哪个值是固有值？两个值的关系如何．

答案 (1) 注意到子弹的速度和火车相同，以火车为参照系子弹是不动的，即两个事件发生的位置不变．依题意有：

开枪事件：$x_{开}=0$，$t_{开}=0$；

击中事件：$x_{中}=0$，$t_{中}=1$．

(2) 以站台为新参照系，新系相对旧系沿x x'的方向以$-0.6c$运动(运动方向与轴正向相反)．

代入洛伦兹变换有：$v=-0.6c$，$\beta=-0.6$，$\gamma=1.25$．

开枪事件：${x_{开}}'=\gamma\left(x_{开}-\beta ct_{开}\right)=0$，${t_{开}}'=\gamma\left(t_{开}-\dfrac{\beta}{c}x_{开}\right)=0;$

击中事件：${x_{中}}'=\gamma\left(x_{中}-\beta ct_{中}\right)=0.75c$，${t_{中}}'=\gamma\left(t_{中}-\dfrac{\beta}{c}x_{中}\right)=1.25$．

(3) 子弹飞行的时间应该由某个考系中“开枪”、“击中”两个事件的时刻差来计算．

在火车系中观察：$t_{开}=0$，$t_{中}=1$．子弹飞行时间为$\Delta t_{车}=1$．

在站台系中观察：${t_{开}}'=0$，${t_{中}}'=1.25$．子弹飞行时间为$\Delta t_{台}=1.25$．

火车系中子弹不动，可知火车系中的测量值为固有值．两者的关系为：

$\Delta t_{台}=\dfrac{\Delta t_{车}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$符合钟慢效应．

(4) 警察与嫌疑犯的距离应该由某参照系中相同时刻两者的位置差来计算．

在火车系中观察：

“开枪”的瞬间警察位置为0，此刻的嫌犯还需1s才能到达观察者处，所以“开枪”的瞬间嫌疑犯的位置为$0.6c$．所以二人间距$L_{车}=0.6c$

在站台系中观察：

警察与嫌疑犯均静止“开枪”的瞬间警察的位置为0，嫌疑犯在“击中”的瞬间位置为$0.75c$，又因为他不动，可知“开枪”的瞬间嫌疑犯也在$0.75c$处．所以二人间距$L_{台}=0.75c$．

站台系中警察与嫌疑犯不动，可知站台系中的测量值为固有值．两者的关系为：

$L_{车}=L_{台}\sqrt{1-v^2/c^2}$，符合尺缩效应．

解析 (1) 略

(2) 略

(3) 略

(4) 略

标注 近代物理 > 狭义相对论 > 洛伦兹变换 > 速度变换

近代物理 > 狭义相对论 > 尺缩、钟慢

10 固定在地面上的两激光器A和B相距为l_0，有大木板平行贴近地面以速度$v=0.6c$相对地面沿AB连线方向高速运动．地面参考系某时刻，两激光器同时发射激光在运动木板上形成点状灼痕A'和B'．此后，让大木板缓慢减速至静止后，测量两灼痕的间距为$l=$ ______ l_0．随原木板高速运动的惯性参考系的观察者认为，两束激光不是同时发出的，应存在发射时间差$\Delta t'=$ ______ $\dfrac{l_0}{c}$．

答案 1．1.25

2．$\dfrac{3}{4}$

解析 以地面为参考系，灼痕间距为l_0．由于尺缩效应，木板上的灼痕间距（相对木板静止时观察为l）看起来缩短了，关系为：$l_0=l\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}=0.8l$，解得$l=1.25l_0$．

假设木板沿$A\rightarrow B$运动，在木板参考系的观察者在A'点观察，激光在A'点灼上痕迹的时刻为$t_1{}'=0$，则根据洛伦兹变换可得，该观察者观察B'灼上痕迹的时刻为：

$$t_2{}'=\frac{0-\dfrac{l_0\times 0.6c}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{0.6c}{c}\right)^2}}=-\frac{3}{4}\frac{l_0}{c}$$，因此$\Delta t'=t_1{}'-t_2{}'=\frac{3}{4}\frac{l_0}{c}$．

标注 原子与原子核

教师版补充：下面补充两道题，都是利用洛伦兹变换解释钟慢效应里到底是哪个钟慢了，以及尺缩效应中到底是哪个尺缩了的问题。由于解题过程比较复杂，列在这里供各位老师选用。

11 一列火车以速度$0.6c$匀速通过站台不停车，站台两端分别放置了校准的钟A、B，火车车头也有一只钟，车头进站的瞬间车头的钟与A钟都显示0，等车头出站时与站台另一端的B钟比较，由于钟慢效应车上的钟走得较慢．

(1) 求两钟的示数比是多少．

(2) 在车上的人看来第二次比较的结果也是车上的钟示数小，而在他看来应该是站台在运动，由于钟慢效应，应该是站台上的钟走得慢．这一矛盾如何解释．

提示：考虑A、B是如何校准的？这个过程在车上人看来如何．

答案 (1) 0.8

(2) 见解析

解析 (1) 对火车运动这个问题，火车本身是固有系，其上的钟表显示的是固有时$\Delta t'$，它与站台上的B钟显示时间为Δt．二者的比例为$\frac{\Delta t'}{\Delta t}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=0.8$．

(2) 在火车参照系中看来，A、B两个钟并没有对准，即车上的观察者认为车头与A钟相遇时B钟并不是都指示0．按照光信号对钟的方法，车上的观察者认为B钟超前，即车头与A钟相遇时B钟已显示一个正时刻t_B．所以虽然车头与B钟相遇时B钟的示数大，但是在车上的观察者看来B钟走过的时间却比车头的钟短．可以算出比例仍符合钟慢效应．

以车头和站台A点为各自坐标原点，以车行方向为正，并以车头经过A点为各自计时起点．以火车为参考系：车头与A点相遇时，B所处的事件表示为$x_B{}'=\frac{L_0}{\gamma}$，$t_B{}'=0$；按照洛伦兹变换公式推出在地面系中$B$处钟表的示数$t_B=\gamma\left(t_B{}'+\frac{\beta}{c}x_B{}'\right)=\frac{\beta}{c}L_0$．其余各数按尺缩、钟慢公式填好即可．

车头与A相遇	位置坐标	$x_A=0$	$x_B=L_0$	$x=0$
	钟的示数	$t_A=0$	$t_B=0$	$t'=0$
车头与B相遇	位置坐标	$x_A=0$	$x_B=L_0$	$x=L_0$
	钟的示数	$t_A=\frac{L_0}{v}$	$t_B=\frac{L_0}{v}$	$t'=\frac{1}{\gamma}\frac{L_0}{v}$
车上、地上时间比		$\frac{1}{\gamma}\frac{L_0}{v}:\frac{L_0}{v}=\frac{1}{\gamma}=0.8$		
火车系K'		A	B	车头
车头与A相遇	位置坐标	$x_A{}'=0$	$x_B{}'=\frac{L_0}{\gamma}$	$x'=0$
	钟的示数	$t_A=0$	$t_B=\frac{\beta}{c}L_0$	$t'=0$
车头与B相遇	位置坐标	$x_A{}'=-\frac{L_0}{\gamma}$	$x_B{}'=0$	$x'=0$
	钟的示数	$t_A=\frac{1}{\gamma^2}\frac{L_0}{v}$	$t_B=\frac{\beta}{c}L_0+\frac{1}{\gamma^2}\frac{L_0}{v}=\frac{L_0}{v}$	$t'=\frac{1}{\gamma}\frac{L_0}{v}$
地上、车上时间比		$\frac{1}{\gamma^2}\frac{L_0}{v}:\frac{1}{\gamma}\frac{L_0}{v}=\frac{1}{\gamma}=0.8$		

标注　近代物理 > 狭义相对论 > 洛伦兹变换 > 速度变换

近代物理 > 狭义相对论 > 尺缩、钟慢

4. 知识点睛

12 一列火车以速度v匀速通过一条隧道．已知隧道长$L_{0隧道}$，列车长$L_{0列车}$，并且$L_{0隧道}<L_{0列车}$．当车头运行到隧道出口的一瞬，隧道两端同时发生了落雷，而车头车尾都没有被雷击中．

(1) 求满足此条件的最小车速$v_{\min}$．

(2) 在车上的人看来列车和隧道那个长？如果列车恰以（1）求出的最小速度运行，车上的人如何解释列车没有被雷击中．

答案　(1) $v_{\min}=c\sqrt{1-\frac{{L_{0隧道}}^2}{{L_{0列车}}^2}}$

(2) ①车上的人看来列车更长，列车长度$L_{0列车}$，隧道长度$\frac{1}{\beta}L_{0隧道} < L_{0隧道} < L_{0列车}$．

②但在地面系看来不同地同时发生的事情，在列车系观察者来看是不同地不同时发生的，即出口处先落雷，入口处后落雷．列车以最小速度运行时，车上的人认为隧道在运动，由洛伦兹变幻，出口落雷时间$t_A{}' = 0$，地点$x_A{}' = 0$，为车头；入口落雷时$t_B{}' = \gamma\frac{\beta}{c}L_{0隧道}$，地点$x_B{}' = -\gamma L_{0隧道}$，恰为车尾，故列车没有被雷击中．

解析

(1) 在地面系观察，列车的长度将小于其固有长度，即$L_{列车} = L_{0列车}\sqrt{1 - v^2/c^2}$．为了躲开在地面系离同时发生的落雷，只需$L_{0隧道} = L_{列车}$，即$v_{\min} = c\sqrt{1 - \frac{L_{0隧道}{}^2}{L_{0列车}{}^2}}$．

故答案为：$v_{\min} = c\sqrt{1 - \frac{L_{0隧道}{}^2}{L_{0列车}{}^2}}$．

(2) 车上的人测得的列车长度是其固有长度$L_{0列车}$，他测得的隧道长度为$L_{隧道} = L_{0隧道}\sqrt{1 - v^2/c^2} < L_{0列车}$．在车上的人看来隧道两端的落雷不是同时发生的．列车恰以最小速度$v_{\min}$运行．将$L_{0隧道}$简记为L_0，则$L_{0列车} = \gamma L_0$．以车头和隧道出口为各自坐标原点，以车行方向为正，并以车头经过隧道出口为各自计时起点．在地面系观察两次落雷发生在：$x_出 = 0$，$t_出 = 0$；$x_入 = -L_0, t_入 = 0$．变换到火车系为：

$x_出{}' = \gamma(x_出 - \beta c t_出) = 0$，$t_出{}' = \gamma(t_出 - \frac{\beta}{c}x_出) = 0$；$x_入{}' = \gamma(x_入 - \beta c t_入) = -\gamma L_0$，

$t_入{}' = \gamma(t_入 - \frac{\beta}{c}x_入) = \gamma\frac{\beta}{c}L_0$．

地面系		入口	出口	车尾	车头
出口落雷	位置	$-L_0$	0	$-L_0$	0
	时刻	0	0	0	0
入口落雷	位置	$-L_0$	0	$-L_0$	0
	时刻	0	0	0	0
结论	两次落雷同时发生．车头、车尾恰好同时避过．				
火车系		入口	出口	车尾	车头
出口落雷	位置	$-\frac{L_0}{\gamma}$	0	$-\gamma L_0$	0
	时刻	0	0	0	0
入口落雷	位置	$-\gamma L_0$	$-\gamma\frac{v^2}{c^2}L_0$	$-\gamma L_0$	0
	时刻	$\gamma\frac{\beta}{c}L_0$	$\gamma\frac{\beta}{c}L_0$	$\gamma\frac{\beta}{c}L_0$	$\gamma\frac{\beta}{c}L_0$

结论	两次落雷不同时发生．车头先避过（$x'=0$，$t'=0$）；车尾后避过（$x'=-\gamma L_0$，$t'=\gamma\frac{\beta}{c}L_0$）

故答案为：

①车上的人看来列车更长，列车长度$L_{0列车}$，隧道长度$\frac{1}{\beta}L_{0隧道}<L_{0隧道}<L_{0列车}$．

②但在地面系看来不同地同时发生的事情，在列车系观察者来看是不同地不同时发生的，即出口处先落雷，入口处后落雷．列车以最小速度运行时，车上的人认为隧道在运动，由洛伦兹变幻，出口落雷时间$t_A'=0$，地点$x_A'=0$，为车头；入口落雷时$t_B'=\gamma\frac{\beta}{c}L_{0隧道}$，地点$x_B'=-\gamma L_{0隧道}$，恰为车尾，故列车没有被雷击中．

标注　近代物理 > 狭义相对论 > 洛伦兹变换 > 速度变换

近代物理 > 狭义相对论 > 尺缩、钟慢

3．相对论速度合成

$$\text{速度合成：}\begin{cases} u_x'=\dfrac{u_x-v}{1-u_xv/c^2}=\dfrac{u_x-\beta c}{1-u_x\beta/c} \\ u_y'=\dfrac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_xv/c^2}=\dfrac{u_y}{\gamma(1-u_x\beta/c)} \\ u_z'=\dfrac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_xv/c^2}=\dfrac{u_z}{\gamma(1-u_x\beta/c)} \end{cases}$$

$$\text{速度合成的反变换式：}\begin{cases} u_x=\dfrac{u_x'+v}{1+u_x'v/c^2}=\dfrac{u_x'+\beta c}{1+u_x'\beta/c} \\ u_y=\dfrac{u_y'\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+u_x'v/c^2}=\dfrac{u_y'}{\gamma\left(1+u_x'\beta/c\right)} \\ u_z=\dfrac{u_z'\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+u_x'v/c^2}=\dfrac{u_z'}{\gamma\left(1+u_x'\beta/c\right)} \end{cases}$$

说明：相对论速度合成公式最大的特点就是它包含着“光速不变原理”。可以证明光速在任何惯性系中观察都等于c。任何小于光速的速度在另外的惯性系中观察仍然小于c。

5. 补充材料

相对论速度合成的推导

研究不同参考系中观察到的速度关系，要先注意到同一过程在不同参照系中经历的时间是不同的，例如：在K'系中的x方向分速度为$u_x=\dfrac{dx}{dt}$，而K'系中的x'方向分速度为$u_x'=\dfrac{dx'}{dt'}$。

我们对洛伦兹变换的公式求微分，注意到由于K'系相对K系的速度v是恒定，所以β与γ都是常数，得到：$dx'=\gamma(\dfrac{dx}{dt}-\beta c)dt$，$dy'=dy$，$dz'=dz$，$dt'=\gamma(1-\dfrac{\beta}{c}\dfrac{dx}{dt})dt$。将这些结果组合起来就得到了相对论的速度合成公式。同样的交换撇号，并把v换为$-v$，就得到了速度合成的反变换式。

6. 例题精讲

13 以对地速度$0.9c$运动的飞船上，沿飞船运动方向以相对速度$0.9c$扔出去一个小球，那么这个小球相对于地面速度是多少．

答案 $0.99c$．

解析 略

标注 近代物理 > 狭义相对论 > 洛伦兹变换 > 速度变换

14 一列火车以速度$0.6c$匀速通过站台．列车上发生了凶杀事件！车辆两边各有一名凶手．车上监控显示二人同时开枪，子弹相对车厢的速度为$0.8c$，$1\mathrm{s}$后子弹同时击中了车厢正中的受害者．受害者中枪的瞬间与站台上的目击者擦肩而过．我们在火车和站台上分别建立直角坐标系．以车行方向为x和x'的正方向，分别以受害者和目击者为原点，并以二人擦肩的时刻为两个参照系的计时起点．

(1) 以列车为参照系，写出车头的凶手开枪、车尾的凶手开枪和凶手中枪发生的位置和时刻．

(2) 以站台为参照系，利用洛伦兹变换计算出车头的凶手开枪、车尾的凶手开枪和凶手中枪发生的位置和时刻．

(3) 按照上一问的结果计算站台参照系中两发子弹的速度．并与相对论速度合成公式计算的结果比较．

答案 (1) 击中事件：$x_{中}=0$，$t_{中}=0$．

车头开枪事件：$x_{开头}=0.8c$，$t_{开头}=-1$；

车尾开枪事件：$x_{开尾}=-0.8c$，$t_{开尾}=-1$．

(2) 车头开枪事件：$x_{开头}'=(x_{开头}-\beta c t_{开头})=0.25c$，$t_{开头}'=\gamma(t_{开头}-\dfrac{\beta}{c}x_{开头})=-0.65$；

车尾开枪事件：$x_{开尾}'=\gamma(x_{开尾}-\beta c t_{开尾})=-1.75c$，$t_{开尾}'=\gamma\left(t_{开尾}-\dfrac{\beta}{c}x_{开尾}\right)=-1.85$．

(3) 两者结果相同．

解析 (1) 以列车为参照：

击中事件：$x_{中}=0$，$t_{中}=0$．

车头开枪事件：$x_{开头}=0.8c$，$t_{开头}=-1$；

车尾开枪事件：$x_{开尾}=-0.8c$，$t_{开尾}=-1$．

(2) 以站台为新参照系，新系相对旧系沿x x'的方向以$-0.6c$运动（运动方向与轴正向相反）．

代入洛伦兹变换有：$v=-0.6c$，$\beta=-0.6$，$\gamma=1.25$．

击中事件：$x_{中}'=\gamma(x_{中}-\beta c t_{中})=0$，$t_{中}'=\gamma\left(t_{中}-\dfrac{\beta}{c}x_{中}\right)=0$；

车头开枪事件：$x_{开头}'=(x_{开头}-\beta c t_{开头})=0.25c$，$t_{开头}'=\gamma(t_{开头}-\dfrac{\beta}{c}x_{开头})=-0.65$；

车尾开枪事件：$x_{开尾}'=\gamma(x_{开尾}-\beta c t_{开尾})=-1.75c$，$t_{开尾}'=\gamma\left(t_{开尾}-\dfrac{\beta}{c}x_{开尾}\right)=-1.85$．

(3) 以站台为参照系，子弹的速度分别为：

$$u_{头}'=\frac{0-0.25c}{0-(-0.65)}=-\frac{5}{13}c\approx-0.385c,$$
$$u_{尾}'=\frac{0-(-1.75c)}{0-(-1.885)}=\frac{35}{37}c\approx0.946c.$$

以列车为参照系：$u_{头}=-0.8c$，$u_{尾}=0.8c$按照相对论速度合成公式，站台系中的子弹速度应为：

$$u_{头}'=\frac{u_{头}-v}{1-u_{头}v/c^2}=\frac{(-0.8c)-(-0.6c)}{1-(-0.8c)(-0.6c)/c^2}=-\frac{5}{13}c\approx-0.385c,$$
$$u_{尾}'=\frac{u_{尾}-v}{1-v_{尾}v/c^2}=\frac{0.8c-(-0.6c)}{1-0.8c(-0.6c)/c^2}=\frac{35}{37}c\approx0.946c.$$

两者结果相同．

标注 近代物理 > 狭义相对论 > 洛伦兹变换 > 速度变换

15 一艘飞船以速度$0.6c$相对于地面运动．飞船上发出一束光．在飞船上看其速度方向和飞船运动方向（x方向）夹角为θ．

(1) 请问从飞船系观察，y方向的速度v_y是多少？x方向的速度v_x是多少？光速是多少．

(2) 请问从地面系观察，y方向的速度u_y是多少？x方向的速度u_x是多少？光速是多少．

答案 (1) $v_y = c\sin\theta$，$v_x = c\cos\theta$，c

(2) $u_y = \dfrac{0.8\sin\theta}{1+0.6\cos\theta}c$，$u_x = \dfrac{\cos\theta + 0.6}{1+0.6\cos\theta}c$，$c$

解析 (1) $v_y = c\sin\theta$，$v_x = c\cos\theta$，$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = c$．

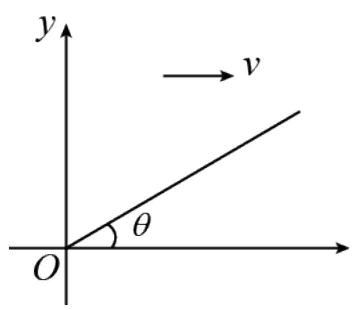
(2) 由相对论速度合成公式：

$$u_y = \frac{v_y\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{(0.6c)^2}{c^2}}{1+v_x\times 0.6c/c^2}}}{1+v_x\times 0.6c/c^2} = \frac{0.8\sin\theta}{1+0.6\cos\theta}c，u_x = \frac{v_x+0.6c}{1+v_x\times 0.6c/c^2} = \frac{\cos\theta+0.6}{1+0.6\cos\theta}c．$$

$$u = \sqrt{u_x^2+u_y^2} = \frac{\sqrt{(0.8\sin\theta)^2 + (\cos\theta+0.6)^2}}{1+0.6\cos\theta}c = c．$$

标注 近代物理 > 狭义相对论 > 洛伦兹变换 > 速度变换

16 如图所示，有一直木棒静止于地面系S中（用坐标Oxy表示），测得棒长为l_1，它与x轴夹角为$\theta_1 = 30^\circ$，现使木棒沿x轴正方向以高速v运动（S'系）．



(1) 则当在S系中的观察者测得棒与x轴夹角为$\theta_2 = 45^\circ$时，他测得的棒长l_2为多大？v又为多大？

(2) 若$t = 0$时棒的下端正好经过O点，此时刻刚好有一质点以速度v（相对棒）从O点出发沿棒爬动，求该质点的轨迹$y = y(x)$．

答案 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}l_1$，$\frac{\sqrt{6}}{3}c$

(2) $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}x$

解析 (1) 依题意，当棒高速运动时，S'系（固有系）的观察者观察到棒长为l_1，与x'轴夹角$\theta_1=30^\circ$．

地面系S的观察者观察到棒长为l_2，与x轴夹角为$\theta_2=45^\circ$．由于相对论相应，x方向有尺缩效应，y方向空间长度不变，则：

$l_1\sin 30^\circ=l_2\sin 45^\circ$，$(l_1\cos 30^\circ)\sqrt{1-(v/c)^2}=l_2\cos 45^\circ$，

联立解得：$l_2=\frac{\sqrt{2}}{2}l_1$；$v=\frac{\sqrt{6}}{3}c$．

(2) 依题意，在S'中质点的速度为：

$u_x{}'=v\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}v$，$u_y{}'=v\sin 30^\circ=\frac{1}{2}v$，

由相对论的速度变化公式可得质点在S系中的速度：

$$u_x=\frac{u_x{}'+v}{1+u_x{}'\,v/c^2}，u_y=\frac{u_y{}'\sqrt{1-(v/c)^2}}{1+u_x{}'\,v/c^2}，$$

S系中质点轨迹的参数方程为：

$x=u_xt$，$y=u_yt$，

消去参数t可得：

$$\frac{y}{x}=\frac{u_y}{u_x}=\frac{u_y{}'\sqrt{1-(v/c)^2}}{u_x{}'+v}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}，$$

即S系中质点的轨迹为$y=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}x$．

标注 原子与原子核

17 在实验室参考系，有一静止的光源与一静止的接收器，它们距离l，光源——接收器均浸在均匀无限的液体介质（静止折射率为n）中．试对下列三种情况计算发出信号到接收信号所经历的时间．

(1) 液体介质相对于光源——接收器装置静止．

(2) 液体沿着光源——接收器连线方向以极高的速度v流动．

(3) 液体垂直于光源——接收器连线方向以极高的速度v流动．

答案 (1) $\frac{l}{c/n}$

(2) $\dfrac{l}{c}\cdot\dfrac{nc+v}{nv+c}$

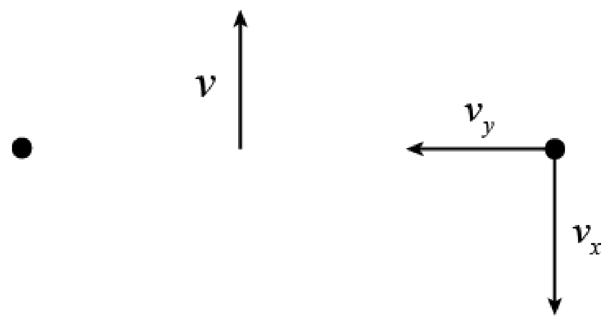
(3) $\dfrac{l}{c}\cdot\dfrac{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{n^2}-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$

解析 (1) 光在介质中传播时，相对介质的光速$v=\dfrac{c}{n}$，因此，$t=\dfrac{l}{c/n}$．

(2) 由洛伦兹速度变化公式，光相对于接收器的速度$v'=\dfrac{v+\dfrac{c}{n}}{1+\dfrac{v\cdot\dfrac{c}{n}}{c^2}}=c\dfrac{nv+c}{nc+v}$，

$t=\dfrac{l}{v'}=\dfrac{l}{c}\cdot\dfrac{nc+v}{nv+c}$．

(3) 如图所示光源和接收器水平放置．光信号在实验室参照系中的速度为$v_x{}'$、$v_y{}'$，显然$v_x{}'=0$．设光相对于介质的速度为v_x、v_y，并假设介质向$-x$方向运动，则实验室相对于介质的速度为$(v,0)$



根据洛伦兹变换有：$v_x{}'=\dfrac{v_x-v}{1-\dfrac{v_xv}{c^2}}=0$，$v_y{}'=\dfrac{v_y\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}{1-\dfrac{v_xv}{c^2}}$；且$v_x{}^2+v_y{}^2=\left(\dfrac{c}{n}\right)^2$，

$t=\dfrac{l}{v_y{}'}$．

联立求解得：$t=\dfrac{l}{c}\cdot\dfrac{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{n^2}-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$．

标注 光及其应用

四、相对论动力学

1. 知识点睛

了解了相对论运动学以后，我们将转向动力学的范畴。在相对论中质量、力、动量、能量应当如何定义呢？对新定义有三点要求：

(1) 和相对论时空观一致；

(2) 在物体速度远小于光速的情况下新定义应该和经典定义一致，就是说旧的动力学应该是相对论动力学的低速极限。

(3) 我们认为在相对论中"**质量守恒**"、"**能量守恒**"和"**动量守恒**"定律仍然成立。

1．质量与动量

相对论中质量及动量的表达式为：

$$\begin{cases} m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma m_0 \\ \vec{p}=m\vec{v}=\dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma m_0\vec{v} \end{cases}$$

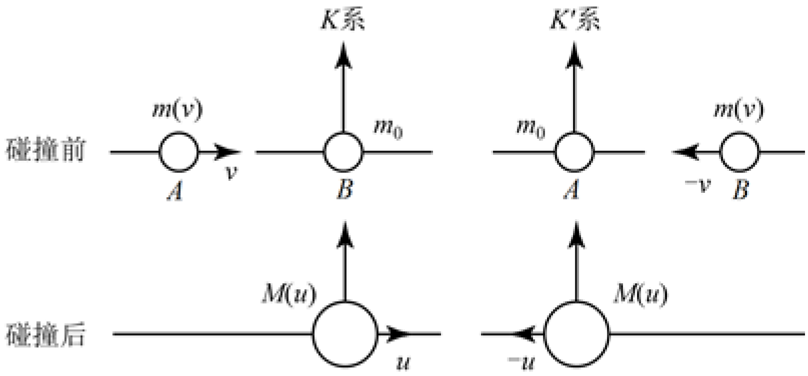
当$v\ll c$时$m\to m_0$，$\vec{p}\to m_0\vec{v}$。这里的m_0表示物体的"**静止质量**"，它是物体质量在低速时的极限。m_0可以在物体的固有系中测得。

2. 补充材料

相对论质量与动量表达式的推导

首先我们来定义动量。动量的方向应该与速度方向相同。因为若动量包含了与速度方向垂直的分量（即使这个分量在$v\ll c$时趋于0），那么这个分量的方向在垂直速度方向的平面内将如何选择呢？空间是各向同性的，我们无法选出一个特殊方向来安置这个分量，所以我们必须承认动量的方向与速度一致。这样一来我们定义动量为：$\vec{p}=m(v)\vec{v}$。这里的$m(v)$是动量除以速度的值，它是相对论中物体的"**质量**"。一般来说它可能和物体的运动情况有关。物体的运动有相对性，所以相对论中质量也具有相对性，在不同的惯性系中看来数值不同。由于空间各向同性，所以我们假定它是物体速度大小的函数。并且当$v\ll c$时$m(v)\to m_0$，m_0表示物体的"**静止质量**"，它是物体质量在低速时的极限。m_0可以在物体的固有系中测得。

为了找到物体动量的具体形式我们来考察一个碰撞的例子。



相同的粒子A和B发生完全非弹性碰撞，结合成一个复合粒子。在粒子B的固有惯性系K中观察到：A速度为v，质量为$m_A=m(v)$，B静止，质量为$m_B=m_0$，结合成的复合粒子速度为u，质量为$M(u)$。在粒子A的固有惯性系K'中观察到：A静止，质量为$m_A=m_0$，B速度为$-v$，质量为$m_B=m(v)$，复合粒子在K'中的速度为u'，根据对称性有$u'=-u$，所以质量仍为$M(u)$。惯性系K'相对于K以速度v运动。

根据前文假设，守恒律仍然成立，在K系中观察有：

$$质量守恒：m_0+m(v)=M(u)$$

$$动量守恒：m(v)v=M(u)u$$

联立推出$\dfrac{m(v)+m_0}{m(v)}=\dfrac{v}{u}$①。另一方面跟据速度合成公式，在$K'$中观察到的复合粒子速度应为$u'=\dfrac{u-v}{1-uv/c^2}$，据对称性有$u'=-u$，联立解得：$\dfrac{v}{u}=1\pm\sqrt{1-v^2/c^2}$。考虑到$m_0>0$，应有$M(u)>m(u)$，即$v>u$，舍去负号得$\dfrac{v}{u}=1+\sqrt{1-v^2/c^2}$②。联立①②推出质量及动量的完整表达式：$m(v)=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$与$\vec{p}=m(v)\vec{v}=\dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma m_0\vec{v}$

3. 知识点睛

2．能量

(1) 动能

相对论中物体的动能表示为：$E_g=(m-m_0)c^2$

其中m表示物体的质量，m_0表示物体的静止质量，c为光速。

(2) 静质能

物体的静止质量乘以c^2也是能量，在核反应等情况下这部分能量也是可以释放出来的。所以我们把m_0c^2称为物体的静质能。

(3) 总能量

在某参照系中观察到的一个物体的总能量为动能与静质能之和$E_{总}=E_K+m_0c^2$，即：

$$E_{总}=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma m_0c^2$$

这样一来在相对论动力学中物体的质量就和其总能量简单的成正比了。在相对论中“质量守恒”和“能量守恒”合二为一。

4.补充材料

相对论能量表达式的推导

相对论中对力的定义可以直接应用牛顿第二定律。由于速度改变时物体的质量也在变化，所以我们把牛二律写成：$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$。

物体在某参考系中的动能应定义为外力使物体由静止到运动状态所做的功。

$$\begin{aligned}E_k&=\int_0^l\vec{F}\cdot d\vec{s}=\int_0^l\frac{d(m\vec{v})}{dt}\cdot d\vec{s}=\int_0^l d(m\vec{v})\cdot\frac{d\vec{s}}{dt}\\&=\int_0^v d(m\vec{v})\cdot\vec{v}=\int_0^v\vec{v}\cdot d(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}})\\&=\frac{m_0\vec{v}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\bigg|_0^v-m_0\int_0^v\frac{\vec{v}\cdot d\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{m_0v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}\bigg|_0^v\\&=\frac{m_0v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}-m_0c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_0c^2\end{aligned}$$

即：

$$E_K=(m-m_0)c^2$$

可见在相对论的观点下物体的动能增加是由质量增加$\Delta m=m-m_0$引起的。在$v\ll c$的情况下，对动能表达式做泰勒展开，有：

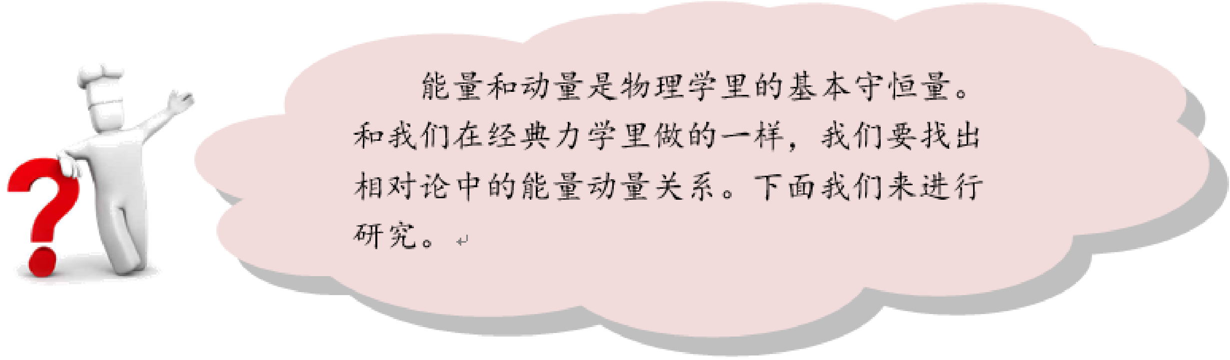
$$\begin{aligned}E_K&=m_0c^2[(1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}-1]\\&=m_0c^2[(1+\frac{v^2}{2c^2})+o(\frac{v^4}{c^4})-1]\\&=\frac{1}{2}m_0v^2[1+o(\frac{v^2}{c^2})]\end{aligned}$$

这说明在低速极限下动能表达为经典的$\frac{1}{2}m_0v^2$。

动能中出现的m_0c^2项有什么意义吗？为了搞清楚这个问题，我们假想一个大原子核分裂为若干个碎片。我们在大原子核的固有系里观察：大原子核静止质量为M_0，各个碎片质量分别记为$m_i(v_i)$，静止质量分别记为m_{i0}，碎片的速度分别记为$\vec{v_i}$，其中$i=1,2,3\ldots$。根据能量守恒，碎片获得的动能为：$E_K=\sum_i[m_i(v_i)-m_{i0}]c^2$。这些动能是从哪里来的？根据质量守恒$M_0=\sum_i m_i(v_i)$，有$E_K=M_0c^2-\sum_i m_{io}c^2$。我们把$M_0-\sum_i m_{i0}$称为“**质量亏损**”。这个例子说明物体的静止质量乘以c^2也是能量，在核反应等情况下这部分能量也是可以释放出来的。所以我们把m_0c^2称为物体的“**静质能**”。这样

我们就可以定义在某参照系中观察到的一个物体的总能量为动能与静质能之和：$E_{总}=E_K+m_0c^2$，即：

$$E=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma m_0c^2$$



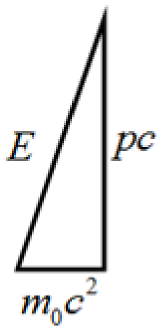
5. 知识点睛

3．能量、动量关系

相对论中的能量、动量关系为：

$$E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$$

它表明物体的总能量、静质能、动量大小与光速乘积这三者组成直角三角形，总能量相当于斜边。



对于没有静止质量的粒子（$m_0=0$），例如光子，它们的速度在任何惯性系中总是c。此时相对论能量动量关系变为：

$$E=pc\ (m_0=0)$$

6. 例题精讲

18 两个静止质量为m_0的粒子，以速度$0.6c$对撞．形成一个新的粒子．

(1) 这个粒子运动还是静止．

(2) 新粒子的质量是多少．

答案 (1) 静止

(2) $2.5m_0$

解析 (1) 根据动量守恒，碰撞后质心动量不变．$p = m \times 0.6c + m \times (-0.6c) = 0$．在题设参照系中总动量为0，所以观察到新粒子是静止的．

故答案为：静止．

(2) 根据质量守恒，新粒子静质量$M = 2m = 2\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{(0.6c)^2}{c^2}}} = 2.5m_0$．

故答案为：$2.5m_0$．

标注 牛顿力学的局限性和相对论初步 > 相对论初步 > 狭义相对论

牛顿力学的局限性和相对论初步 > 相对论初步 > 尺缩效应

19 两个静止质量为m_0的质子，以速度v对撞，产生了几乎静止的三个质子和一个反质子(和质子质量一样的)．请问速度v应该是多少．

答案 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$．

解析 根据质量守恒：$4m_0 = 2m(v) = 2\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$．解得$v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$．

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$．

标注 近代物理 > 狭义相对论 > 洛伦兹变换 > 速度变换

教师版补充：下面这道题可以作为上面的变式，老师自己补充

20 一个静止质量为m_0的质子，以速度v撞另一个静止的质子，产生了速度几乎相同的三个质子和一个反质子（和质子质量一样）．请问速度v应该是多少？

答案 $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}c$

解析 （1）设产生的粒子速度为u．根据动量守恒，能量也守恒：

$$\begin{cases}\dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}+0=\dfrac{4m_0 u}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\\ \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}+m_0c^2=\dfrac{4m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\end{cases}$$，解得$\begin{cases}v=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}c\\ u=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c\end{cases}$．

事实上上式计算很困难．

（2）变换参考系，使得碰前两个粒子速度在新系中等大反向．则新参考系相对旧系速度为u，在新系中两个粒子的速度变为：$\dfrac{v-u}{1-\dfrac{vu}{c^2}}$和$\dfrac{0-u}{1-\dfrac{0u}{c^2}}$．上题已经算出产生4个粒子需要碰前速率$\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$．于是有$\dfrac{v-u}{1-\dfrac{vu}{c^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$与$u=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$，解得$v=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}c$．

故答案为：$\dfrac{4\sqrt{3}}{7}c$．

标注　近代物理 > 狭义相对论 > 洛伦兹变换 > 速度变换

21 两个静止质量都为m_0的粒子A和B在同一直线上发生弹性正碰．

(1) 在某一惯性参照系中观察粒子A的初速度为v_0，粒子B的初速度为0，那么在此参照系中观察两个粒子碰后的速度分别是多少．

(2) 在另一惯性参照系中观察粒子A的初速度为v_A，粒子B的初速度为v_B，那么在此参照系中观察两个粒子碰后的速度分别是多少．

答案　(1) $\begin{cases}u_A=0\\ u_B=v_0\end{cases}$

(2) $\begin{cases}u_A=v_B\\ u_B=v_A\end{cases}$

解析　(1) 弹性正碰过程中两个粒子的动量守恒，能量也守恒．有：

$$\begin{cases}\dfrac{m_0v_0}{\sqrt{1-{v_0}^2/c^2}}=\dfrac{m_0u_A}{\sqrt{1-{u_A}^2/c^2}}+\dfrac{m_0u_B}{\sqrt{1-{u_B}^2/c^2}}\\ \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-{v_0}^2/c^2}}+m_0c^2=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-{u_A}^2/c^2}}+\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-{u_B}^2/c^2}}\end{cases}$$

由方程对称性，得$\begin{cases}u_A=v_0\\ u_B=0\end{cases}$或$\begin{cases}u_A=0\\ u_B=v_0\end{cases}$．第一组解表示粒子还没有碰撞．第二组解为碰撞后的解．

(2) 弹性正碰过程中两个粒子的动量守恒，能量也守恒．有：

$$\begin{cases}\dfrac{m_0v_A}{\sqrt{1-{v_A}^2/c^2}}+\dfrac{m_0u_B}{\sqrt{1-{u_B}^2/c^2}}=\dfrac{m_0u_A}{\sqrt{1-{u_A}^2/c^2}}+\dfrac{m_0u_B}{\sqrt{1-{u_B}^2/c^2}}\\ \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-{v_A}^2/c^2}}+\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-{v_B}^2/c^2}}=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-{u_A}^2/c^2}}+\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-{u_B}^2/c^2}}\end{cases}$$

由方程对称性，得：$\begin{cases} u_A = v_A \\ u_B = v_B \end{cases}$或$\begin{cases} u_A = v_B \\ u_B = v_A \end{cases}$．第一组解表示粒子还没有碰撞．第二组解为碰撞后的解．

标注　近代物理 > 狭义相对论 > 洛伦兹变换 > 速度变换

22 把静止的电子加速度到动能为$0.25\mathrm{MeV}$，则它增加的质量约为原有质量（　　）倍．

A. 0.1

B. 0.2

C. 0.5

D. 0.9

答案　C

解析　$\dfrac{\Delta m}{m_0} = \dfrac{\Delta E/c^2}{m_0} = \dfrac{E - E_0}{m_0c^2} = \dfrac{E_\mathrm{k}}{m_0c^2}$，电子的静止质量为$9.10 \times 10^{-31}\mathrm{kg}$，静能为$m_0c^2 \approx 0.51\mathrm{MeV}$，因此，$\dfrac{\Delta m}{m_0} \approx 0.49$．

故选C．

标注　近代物理 > 狭义相对论 > 洛伦兹变换 > 速度变换

23 原先不带电的电容C通过导线接到电动势U的电源两端充电，直至电荷充满．设电容极板电阻和电源内阻与导线电阻相比可忽略不计．各种热传导忽略不计，则正确说法是，充电前后（　　）

A. 电容质量没有变化

B. 电源质量没有变化

C. 电源质量减小$\dfrac{CU^2}{2c^2}$

D. 导线质量增大$\dfrac{CU^2}{2c^2}$

答案　D

解析　充电后电容器贮有电能$\dfrac{CU^2}{2}$，电源减少的能量为CU^2，因此导线的发热量为$\dfrac{CU^2}{2}$．由质能方程可知，电源质量减小$\dfrac{CU^2}{c^2}$，电容两板间质量增大$\dfrac{CU^2}{2c^2}$，相应导线质量增大$\dfrac{CU^2}{2c^2}$，D正确．

故选D．

标注 原子与原子核 > 原子核

科学思维 > 科学推理

例题说明：下面几道题目涉及光子的动量、能量、频率变化，可以作为一个小专题。

24 某一激光器发射激光．以激光器(脚标记为e)为参照系，激光的频率为f_e，并观察到有一探测器(脚标记为o)在激光的行进路线上迎着激光束以速度v运动．

(1) 某时刻激光的波峰正传播到接收器处，请问下一个波峰传播到接收器区要多少时间．

(2) 上述过程在接收器看来用时多少．

(3) 以（1）（2）的结果为依据推导接收器测得激光频率f_0与f_e的关系．这个结论就是一维的相对论性多普勒效应公式．

答案 (1) $t_e=\dfrac{\lambda}{c+v}=\dfrac{1}{f_e(1+v/c)}$．

(2) $t_o=t_e\sqrt{1-v^2/c^2}=\dfrac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{f_e(1+v/c)}=\dfrac{1}{f_e}\sqrt{\dfrac{1-v/c}{1+v/c}}$．

(3) $f_o=\dfrac{1}{t_o}=f_e\sqrt{\dfrac{1+v/c}{1-v/c}}$．光源与探测器靠近时$v$为正值；光源与探测器远离时$v$为负值．

解析 (1) 略

(2) 略

(3) 略

标注 近代物理 > 狭义相对论 > 洛伦兹变换 > 速度变换

近代物理 > 狭义相对论 > 尺缩、钟慢 > 相对论多普勒效应

25 频率为ν的光子具有质量m，此质量由光子的能量确定．假设光子也有引力质量，且数值和惯性质量相同．那么一颗星球表面向外发光，光子离开引力场时会损失能量．推导初始频率为ν_i（脚标记为i）的光子从星球表面到无穷远处后它的频率ν_f（脚标记为f），已知星球质量为M，半径为R．

答案

$\nu_f=\nu_i\left(1-\dfrac{GM}{Rc^2}\right)$

解析 能量守恒：$h\nu_i+\left(-G\dfrac{Mm_i}{R}\right)=h\nu_f+\left(-G\dfrac{Mm_f}{\infty}\right)$，其中$m_i=\dfrac{h\nu_i}{c^2}$．解得$\nu_f=\nu_i\left(1-\dfrac{GM}{Rc^2}\right)$

．

故答案为：$\nu_f=\nu_i\left(1-\dfrac{GM}{Rc^2}\right)$．

标注 近代物理 > 狭义相对论 > 相对论能量 > 质能关系

例题说明：下面这道题涉及能级的概念及，如果老师要讲，需要说明一下。

26 一个自由的原子静止在实验室参考系中，其静质量为m_0．这个原子发生能级跃迁发射光子，能级差表示为ΔE．考虑原子的反冲效应，计算所发出的光子在实验室参考系中的频率ν．

答案 发出的光子在实验室参考系中的频率ν为$\dfrac{\Delta E}{h}\left(1-\dfrac{\Delta E}{2m_0c^2}\right)$

解析 原子发光前能量为m_0c^2，动量为0．光子能量为$h\nu$，动量为$\dfrac{h\nu}{c}$．发光后的原子静质量设为$m_0{}'$，动量记为p，能量可以表示为$\sqrt{p^2c^2+m_0{}'^2c^4}$．

能级关系为：$\Delta E=m_0{}'c^2$；

动量守恒有：$p=\dfrac{h\nu}{c}$；

能量守恒有：$m_0c^2=h\nu+\sqrt{p^2c^2+m_0{}'^2c^4}$；

解得：$(m_0c^2-h\nu)^2=(h\nu)^2+m_0{}'^2c^4$，

$(m_0c^2)^2-2h\nu m_0c^2=m_0{}'^2c^4$，

$h\nu=\Delta E\left(1-\dfrac{\Delta E}{2m_0c^2}\right)$，

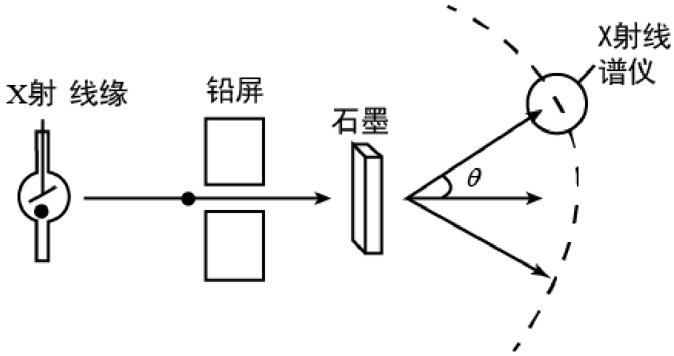
$\nu=\dfrac{\Delta E}{h}\left(1-\dfrac{\Delta E}{2m_0c^2}\right)$．

故答案为：发出的光子在实验室参考系中的频率ν为$\dfrac{\Delta E}{h}\left(1-\dfrac{\Delta E}{2m_0c^2}\right)$．

标注 近代物理 > 狭义相对论 > 相对论能量 > 质能关系

27 如图所示，X射线通过铅屏后照射在石墨上，光子被石墨原子的外层电子（可视为速度为零的自由电子）散射，实验发现X射线谱仪接收到被散射的光子的波长除了有与原波长相同的成分外，还有波长较长的成分，这种现象被称为康普顿散射．用完全弹性碰撞的研究方法并考虑相对论效

应可很好地解释康普顿散射．设入射X射线的波长为λ_0，普朗克常量为h，电子的相对论质量为$m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，其中$m_0$为电子的静止质量，$v$为电子的运动速度，$c$为光速．当光子出射方向与入射方向夹角（散射角）为$\theta$时，求光子被散射后的波长$\lambda$与$\lambda_0$的差值$\Delta\lambda$．



答案 $\Delta\lambda=\dfrac{2h}{m_0c}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

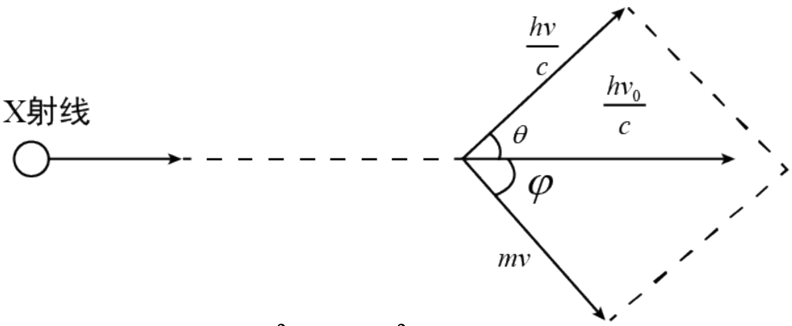
解析 光子与电子发生碰撞的过程中，遵循能量守恒定律和动量守恒定律．

碰撞前光子的频率为$\nu_0=\dfrac{c}{\lambda_0}$，设碰撞后光子的频率为$\nu$，由能量守恒定律得

$h\nu_0+m_0c^2=h\nu+mc^2$①

如图所示，碰撞前光子动量$p_1=\dfrac{h}{\lambda_0}=\dfrac{h\nu_0}{c}$，碰撞后光子动量$p_1'=\dfrac{h}{\lambda}=\dfrac{h\nu}{c}$，电子动量$p_2'=mv$；

由动量守恒定律：$p_1=p_1'+p_2'$，即p_1、p_1'、p_2'构成闭合三角形；



可得：$(mv)^2=\left(\dfrac{h\nu_0}{c}\right)^2+\left(\dfrac{h\nu}{c}\right)^2-2\left(\dfrac{h\nu_0}{c}\right)\left(\dfrac{hv}{c}\right)\cos\theta$②

①式变形为$h(\nu_0-\nu)=(m-m_0)c^2$，再平方，并和②合并，同时利用$m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$可联立

解得：

$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0=\dfrac{2h}{m_0c}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$．

故答案为：$\Delta\lambda=\dfrac{2h}{m_0c}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$．

标注 机械能及其守恒定律 > 能量守恒定律

28 **2018年河北石家庄高二学而思**

在一个验证光的波粒二象性的康普顿散射实验中，具有电子静止能量的硬光子射向静止的电子．碰撞后光子的动量为反冲电子动量的一半，求反冲电子的运动速度．

答案 $0.73c$

解析 设碰撞后反冲电子的动量为p，则光子的动量为$\frac{1}{2}p$．根据能量守恒定律，有：

$$2m_0c^2=\frac{1}{2}pc+\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}\ .$$

式中m_0表示电子的静止质量．解得：

$$p=\frac{2\sqrt{13}-4}{3}m_0c\ . \qquad ①$$

设反冲电子的速度为v，则有

联立式①和式②，得$v=0.73c$．

标注 光及其应用 > 波粒二象性 > 能量量子化