第六部分 自招综合训练-机械振动与机械波

在高中物理课程中，我们认识了机械振动和机械波，了解了描述机械振动和机械波的物理量及图象，并学习了波特有的衍射、干涉现象及原理。在这个模块中，我们将深入讲解一些拓展知识，例如简谐振动的判定方法，参考圆的应用，波函数及多普勒效应等。

简谐振动的判定

知识点睛

如果质点的位移与时间的关系遵从正（余）弦函数的规律，即它的振动图象（图象）是一条正（余）弦曲线，这样的振动叫做简谐振动。但是通过这种定义来判断物体的运动是否是简谐振动显然是比较麻烦的。那么如何判断物体的运动是否是简谐振动呢？下面我们介绍两种常用的判断方法（由于证明过程需要用到微分方程的知识，因此，我们只介绍结论）。

（1）通过受力判断

如果物体所受的合外力F总是与它离开平衡位置的位移x大小成正比，并且总指向平衡位置（即与位移方向相反），即$F=-kx$，则物体的振动为简谐振动。

（2）通过能量判断

弹簧振子在做简谐振动的过程中，系统能量守恒，在任意位置（位移为x处），总能量可以写成$E=E_{\mathrm{p}}+E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=$常数，其中，速度$v$可以写成位移随时间的变化率，我们用符号$v=\frac{dx}{dt}$表示（速度实际是位移对时间的导数），则$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=$常数。同理，对任意简谐振动我们可以得到类似的结论：

在运动过程中，系统能量可以写成形如$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=$常数的形式，则系统的运动为简谐振动。其中$x$应理解为广义位移（既可以是位移，也可以是角度等），m、k均为比例系数，并非一定代表质量和劲度系数。

在复杂体系中，能量分析可能比受力分析简单，但能量判据只适用于某一能量守恒的系统。

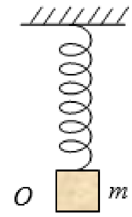
例题精讲

****

例题说明：下面几道题目练习通过受力条件判断简谐振动

****

1 如图所示，质量为m的物体悬挂在一根劲度系数为k的轻质弹簧下端，静止后物体所在位置为O点．现将物体从O点向下拉离一小段距离x，然后释放，证明物体做简谐运动．（不计空气阻力）



答案 详见解析

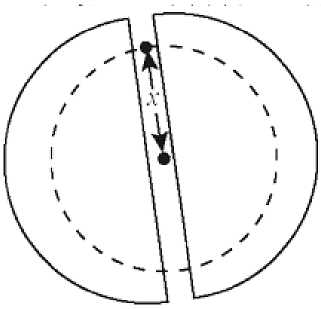
解析 物体在平衡位置O点时，$mg = k\Delta x$

以O点为原点，取向下为正x方向，将物体向下拉x时，

$F_{合} = mg - k(\Delta x + x) = -kx$

符合简谐运动的受力特征，即为简谐运动．

2 牛顿曾证明：一个均匀球壳，对球壳内物质的万有引力为零，而对球壳外物质的万有引力不为零，且其作用效果相当于球壳的质量都集中到球心那样．假设有一沿着地轴、穿过地球的通道，在地球表面把一小球从洞口由静止释放，如图所示．忽略摩擦、阻力等影响，假设地球是半径为R、质量为M一个均匀球体，不考虑地球自转．试证明小球做简谐振动．



答案 证明见解析

解析 小球m到达离地心距离为x处时，所受万有引力为$F = \dfrac{GM'm}{x^2}$，

其中$M' = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{x^3}{R^3}M$，联立可得$F = \frac{GMm}{R^3}x$，指向地心．

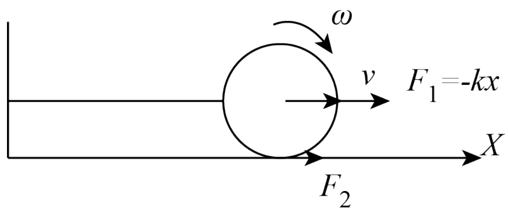
故小球做简谐振动．

****

教师版补充：老师可以拓展一下此题，即使通道不穿过地心，小球同样做简谐振动

****

3 圆柱体M，弹簧连接在M的转动轴上（圆柱体可绕转动轴转动）．压缩弹簧后放手，圆柱体纯滚动，问圆柱体的运动是否为简谐运动？如果是，周期为多少？已知弹簧弹性系数为k，重力加速度为g．



答案 $2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{2}{3}k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$

解析 如图建立坐标轴，以弹簧为原长处为坐标零点，则当圆柱体位于x位置时，受到弹簧弹力作用$F_1 = -kx$，并且由于弹黄弹力导致的与地面的滑动趋势而受到静摩擦力F_2，方向设为x正向．

由于圆柱体纯滚动有：

$v = \omega R$，$\alpha = \beta R$，

又圆柱体加速度和角加速度分别为：

$\alpha = \frac{F_1 + F_2}{m}$，$\beta = \frac{-F_2 R}{I} = \frac{-F_2 R}{\frac{1}{2}mR^2} = -\frac{2F_2}{mR}$，

因此：

$\frac{F_1 + F_2}{m} = -\frac{2F_2}{m}$，即$F_2 = -\frac{1}{3}F_1 = \frac{1}{3}kx$，

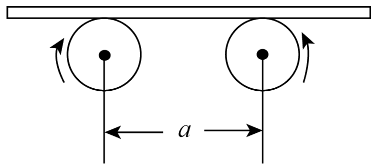
则圆柱体受力为：

$F = F_1 + F_2 = -\frac{2}{3}kx$，

由圆柱体的受力形式知其运动是简谐振动，周期为：

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{2}{3}k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$．

4 如图所示，质量为m的匀质细棒置于两只相同的水平转动的圆柱上，两圆柱转动的速率相等，但方向相反．设圆柱与棒的摩擦因数为μ．开始时，棒的重心在右边圆柱上，两圆柱中心相距为a，试证明棒的运动为简谐振动．



答案 证明见解析．

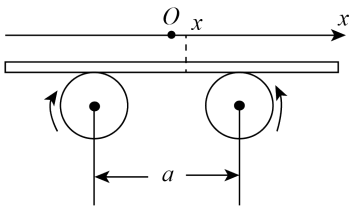
解析 建立水平坐标轴Ox，向右为正，取两圆柱之间的中点为原点．某时刻，棒重心的坐标为x，如图所示，设棒此时受左右圆柱的弹力为N_1、N_2．根据平衡条件：$N_1+N_2=mg$，

$N_1a=mg\left(\frac{a}{2}-x\right)$，

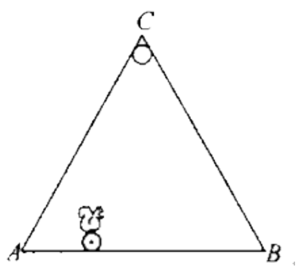
棒在水平向上所受的合力$F=\mu N_1-\mu N_2$，

联立解得：$F=-2\mu mg\frac{x}{a}=-kx$．

因此，棒的运动为简谐振动．



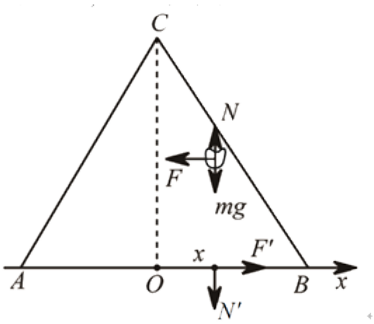
5 三根长度均为l、质量均匀的直杆，构成一正三角形框架ABC，C点悬挂在一光滑水平转轴上，整个装置可绕转轴转动．杆AB是一导轨，电动玩具松鼠可在导轨上运动，如图所示．现观察到松鼠正在导轨上运动，而框架却静止不动，试分析松鼠的运动是一种什么样的运动．



答案 简谐振动

解析

对框架来说，要始终保持静止，则要求用在上面的各力对转轴C的合力矩为零．由于框架各边的重力对C点的合力矩为零，因此松鼠对AB杆的作用力对转轴C的合力矩也应为零分别对框架AB段和松鼠进行受力分析，建立水平坐标x轴，向右为正，以C点最下方为原点O，某时刻，设松鼠位于坐标x处，如图所示．



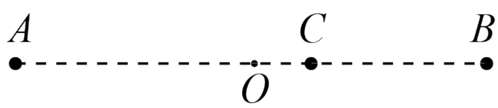
根据力矩平衡条件，对于框架有：$N'|x| = F' l\cos 30^\circ$，解得：$F' = \dfrac{2N'|x|}{\sqrt{3}l}$．

对AB段及松鼠，由牛顿第三定律及平衡条件可得$N' = N = mg$，因此，$F = F' = \dfrac{2mg|x|}{\sqrt{3}l}$．

由图可知，当$x > 0$时，$F < 0$；当$x < 0$时，$F > 0$．所以对松鼠有：$F = \dfrac{2mg}{\sqrt{3}l}x = -kx$，这说明松鼠做的是简谐振动．

故答案为：简谐振动．

6 如图所示，相距为$2l$的点电荷A、B位置固定，所带电荷量均为$+Q$，带电量为$+q$的点电荷C仅受A、B库仑力的作用，平衡位置在A、B中点O．现使C偏离平衡位置一微小位移(远小于$2l$)释放，求点电荷C做何种运动(C在AB连线方向运动)．



答案 做简谐振动

解析 如图所示，以O为原点，水平向右建立x轴．

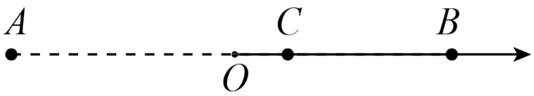
当点电荷C处于坐标x处($x \ll 2l$)时，C所受合力$F = k\dfrac{Qq}{(1+x)^2} - k\dfrac{Qq}{(l-x)^2}$，

当$x \ll 2l$时，可化简得：

$$F = k\frac{Qq}{l^2}\left[\left(1+\frac{x}{l}\right)^{-2} - \left(1+\frac{x}{l}\right)^{-2}\right] \approx k\frac{Qq}{l^2}\left[\left(1-2\frac{x}{l}\right) - \left(1+2\frac{x}{l}\right)\right] = -4k\frac{Qq}{l^3}x．$$

故点电荷C近似做简谐振动．

故答案为：做简谐振动．



****

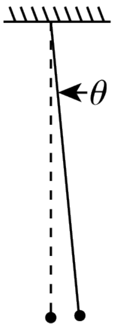
例题说明：下面几道题目练习通过能量条件判断简谐振动

****

7 试通过能量条件判断单摆（摆角小于5°时）近似做简谐振动．

答案 当摆角较小时，单摆近似为简谐振动

解析 如图所示，设单摆摆长为l；摆球质量为m，可看做质点；设平衡位置O为原点及重力势能的零势能点．



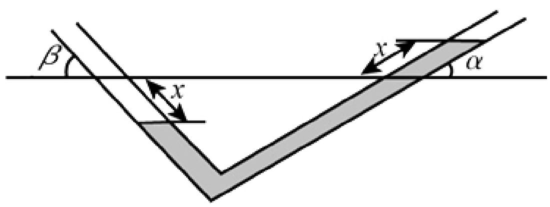
当摆球离开平衡位置角度为$\theta(\theta<5^{\circ})$时，系统的总能量为：

$E=mgl(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}mv^2=mgl(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ =常数，

由于θ很小，因此$E\approx mgl\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ =常数，

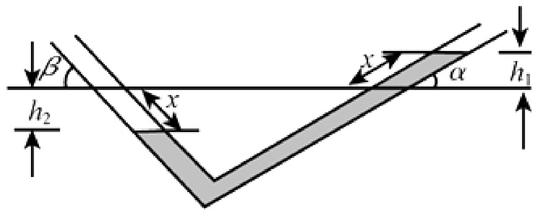
因此，当摆角较小时，单摆近似为简谐振动．

8 位于竖直平面内的"V"型管粗细均匀、两端开口，两臂分别与水平面成α角和β角，如图所示．其内盛有长为l、质量为m的液柱，受微小扰动后，液柱将沿管做振动，试证明液柱做简谐振动．



答案 证明见解析

解析 如图所示，设液柱处于平衡位置时重力势能为零，当液柱沿管轴位移为x时，相当于把长为x的液柱从左臂搬至右臂，此过程中该段液柱的重心升高了$h=\frac{1}{2}(h_1+h_2)$，其中$h_1=x\sin\alpha$，$h_2=x\sin\beta$．



液柱在振动过程中，总能量

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{x}{l}mg\cdot\frac{1}{2}(h_1+h_2)=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2l}mg(\sin\alpha+\sin\beta)x^2=\text{常数}．$$

故液柱做简谐振动．

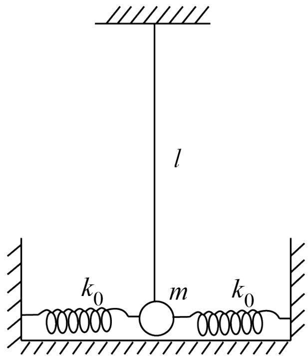
****

教师版补充：本题也可以通过受力来判断，老师可以作为练习让学生再练一次。

设左侧液面沿细管下降距离为x，则$F=\rho gSx\sin\beta+\rho gSx\sin\alpha=(\rho gS\sin\alpha+\rho gS\sin\beta)x$，指向平衡位置，故液体的振动为简谐振动。

****

9 如图所示为一弹簧摆，摆长为l，在原单摆两侧各加一个劲度系数均为k_0的轻质弹簧，设摆球静止时两弹簧均处于原长状态，当弹簧摆做小角度摆动时，证明其运动为简谐振动．



答案 摆球摆动过程中，系统能量守恒．以平衡位置为重力势能零点，当单摆偏离平衡位置为x（对应摆角为θ）时，总能量$E\approx2\times\frac{1}{2}k_0x^2+mgl(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}mv^2=\text{常数}$．当摆角较小时，由小角度近似可化简得：

$$E\approx k_0x^2+mgl\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{2}mv^2\approx k_0x^2+\frac{1}{2}mgl\frac{x^2}{l^2}+\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)=\left(k_0+\frac{mg}{2l}\right)x^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2．$$

故弹簧摆近似做简谐振动．

解析 略．

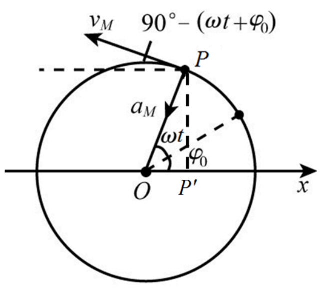
参考圆及其应用

知识点睛

由于简谐振动是变加速运动，运动规律比较复杂，其运动物理量（位移x、速度v、加速度a）与时间t的关系通常需要应用微分方程求解。

做简谐振动的物体满足$F=-kx$（这里k是比例系数，并不一定是弹簧的劲度系数），即$ma=-kx$，令$\omega^2=\frac{k}{m}$，可化简得：$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$，这个方程的解为$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$，其中$\varphi_0$为初相，$\omega t+\varphi_0$叫相位。振动周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$。这里用到一些高等数学知识，不要求大家掌握。下面我们借助参考圆，可以巧妙的得到同样的结果。

如图所示，一质量为m的质点P在xy平面内以原点O为圆心做匀速圆周运动，半径为A，角速度为ω，线速度是ωA。$t=0$时，PO与x轴夹角为φ_0，在t时刻，PO与x轴夹角为$\omega t+\varphi_0$。



容易看出，当P点绕O点做匀速圆周运动时，P在x轴上的投影点P'将以O为平衡位置左右振动。在t时刻，P'点的坐标为$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$。这表明$P'$在$x$轴上的运动是简谐运动。

由此得到一个有用的结论：匀速圆周运动的投影为一简谐运动。也就是说，任何一个简谐运动都可找到一个对应的参考圆，参考圆的圆心为简谐运动的平衡位置，半径为简谐运动的振幅，匀速圆周运动的周期即简谐运动的周期。

下面我们借助参考圆研究简谐振动的速度及加速度。

t时刻，P点的速度是ωA，其在x轴上投影的速度（即P'点的速度）为：

$$v=-\omega A\cos[90°-(\omega t+\varphi_0)]=-\omega A\sin(\omega t+\varphi_0)$$

同理，P点的加速度是ω^2A，其在x轴上投影的加速度（即P'点的加速度）为：

$$a=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

联立可得：$a=-\omega^2x$，即$F=ma=-m\omega^2x=-kx$，其中$k=m\omega^2$为比例系数。由此可见，简谐振动的动力学判据是正确的。

简谐振动周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，与前面微分方程解得结果相同。

****

教师版说明：老师还可以利用上面的结论，说明一下弹簧振子的能量与振幅有关。

****

公式

①上面我们已经得出一个有关简谐振动周期的结论：若物体振动过程中受力满足$ma=-kx$（m、k均可理解为比例系数），则振动周期$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$。

②下面我们不加证明的给出结合能量判据计算周期的结论：若物体在运动过程中，任意位置的机械能可以写成$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=$ 常数（m、k均可理解为比例系数），则振动周期$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$。

例题精讲

****

例题说明：下面几道题目练习简谐振动周期的计算。

****

10 两位外星人A和B生活在一个没有自转的匀质球形星体上．有一次他们决定进行一次比赛，看谁先到达星球的对径位置．A计划沿星球直径开一个隧道，采用自由下落的方式到达对径位置；B计划沿近地卫星轨道飞半圈到对径位置．问谁会赢得比赛．

答案 平局

解析 利用例2的结论，A做简谐振动，设星球质量为M，星球半径为R，则振动周期为

$T_A=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$，$A$运动时间$t_A=\frac{T_A}{2}=\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$．

B绕近地轨道飞行，万有引力提供向心力$G\frac{Mm}{R^2}=m\frac{4\pi^2R}{T_B^2}$，解得：$T_B=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$，因此，$B$运动时间$t_B=\frac{T_B}{2}=\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$．

因此，比赛以平局收场．

故答案为：平局．

11 一轻弹簧两端固连着两个小球A，B，若将球B固定，测得小球A的振动频率为f．若将小球A固定，测得小球B的振动频率为f_B．现将此系统自由地平放在光滑水平面上，求此系统的自由振动频率．

答案 $\sqrt{f_A^2+f_B^2}$

解析 设整根弹簧的劲度系数为k，由弹簧振子周期公式$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$，

可得：$f_A=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m_A}}$，$f_B=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m_B}}$．

将此系统自由地平放在光滑水平面上，系统水平方向不受外力，质心O静止，小球A，B分别相对质心做简谐振动（如图所示）．

AO段弹簧劲度系数$k_A=k\dfrac{l}{\dfrac{m_B}{m_A+m_B}l}=\dfrac{m_A+m_B}{m_B}k$，

OB段弹簧劲度系数$k_B=k\dfrac{1}{\dfrac{m_A}{m_A+m_B}l}=\dfrac{m_A+m_B}{m_A}k$；

此时系统振动频率$f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_A}{m_A}}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_B}{m_B}}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{m_A+m_B}{m_Am_B}k}$．

联立可得：$(2\pi f)^2=(2\pi f_A)^2+(2\pi f_B)^2$，即$f=\sqrt{f_A^2+f_B^2}$．

故答案为：$\sqrt{f_A^2+f_B^2}$．

****

例题说明：下面的题目涉及非完整周期简谐运动的时间。

****

12 一质点做简谐振动，从平衡位置运动到最远点需要$\dfrac{1}{4}$周期，则从平衡位置走过该距离的一半所需要的时间为（　）

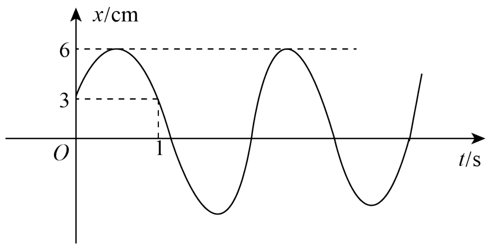
A. $\dfrac{1}{8}$周期　　B. $\dfrac{1}{6}$周期　　C. $\dfrac{1}{10}$周期　　D. $\dfrac{1}{12}$周期

答案 D

解析　根据简谐运动的图象及表达式，$x=A\sin\dfrac{2\pi}{T}t$，将$t=\dfrac{T}{4}$代入，$x=A$，再将$x=\dfrac{A}{2}$代入，知$t=\dfrac{T}{12}$，故D项正确．

故选D．

13 有一弹簧振子的振动曲线如图所示，则该弹簧振子的周期为______．



答案　$T=3\text{s}$

解析　略

14 一质点沿直线做简谐振动，相继通过距离为$16\ \text{cm}$的两点A和B，历时$1s$，并且在A、B两点处具有相同的速度；再经过$1s$，质点第二次通过B点．该质点运动的周期和振幅分别为（　）

A. $3s$，$8\sqrt{3}\ \text{cm}$　　B. $3s$，$8\sqrt{2}\ \text{cm}$　　C. $4s$，$8\sqrt{3}\ \text{cm}$　　D. $4s$，$8\sqrt{2}\ \text{cm}$

答案　D

解析　由题意知A，B两点位于平衡位置O两侧对称点上，距离O都为8cm，并且由对称性可知，物体从O到B用时0.5s，从B到位移最大位置用时也为0.5s，因此$\dfrac{T}{4}=1$，得$T=4\text{s}$．

设物体从平衡位置起的运动方程为$x=A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)=A\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$

当$t=0.5\text{s}$时，$x=8\text{cm}$，解得$A=8\sqrt{2}\text{cm}$．

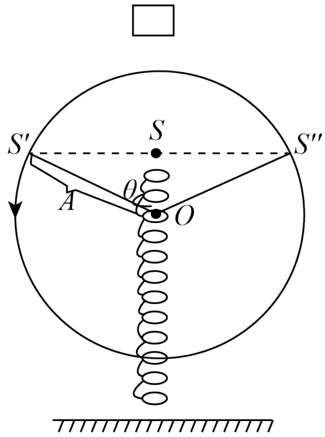
因此选D．

15 物体沿x轴作简谐振动，振幅$A=0.12\text{m}$．$t=0$时，物体由$x=0.06\text{m}$处开始向x轴正方向运动，经过1s时间，物体第一次回到出发点，求物体运动的$x\sim t$表达式．

答案　$x=0.12\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi t-\dfrac{\pi}{3}\right)$．

解析　略

16 如图所示，一根轻质弹簧被竖直固定在地面上，将重物m在弹簧正上方h_1高处静止释放，重物m自由下落后与弹簧接触，经过时间t后被弹簧向上抛出，如将重物m在弹簧正上方$h_2(h_2>h_1)$高处静止释放，重物m自由下落后与弹簧接触，经过时间t_2后被弹簧向上抛出，则（　　）



A. $t_1>t_2$

B. $t_1<t_2$

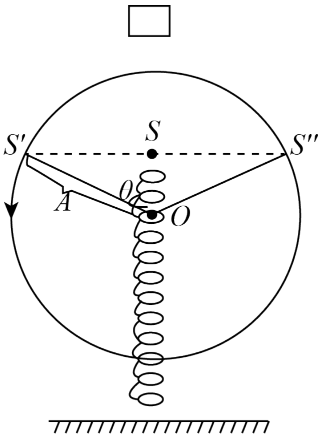
C. $t_1=t_2$

D. 条件不足，无法确定

答案　A

解析　解法一：

参考圆法，如图物体接触弹簧后开始做简谐振动，其在参考圆上的像开始做角速度$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$恒定的圆周运动．圆半径$A$（即振幅）由物体接触弹簧初速度决定，$A$越大，像从$S'$转到$S''$对应圆心角越小，时间就越少．

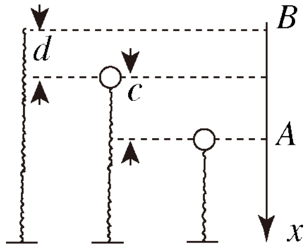


解法二：

把振动过程分为两段，在平衡位置下方段与上方段，下方段物体下降上升，一个来回时间为半个周期，与位移无关，而上方段两次位移一样，明显在h_2释放，平均速度快，运动时间少．

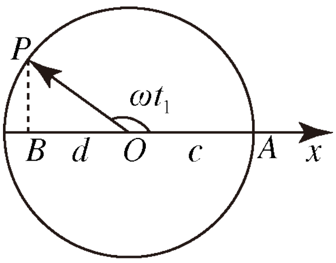
故选A．

17 如图所示，一个劲度系数为k的轻弹簧竖直固定在桌上，将小球放在弹簧上，弹簧被压缩到d后平衡，然后按住小球使弹簧再被压缩c，且$c>d$，松开小球后，求上球上升到最高点所需的时间．



答案 $\sqrt{\frac{d}{g}}\left(\pi-\operatorname{ar}\cos\frac{d}{c}\right)+\sqrt{\frac{c^2-d^2}{dg}}$

解析 因$c>d$，所以小球从A到B做非完整简谐运动，越过B后做竖直上抛运动．当小球沿x轴运动到B点时，在如图所示的参考圆中，小球的参考点P转过的角度为ωt_1，而$\cos\omega t_1=-\frac{d}{c}$，又由于$mg=kd$，故$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$，联立可得：$t_1=\sqrt{\frac{d}{g}}\left(\pi-\operatorname{ar}\cos\frac{d}{c}\right)$．

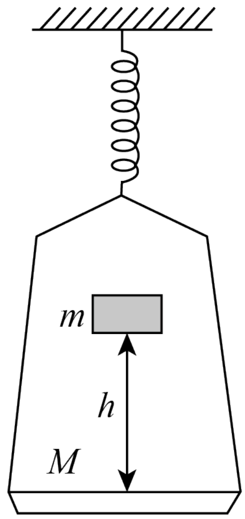


设小球上升到B点速率为v_B由机械能守恒定律得：$\frac{1}{2}k(d+c)^2=mg(d+c)+\frac{1}{2}mv_B^2$，又$mg=kd$，联立解得：$v_B=\sqrt{\frac{(c^2-d^2)g}{d}}$．故小球从$B$点做竖直上抛运动到最高点所需时间为$t_2=\frac{v_B}{g}=\sqrt{\frac{c^2-d^2}{dg}}$．总时间$t=t_1+t_2=\sqrt{\frac{d}{g}}\left(\pi-\operatorname{ar}\cos\frac{d}{c}\right)+\sqrt{\frac{c^2-d^2}{dg}}$．

故答案为：$\sqrt{\frac{d}{g}}\left(\pi-\operatorname{ar}\cos\frac{d}{c}\right)+\sqrt{\frac{c^2-d^2}{dg}}$．

18 一质量为M的盘子，悬挂在劲度系数为k的轻弹簧下，质量为m的砝码在离盘高h处自由落下掉在盘中，如图所示．砝码落入盘中后即和盘一起向下运动，求砝码与盘相碰至盘运动到最低点的时

间．



答案 $\sqrt{\frac{M+m}{k}}\left(\pi-\arccos\sqrt{\frac{(M+m)g}{(M+m)g+2kh}}\right)$

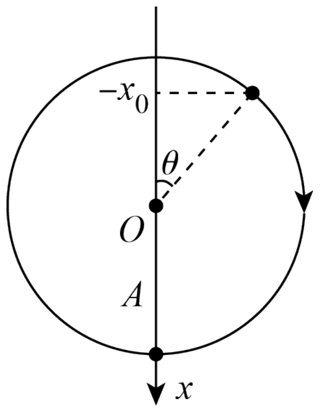
解析 m与M先发生完全非弹性碰撞，设碰后速度为v_1，根据动量守恒定律，有$m\sqrt{2gh}=(M+m)v_1$．

开始时盘的位置与碰后做简谐运动的平衡位置间的距离为$x_0=\frac{mg}{k}$．

设非完整简谐运动的振幅为A，取最低点为重力势能零参考面，由功能原理得：

$(M+m)g(x_0+A)+\frac{1}{2}k\left(\frac{Mg}{k}\right)^2+\frac{1}{2}(M+m){v_1}^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{Mg}{k}+x_0+A\right)^2$．

由图中所示参考圆可知$\cos\theta=\frac{x_0}{A}$，振动的圆频率$\omega=\sqrt{\frac{k}{M+m}}$．

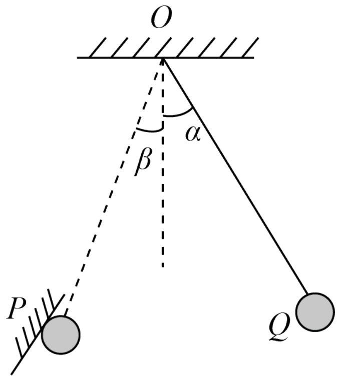


联立解得相碰至运动到最低点的时间为：

$t=\frac{\pi-\theta}{\omega}=\sqrt{\frac{M+m}{k}}\left(\pi-\arccos\sqrt{\frac{(M+m)g}{(M+m)g+2kh}}\right)$．

故答案为：$\sqrt{\frac{M+m}{k}}\left(\pi-\arccos\sqrt{\frac{(M+m)g}{(M+m)g+2kh}}\right)$．

19 一根细线下端系一小球，上端固定在O点，摆线开始与平衡位置夹角为$\alpha(\alpha<5°)$，摆球由静止开始摆下，当摆线与竖直线夹角为$\beta(\beta<\alpha)$时，小球与斜墙的P处发生弹性碰撞，如图所示．试求这种摆的振动周期T_1与没有斜墙时单摆的振动周期T之比$\frac{T_1}{T}$．

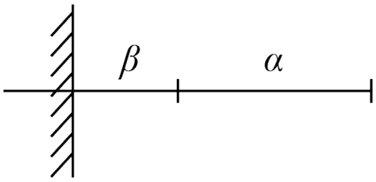


答案 $\frac{T_1}{T}=1-\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\beta}{\alpha}$

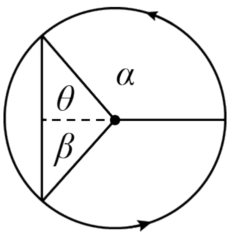
解析 没有斜强时单摆运动方程

$\theta=\alpha\cos W_OT$

可以与$x=A\cos W_OT$的简谐振动类比



问题变为β处墙面光滑反弹则根据参考圆



可知有斜墙时$T_1=\frac{2(\pi-\theta_O)}{W_O}$

无斜墙时$T=\frac{2\pi}{W_O}$

其中$\theta_O=\cos^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$

则$\frac{T_1}{T}=1-\frac{1}{\pi}\text{arc}\ cos\frac{\beta}{\alpha}$

机械振动习题课

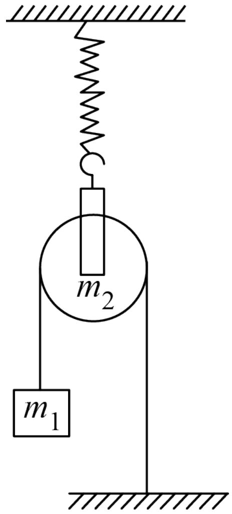
例题精讲

****

例题说明：下面这道题目考察简谐振动的证明及周期计算，涉及牛顿定律和加速度关联，有一定难度。

****

20 如图所示，一质量为m_2的光滑滑轮由劲度系数为k的轻弹簧吊在天花板上，一根轻绳一端悬挂一个质量为m_1的重物，另一端竖直固定在地板上．试证明重物沿竖直方向的振动是简谐运动，并求其周期．



答案 证明见解析

解析 设平衡时弹簧的伸长量为x_0，由平衡条件可得：$kx_0=2m_1g+m_2g$，

当m_1向下偏离平衡位置x时，设绳中张力为T，则由牛顿第二定律可得（向上为正）：

对m_1：$T-m_1g=m_1a_1$，对滑轮：$k\left(\frac{x}{2}+x_0\right)-2T-m_2g=m_2a_2$，

由加速度关联关系：$a_2=2a_2$，

联立解得：$kx=(4m_1+m_2)a_1$，

故m_1所受合力$F=m_1a_1=\dfrac{km_1}{4m_1+m_2}x=k'x$，方向指向平衡位置，故重物做简谐振动．

$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m_1+4m_2}{k}}$．

****

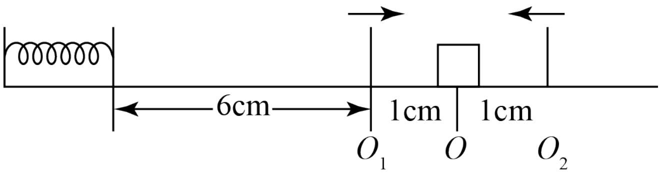
例题说明：下面这两道题目，物体在每个单向运动过程中分别做简谐振动。

****

21 如图所示，物体质量为2kg，连接在劲度系数为400N/m的弹簧一端，放置于水平地面上，弹簧另一端固定于墙上．物体与地面间的摩擦因数为0.2．弹簧初始处于原长（物体位于O点），使物体向左挤压弹簧，当弹簧相对于原长压缩7cm后静止释放，求：物体最后停止的位置和整个过程的总时间．

答案 物体最后停止在O_2处；总时间为$\frac{3\pi}{20}\sqrt{2}\text{s}$

解析 设弹簧弹力与摩擦力平衡时形变量为x_0，由$kx_0=\mu mg$，解得$x_0=1\text{cm}$．物体每次单向振动都是简谐振动，但平衡位置不同，分别在O_1、O_2处，如图所示．



物体第一次向右运动，O_1为平衡位置，振幅$A_1=(7-1)\text{cm}=6\text{cm}$，因此最远运动到$O_1$右侧6cm处．

此后物体向左运动，O_2为平衡位置，振幅$A_2=(6-2)\text{cm}=4\text{cm}$，最远运动到$O_2$左侧4cm处．

以此类推，每次单向振动振幅依次减少2cm，一旦在O_1O_2范围停下将不再启动．

因此，物体经三次单向运动，最终停在O_2处；$t=3\cdot\frac{T}{2}=\frac{3}{2}\cdot2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=3\pi\sqrt{\frac{2}{400}}\text{s}=\frac{3\pi}{20}\sqrt{2}\text{s}$．

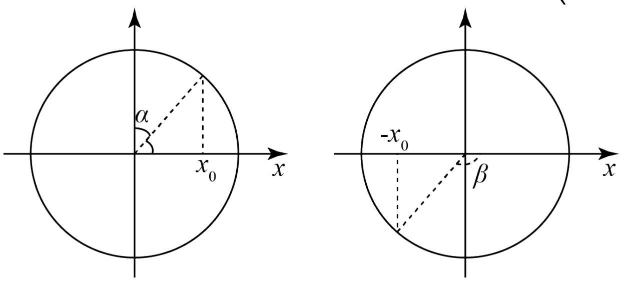
故答案为：物体最后停止在O_2处；总时间为$\frac{3\pi}{20}\sqrt{2}\text{s}$．

22 轻弹簧的劲度系数为k，一端固定在侧壁上，质量为m的物体与桌面间的滑动摩擦力为f（最大静摩擦力约等于滑动摩擦力），以速度v_0开始压缩弹簧，以后又被反向弹回并能脱离弹簧，设物体从压缩弹簧到速度为0所需时间为t_1，再从速度为0到离开弹簧的时间为t_2，求$\frac{t_1}{t_2}$的比值．

答案 $$\frac{\pi-2\arcsin\frac{f}{\sqrt{f^2+kmv_0^2}}}{\pi+2\arcsin\frac{f}{\sqrt{f^2+kmv_0^2}-2f}}$$

解析 物体压缩弹簧过程做非完整简谐运动，平衡位置在弹簧伸长$x_0=\frac{f}{k}$处，振动的角频率$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$，压缩的最大距离$x_m$满足：$-fx_m-\frac{1}{2}kx_m^2=0-\frac{1}{2}mv_0^2$，解得：

$x_m=\dfrac{-f+\sqrt{f^2+kmv_0^2}}{k}$．故简谐运动的振幅$A=x_0+x_m=\dfrac{\sqrt{f^2+kmv_0^2}}{k}$，由如图所示的参考圆可得：$t_1=\dfrac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\omega}=\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x_0}{A}}{\omega}=\sqrt{\dfrac{m}{k}}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{f}{\sqrt{f^2+kmv_0^2}}\right)$．



同理，物体被反弹时平衡位置在弹簧被压缩$x_0=\dfrac{f}{k}$处，故简谐运动的振幅变为

$A'=x_m-x_0=\dfrac{\sqrt{f^2+kmv_0^2}-2f}{k}$，但周期不变，由图示单位圆知识可得：

$t_2=\dfrac{\beta}{\omega}=\dfrac{\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{x_0}{A'}}{\omega}=\sqrt{\dfrac{m}{k}}\left(\dfrac{\pi}{2}+\arcsin\dfrac{f}{\sqrt{f^2+kmv_0^2}-2f}\right)$；

因此，$\dfrac{t_1}{t_2}=\dfrac{\pi-2\arcsin\frac{f}{\sqrt{f^2+kmv_0^2}}}{\pi+2\arcsin\frac{f}{\sqrt{f^2+kmv_0^2}-2f}}$．

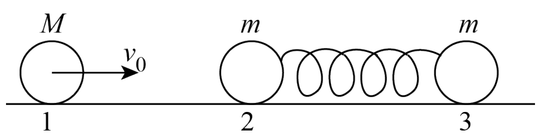
故答案为：$\dfrac{\pi-2\arcsin\frac{f}{\sqrt{f^2+kmv_0^2}}}{\pi+2\arcsin\frac{f}{\sqrt{f^2+kmv_0^2}-2f}}$．

****

例题说明：下面这道题，是碰撞与简谐振动的综合题目。

****

23 如图所示，劲度系数为$k=1\mathrm{N/m}$的轻弹簧连接着两个质量均为$m=2\mathrm{kg}$的小球，静止于光滑水平桌面上，另一质量为$M=10\mathrm{kg}$的小球1以速度v_0撞向小球2，v_0的方向沿着两小球2和3的连线方向，设碰撞为弹性的且碰撞时间极短．



(1) 试问第一次碰撞刚结束时两个小球的速度分别是多少？

(2) 第一次碰撞后，小球1、2有可能再次发生碰撞，试求第—次碰撞与可能的第二次碰撞之间小球1、2的位置随时间的变化关系．

(3) 试由前面的结论判断小球1、2是否会发生第二次碰撞，如果发生，试估算前两次碰撞之间的时间间隔约为多少，如果不会发生，解释原因．

答案 (1) $\frac{2}{3}v_0$，$\frac{5}{3}v_0$

(2) $x_2=\frac{5}{6}v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t$

(3) $t=4.1\text{s}$

解析 (1) 对小球1、2组成的系统，根据动量守恒定律和机械能守恒，有$Mv_0=Mv_1+mv_2$， ①

$\frac{1}{2}Mv_0^2=\frac{1}{2}Mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2$， ②

联立式①和式②，得：

$v_1=\frac{M-m}{M+m}v_0=\frac{2}{3}v_0$，

$v_2=\frac{2M}{M+m}v_0=\frac{5}{3}v_0$．

(2) 小球1的位置随时间的变化关系为$x_1=\frac{2}{3}v_0t$，

小球2、3组成的系统不受外力，故质心做匀速直线运动，质心速度为

$v_C=\frac{mv_2}{m+m}=\frac{5}{6}v_0$，以质心为参考系，小球2做简谐运动且对应的弹簧劲度系数为$2k$，则$\omega=\sqrt{\frac{2k}{m}}$，$A=\frac{v_2-v_C}{\omega}=\frac{5}{6}v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$，所以小球2的位置随时间的变化关系为：

$x_2=\frac{5}{6}v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t$．

(3) 若小球1、2发生第二次碰撞，则$x_1=x_2$，即$\frac{2}{3}v_0t=\frac{5}{6}v_0t+\frac{5}{6}v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t$．

化简，得$-t=5\sin t$．

求解超越方程，得$t=4.1\text{s}$．

****

例题说明：下面三道题目为摆钟变快（慢）问题

****

24 北京和南京的重力加速度分别为9.801m/s^2和9.795m/s^2．把在北京校准的摆钟拿到南京，它会变快还是变慢？一昼夜差多少？

答案 变慢；$\approx 26.45\text{s}$

解析　设北京的重力加速度为g_1，在北京校准的摆钟的摆长为l，周期为T_1．在南京，重力加速度变为g_2，周期变为T_2．由于$g_2 < g_1$，因此$T_2 > T_1$，即摆钟每摆动一次的时间都比标准钟的长，所以钟变慢了．

一昼夜的时间为$t_0 = 86400\text{s}$，在南京摆钟运行一昼夜的示数为$\dfrac{t_0}{T_2}T_1$，与准确钟的差值为

$\Delta t = t_0 - \dfrac{t_0}{T_2}T_1 = \left(1-\sqrt{\dfrac{g_2}{g_1}}\right)t_0 = \left(1-\sqrt{\dfrac{9.795}{9.801}}\right)\times 86400 \approx 26.45\text{s}$．

25 某栋高层大楼的电梯服务员是一位一丝不苟的人，他为按时结束一天的工作，把一台准确的摆钟挂在电梯的壁上．电梯具有向上加速度的时间和具有向下加速度的时间相同，且加速度大小也相同．试问电梯服务员是按时结束工作，还是超时或提早了呢？

答案　超时．

解析　电梯向上加速时，摆的等效重力加速度为$g+a$；电梯向下加速时，摆的等效重力加速度为$g-a$．设向上加速和向下加速过程中，实际时间均为t_0；钟面显示的时间分别为t_1、t_2，则$t_1 = \dfrac{\sqrt{g+a}}{\sqrt{g}}t_0$，$t_2 = \dfrac{\sqrt{g-a}}{\sqrt{g}}t_0$．由均值不等式可知：$t_1 + t_2 \leqslant 2t_0$，因此钟面显示时间比实际时间少，此人工和超时了．

26 有一摆钟的摆长为l_1时，在某一标准时间快a秒，若摆长为l_2时，在同一标准时间内慢b秒，为使其准确，摆长应为多少？

答案　$\dfrac{(a+b)^2 l_1 l_2}{\left(a\sqrt{l_1}+b\sqrt{l_2}\right)^2}$

解析　设标准时间为t_0，准确钟摆长为l，对快钟：$\dfrac{t_0}{2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}}\times 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} - t_0 = a$；对慢钟：

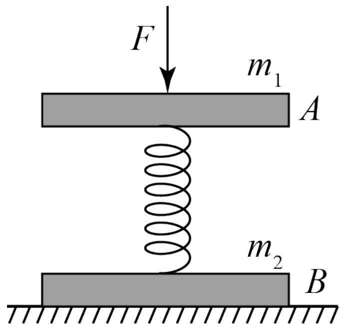
$t_0 - \dfrac{t_0}{2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}}\times 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = b$．联立解得$l = \dfrac{(a+b)^2 l_1 l_2}{\left(a\sqrt{l_1}+b\sqrt{l_2}\right)^2}$．

****

例题说明：下面这两道题目利用简谐振动的对称性：两端最大振幅处所受回复力等大反向

****

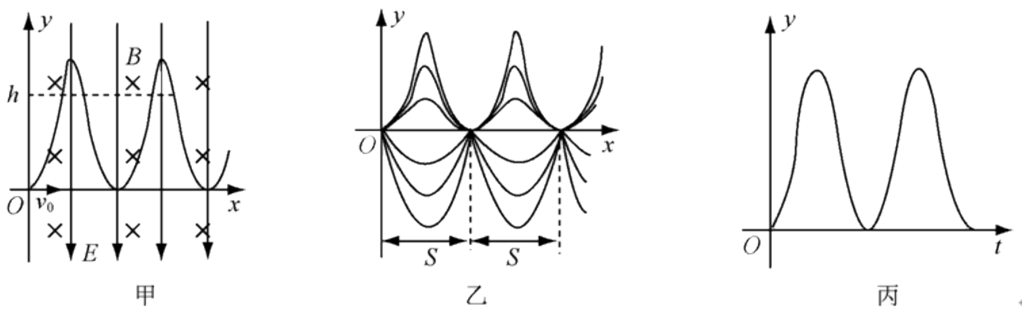
27 质量分别为m_1、m_2的木板A、B，被一根轻弹簧固连在一起，在A板上施加一个竖直向下的压力F，整个系统处于静止状态，如图所示．现在撤去力F，为了使得A板跳起时刚好能将B板带离地面，求力F的大小（请利用简谐振动的对称性求解）



答案 $(m_1+m_2)g$

解析 略

28 如图甲所示，在$x>0$的空间中存在沿y轴负方向的匀强电场和垂直于xOy平面向里的匀强磁场，电场强度大小为E，磁感应强度大小为B．一质量为m、电荷量为$q(q>0)$的粒子从坐标原点O处，以初速度v沿x轴正方向射入粒子的运动轨迹见图甲，不计粒子的重力．现只改变入射粒子初速度的大小，发现初速度大小不同的粒子虽然运动轨迹（$y-x$曲线）不同，但具有相同的空间周期性，如图乙所示；同时，这些粒子在y轴方向上的运动（$y-t$关系）是简谐运动，且都有相同的周期．当入射粒子的初速度大小为v时，其$y-t$图像如图丙所示，求该粒子在y轴方向上做简谐运动的振幅A．



答案 $\dfrac{m}{qB}\left(v_0-\dfrac{E}{B}\right)$

解析 设粒子在y方向上的最大位移为y_m（图丙曲线的最高点处），对应的粒子运动速度大小为v_1（方向沿x轴）．因为粒子在y方向上的运动为简谐运动，因而在$y=0$和$y=y_m$处粒子所受的

合外力大小相等，方向相反，即：$qv_0B-qE=-(qv_1B-qE)$，

由动能定理有：$-qEy_m=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2$，

又由于$A=\frac{1}{2}y_m$，

联立解得：$A=\frac{m}{qB}\left(v_0-\frac{E}{B}\right)$.

故答案为：$\frac{m}{qB}\left(v_0-\frac{E}{B}\right)$.

平面简谐横波波函数

知识点睛

借助波动图像，可以定性地分析波的传播方向上任意位置的质点的振动情况，那么能否定量地研究波的传播方向上任意位置的质点的运动规律呢？这就需要用到波函数。

波函数可以定量地描述在任意时刻离开波源任意距离处的介质质点的运动情况，设有一列平面简谐横波沿x轴正方向传播，各质点均在y方向振动，取波源O为坐标原点，波源振动方程为$y=A\cos(\omega t+\varphi)$，其中$A$为振幅，$\omega$为角频率，$\varphi$为初相位。若波在介质中的传播速度为$v$，则在波传播方向上坐标为$x$的质点$P$的振动情况应为：

①振幅和角频率与波源相同；

②波从波源传到P点需要时间$\Delta t=\frac{x}{v}$，故点相位较波源落后$\frac{\Delta t}{T}2\pi=\omega\frac{x}{v}$，因此，任意时刻任意位置质点的振动规律（即平面简谐横波波函数）为：

$$y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi\right]=A\cos\left[\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi\right]$$

平面简谐横波波函数是一个多元函数，包含两个变量：t和x。如果我们固定时间t，波函数就成了波动图像的方程；如果我们固定x，波函数就成了这个位置上质点的振动方程。

****

教师版补充：作为波函数的应用，老师可以利用波函数推导一下两列波发生干涉的条件，以及加强、减弱对应的条件，这部分内容需要用到较多数学推导，老师自己选讲。

****

例题精讲

29 已知一列平面简谐横波沿x轴正方向传播，各质点均在y方向振动，坐标为x_1处的质点振动方程为$y=A\cos(\omega t+\varphi)$，波速为$v$，求：

(1) 该平面简谐波的波函数．

(2) 若该平面简谐波沿x轴负方向传播，求波函数．

答案 (1) $y=A\cos\left[\omega t-\omega\dfrac{x-x_1}{v}+\varphi\right]$

(2) $y=A\cos\left[\omega t+\omega\dfrac{x-x_1}{v}+\varphi\right]$

解析 (1) 略

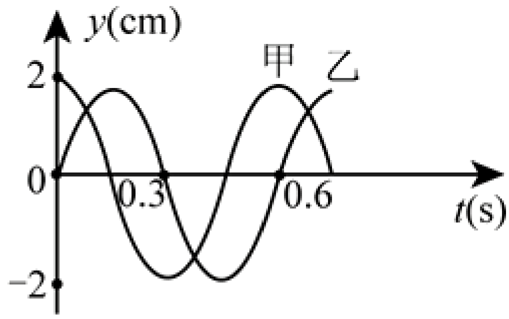
(2) 略

30 已知某简谐横波的波函数为$y=(5\mathrm{cm})\cos\pi[(2.50\mathrm{s}^{-1})t-(0.01\mathrm{cm}^{-1})x]$，求波长、周期和波速．

答案 $T=0.8\mathrm{s}$；$\lambda=200\mathrm{cm}$；$v=250\mathrm{cm/s}$

解析 略

31 如图所示，甲、乙分别表示一列横波上相距3m的两个质点A和B的振动图像．已知波长$3\mathrm{m}<\lambda<12\mathrm{m}$．设$P$点距$B$点$\frac{1}{3}\mathrm{m}$，且在$AB$的中间，则从$t=0$开始，$P$经过1s所通过的路程是多少？



答案 14cm

解析 依题意，AB间距离小于一个波长，且$t=0$时，质点A在波峰、质点B在平衡位置．因此$AB=\dfrac{\lambda}{4}$或$AB=\dfrac{3}{4}\lambda$；解得：$\lambda=4\mathrm{m}$或$\lambda=12\mathrm{m}$(舍去)．由$t=0$时刻A、B的振动方向可知，波

从B传向A．故B点的振动方程为$y=2\sin\left(\frac{10}{3}\pi t\right)$．因此，$P$点振动方程为$y=2\sin\left(\frac{10}{3}\pi t-\frac{\pi}{6}\right)$．$t=0$时，$y=-1\text{cm}$；$t=1\text{s}$时，$y=-1\text{cm}$；且在$t=0$时$P$点沿$y$轴正方向运动，因此$P$点在1s内经过的路程是$8+6=14\text{cm}$．

故答案为：14cm．

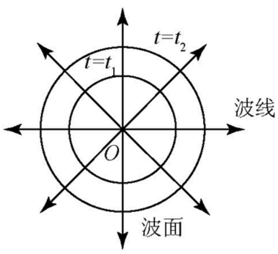
惠更斯原理

知识点睛

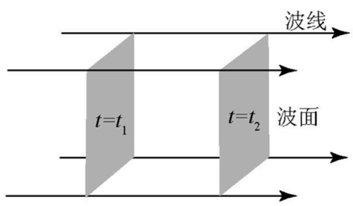
定理

惠更斯指出：由波源发出的波，在同一时刻t时，它所达到的各点的集合所构成的面，叫做此时刻的波阵面（或波面），在同一波阵面上各点的相位都相同，且波阵面上的各点又都作为新的波源向外发射子波，子波相遇时可以互相叠加，历时Δt后，这些子波的包络面就是$t+\Delta t$时刻的新的波阵面。波的传播方向与波阵面垂直（代表波的传播方向的线称为波线）。这就是**惠更斯原理。**

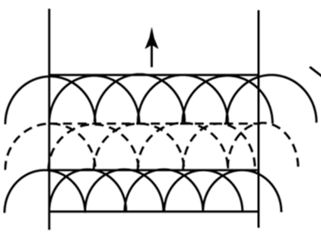
波阵面是一个平面的波叫做平面波，其传播方向与此平面垂直，波阵面是一个球面（或球面的一部分）的波叫做球面波，其传播方向为沿球面的半径方向，如图所示。



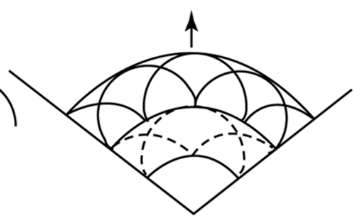
球面波



平面波



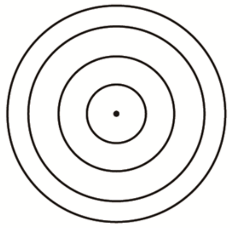
平面波的传播



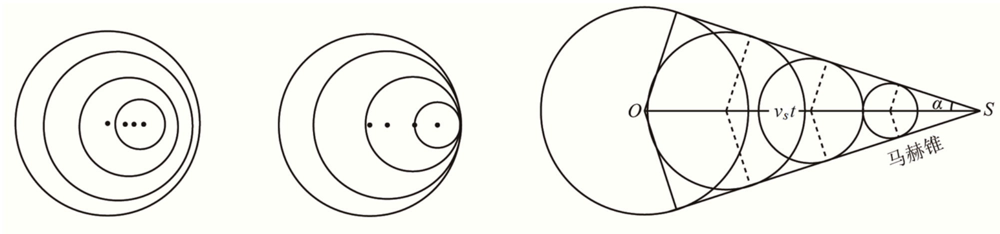
球面波的传播

定义

当波源静止时，点波源发出的波面是同心圆，如图所示。



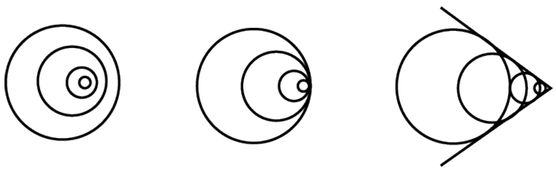
当波源发生运动时，点波源所产生的波面中心会错开，不再是同心圆；当波源的运动速度小于波速时，产生的波面如图甲所示；当波源的速度趋于波速时，所有的波面在一点相切，如图乙所示；当波源的速度超过波速时，波面的包络面成圆锥状，称为**马赫锥**，如图丙所示，在这种情况下波的传播不会超过运动物体本身，马赫锥面是波的前缘，其外没有扰动波及。



例题精讲

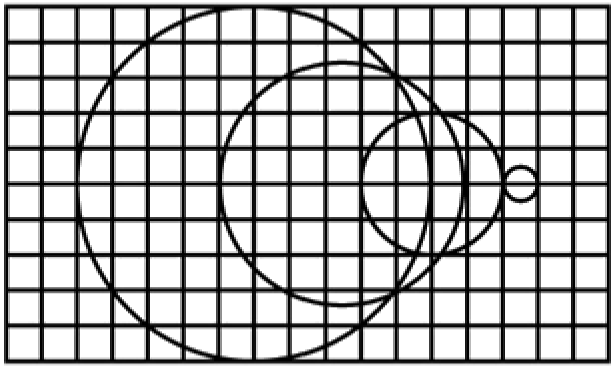
32 中国有“蜻蜓点水”的成语，如果蜻蜓在平静的湖面上由西向东飞行，并等间隔地“点水”，试画出在水面上可能形成的水面波的波阵面的情况．

答案



解析 略

33 一频率为$f=100\text{Hz}$的波源，以速度$v=500\text{m/s}$做匀速直线运动，且以相等的时间间隔向各个方向发出机械波．某一时刻，发出的机械波在运动平面上到达的最远位置如图所示，则该机械波的波长约为（　　）



A. 1m B. 3m C. 5m D. 7m

答案 B

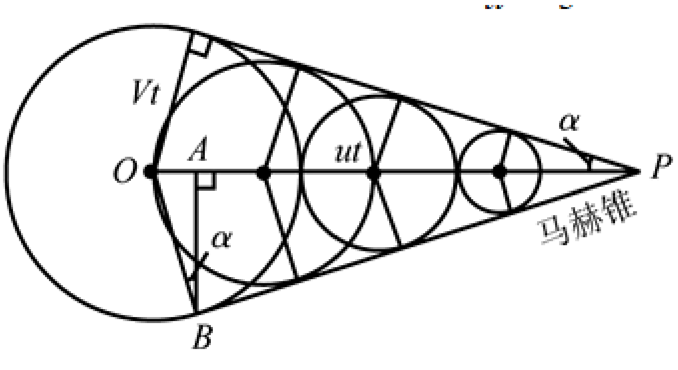
解析 略．

34 在3300m高空，一喷气式飞机以$u=550\mathrm{m/s}$的速率飞越地面上某人头顶上空，空气中的声速$V=330\mathrm{m/s}$．求当喷气飞机通过此人头顶之后，要经过多长时间冲击波才能到达他所在之处．

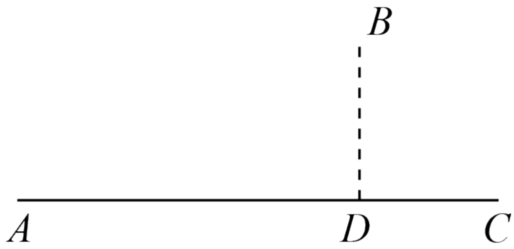
答案 8s

解析 如图所示，当飞机飞到P点时，飞机在O处发出的声音恰好传到地面上人所在的B处，设飞机从B正上方A点飞到P的时间为t，有$\sin\alpha=\dfrac{V}{u}=\dfrac{3}{5}$，$t=\dfrac{\overline{AP}}{u}=\dfrac{\overline{AB}\cot\alpha}{u}=8\mathrm{s}$．

故答案为：8s．



35 如图所示，AC是东西走向的车马道，它的北面是一片砂砾地带，人在上面疾行速度只有$6\mathrm{km/h}$，而在车马道上马车速度为$10\mathrm{km/h}$．已知$BD=12\mathrm{km}$，$AD=16\mathrm{km}$．求一人要从A地到B地所需要的最短时间．



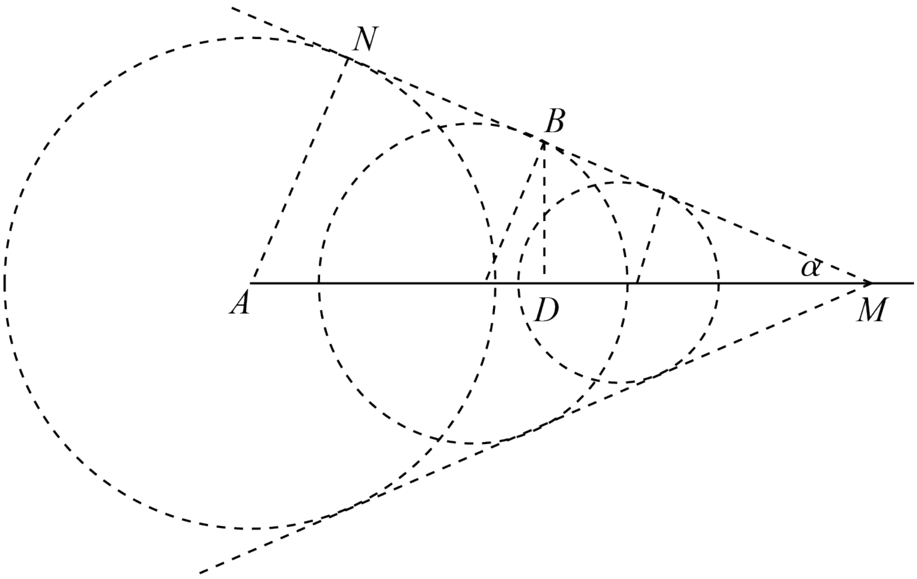
答案 3.2h

解析 本题解法很多，可以利用解析几何或微元求解，还可以根据费马原理由折射定律求解．下面我们根据惠更斯原理，利用任意时刻最远距离的包络线求解．

将人在砂砾地带中的疾行速度类比于波在介质中的传播速度，记做v；则车马道上马车的速度类比与波源的速度，记做u．由于$u>v$，因此，任意时刻人所能到达的最远距离包络线类似于上述马赫锥，设某时刻，人的最远距离包络线（波前）刚好能到达B点，如图所示．

则马赫锥的半顶角α满足$\sin\alpha=\dfrac{v}{u}=\dfrac{3}{5}$，由几何关系可得：$DM=\dfrac{BD}{\tan\alpha}=16\mathrm{km}$．因此，传播时间$t=\dfrac{AD+DM}{u}=3.2\mathrm{h}$．

故答案为：3.2h．



多普勒效应

知识点睛

背景故事

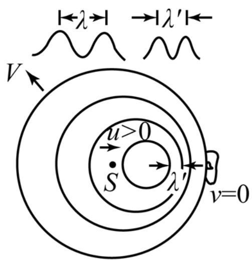
1842年，39岁的奥地利数学家、天文学家多普勒发表了题为《关于双星座和某些星体的有色光波》的论文，报告了他在观察星体色光变化时的发现：当星体向着地球运动时，光波的频率增大，光谱向紫色端移动；当星体远离地球运动时，光波的频率减小，光谱向红色端移动。这种由于光源和观察者之间的相对运动导致接收者收到的频率发生变化的现象，称为多普勒效应。1845年，荷兰物理学家白贝罗在铁路上用节火车头和辆平板车来验证多普勒的论点，结果发现多普勒效应也适用于声学领域。

为了简单起见，我们下面只研究低速情况下（不考虑相对论效应），波源与观察者的运动发生在他们之间的连线上（一维情况），且介质静止情况下的多普勒效应。

设波源、观察者以及它们的运动方向在同一直线上，并设观察者相对介质速度为v，指向波源为正；波源相对于介质的速度为u，指向观察者为正；介质中的波速为V(在各向同性介质中，V为恒量)。

（1）**波源运动，观察者静止的情况**，即$u \neq 0$，$v = 0$。

若波源、观察者相对媒质静止时，声音的频率为$f = \dfrac{V}{\lambda}$。现在令波源运动，如图所示。



设波动周期为T，则观察者在一个周期时间内接收到的波长为$\lambda' = \lambda - uT$，因此，观察者接收到的频率为：

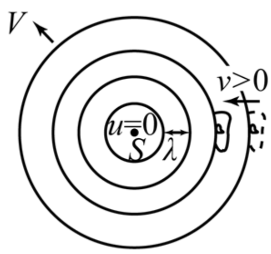
$$f' = \frac{V}{\lambda'} = \frac{V}{\lambda - uT} = \frac{V}{\lambda - \frac{u\lambda}{V}} = \frac{V}{\lambda\left(1 - \frac{u}{V}\right)} = \frac{f}{1 - \frac{u}{V}}$$

可见，当$u > 0$时，$f' > f$；$u < 0$时，$f' < f$。

（2）波**源静止，观察者运动的情况**，即$u = 0$，$v \neq 0$。

在波源、观察者相对介质静止时，声音频率f表示观察者在单位时间内所接收到的完整波的数目。现在观察者相对介质运动，速度为v，如图所示。在单位时间内接收完整波的数目为$\dfrac{V + v}{\lambda}$，增加数为$\frac{v}{\lambda}$。因此：

$$f' = \frac{V + v}{\lambda} = f\left(1 + \frac{v}{V}\right)$$



可见，当$v>0$时，$f'>f$；$v<0$时，$f'<f$。

（3）**波源和观察者同时运动的情况**，即$u\neq 0$，$v\neq 0$。

如果把波源运动导致观察者接收频率的改变，看作除以一个因子$1-\frac{u}{V}$，而观察者运动导致频率的改变，看作乘以一个因子$1+\frac{v}{V}$，那么，两者同时运动，就应该有表达式：

$$f'=f\frac{1+\frac{v}{V}}{1-\frac{u}{V}}=\frac{V+v}{V-u}f$$

结论

①波源与观察者相对静止时，接收频率等于波源频率；

②波源与观察者相互靠近时，接收频率大于波源频率；

③波源与观察者相互远离时，接收频率小于波源频率。

例题精讲

36 小明老师开车匀速驶向一红绿灯，已知红光频率$f_1\approx 4\times 10^{14}\mathrm{Hz}$，绿光频率$f_2\approx 5.5\times 10^{14}\mathrm{Hz}$，求小明老师是否有可能因为车速过快将红灯看成绿灯．

答案　不可能

解析　设车速为v时，会将红光看成绿光，则$f_2=\frac{c+v}{c}f_1$，解得：$v=0.375c$，显然不可能达到．

故答案为：不可能．

37 一个观察者在铁路近旁，当火车迎面驶来时，他听到的汽笛声频率为$f_1=440\mathrm{Hz}$，当火车驶过他身旁后，他听到的汽笛声的频率降为$f_2=392\mathrm{Hz}$．如果知道大气中声速约为$v=330\mathrm{m/s}$，求火车速度u．

答案　$19\mathrm{m/s}$

解析　当火车驶近时，$f_1=\frac{vf}{v-u}$；当火车远离时，$f_2=\frac{vf}{v+u}$；联立解得：$u=\frac{f_1-f_2}{f_1+f_2}v\approx 19\mathrm{m/s}$．

38 一固定的超声源发出频率为100kHz的超声波，一汽车向超声源迎面驶来，在超声源处接收到从汽车反射回来的超声波，其频率为110kHz．设空气中声速为330m/s，试计算汽车的行驶速度．

答案 15.7m/s

解析 设汽车行驶速度为u，声速为v．当声源及汽车都不动时，汽车接收到声波的频率为：$f=v/\lambda$．

当声波波源不动，汽车驶向声源时，由于声波对汽车的相对速度变为$u+v$，所以接收到声波频率变为：

$f_1=(u+v)/\lambda=(u+v)f/v$ ① 汽车将此频率声波向超声源反射回去，则汽车相当于一个发出频率为f_1的声波的波源．由于

此波源以速度u向接收处运动，所以对接收处而言，声波的波长λ_2变短，即$\lambda_2=\lambda_1-uT_1$式中λ_1、T_1为汽车反射声波的波长及周期，所以超声源处接收到的声波频率为：

$f_2=\dfrac{v}{(\lambda_1-uT_1)}=\dfrac{vf_1}{(v-u)}$ ②

联立①②两式可解得$f_2=\dfrac{(v+u)f}{(v-u)}$

由此可解得$u=\dfrac{(f_2-f)v}{(f_2+f)}=15.7(\mathrm{m/s})$

故答案为：15.7m/s．

39 蝙蝠在洞穴中飞来飞去，能非常有效地用超声波脉冲导航．假如蝙蝠发出的超声波频率为39kHz，当它以$\dfrac{1}{40}$声速的速度朝着表面平直的岩壁飞去时，求它听到的从岩壁反射回来的超声波频率．

答案 41kHz

解析 设声速为V，岩壁处接收到的频率$f'\dfrac{v}{v-\frac{1}{40v}}f_0=\dfrac{40}{39}f_0$，蝙蝠接收岩壁反射回来的声波频率为

$f''=\dfrac{v+\frac{4}{40}v}{v}f'=\dfrac{41}{39}f_0=41\mathrm{kHz}$．

故答案为：41kHz．

40 火车路轨铺设在两个相距很远的山崖之间，两崖壁竖直、互相平行，路轨与崖壁垂直．在两崖间的一段路轨上，火车头正以匀速度u行进，并不断鸣笛．笛声频率为f，声音在空气中传播速度为

v．求火车司机测得的回声频率为多大？(不考虑火车对声波的反射)

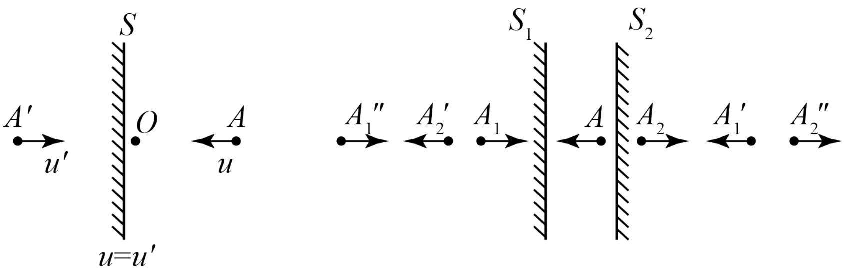
答案 $\frac{v+u}{v-u}f$、$\frac{v-u}{v+u}f$、f

解析 解法1：

先求出在火车头运动的路轨延长线上，紧贴崖壁的静止观测者收到火车头直接传到的笛声频率，利用静止观测者收到的多普勒频率公式可得：火车头前方和后方崖壁处收到的频率分别为$f_1=\frac{v}{v-u}f$，$f_2=\frac{v}{v+u}f$．这两频率的笛声在两崖壁间来回反射，因崖壁静止，所以频率不变，直至能量消耗完为止．火车司机接收到的回声，有从前方传过来的频率为f_1、f_2的回声，有从后方传过来的频率为f_1、f_2的回声，火车司机测得从前方传播过来的回声频率为$f_1'=\frac{v+u}{v}f_1\frac{v+u}{v-u}f$，$f_2'=\frac{v+u}{v}f_2=f$．火车司机测得从后方传播过来的回声频率为$f_1''=\frac{v-u}{v}f_1=f$，$f_2''=\frac{v-u}{v}f_2=\frac{v-u}{v+u}f$．综合以上结果，火车司机测得的回声频率共有三种不同频率，它们的大小分别为$\frac{v+u}{v-u}f$、f、$\frac{v-u}{v+u}f$．

解法2：镜像法

如图（a）所示，S为崖壁，O为紧贴崖壁的静止观测者，火车头A以匀速u接近崖壁，O处测得直接抵达的笛声频率，然后经静止崖壁反射，O处测得相同的频率．这个由O测得的崖壁反射的笛声频率，可以想象为崖壁另一边与A对称的一个虚声源A'以同样的速度u向O开来，虚声源A'发出的到达观测者处的笛声频率，与观测者应收到的笛声频率是完全一样的．因此，实声源A加上反射崖壁S系统，就可以用实声源A加上S表面反射的虚声源A'系统代替．



(a)　　　　(b)

有了以上讨论，再解本题，如图（b）所示，S_1和S_2为两平行崖壁，壁间A为实声源火车头．A相对于两崖壁的像为A_1、A_2，A_1、A_2相对于两崖壁的像为A_1'、A_2'，A_1'、A_2'相对于两崖壁的像为A_1''、A_2''……由图（b）可以看出，在观测者（火车司机）看来，各虚声源的运动方向，相对于实声源A的运动方向，只有三种关系：（1）相向行驶；（2）相背行驶；（3）同向行驶．因此，火车司机作为观测者，能够测得的笛声频率只有三种，依次为$\frac{v+u}{v-u}f$、

$\frac{v-u}{v+u}f$、f．

故答案为：$\frac{v+u}{v-u}f$、$\frac{v-u}{v+u}f$、f．

****

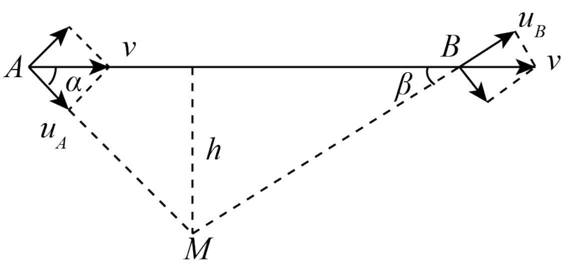
教师版补充：下面补充一道波的传播方向、声源速度、观察者速度三者不共线的题目，这里只要考虑在连线方向的速度分量即可，老师可以选讲。

****

41 飞机在地面上空以速度$v=200\mathrm{m/s}$做水平飞行，发出频率为$f_0=2000\mathrm{Hz}$的声波，静止在地面上的观察者测定飞机发出的声波频率，当飞机越过观察者的上空时，观察者在4s内测出的频率从$f_1=2400\mathrm{Hz}$降为$f_2=1600\mathrm{Hz}$，已知声波在空气中的传播速度$V=330\mathrm{m/s}$，试求飞机的飞行高度h．

答案 $h\approx 1083\mathrm{m}$

解析 观察者在4s内测出飞机发出的声波频率从$f_1=2400\mathrm{Hz}$降为$f_2=1600\mathrm{Hz}$，说明声源与观察者先接近后远离，如图所示．



设飞机在4s时间内从A点水平飞行到B点，航线高度为h，在M点接收到从A点发出的声波频率设为f_1，从B点发出的声波频率为f_2．声源沿AM向M接近的速度$u_A=v\cos\alpha$，沿BM远离M的速度$u_B=v\cos\beta$，则由多普勒效应公式有$f_1=\frac{V}{V-v\cos\alpha}f_0$，$f_2=\frac{V}{V+v\cos\beta}f_0$．

解得：$\cos\alpha=\frac{11}{40}$，$\cos\beta=\frac{33}{80}$．又由几何关系易得$h(\cot\alpha+\cot\beta)=vt$，联立解得：$h\approx 1083\mathrm{m}$．

故答案为：$h\approx 1083\mathrm{m}$．