第3讲 牛顿第二定律的应用——连接体问题

知识点睛

系统的牛顿第二定律

在讨论连接体问题之前，我们先要了明确一点：牛顿第二定律不仅对单个物体适用，也对系统也适用。

我们先以一个两体系统为例来说明问题。物体1受到的外力可以分为系统外界对它的力$F_{外_1}$和物体2对它的力F_{21}，同理，物体2受到的外力可以分为系统外界对它的力$F_{外_2}$和物体1对它的力F_{12}。分别对物体1和物体2应用牛顿第二定律得：

$$F_{外_1}+F_{21}=m_1a_1\text{，}F_{外_2}+F_{12}=m_2a_2\text{；}$$

两式相加得：$F_{外_1}+F_{外_2}+F_{21}+F_{12}=m_1a_1+m_2a_2$，其中$F_{21}$和$F_{12}$是一对相互作用力，即$F_{21}+F_{12}=0$。

因此，$F_{外_1}+F_{外_2}=m_1a_1+m_2a_2$，即：

$$F_{合外}=m_1a_1+m_2a_2\text{。}$$

公式

系统的牛顿第二定律的表达式为：

$$\overrightarrow{F_{合外}}=m_1\vec{a_1}+m_2\vec{a_2}+m_3\vec{a_3}+\cdots+m_n\vec{a_n}$$

整体法与质心运动定理

（1）由于力的相互作用，在把多个物体取为一个整体计算合力时，相互作用的总合力总是为零，所以我们在整体法受力分析的时候不用考虑相互研究对象之间的相互作用。

（2）整体法的本质还是隔离法，只不过把隔离法的方程在数学上叠加了而已。所以整体法延续隔离法的基本观点，研究对象受到的外界所有作用决定研究对象的运动特点，没有那个力是“关键”的，不作用在研究对象上的力不能考虑。

（3）整体法的数学方程多数情况下比较复杂，但是一些特殊情况下会比较简单。

多个物体以加速度a_0一起运动的情况，这样所有物体的加速度是一样的，方程为退化为

$$\vec{F}=\left(\sum_i m_i\right)\cdot\vec{a_0}$$

整体内部只有一个物体x有加速的情况，方程也极其简单

$$\vec{F}=m_x\vec{a_x}$$

定理

质心运动定理

质点系的质心运动和一个位于质心的质点的运动相同，该质点的质量等于质点系的总质量，而该质点上的作用力则等于作用于质点系上的所有外力平行地移到这一点上，即：

$$\overrightarrow{F_{\text{合外}}}=m_c\vec{a_c}$$

其中，$m_c=\sum_i m_i$，$\vec{a_c}$是质心处的加速度。

这个方程在处理对称刚体以及质点组变速问题时非常有用。

处理连接体问题的常用方法

处理连接体问题的常用方法有：

（1）整体法：整体法是将几个物体看作一个整体，采用系统的牛顿第二定律表达式忽略物体间的相互作用力进行求解；

（2）隔离法：将研究对象从其周围的环境中隔离出来单独进行研究，列牛顿运动学定律方程，这个研究对象可以是一个物体，也可以是物体的一个部分；

（3）运动学关联：对于连接体问题，物体和物体之间往往存在着运动学关联，如由绳子连接的两个物体沿绳的运动速度大小必然相同，这时就需要将运动学关联一并列入方程组求解。

另外，滑轮组问题的本质实际上也是绳子不可伸长这一特性。关于滑轮组问题的受力分析和运动学关联我们将结合例题进行具体解释。

头脑风暴

1 如图所示，水平面光滑，$M>m$，第一次用水平力F由左向右推M，物体间的相互作用力为N_1；第二次用同样大小的水平力F由右向左推m，物体间的相互作用力为N_2，则（　　）

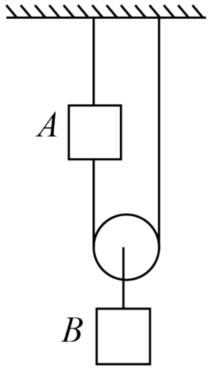
A. $N_1>N_2$　　B. $N_1=N_2$　　C. $N_1<N_2$　　D. 无法确定

答案 C

解析 用整体法求出M、m这个整体的加速度，用隔离法求两物体之间的作用力．求得 $N_1=\dfrac{m}{M+m}F$，$N_2=\dfrac{M}{M+m}F$，由于$M>m$，可知$N_1<N_2$．

故选C．

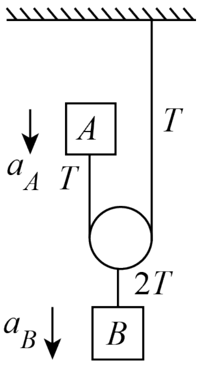
2 如图所示，不计绳和滑轮质量，不计摩擦，A，B质量均为m，剪断A上部的绳子，则B的加速度多大．



答案 $a_B=\dfrac{3}{5}g$

解析 如图所示，剪断A上部的绳子后，

设与A相连的绳子张力为T，则与B连接的绳子张力为$2T$，



由牛顿第二定律得：$mg-2T=ma_B$，$mg+T=ma_A$，

A、B的加速度关系为$a_A=2a_B$，

联立解得：$a_B=\dfrac{3}{5}g$，$a_A=\dfrac{6}{5}g$．

故答案为：$a_B=\dfrac{3}{5}g$．

连接体中的临界问题

定义

当物体由一种物理状态变为另一种物理状态时，可能存在一个过渡的转折点，这时物体所处的状态通常称为临界状态，与之相关的物理条件则称为**临界条件**。

临界问题的题干中常用“恰好”、“刚好”、“最大”、“至少”、“不相撞”、“不脱离”……等词语对临界状态给出了明确的暗示。

三类临界问题的临界条件：

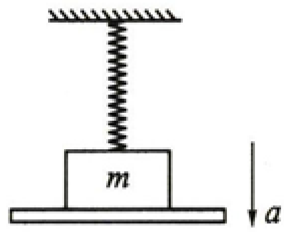
①**互接触的两个物体将要脱离**的临界条件是：相互作用的弹力为零；

②**绳子松弛**的临界条件是：绳中拉力为零；

③**静摩擦的连接系统**，当系统外力大于最大静摩擦力时，物体间不一定有相对滑动，相对滑动与相对静止的临界条件是：静摩擦力达最大值。

头脑风暴

3 一根劲度系数为k，质量不计的轻弹簧上端固定，下端系一质量为m的物体，有一水平板将物体托住，并使弹簧处于自然长度．如图所示，现让木板由静止开始以加速度a（$a<g$）匀加速向下运动．求经过多长时间木板开始与物体分离．



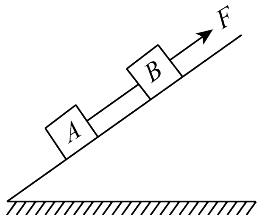
答案 $\sqrt{\dfrac{2m(g-a)}{ka}}$

解析 当m与木板分离时，m与板间无弹力作用，且加速度为a，由牛顿第二定律得：$mg-kx=ma$．因m与板分离前做 匀加速运动，所以有$x=\dfrac{1}{2}at^2$．由以上两式解得$t=\sqrt{\dfrac{2m(g-a)}{ka}}$．

例题精讲

基础训练

4 粗糙斜面上放置两物体，斜面的滑动摩擦因数为μ，倾角为θ，A物体的质量为m_A，B物体的质量为m_B，现用沿斜面向上的恒力F拉动B物体，两物体在细线的作用下保持相对静止的由静止开始运动，求细线的拉力．



答案 细线的拉力为$\dfrac{m_A}{m_A+m_B}F$

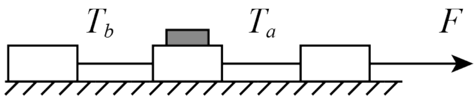
解析 两物体相对静止，对系统有：$F-(m_A+m_B)g\sin\theta-\mu(m_A+m_B)gcos\theta=(m_A+m_B)a$，

对A有：$T_{AB}-m_A g\sin\theta-\mu m_A\cos\theta=m_A a$，

因此$T_{AB}=\dfrac{m_A}{m_A+m_B}F$．

故答案为：细线的拉力为$\dfrac{m_A}{m_A+m_B}F$．

5 如图所示用力F拉A、B、C三个物体在光滑水平面上运动，现在中间的B物体上加一块橡皮泥，它和中间的物体一起运动，且原拉力F不变，那么加上物体以后，两段绳的拉力T_a和T_b的变化情况是（　）



A. T_a增大　　B. T_b增大　　C. T_a减小　　D. T_b减小

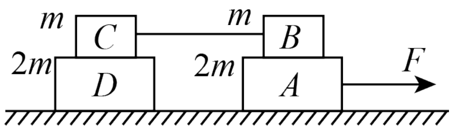
答案 AD

解析 设最左边的物体质量为m，最右边的物体质量为m'，整体质量为M，整体的加速度$a=\dfrac{F}{M}$，对最左边的物体分析，$T_b=ma=\dfrac{mF}{M}$，对最右边的物体分析，有$F-T_b=m'a$，解得$T_a=F-\dfrac{m'F}{M}$．在中间物体上加上一个小物体，则整体的加速度a减小，因为m、m'不变，所以T_b减小，T_a增大，AD正确．

故选AD．

6

如图所示，光滑水平面上放置质量分别为m和$2m$的四个木块，其中两个质量为m的木块间用一不可伸长的轻绳相连，木块间的最大静摩擦力是μmg．现用水平拉力F拉其中一个质量为$2m$的木块，使四个木块以同一加速度运动，则轻绳对m的最大拉力为（　　）

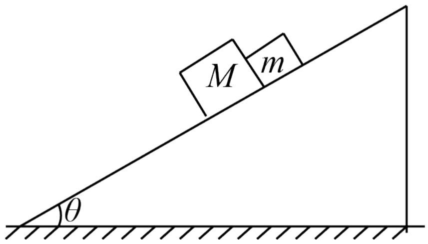


A. $\frac{3\mu mg}{5}$　　B. $\frac{3\mu mg}{4}$　　C. $\frac{3\mu mg}{2}$　　D. $3\mu mg$

答案　B

解析　本题的关键是要想使四个木块一起加速，则任两个木块间的静摩擦力都不能超过最大静摩擦力．所以对左侧下面的大木块有$f_1=2ma$，对左侧小木块有$T-f_1=ma$；对右侧小木块有$f_2-T=ma$，对右侧大木块有$F-f_2=2ma$，又由于两个接触面的最大静摩擦力最大值为μmg，所以$f_2=\mu mg$，以上各式联立解得$T=\frac{3\mu mg}{4}$．也可求出F的最大值为$F=6ma_m=\frac{3\mu mg}{2}$．

7 如图所示，物体M与m紧靠在斜面上，斜面的倾角为θ．现施一已知恒力F作用于M，M和m共同沿斜面向上做匀加速运动，求下列情况下M和m之间相互作用力的大小．



（1）斜面光滑，力F沿斜面向上；

（2）斜面光滑，力F水平向右；

（3）斜面粗糙，动摩擦因数为μ，力F水平向右．

答案　（1）$\frac{mF}{M+m}$．

（2）$\frac{mF\cos\theta}{M+m}$．

（3）$(F\cos\theta-\mu F\sin\theta)\frac{m}{m+M}$．

解析　（1）整体法求加速度，隔离法求两物体之间的弹力．

整体法$F-(M+m)g\sin\theta=(M+m)a_1$，隔离法$F'-mg\sin\theta=ma_1$，联立解得

$F'=\dfrac{m}{M+m}F$；

故答案为：$\dfrac{mF}{M+m}$．

（2）整体法求加速度，隔离法求两物体之间的弹力．

整体法$F\cos\theta-(M+m)g\sin\theta=(M+m)a_2$，隔离法$F'-mg\sin\theta=ma_2$，联立解得$F'=\dfrac{m}{M+m}F\cos\theta$；

故答案为：$\dfrac{mF\cos\theta}{M+m}$．

（3）整体法求加速度，隔离法求两物体之间的弹力．

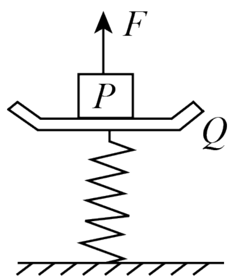
整体法$F\cos\theta-(M+m)g\sin\theta-\mu N=(M+m)a_3$，$N=(M+m)g\cos\theta+F\sin\theta$，

隔离法$F'-mg\sin\theta-\mu mg\cos\theta=ma_3$，联立解得$F'=\dfrac{m}{m+M}(F\cos\theta-\mu F\sin\theta)$

．

故答案为：$(F\cos\theta-\mu F\sin\theta)\dfrac{m}{m+M}$．

8 如图所示，有一弹簧秤，秤盘质量为$M=1.5\mathrm{kg}$，盘内放一物P，质量为$m=10.5\mathrm{kg}$，弹簧自重不计，劲度系数$k=800\mathrm{N/m}$，系统处于静止状态，现给P施加一竖直向上的力F，使P从静止开始向上做匀加速运动，已知在前0.2s内F是变力，0.2s后是恒力，求F的最大值和最小值各是多少?（$g=10\mathrm{m/s^2}$）



答案 $F_{\min}=72\mathrm{N}$，$F_{\max}=168\mathrm{N}$

解析 初始时，秤盘静止在弹簧上，弹簧压缩量为x，由胡克定律得：$x=\dfrac{(m+M)g}{k}=0.15\mathrm{m}$

，

外力作用在物体上时，前0.2s外力变为力，后0.2s外力为恒力，则0.2s末，秤盘与弹簧分离，

设秤盘加速度为a，

初始时：$F_{\min}+kx-(m+M)g=(m+M)a$，

分离时：$kx_1-Mg=Ma$，$F_{\min}-mg=ma$，

由运动学公式：$x-x_1=\frac{1}{2}at^2$，

解得：$a=6\mathrm{m/s^2}$，

$F_{\min}=72\mathrm{N}$，$F_{\max}=168\mathrm{N}$．

故答案为：$F_{\min}=72\mathrm{N}$，$F_{\max}=168\mathrm{N}$．

9 在桌上有一质量为m_1的杂志，杂志上有一质量为m_2的书．杂志和桌面的摩擦因数为μ_1，杂志和书之间的摩擦因数为μ_2．欲将杂志从书下抽出，则至少要用（　　）的力．

A. $(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g$　　B. $\mu_1(m_1+m_2)g+\mu_2m_2g$

C. $(\mu_1+\mu_2)m_2g$　　D. $(\mu_1m_1+\mu_2m_2)g$

答案　A

解析　将杂志抽出时，杂志与书，杂志与桌面之间均存在相对滑动．

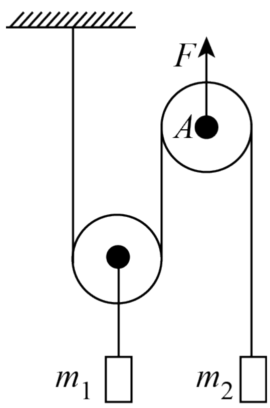
对书：$\mu_2m_2g=m_2a_2$

对杂志：$F-\mu_2m_2g-\mu_1(m_1+m_2)g=m_1a_1$

若要将书抽出，要求$a_1\geqslant a_2$，因此$F\geqslant(\mu_1+\mu_2)(m_1+m_2)g$，A正确．

故选A．

10 在图中所示系统里竖直向上的力F作用在滑轮A的轴处，两物体质量分别为m_1和m_2，线轻且不可伸长，滑轮的重力不计，没有摩擦求滑轮A轴的加速度．

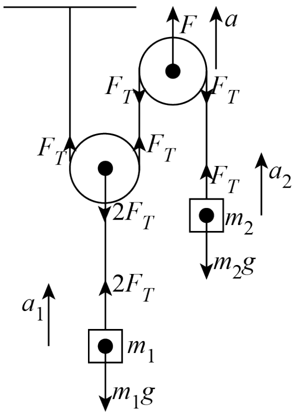


答案 $\dfrac{m_1+4m_2}{4m_1m_2}F-\dfrac{3}{2}g$

解析 由题意可知，线中张力处处相等，开始时系统中各物体的初速度均为零．设物体m_1、m_2和滑轮A的速度分别为a_1、a_2和a，方向均向上．在绳无伸长的条件下可以判断，在相等的时间内，m_1上升s_1，m_2上升s_2，那么滑轮上升：$\dfrac{2s_1+s_2}{2}$，由此可得三者加速度大小关系为：

$a=\dfrac{2a_1+a_2}{2}$①

m_1、m_2和滑轮A的受力情况如图所示．



因为滑轮重力不计，

$F=2F_T$②

对m_1及m_2，根据牛顿第二定律：

$2F_T-m_1g=m_1a_1$③

$F_T-m_2g=m_2a_2$④

联立②③④，得：

$$\begin{cases}a_1=\frac{F}{m_1}-g\\ a_2=\frac{F}{2m_2}-g\end{cases},$$

代入①式，可得：滑轮A轴的加速度

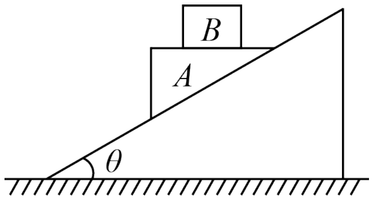
$$a=\frac{2\left(\frac{F}{m_1}-g\right))+\left(\frac{F}{2m_2}-g\right)}{2}=\frac{m_1+4m_2}{4m_1m_2}F-\frac{3}{2}g,$$

方向竖直向上．

故答案为：$\dfrac{m_1+4m_2}{4m_1m_2}F-\dfrac{3}{2}g$．

进阶拓展

如图所示，一个质量为M的小三角形物体A放在倾角为$\theta=30^\circ$的固定斜面上，在此三角形上又放一质量为m的物体B，A与B之间、A与斜面之间均光滑接触，设开始时A和B均静止．当A沿斜面下滑时，A对地面的加速度大小______，方向为______．



答案 1．$\frac{2(M+m)g}{4M+m}$

2．沿斜面向下

解析 B受重力mg及A对B竖直向上支承力N_2，合力产生竖直向下加速度a_B，

A受重力Mg，B对A竖直向下压力N_2及斜面对A垂直于斜面向上的支承力N_1，

合力产生沿斜面向下的加速度a_A，由牛顿第二定律有：

$mg-N_2=ma_B$，

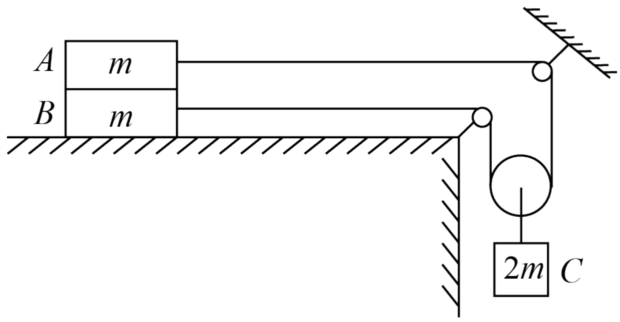
$(Mg+N_2)\sin\theta=Ma_A$，

由加速度关联关系有：$a_B=a_A\sin\theta$（可由位移关系推导，也可以换参考系分析），

联立解得：$a_A=\frac{(M+m)g\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}=\frac{2(M+m)g}{4M+m}$．

故答案为：$\frac{2(M+m)g}{4M+m}$；沿斜面向下．

12 如图m与桌面的摩擦因数为μ_1，三个木块的质量为m、m、$2m$，滑轮的质量忽略．



（1）若两重叠木块的摩擦力足以保证它们不发生相对滑动，则它们间的摩擦力为多大．

（2）若两重叠木块的摩擦因数为μ_2且μ_2无法维持它们相对静止，则C的加速度为多大．

答案 （1）$f=\mu_1 mg$

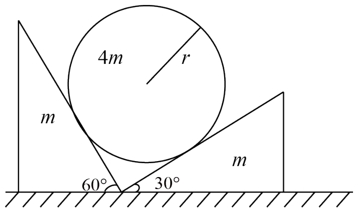
（2）不滑动：$a_C=\frac{1}{3}(1+\mu_2)g$；滑动：$a_C=\frac{1}{2}(1+\mu_1)g$．

解析 （1）若$\mu_1>1$，B与桌面不滑动：$f=mg$；若$\mu_1<1$，B与桌面滑动：$f=\mu_1 mg$．

（2）若$\mu_1>\frac{1}{3}(1+\mu_2)$，$B$与桌面不滑动：$a_C=\frac{1}{3}(1+\mu_2)g$；

若$\mu_1<\frac{1}{3}(1+\mu_2)$，$B$与桌面滑动$a_C=\frac{1}{2}(1+\mu_1)g$．

13 两个质量为m的斜劈和一个质量为$4m$，半径为R的球在外力作用下保持如图所示的静止状态，忽略所有摩擦，然后某时刻撤去外力，求球掉到平面上所需要的时间．



答案 $\frac{4}{3}\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)\frac{r}{g}}$

解析 略．