第13讲 万有引力定律的应用——天体密度、卫星变轨与双星问题

一、知识点睛

1.天体密度问题

地球的质量是多少？这不能用天平称量，但是可以通过万有引力定律来称量。在实验室里测出几个铅球之间的作用力，就可以称量地球，这不能不说是一个科学奇迹。

（1）利用“万有引力提供向心力”求中央天体的质量和密度，下面以地球质量和密度的计算为例：

①若已知月球绕地球做匀速圆周运动的半径r和月球运动的线速度v，月球绕地球做匀速圆周运动的周期为T，由万有引力提供向心力$\frac{GM_{地}M_{月}}{r^2}=M_{月}\frac{v^2}{r}=M_{月}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2r=M_{月}v\frac{2\pi}{T}$，可求得地球质量$M_{地}=\frac{rv^2}{G}=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}=\frac{v^3T}{2\pi G}$。

②设天体半径为R，把$\rho=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$带入上面方程，得$\rho=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3rv^2}{4G\pi R^3}=\frac{3\pi r^3}{GT^2R^3}=\frac{3v^3T}{8\pi^2R^3}$。

（2）利用“黄金代换”求中央天体的质量和密度，下面以地球质量和密度的计算为例：

①若已知地球的半径R和地球表面的重力加速度g，根据物体的重力近似等于地球对物体的引力，得$mg=G\frac{M_{地}m}{R^2}$，解得地球质量为$M_{地}=\frac{gR^2}{G}$。

②把$\rho=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$带入上面方程，得$\rho=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{\frac{gR^2}{G}}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3g}{4\pi RG}$。

2. 卫星变轨问题

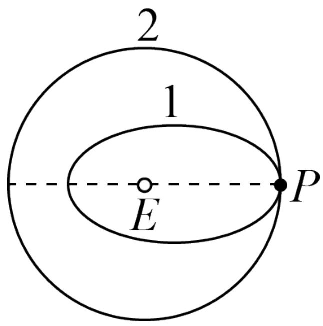
卫星在做匀速圆周运动时满足：$\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r}$，从而$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$，卫星由于某种原因，速度发生变化时，万有引力就不再等于向心力，卫星将做变轨运行。

①当v增大时，所需向心力$m\frac{v^2}{r}$增大，即万有引力不足以提供向心力，卫星将做离心运动，脱离原来的圆轨道，轨道半径变大，但卫星一旦进入新的轨道稳定运行，由$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$知其运行速度v要减小。

②当卫星的速度突然减小时，向心力$m\frac{v^2}{r}$减小，即万有引力大于卫星所需的向心力，因此卫星将做向心运动，同样会脱离原来的圆轨道，轨道半径变小，但卫星一旦进入新轨道稳定运行时，由$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$知运行速度v将增大。（卫星的发射和回收就是利用了这一原理）

头脑风暴1

1 如图所示，一颗人造卫星原来在椭圆轨道1绕地球E运行，在P点变轨后进入轨道2做匀速圆周运动．下列说法正确的是（　　）



A. 不论在轨道1还是轨道2运行，卫星在P点的速度都相同

B. 不论在轨道1还是轨道2运行，卫星在P点的加速度都相同

C. 卫星在轨道1的任何位置都具有相同加速度

D. 卫星在轨道2的任何位置都具有相同动量

答案　B

解析　A．圆轨道与椭圆轨道在同一位置速度大小不相等，所以A错误；

B．加速度$a=\frac{F}{m}=\frac{G\frac{Mm}{r^2}}{m}=G\frac{M}{r^2}$，所以在同一点的加速度大小相等，方向都指向地球球心，所以B正确；

C．在轨道1上的加速度大小和方向都是变化的，所以C错误；

D．在轨道2上的速度方向一直改变，所以动量方向也在改变，所以D错误．

故选B．

3. 天体相遇问题

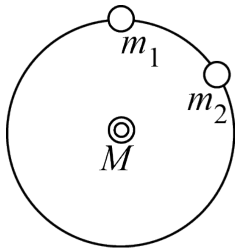
两天体（行星、卫星或探测器）相遇，实际上是指两天体相距最近。若两环绕天体的运转轨道在同一平面内，则两环绕天体与中心天体在同一直线上，且位于中心天体的同侧时相距最近。

两环绕天体与中心天体在同一直线上，且位于中心天体的异侧时则相距最远。

设卫星1（离地球近些）与卫星2某时刻相距最近，如果经过时间t，两卫星与地心连线半径转过的角度相差2π的整数倍，则两卫星又相距最近，即$\omega_1 t-\omega_2 t=2n\pi\ (n=1,2,3,\cdots)$；如果经过时间$t'$，两卫星与地心连线半径转过的角度相差$\pi$的奇数倍，则两卫星相距最远，即$\omega_1 t-\omega_2 t=(2n-1)\pi\ (n=1,2,3,\cdots)$

头脑风暴2

2 如图所示，m_1、m_2为两颗一前一后在同一轨道绕地球做匀速圆周运动的卫星，试述用何种方法可使卫星m_2追上前面的卫星m_1？

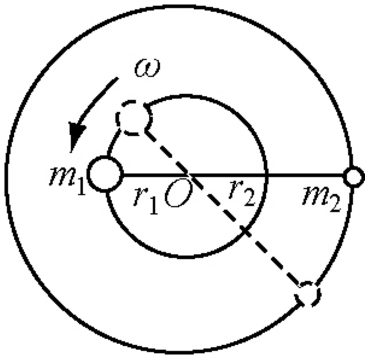


答案 答案见解析

解析 m_2不能像在地面上行驶的汽车一样加大速度去追赶m_1，而应先通过反向制动火箭把速度变小，这样万有引力就大于m_2做匀速圆周运动所需要的向心力，从而轨道半径变小，在较低轨道上匀速圆周运动．由于在较低轨道上m_2的运行速率要大些，大于m_1的运行速率，就会慢慢赶上前上方的m_1，再在恰当位置m_2通过助推火箭把速度变大，这时万有引力又小于所需要的向心力，m_2将做离心运动，轨道半径将变大到与m_1相同，这时m_2就追上了m_1．

4. 双星问题

天体模型中，将两颗彼此距离较近的恒星称为双星，它们在相互之间的万有引力作用下，绕两球连线上某点做周期相同的匀速圆周运动，如图所示。



双星模型的特点：

1．双星夹圆心，且始终在同一直线上，靠彼此间的万有引力提供向心力且大小相等；

2．具有相同的周期T和角速度ω

3．轨道半径和质量成反比$r_1=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}L$，$r_2=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}L$（其中$L$为双星间距）

4．双星总质量$M_{总}=\dfrac{4\pi^2L^3}{GT^2}$。

头脑风暴3

3 两个星球组成双星，它们在相互之间的万有引力作用下，绕连线上某点做周期相同的匀速圆周运动．现测得两星中心距离为R，其运动周期为T，求两星的总质量．

答案 $\dfrac{4\pi^2R^3}{GT^2}$．

解析 设两星质量分别为M_1和M_2，都绕连线上O点作周期为T的圆周运动，星球1和星球2到O的距离分别为l_1和l_2．由万有引力定律和牛顿第二定律及几何条件可得M_1：$G\dfrac{M_1M_2}{R^2}=M_1(\dfrac{2\pi}{T})^2l_1$

$\therefore M_2=\dfrac{4\pi^2R^2l_1}{GT^2}$．对$M_2$：$G\dfrac{M_1M_2}{R^2}=M_2(\dfrac{2\pi}{T})^2l_2$ $\therefore M_1=\dfrac{4\pi^2R^2l_2}{GT^2}$

两式相加得$M_1+M_2=\dfrac{4\pi^2R^2}{GT^2}(l_1+l_2)=\dfrac{4\pi^2R^3}{GT^2}$．

二、例题精讲

基础训练

4 中子星是恒星演化过程的一种可能结果，它的密度很大．现有一中子星，观测到它的自转周期为$T=\dfrac{1}{30}\mathrm{s}$．问该中子星的最小密度应是多少才能维持该星的稳定，不致因自转而瓦解．计算时星体可视为均匀球体．（引力常数$G=6.67\times10^{-11}\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}.\mathrm{s}^2$）

答案 $\rho=1.27\times10^{14}\mathrm{kg/m}^3$．

解析 设想中子星赤道处一小块物质，只有当它受到的万有引力大于或等于它随星体所需的向心力时，中子星才不会瓦解．

设中子星的密度为ρ，质量为M，半径为R，自转角速度为ω，位于赤道处的小物块质量为m，

则有$\dfrac{GMm}{R^2}=m\omega^2R$，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$，$M=\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho$，由以上各式得$\rho=\dfrac{3\pi}{GT^2}$，

代入数据解得：$\rho=1.27\times10^{14}\mathrm{kg/m}^3$．

5 太空中有一颗绕恒星做匀速圆周运动的行星，此行星上一昼夜的时间是T，在行星的赤道处用弹簧测力计测量物体的重力的读数比在两极时测量的读数小10%，已知引力常量为G，求此行星的平均密度．

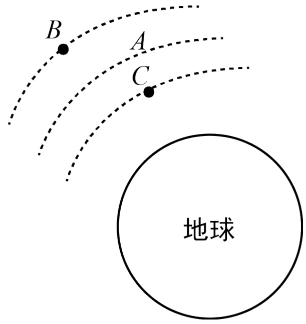
答案 $\rho=\dfrac{30\pi}{GT^2}$

解析 设行星的质量为M，半径为R，两极处重力加速度为g'，平均密度为ρ，物体的质量为m．

物体在赤道上的重力比两极小\displaystyle{10%}，表明在赤道上随行星自转做圆周运动的向心力$F_n=\Delta F=0.1mg'$．

而一昼夜的时间 就是行星的自转周期.根据牛顿第二定律，有$0.1mg'=m\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2R$，根据万有引力定律，两极处的重力加速度$g'=G\dfrac{M}{R^2}=\dfrac{4}{3}G\pi\rho R$，所以行星的平均密度$\rho=\dfrac{30\pi}{GT^2}$．

6 同步卫星在同步轨道上定位以后，由于受到太阳、月球及其他天体引力的作用，会产生漂移而偏离原来的位置．当偏离达到一定的程度，就要发动卫星上的小发动机进行修正．图中虚线A为同步轨道，B和C为两个已经偏离同步轨道A但仍在赤道平面内运行的卫星，要使它们回到同步轨道上，应（　　）



A. 开动B的小发动机向前喷气，使B适当减速　B. 开动B的小发动机向后喷气，使B适当加速

C. 开动C的小发动机向前喷气，使C适当减速　D. 开动C的小发动机向后喷气，使C适当加速

答案　AD

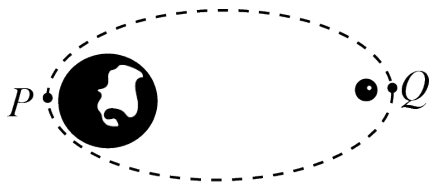
解析　卫星变轨需要从圆轨道变轨为椭圆轨道，之后在一个近点（远点）再次变轨为圆轨道，可从两个角度分析卫星变轨时速度的变化．

①受力：卫星变速前后受到引力不变 $F=\frac{GMm}{r^2}=m\frac{v^2}{\rho}$ 其中ρ 为轨道的曲率半径，对B变轨后ρ减小，故需要减速，同理C需要加速．

②能量：卫星变速前后总机械能发生变化，势能不变．椭圆轨道总机械能$E=-\frac{GMm}{2a}$，a为椭圆轨道半长轴，对B变轨后a减小，故E减小，需要减速，同理C需要加速．

故选AD．

7　2006年2月10日，面向社会征集的月球探测工程标志最终确定．上海设计师作品“月亮之上”最终当选．我国的探月计划分为“绕”“落”“回”三阶段．第一阶段“绕”的任务由我国第一颗月球探测卫星“嫦娥一号”来承担．发射后，“嫦娥一号”探测卫星将用8天至9天的时间完成调相轨道段、地—移轨道段和环月轨道段的飞行．其中，假设地—月转移轨道阶段可以简化为：绕地球做匀速圆周运动的卫星，在适当的位置点火加速，进入近地点在地球表面附近、远地点在月球表面附近的椭圆轨道运行，如图所示．若要此时的“嫦娥一号”进入环月轨道，则必须（　　）



A. 在近地点P启动火箭向运动的反方向喷气

B. 在近月点（远地点）Q启动火箭向运动的反方向喷气

C. 在近月点（远地点）Q启动火箭向运动方向喷气

D. 在近地点P启动火箭向运动方向喷气

答案 C

解析 要使探测卫星在地球椭圆轨道上变轨绕月球运行，则必须在近月点Q处启动火箭向运动的方向喷气使探测器减速，使月球对探测卫星的引力大于做圆周运动所需的向心力而做向心的变轨运动．

故选C．

8 宇宙中两个相距较近的星球可以看成双星，它们只在相互间的万有引力作用下，绕两球连线上的某一固定点做周期相同的匀速圆周运动．根据宇宙大爆炸理论，双星间的距离在不断缓慢增加，设双星仍做匀速圆周运动，则下列说法正确的是（　　）

A. 双星相互间的万有引力不变

B. 双星做圆周运动的角速度均增大

C. 双星做圆周运动的动能均减小

D. 双星做圆周运动的半径均增大

答案 CD

解析 A．双星间的距离在不断缓慢增加，根据万有引力定律，$F=G\dfrac{m_1m_2}{L^2}$，知万有引力减小．故A错误；

B．根据万有引力提供向心力得：$G\dfrac{m_1m_2}{L^2}=m_1r_1\omega^2$，$G\dfrac{m_1m_2}{L^2}=m_2r_2\omega^2$，

可知$m_1r_1=m_2r_2$，知轨道半径比等于质量之反比，

双星间的距离变大，则双星的轨道半径都变大，根据万有引力提供向心力，知角速度变小．

故B错误，D正确；

C．根据$G\dfrac{m_1m_2}{L^2}=m_1v_1\omega=m_2v_2\omega$，可得线速度减小，所以双星做圆周运动的动能均减小，故C正确．

故选CD．

9 科学家发现，除了类似太阳系的恒星-行星系统，还存在许多双星系统，通过对它们的研究，使我们对宇宙有了较深刻的认识．双星系统是由两个星体构成，其中每个星体的线度（直径）都远小于两星体间的距离，一般双星系统距离其他星体很远，可以当做孤立系统处理．已知某双星系统中每个星体的质量都是M_0，两者相距L，它们正围绕两者连线的中点做匀速圆周运动，引力常量为G．求：

(1) 该双星系统中星体的加速度大小a；

(2) 该双星系统的运动周期T．

答案 (1) $\dfrac{GM_0}{L^2}$

(2) $2\pi\sqrt{\dfrac{L^3}{2GM_0}}$

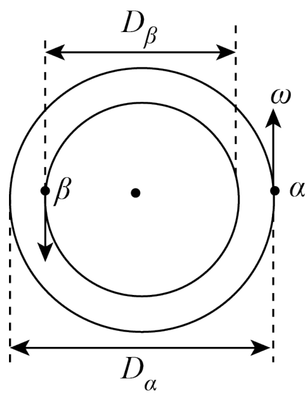
解析 (1) 根据万有引力定律和牛顿第二定律有：$\dfrac{GM_0^2}{L^2}=M_0a$，

解得$a=\dfrac{GM_0}{L^2}$．

(2) 由运动学公式可知，$a=\dfrac{4\pi^2}{T^2}\cdot\dfrac{L}{2}$，

解得：$T=2\pi\sqrt{\dfrac{L^3}{2GM_0}}$．

10 明亮的天狼星是双星系统的一颗子星，另一颗星是已经不在发光的白矮星，它们的环绕周期为50.1年．如图所示，现有一α和β星组成的双星系统，其“晃动”（实际上环绕转动，不过人们往往只能看到它们在晃动）周期为T，α星的晃动范围D_α，β星的晃动荡围为D_β，试求α星和β星的质量．



答案 $M_\beta=\dfrac{\pi^2D_\alpha(D_\alpha+D_\beta)^2}{2GT^2}$

解析 根据对称性可得$M_\beta=\dfrac{\pi^2D_\alpha(D_\alpha+D_\beta)^2}{2GT^2}$．

故答案为：$M_\beta=\dfrac{\pi^2D_\alpha(D_\alpha+D_\beta)^2}{2GT^2}$．

进阶拓展

11 自十七世纪以来，牛顿的万有引力定律取得了巨大的成就．人们用它发现未知天体，计算天体质量，开始宇宙航行．

(1) 2003年10月15日，我国成功地发射了“神州”五号载人宇宙飞船．发射飞船的火箭全长58.3m，起飞时总质量$M_0=479.8\mathrm{t}$（吨）．发射的初始阶段，火箭竖直升空，航天员杨利伟有较强超重感，仪器显示他对仓座的最大压力达到体重的5倍．飞船进入轨道后，21h内环绕地球飞行了14圈．将飞船运行的轨道简化为圆形，地球表面的重力加速度g取$10\mathrm{m/s^2}$．

Ⅰ．求发射的初始阶段（假设火箭总质量不变），火箭受到的最大推力；（保留两位有效数字）

Ⅱ．若飞船做圆周运动的周期用T表示，地球半径用R表示，地表处的重力加速度为g．请导出飞船圆轨道离地面高度的字母表达式．

(2) 地球绕太阳的公转可认为是匀速圆周运动．已知地球的半径为R，地球表面的重力加速度为g，地球绕太阳公转的周期为T_0，太阳发出的光经过时间t_0到达地球．光在真空中传播速度为c．根据以上条件推算太阳的质量M与地球的质量m之比$\dfrac{M}{m}$．

答案 (1) Ⅰ．$2.4\times10^7\mathrm{N}$；

Ⅱ．$\sqrt[3]{\dfrac{gR^2T^2}{4\pi^2}}-R$

(2) $\dfrac{4\pi^2c^3t_0^3}{gR^2T_0^2}$

解析 (1) Ⅰ：设火箭发射初始阶段最大加速度为a，航天员受到最大支持力为N，航天员质量为m_0，根据牛顿第二定律得：

$N-m_0g=m_0a$

根据题意和牛顿第三定律：

$N=5m_0g$

解得：$a=40\mathrm{m/s^2}$

设发射阶段火箭受到的最大推力为F，根据牛顿第二定律得：

$F-M_0g=M_0a$

解得：$F=2.4\times10^7\mathrm{N}$

II：设地球质量为M，飞船质量为m，离地面高度为h，根据飞船受到的万有引力提供向心力

$$\frac{GMm}{(R+h)^2}=\frac{m4\pi^2(R+h)}{T^2}$$

根据地表万有引力等于重力

$$\frac{GMm}{R^2}=mg$$

解得$h=\sqrt[3]{\dfrac{gR^2T^2}{4\pi^2}}-R$

(2) 根据地表万有引力等于重力

$$m_0g=\frac{Gmm_0}{R^2}$$

解得地球质量$m=\dfrac{gR^2}{G}$

地球公转轨道半径$r=ct_0$

根据万有引力提供向心力

$$\frac{GMm}{r^2}=\frac{m4\pi^2r}{T^2}$$

可得太阳的质量$M=\dfrac{4\pi^2r^3}{GT_0^2}=\dfrac{4\pi^2c^3t_0^3}{GT_0^2}$

则$\dfrac{M}{m}=\dfrac{4\pi^2c^3t_0^3}{gR^2T_0^2}$

12 经过天文望远镜长期观测，人们在宇宙中已经发现了许多双星系统，通过对它们的研究，使我们对宇宙中物质的存在形式和分布情况有了较深刻的认识，双星系统由两个星体构成，其中每个星体的直径都远小于两星体之间的距离．一般双星系统距离其他星体很远，可以当做孤立系统来处理．

现根据对某一双星系统的测量确定：该双星系统中每个星体的质量都是m，两者相距L，它们正围绕两者连线的中点做圆周运动．

(1) 试计算该双星系统的运动周期$T_{计算}$．

(2) 若实际观测到的运动周期为$T_{观测}$，且$T_{计算}:T_{观测}=1:\sqrt{N}$．为了解释$T_{观测}$与$T_{计算}$的不同，目前有一种流行的理论认为，在宇宙中可能存在一种望远镜观测不到的暗物质．作

为一种简化模型，我们假定在以这两个星体连线为直径的球体内均匀分布着这种暗物质．若不考虑其他暗物质的影响，请根据这一模型和上述观测结果确定该星系间这种暗物质的密度．

答案

(1) $T_{计算}=\pi L\sqrt{\frac{2L}{Gm}}$

(2) $\rho=\frac{3(N-1)m}{2\pi L^3}$

解析

(1) 双星均绕它们连线的中点做匀速圆周运动，设运动的速率为v，得

$m\frac{v^2}{\frac{L}{2}}=\frac{Gm^2}{L^2}$， ①

$v=\sqrt{\frac{Gm}{2L}}$， ②

$T_{计算}=\frac{2\pi\cdot\frac{L}{2}}{v}=\pi L\sqrt{\frac{2L}{Gm}}$．③

(2) 根据观测结果，星体的运动周期$T_{观测}=\frac{1}{\sqrt{N}}T_{计算}<T_{计算}$． ④

这种差异是由双星内均匀分布的暗物质引起的，均匀分布在球体内的暗物质对双星系统的作用与一质量等于球内暗物质的总质量（m'）且位于中点O处的质点的作用相同，考虑暗物质作用后双星的速度即为观察到的速度 观测，则有

$m\frac{v_{观测}^2}{\frac{L}{2}}=\frac{Gm^2}{L^2}+G\frac{mm'}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}$， ⑤

解得$v_{观测}=\sqrt{\frac{G(m+4m')}{2L}}$． ⑥

因为在运动半径一定时，周期和速度成反比，由④式得

$\frac{1}{v_{观测}}=\frac{1}{\sqrt{N}}\cdot\frac{1}{v}$． ⑦

把②⑥式代入⑦式得

$m'=\frac{N-1}{4}m$．

设所求暗物质的密度为ρ，则有$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{L}{2}\right)^3\rho=\frac{N-1}{4}m$，

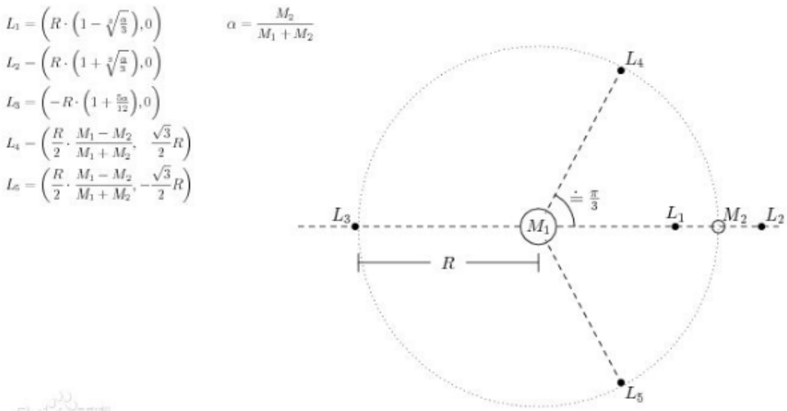
故$\rho=\frac{3(N-1)m}{2\pi L^3}$．

三、阅读材料

1.拉格朗日点

拉格朗日是18世纪伟大的数学家，物理学家和天文学家。他的主要贡献是将数学分析脱离物理与几何，形成一个独立的体系。他的研究在月球运动(三体问题)、行星运动、轨道计算等方面取得了突出成果，在使天文学力学化、力学分析化上，也起到了历史性的作用，促进了力学和天体力学的进一步发展。拉格朗日的研究工作中，约有一半同天体力学有关。他用自己在分析力学中的原理和公式，建立起各类天体的运动方程。在研究天体运动方程的解法时，拉格朗日发现了三体问题运动方程的五个特殊解，即拉格朗日平动解。

拉格朗日点即是指这五个特解对应的位置，在这些位置上第三个天体在另外两天体的引力作用下可以做稳定周期运动。通过计算可以得出，图中L_4和L_5是稳定平衡的位置，L_1、L_2和L_3为条件稳定位置（即满足特定条件时第三个天体才能处于稳定运动的状态）。



拉格朗日点中最有意义的是L_4、L_5两个稳定平衡位置，在这些位置上，处于拉格朗日点的小质量天体与另外两个大质量天体构成等边三角形，小天体会随另外两天体做相同角速度的圆周运动，因此当小行星存在于拉格朗日点时，它会在此点附近振荡，不会离开此点。木星的卫星群特洛伊小行星 (Trojan asteroids) 就是位在这两个区域，因此这两个位置也被称为“特洛伊点”。

另三个位置的拉格朗日点不是很稳定，位于这些拉格朗日点上的小天体，稍受扰动就会离开它位置。但是相比于其它位置，拉格朗日点的天体受到引力的影响更小，因此空间探测器仅需要花费很少的能量就可以通过调整自己运行轨道稳定存在于这些位置，如2001年升空的威尔金森宇宙微波各向异性探测卫星（WMAP）就位于“第二拉格朗日点”。