第二部分 自招综合训练-运动学专题

高中课程的起始阶段我们就学习了运动学的内容，研究了描述运动的基本物理量、图象、以及匀变速直线运动规律。在这个模块中我们主要介绍相对运动和运动关联的内容。

相对运动

知识点睛

一个物体的运动需要在某个确定的参考系中进行描述，显然，在不同参考系中对同一运动的描述往往是不同的，这就是运动的相对性。例如，古人在有关天体运动的研究中存在地心说和日心说两种对立的学说，日心说认为太阳是宇宙的中心，地心说认为地球是宇宙的中心。从物理学的角度看，这两种学说不存在绝对的对错之分，只是选择了不同的参考系，因此观察到的天体运动规律不同而已。

公式

同一运动在不同参考系中的描述可以互相转换。以速度为例，这种转换有以下的两个基本关系：

$$\overrightarrow{v_{A对B}}=-\overrightarrow{v_{B对A}}$$

$$\overrightarrow{v_{A对C}}=\overrightarrow{v_{A对B}}+\overrightarrow{v_{B对C}}$$

其中，$\overrightarrow{v_{A对B}}$上面的箭头表示这是一个矢量，公式进行的是矢量加法运算。

有时我们把质点相对地面参考系的运动称为绝对运动，相对运动参考系的运动称为相对运动，而运动参考系相对地面的运动称为牵连运动。因此上面的速度转化公式还可以写成：

$$\overrightarrow{v_{绝对}}=\overrightarrow{v_{相对}}+\overrightarrow{v_{牵连}}$$

速度的变换公式对于位移和加速度也同样成立。即：

$$\overrightarrow{x_{A对B}}=-\overrightarrow{x_{B对A}}\ ;\ \overrightarrow{x_{A对C}}=\overrightarrow{x_{A对B}}+\overrightarrow{x_{B对C}}\ ;\ \overrightarrow{x_{绝对}}=\overrightarrow{x_{相对}}+\overrightarrow{x_{牵连}}$$

$$\overrightarrow{a_{A对B}}=-\overrightarrow{a_{B对A}}\ ;\ \overrightarrow{a_{A对C}}=\overrightarrow{a_{A对B}}+\overrightarrow{a_{B对C}}\ ;\ \overrightarrow{a_{绝对}}=\overrightarrow{a_{相对}}+\overrightarrow{a_{牵连}}$$

例题精讲

1 一条河宽$d=60\mathrm{m}$，河水的流速为$v_1=3\mathrm{m/s}$，船在静水中的速度$v_2=5\mathrm{m/s}$．

（1）船夫要在最短的时间内渡河，应该怎么划船？最短时间是多少？

（2）如果船夫过河要求航程最短，应该怎划船？用的时间是多少？

（3）河宽保持不变，河水的流速变为$v_1=6\mathrm{m/s}$，船在静水中的速度变为$v_2=3\mathrm{m/s}$，同样是上面的要求，船夫应该怎样划船？

答案 （1）见解析

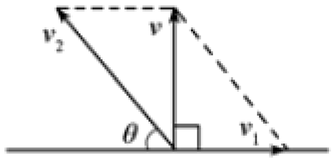
（2）见解析

（3）见解析

解析 （1）以最短的时间渡河，船夫应该把船头正对河岸，可保证渡河的时间最短，

$t=\dfrac{d}{v_2}=12\mathrm{s}$．

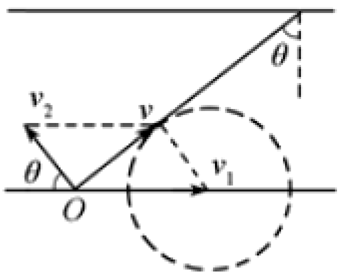
（2）想垂直到达河对岸，应该让船头与上游河岸保持一定的角度θ，船的运动如图所示．



$\cos\theta=\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{3}{5}$，即船头与上游的夹角$\theta=\arccos\dfrac{3}{5}$；船的合速度

$v=\sqrt{5^2-3^2}=4\mathrm{m/s}$，$t=\dfrac{d}{v}=15\mathrm{s}$．

（3）要使小船渡河时间最短，小船船头仍然应该垂直河岸渡河，渡河的最短时间$t_{\min}=\dfrac{d}{v_2}=20\mathrm{s}$．由于现在水流速度大于船在静水中的速度，船夫想要垂直到达河对岸的想法只能成为泡影，我们只能保证船的航程最短，但无法保证船垂直到达对岸．当船在静水中的速度v_2小于水流速度v_1时，合速度v不可能与河岸垂直，只有当合速度v方向越接近垂直河岸的方向，航程越短．可由几何方法求得，以v_1的末端为圆心，以v_2的长度为半径作圆，从v_1的始端作此圆的切线，该切线方向即为最短航程的方向，如图所示．



$\cos\theta\dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，$\theta=60^\circ$，最短航程$s=\dfrac{d}{\cos\theta}=120\mathrm{m}$．

2 有一条两岸平直、河水均匀流动、流速恒为v的大河．小明驾着小船渡河，去程时船头指向始终与河岸垂直，回程时行驶路线与河岸垂直．去程与回程所用时间的比值为k，船在静水中的速度大小相同，则小船在静水中的速度大小为（　　）

A. $\frac{kv}{\sqrt{k^2-1}}$　　B. $\frac{v}{\sqrt{1-k^2}}$　　C. $\frac{kv}{\sqrt{1-k^2}}$　　D. $\frac{v}{\sqrt{k^2-1}}$

答案　B

解析　设船渡河时的速度为v_c；

当船头指向始终与河岸垂直，则有：$t=\frac{d}{v_c}$；

当回程时行驶路线与河岸垂直，则有：$t=\frac{d}{v}$；

而回头时的船的合速度为：$v=\sqrt{v_c^2-v^2}$；

由于去程与回程所用时间的比值为k，所以小船在静水中的速度大小为：

$v_c=\sqrt{\frac{v^2}{1-k^2}}=\frac{v}{\sqrt{1-k^2}}$，故B正确．

故选B．

3 有一条两岸平直、河水均匀流动、流速恒为$4\mathrm{m/s}$的大河．初始时，船头与河岸成37°，船刚好能垂直河岸运动．某时刻船的发动机出现障，船相对水的速度逐渐减小到零，船头方向不变．求此过程中，船相对地的速度的最小值．

答案　$2.4\mathrm{m/s}$．

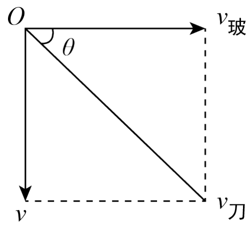
解析　略．

4 玻璃板生产线上，宽$9\mathrm{m}$的成型玻璃板以$4\sqrt{3}\mathrm{m/s}$的速度连续不断地向前行进，在切割工序处，金刚钻的走刀速度为$8\mathrm{m/s}$，为了使割下的玻璃板都成规定尺寸的矩形，金刚钻割刀的轨道应如何控制？切割一次的时间多长？

答案　$2.25\mathrm{s}$

解析

要切成矩形，则割刀相对玻璃板的速度v垂直玻璃板边缘，如图设$v_{刀}$与$v_{玻}$方向夹角为θ，$\cos\theta=\dfrac{v_{玻}}{v_{刀}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{8}$，则$\theta=30^\circ$．$v=\sqrt{{v_{刀}}^2-{v_{玻}}^2}=4\text{m/s}$．时间$t=\dfrac{s}{v}=\dfrac{9}{4}\text{s}=2.25\text{s}$．



5 某汽车前方的挡风玻璃与水平方向成角度37°，当汽车以30m/s在水平地面上开行时，汽车司机看到雨滴垂直打在挡风玻璃上，实际虽然下雨但是没有风，计算雨滴下落的速度．

答案 40m/s．

解析 略．

6 一块板竖直地立在车上，车在雨中匀速行进一段给定的路程．木板板面与车前进方向垂直，其厚度可忽略．设空间单位体积中的雨点数目处处相等，雨点匀速竖直下落．下列诸因素中与落在木板上雨点的数目有关的因素是（　　）

A. 雨点下落的速度　B. 单位体积中的雨点数　C. 车行进的速度　D. 木板的面积

答案 BD

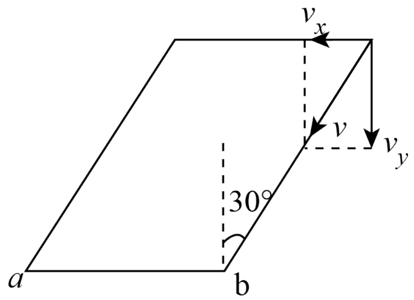
解析 设单位体积中的雨滴数为n_1，汽车速度为v，木板的面积为S，在时间t内，汽车行驶的距离$s=vt$，落在木板面上雨点的数量$n_2=n\times V=n\times vtS=nvts$，单位时间内，落在木板面上雨点的数量$n=n_1vS$，由于距离一定落在木板上总雨点数$n_{总}=n_1tvS$，故答案BD正确．

7 下雨时，雨点竖直下落到地面，其速度为0m/s，若在地面上放一横截面积为80cm^2、高为1cm的圆柱形量筒，则经30min，筒内接得雨水水面的高度为1cm，现因风的影响，雨水下落时偏斜30°，问：若用同样的量筒接得与无风时相同的雨水量，需要多少时间．

答案 $30\,\mathrm{min}$

解析 设无风时，雨点对地匀速下速度为v，受风影响时，雨点速度的水平分量为v，如图所示ab代表圆柱形量筒的直径．则能落入量的雨点是底面积为量筒截面积、倾角为$a=30^{\circ}$的斜柱体内的所有雨点，而斜柱体高度就是雨点在一段时间内落下的高度$h=v_y t$，因此能落入量筒内的雨点数与风的影响无关，本题所需时间仍为$30\mathrm{min}$．

故答案为：$30\,\mathrm{min}$．



8 一个人以速度$1\mathrm{m/s}$向北漫步，感受到风从东边来，后来他的速度提高到$2\mathrm{m/s}$，感受到风从东北方向吹来，当他静止时，感受到风的方向和速度是（　）

A. 东南风约$1\mathrm{m/s}$　　B. 东北风约$14\mathrm{m/s}$　　C. 东风约$1\mathrm{m/s}$　　D. 东南风约$14\mathrm{m/s}$

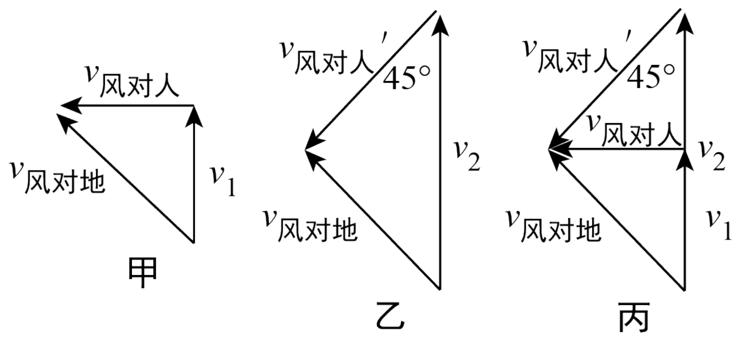
答案 D

解析 设两次人漫步的速度分别为v_1、v_2，根据$v_{风对地}=v_{风对人}+v_{人对地}$，可得两种情况下各速度的矢量关系如图甲、乙所示，

将两次的情况画在一个图中如图丙所示，由几何关系易得：

$v_{风对人}=v_2-v_1=1\mathrm{m/s}$，$v_{风对地}=\sqrt{2}(v_2-v_1)=\sqrt{2}\mathrm{m/s}$，且$v_{风对地}$与$v_1$夹角为$45^{\circ}$，故D正确．

故选D．



9 当蒸气船以15km/h的速度向正北方向航行时，船上的人观察到船上的烟囱里冒出的烟飘向正东方向．过一会，船以24km/h的速度向正东方向航行，船上的人则观察到烟飘向正西北方向．在两次航行中风速不变，求风速及方向．

答案 $17.5\mathrm{km/h}$；$\arctan\dfrac{3}{5}$．

解析 风速为$\sqrt{306}\approx17.5\mathrm{km/h}$，方向指向北偏东$\arctan\dfrac{3}{5}$．

故答案为：$17.5\mathrm{km/h}$；北偏东$\arctan\dfrac{3}{5}$．

10 某大型商场的自动扶梯正在匀速向上运送顾客，现甲、乙两人先后沿着扶梯向上奔跑，甲、乙在扶梯上向上奔跑的速度分别为1.5m/s和1.8m/s；甲、乙数得台阶级数分别为42级和45级．则自动扶梯的运动速度为 ______ m/s；若每级阶梯站一个人，则站在此扶梯上的顾客数为 ______ 人．

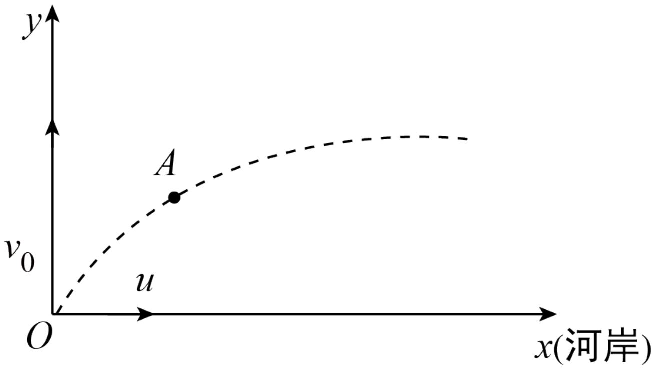
答案 1．1

2．70

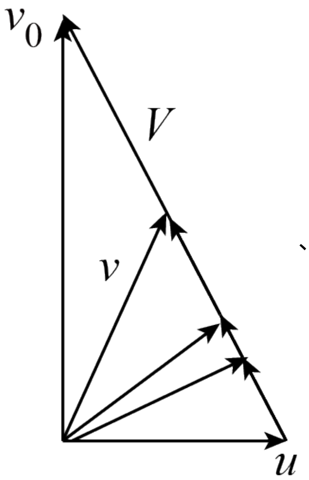
解析 甲、乙奔跑的速度为相对于扶梯的速度v'，人与扶梯运动方向相同，则人对地的速度为$v'+v$．设每一节台阶的长度为L，人数得台阶数为N'，两层楼之间的实际台阶数为N（亦即所能站的顾客数）．则甲在扶梯上走的时间$t_1=\dfrac{NL}{v+v'}$，则甲相对扶梯的位移$N'L=v't_1=v'\dfrac{NL}{v+v'}$，代入数据得：$42=\dfrac{N}{1.5+v}\times1.5$，同理，对乙有：$45=\dfrac{N}{1.8+v}\times1.8$；联立解得：$v=1\mathrm{m/s}$，$N=70$．

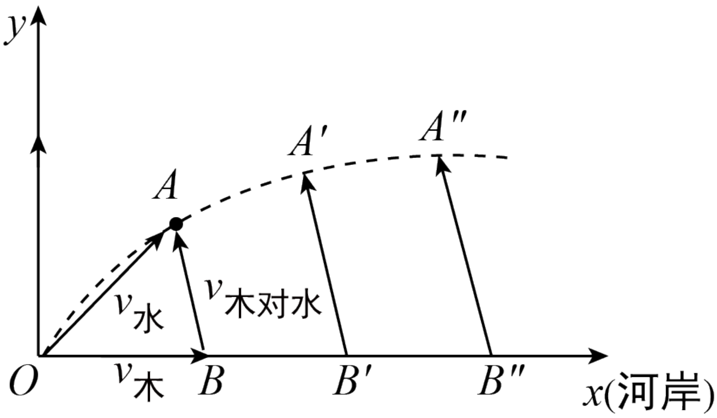
故答案为：1；70．

11 一只木筏离开河岸，初速度为v_0，方向垂直岸，划行路线如图虚线所示，经过时间T，木筏划到路线上A处，河水速度恒定为u，且木筏在水中划行方向不变，用作图法找到$2T$，$3T$，$\cdots$时刻此木筏在航线上的确切位置．



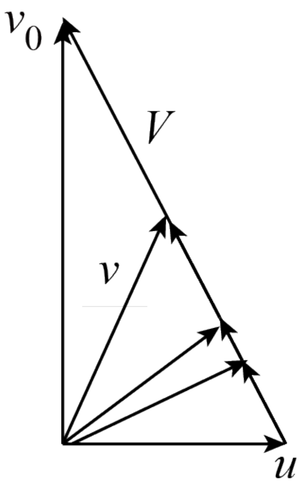
答案





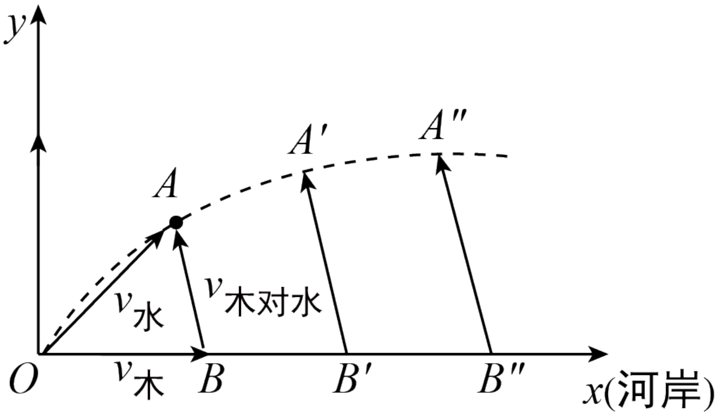
解析

设木筏相对于水的速度为$\overline{V}$，则离岸时$\overline{V}$、$\overline{V_0}$、$\overline{u}$的矢量关系如图所示．此后木筏运动过程中，木筏相对于水的速度$\overline{V}$方向不变、大小是变化的，木筏的对地速度$\overline{v}$大小、方向都变化．

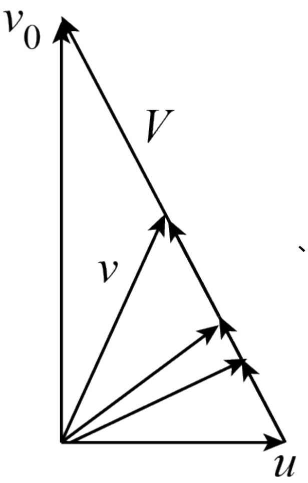


如图所示，连接OA的有向线段是时间T内木筏的绝对位移(对地位移)$\overline{s_{\text{木}}}$．而$\overline{s_{\text{木}}}=\overline{s_{\text{木对水}}}+\overline{s_{\text{水}}}$，其中，$\overline{s_{\text{水}}}$沿$x$轴正方向，$s_{\text{木对水}}$平行于$\overline{V}$方向．现作满足上式关系的位移矢量三角形，在$x$轴上得到$B$点，有向线段$OB$即为$\overline{s_{\text{水}}}$．由于水速$u$恒定，则任意$T$

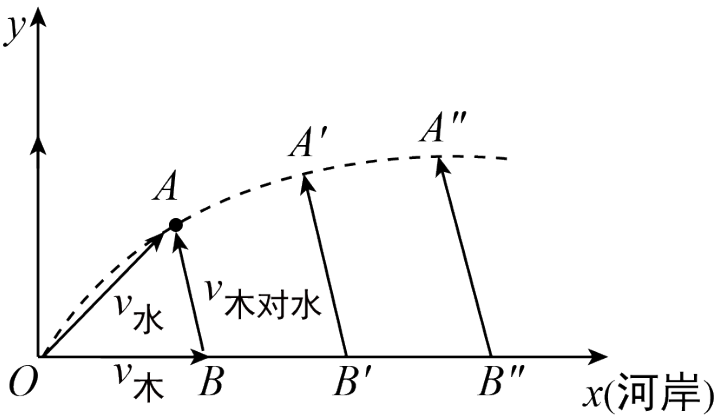
时间内，$\overline{s_{水}}$恒定．因此，在x轴上取$OB'=2\overline{s_{水}}$，$OB''=3s_{水}$，过B'、B''、$\cdots$点做平行于$\overline{V}$的直线交木筏曲线轨迹于A'、A''、$\cdots$各点，即得$2T$，$3T$，$\cdots$时刻此木筏在航线上的确切位置．



故答案为：



、



知识点睛

在处理实际问题时，一般选择地面为参考系，但并不是所有问题都只能选择地面为参考系。如果能灵活巧妙地选择参考系，有时可以简化求解过程。

在处理运动学问题时，变换参考系时只需按照速度、位移、加速度变换公式进行相应变换即可。但是在处理动力学、能量问题时，可能涉及惯性力等复杂问题，要特别注意，这些内容我们会在后面模块中陆续介绍。

例题精讲

12 一队步兵以$v_1=1.5\mathrm{m/s}$的速度匀速前进，队列长度为$L=1200\mathrm{m}$．通讯员从队尾到队首传达命令后，立即返回队尾，共用时间为$t=10\mathrm{min}$，如果通讯员的速度大小始终保持不变，且传达命令和改变方向所用时间忽略不计，求通讯员的速度大小．

答案 $v=4.5\mathrm{m/s}$．

解析 设通讯员的速度大小为v，从队尾走到队首所用时间为t_1、再从队首走到队尾所用时间为t_2．

方法一：选择地面参考系：

通讯员由队尾走到队首的过程中，由位移关系有：

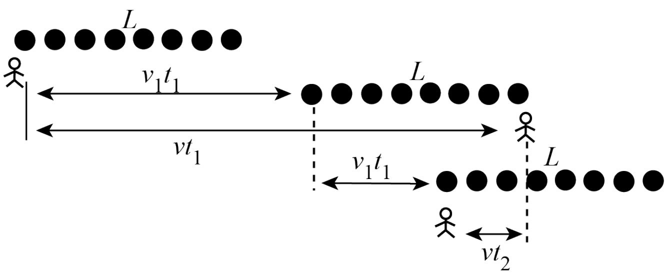
$vt_1=v_1t_1+L$．

通讯员由队首走回队尾的过程中，由位移关系有：

$vt_2+v_1t_2=t$．

又因为$t_1+t_2=t$．

带入数据，联立可解得：$v=4.5\mathrm{m/s}$．



方法二：选择一队步兵为参考系，以v_1方向为正方向：

这时运动情景变为一队步兵静止不动，通讯员先以$v-v_1$的速度由队尾走到队首，再以$-v-v_1$的速度(即速度大小为$v+v_1$，方向与正方向相反)由队首走到队尾，所用的总时间为$t=10\,\mathrm{min}$．列出方程为：

$$\frac{L}{v-v_1}+\frac{L}{v+v_1}=t．$$

带入数据可解得：$v=4.5\mathrm{m/s}$．

其实不难发现，方法二的方程可以由方法一的方程组通过消元得到．在不同的参考系中都可

以解决这个问题，但是方法二通过换参考系，使得思维难度下降，问题变简单了．

故答案为：$v=4.5\mathrm{m/s}$．

13 有人逆水行舟，水速$v_{水}=3\mathrm{m/s}$，途中从船上掉下一漂浮物，10分钟后发现，并立即调头追赶，如果人划船速度大小保持$v_{船}$=5m/s不变，则追上漂浮物需要多长时间．(注意：$v_{船}=5\mathrm{m/s}$是指船相对水的速度)

答案 10分钟．

解析 方法一：选择地面参考系．

本题以地面为参考系计算比较复杂，为了叙述方便，假设水流方向向右，则船逆水前进时，方向向左．以向右为正方向．

从船上掉下漂浮物到发现该漂浮物的过程中，$t=600\mathrm{s}$，

船的位移$x_1=v_{船对地}=\left(v_{船对水}+v_{水对地}\right)t=(-5+3)\times600\mathrm{m}=-1200\mathrm{m}$．

(即位移大小为1200m，方向向左)；漂浮物的位移$x_2=v_{水}t=1800\mathrm{m}$，(即位移大小为1800m，方向向右)；

则掉头时刻，船和漂浮物相距$x=|x_1|+|x_2|=3000\mathrm{m}$．

设掉头后，经时间t'可以追上漂浮物，在此过程中：

船的位移$x_1{}'=\left(v_{船}+v_{水}\right)t'\cdots\cdots$①(方向向右)；

漂浮物的位移$x_2{}'=v_{水}t'\cdots\cdots$②(方向向右)，

由位移关系可知，$x_1{}'-x_2{}'=x\cdots\cdots$③，

联立①②③，代入数据可解得：$t'=600\mathrm{s}$．

方法二：选择流动的河水为参考系．

在此参考系中，漂浮物落水后不再运动，

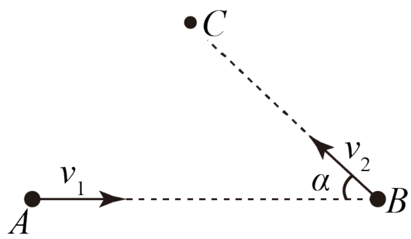
船以5m/s向前行驶10分钟后调头仍以同样的速度运动到漂浮物落水处，

因船的往返速度和位移大小均相同，故往返时间必相同，即返回时间也为10分钟．

通过对比可以发现，方法二能明显减少计算量．

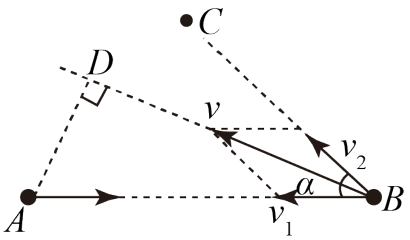
故答案为：10分钟．

14 如图所示，在一水平面上有A、B、C三点，$AB=l$，$\angle CBA=\alpha$．今有甲质点由A向B以速度v_1做匀速运动，同时，另一质点乙由B向C以速度v_2做匀速运动．问运动过程中，甲乙两质点间的最短距离为多少．



答案 $\dfrac{lv_2\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}}$

解析 由相对运动求解．



如图，乙相对于甲的运动速度为v，则相当于甲不动，乙沿v方向自甲的前方通过，两者间最近距离为图中的线段AD．由于$v=\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}$，图中$v$与$BA$间的夹角$\theta$满足$\sin\theta=\dfrac{v_2\sin\alpha}{v}$，故$AD=AB\cdot\sin\theta=\dfrac{lv_2\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}}$．

故答案为：$\dfrac{lv_2\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}}$．

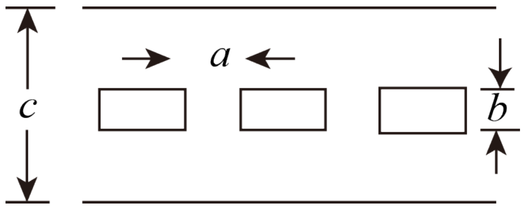
15 在宽为l的河的两岸停着两艘小船，它们的连线与河岸成α角，已知两艘小船在静水中最大的划行速度分别为u_1、u_2，河水流速为v．若它们同时出发，则各应向什么方向划行才能在最短时间内相遇，并求出此时间．

答案 见解析

解析　本题如果在地面参考系中研究，运动情景较为复杂，计算量大，考虑相对运动则简单的多．

两小船初始时相距$\frac{l}{\sin\alpha}$，其方向与河岸成α角．设两船相对河岸的速度分别为$\overline{V_1}$、$\overline{V_2}$，则$\overline{V_1}=\overline{u_1}+\overline{v}$，$\overline{V_2}=\overline{u_2}+\overline{v}$，两船相对速度为$\overline{V_1}-\overline{V_2}=\overline{u_1}-\overline{u_2}$．易知，当相对速度两船连线方向的投影最大时，则它们将用最短时间相遇．因此，要求$\overline{u_1}$、$\overline{u_2}$平行于两船连线方向，且相互接近($\overline{u_1}$、$\overline{u_2}$反向)．所需时间为$t=\frac{l}{(u_1+u_2)\sin\alpha}$．

16　如图所示，几辆相同的汽车以相等的速度v沿宽为c的平直公路行驶(不妨设向右行驶)，每车宽为b，头尾间间距为a，则人能沿一条直线安全穿过马路时的最小速度是多少？



答案　$v_{人\min}=v\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$．

解析　这个情景也与小船过河问题有类似之处(人的运动方向可以变化，存在恒定速度运动的车流)，不过分析起来要更复杂一些．本题在地面参考系中研究比较困难(主要是在地面参考系中不容易看出人相对车是如何运动的)，因此我们选择车为参考系，

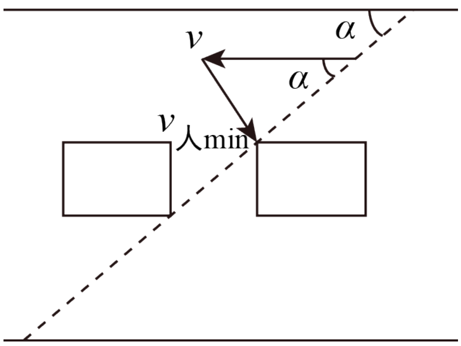
如图所示，人刚好能正常穿过马路时(不与车辆相碰)，应该相对车沿虚线方向运动，设虚线方向与水平方向夹角为α，则ssin $\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

由于$v_{人对车}=v_{人对地}-v_{车对地}$，如图中几何关系所示，可知

$v_{人\min}=v\sin\alpha=v\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$．

当然本题中人相对车也可以沿其他直线路径过马路，但是这时路径与水平方向的夹角都大于图中a，对应的$v_{人}$都比图中的$v_{人\min}$大，因此，图中情况所得的$v_{人\min}$即为人安全穿过马路时的最小逸度．

故答案为：$v_{人\min}=v\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$．



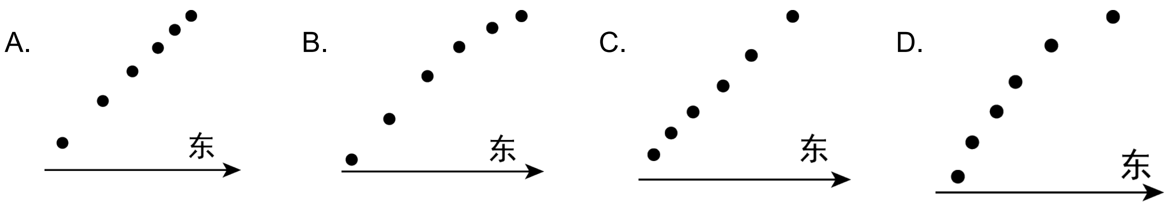
17 在空间某一点O，向三维空间的各个方向以相同的速度v_a射出很多个小球，球ts之后这些小球中离得最远的二个小球之间的距离是多少（假设ts之内所有小球都未与其它物体碰撞）？

答案 $2v_0t$

解析 这道题初看是一个比较复杂的问题，要考虑向各个方向射出的小球的情况，但如果我们取一个在小球射出的同时开始自O点自由下落的参考系，所有小球就都始终在以O点为球心的球面上，球的半径是v_0t，那么离得最远的两个小球之间的距离自然就是球的直径$2v_0t$．

故答案为：$2v_0t$．

18 一架飞机在高空中由西向东沿水平方向做匀加速飞行，飞机每隔相同时间空投一个物体，共连续空投了6个物体（空投过程不计空气阻）．下图是从地面某时刻观察到的6个空投物体的图像，其中正确的是（　　）



答案 A

解析 这个情景在地面参考系中不太容易思考，我们选择飞机为参考系．

空投出的物体在竖直方向上做自由落体动，在水平方向上做初速度为零的加速度向西的匀加速直线运动（因为物体释放时相对飞机速度为零，飞机相对地面有向东的恒定加速度，因此$a_{物体相对飞机}=a_{物体相对地面}+a_{地面相对飞机}=0-a_{飞机相对地面}=-a_{飞机相对地面}$

）．所以飞机的合运动应该是一个初速度为零的匀加速直线运动，方沿着两个加速度合成后的合加速度方向．

故选A．

19 一轿车从静止开始以$a=1\mathrm{m/s^2}$做匀加速直线运动的同时，离车头为$x=30\mathrm{m}$的后方有一乘客以某一速度追赶这辆轿车．只有离车头反镜的距离在$x_0=20\mathrm{m}$以内、且像在镜中保留时间至少为$t=1\mathrm{s}$的乘客才能被司机看清，以便司机制动轿车使车停下来．该乘客要想乘坐上这辆车，匀速追赶的速度v至少多大？

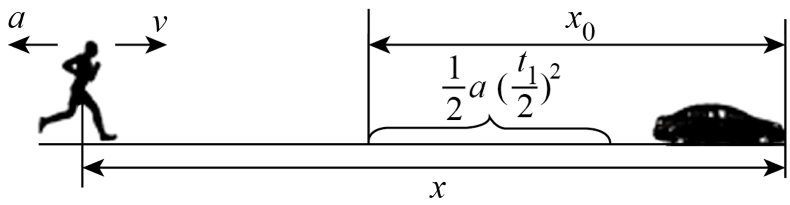
答案 $4.5\mathrm{m/s}$．

解析 本题以地面为参考系，运动情景较复杂，不容易找出临界情况．选车为参考系，乘客相对于车做初速度为v、加速度大小为a的匀减速直线运动，速度为零后，又反做匀加速直线运动．要使司机从车头的反光镜内能看清乘客，须让乘客处在离反光镜x_0范围内的时间至少为t_1，根据对称性和图中的几何关系有$\dfrac{v^2}{2a}-\dfrac{1}{2}a\left(\dfrac{t_1}{2}\right)^2=x-x_0$，得

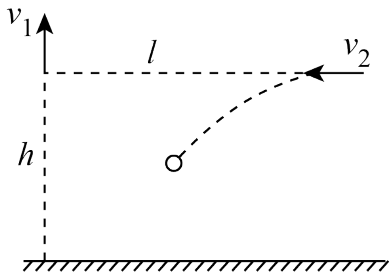
$v=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2t_1^2+8a(x-x_0)}$，

代入数据得$v_{\min}=4.5\mathrm{m/s}$．

故答案为：$4.5\mathrm{m/s}$．



20 如图所示，从离地面同一高度h、相距l的两处同时各抛出一个石块，一个以速度v_1竖直上抛，另一个石块以速度v_2向第一个石块原来位置平抛出，求这两个石块在运动过程中，它们之间的最短距离．



答案 $\dfrac{v_1 l}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$

解析 解法一：

选取地面为参考系，两石块之间的距离为：

$$s=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(l-v_2t)^2\left[\left(v_1t-\frac{1}{2}gt^2\right)-\left(-\frac{1}{2}gt^2\right)\right]^2},$$

配方得：$s=\sqrt{(v_1^2+v_2^2)\left(t-\dfrac{v_2l}{v_1^2+v_2^2}\right)^2+l^2-\dfrac{v_2^2l^2}{v_1^2+v_2^2}}$，

当$t=\dfrac{v_2l}{v_1^2+v_2^2}$时，$s_{\min}=\dfrac{v_1l}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$．

本结果需要讨论，若$\dfrac{v_2l}{v_1^2+v_2^2}<\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$，表示这时两个石头均未着地，结果即

$s_{\min}=\dfrac{v_1l}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$；

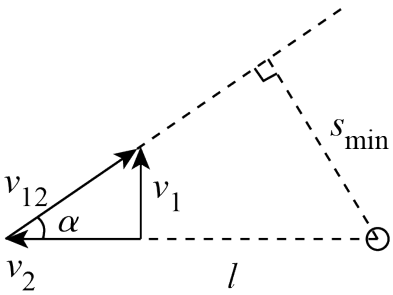
若$\dfrac{v_2l}{v_1^2+v_2^2}\geqslant\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$，则当石块2着地时，它们之间的距离最短，最短距离为：

$$s_{\min}=\sqrt{\left(l-v_2\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2+\left(v_1\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2}.$$

解法二：

选取石块2为参考系，则石块1相对石块2的运动为匀速直线运动．相对速度为下图中的v_{12}．

初始时刻，两者相对位移为l．



当$t=\dfrac{l\cos\alpha}{v_{12}}=\dfrac{v_2l}{v_1^2+v_2^2}$时，$s_{\min}=l\sin\alpha=\dfrac{v_1l}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$．

对结果的讨论同上．

故答案为：$\dfrac{v_1 l}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$．

21 一只苍蝇在高H处，以速度v平行桌面飞行，在某一时刻发觉就在它的正下方有一滴蜂蜜，苍蝇借助翅膀可以向任何方向加速，但加速度大小不超过a，试问苍蝇能够飞到蜂蜜所在处的最短时间（设想问题发生在宇宙空间，重力不存在）．

答案 $t_{\min}=\sqrt{\dfrac{2(v^2+\sqrt{v^4+a^2H^2}}{a^2}}$．

解析 考虑速度为v的参考系中，苍蝇以初速度为0，加速度为a追击以v匀速直线运动的蜂蜜．苍蝇在此参考系中，只有飞行路径为直线时，飞行的距离最短．利用直角三角形的勾股定理，可以得到结果．

故答案为：$t_{\min}=\sqrt{\dfrac{2(v^2+\sqrt{v^4+a^2H^2}}{a^2}}$．

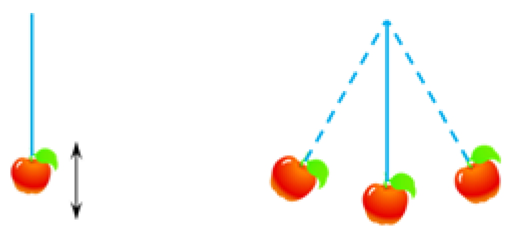
物系相关速度

知识点睛

体通过绳、杆、滑轮相连或叠放在一起时，它们之间的速度可能存在某种关联关系，下面我们主要来讨论这类问题。

（1）绳（或杆）的关联

①张紧的绳（或杆）能产生两种运动效果，一种是沿绳（或杆）方向的伸缩运动，另一种是绕固定点的摆动。任意复杂运动都可以看做由这两种运动组合而成。



如何处理绳子关联问题，运动学的基本思想方法已经给我们提供了思路：一切运动量可以转化成对应的坐标距离。具体而言，绳长可以描述为两点间的距离或坐标差，则速度为坐标的变化率；绳子长度

改变的原因是绳子上各质点沿绳方向坐标变化率（分速度）不一致。绳长的变化$\Delta x=(v_{1x}-v_{2x})\Delta t$，其中$v_{1x}$、$v_{2x}$为绳子两端质点沿绳方向的分速度，若绳长不变，则要求$v_{1x}=v_{2x}$。

②对于绳（或杆）不可伸长的情况，一段绳子（或杆）两端沿绳（或杆）方向的速度相同。

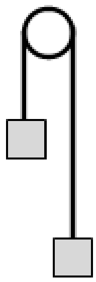
对于绕过滑轮的绳子应分段处理，不能当成一段绳子。

③如果绳（或杆）绕某一点转动，则绳（或杆）上任意一点相对该点的角速度相同。

（2）滑轮问题

作为绳子关联的具体应用，我们来处理有关滑轮的问题。

如图所示，定滑轮两边的重物都在竖直方向运动，滑轮也在竖直方向运动。设左侧重物的速度为v_1、右侧重物的速度为v_2，滑轮的速度为v（不妨均以向上为正，且$v_1>v$）。那么，v_1、v_2、v之间存在什么关联关系呢？



根据上边的观点，Δt时间内，左侧绳子缩短的长度$\Delta x_1=(v_1-v)\Delta t$，右边绳子伸长的长度$\Delta x_2=(v-v_2)\Delta t$。由于整根绳子的总长度不变，因此，$\Delta x_1=\Delta x_2$，联立解得：$v_1+v_2=2v$。

对于两物体和滑轮对应的位移和加速度也有类似的结果：$x_1+x_2=2x$；$a_1+a_2=2a$。

注意：上述结果成立的前题是两物体和滑轮都在竖直方向运动，如果绳子存在摆动或运动方向不在同一直线上，则不能简单得出上述结论。但处理方法仍然类似。

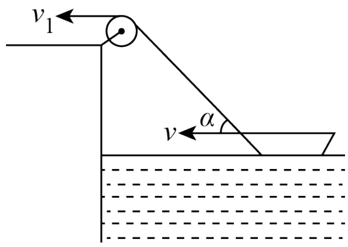
（3）接触物系相关速度

由两物体“接触”的条件可知，两物体垂直于接触面（或切面）方向的速度相等，否则物体将要分离。

注意：上面给出的是绳（杆）不可伸长的情况下，一根绳（杆）两端沿绳（杆）方向**速度**相等，相互接触的物体垂直接触面（或切面）方向**速度**相等。并没有给出**加速度**一定相等的结论，千万不要乱用。

例题精讲

如图所示，人用轻绳通过定滑轮牵引小船靠岸，若收绳的速度为v_1，则在绳与水平方向夹角为α的时刻，船的速度v有多大．（阻力不计）



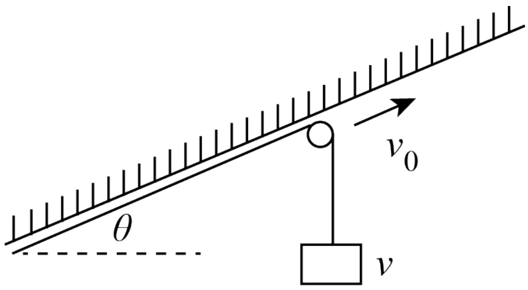
答案 $v=\dfrac{v_1}{\cos\alpha}$．

解析 解法1：由于绳的约束，船沿绳方向的速度必为$\dfrac{v_1}{\cos\alpha}$．

解法2：从能量的角度分析，绳既不会提供能量也不会消耗能量，既两绳端弹力的瞬时功率大小相等．设绳对人的拉力和绳对船的拉力大小均为T，绳对人的拉力的瞬时功率大小为$P_1=Tv_1$，绳对船的拉力的瞬时功率大小为$P=Tv\cos\alpha$，由$P=P_1$，可解得$v=\dfrac{v_1}{\cos\alpha}$．

故答案为：$v=\dfrac{v_1}{\cos\alpha}$．

23 一根绳紧贴与地面成θ的斜墙，一端固定，另一端绕过滑轮下方吊一木块．当滑轮以速度v_0匀速沿墙运动时，求木块的速度v．

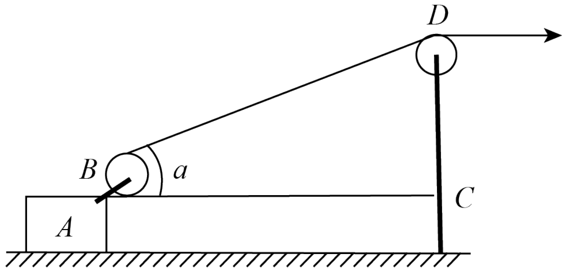


答案 $2v_0\cos\dfrac{90^\circ-\theta}{2}$

解析 受到绳子的约束，在滑轮参考系中，物块的速度是向上的v_0，对地面参考系中，木块的速度v就是滑轮速度和木块相对滑轮速度的矢量相加．

24

如图所示，物体A置于水平面上，物A前固定有动滑轮B，D为定滑轮，一根轻绳绕过D、B后固定在C点，BC段水平，当以速度v拉绳头时，物体A沿水平面运动，若绳与水平面夹角为a，物体A运动的速度是多大．



答案 $\dfrac{v}{1+\cos a}$

解析 首先根据绳和定滑轮的特点，任何时刻绳BD段上各点有与绳端D相同的沿绳BD段方向的分速度v，

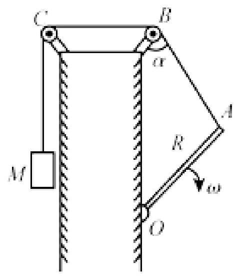
再看绳的这个速度与物体A移动速度的关系．设物体A右移速度为$v_{物}$，则相对于物体A（或动滑轮B的轴心），

绳上B点的速度为$v_{物}$，即$v_A=v_B=v_{物}$，方向沿绳BD方向．

而根据运动合成法则，在沿绳BD方向上，绳上B点速度是物体A（或动滑轮B的轴心）的速度$v_{物}$与水平绳在BD方向上的分速度$v_{物}\cos\alpha$的合成，即$v=v_{物}+v_{物}\cos\alpha$，由上述两方面可得

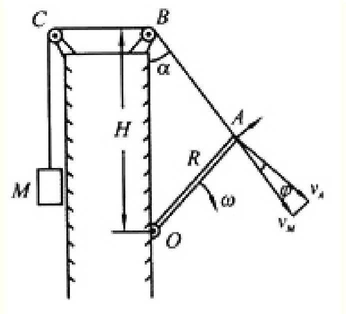
$v_{物}=\dfrac{v}{1+\cos a}$．

25 如图所示，杆OA长为R，可绕过O点的水平轴在竖直平面内转动，其端点A系着一跨过定滑轮B、C的不可伸长的轻绳，绳的另一端系一物块M，滑轮的半径可忽略，B在O的正上方OB之间的距离为H．某一时刻，当绳的BA段与OB之间的夹角为α时，杆的角速度为ω，求此时物块M的速率v_M．



答案　$\omega H\sin\alpha$

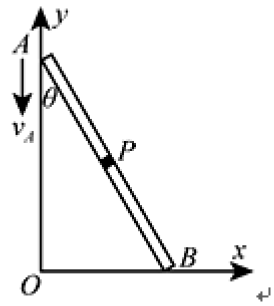
解析



如上图所示，A点速度的沿绳分量就是物块M的速度，之后可用正弦定理解得答案．

故答案为：$\omega H\sin\alpha$．

26 如图所示，细杆AB长为l，端点A、B分别被约束在x轴和y轴上运动，求：



（1）杆上与A相距$al\,(0<a<l)$的P的运动轨迹如何．

（2）如果图中θ角和v_A为已知，那么P点的x和y方向分运动速度v_{Px}和v_{Py}是多少？

答案　（1）$\dfrac{x_P^2}{(al)^2}+\dfrac{y_P^2}{(1-a)^2l^2}=1$．

（2）$\begin{cases} v_{Px}=av_A\cot\theta \\ v_{Py}=(1-a)\,v_A \end{cases}$．

解析　（1）由几何关系可得：$x_P=al\sin\theta$，$y_P=(l-al)\cos\theta$，消去θ可得：

$$\frac{x_P^2}{(al)^2}+\frac{y_P^2}{(1-a)^2l^2}=1,$$

为椭圆的一部分．

故答案为：$\dfrac{x_P^2}{(al)^2}+\dfrac{y_P^2}{(1-a)^2l^2}=1$．

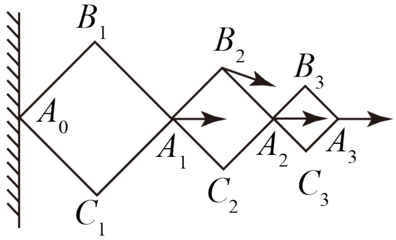
（2）由于$x_P=ax_B$，$y_P=(1-a)\,y_A$，因此有$v_{Px}=av_B$，$v_{Py}=(1-a)\,v_A$．

由A、B两点沿杆方向速度相等可得：$v_A\cos\theta=v_B\sin\theta$，即$v_B=v_A\cot\theta$，

联立可得：$\begin{cases} v_{Px}=av_A\cot\theta \\ v_{Py}=(1-a)\,v_A \end{cases}$．

故答案为：$\begin{cases} v_{Px} = a v_A \cot\theta \\ v_{Py} = (1-a)\, v_A \end{cases}$.

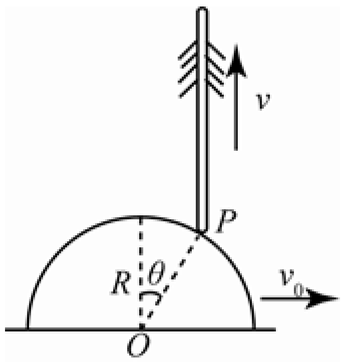
27 合页构件由三个菱形组成，其边长之比为$3:2:1$．如图所示，定点A_3以速度v往水平方面移动，求当构件的所有角都为直角时，顶点A_1，A_2，B_2的速度．



答案 $\frac{1}{2}v$，$\frac{5}{6}v$，$\frac{\sqrt{17}}{6}v$

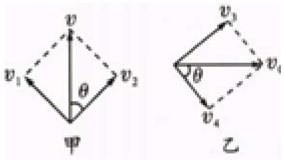
解析 略

28 一个半径为R的半圆柱体沿水平方向向右以速度v_0匀速运动．在半圆柱体上搁置一根竖直杆，此杆只能沿竖直方向运动，如图所示．当杆与半圆柱体接触点P与柱心的连线与竖直方向的夹角为θ时，求竖直杆运动的速度.

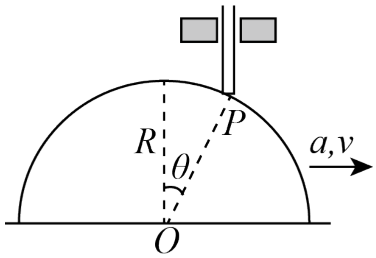


答案 $v = v_0 \tan\theta$

解析 由于半圆柱体对杆的弹力沿OP方向，所以将竖直杆向上的速度v沿OP方向和沿半圆的切线方向分解，如图甲所示．将半圆柱体水平向右的速度v_0也沿OP方向和沿半圆的切线方向分解，如图乙所示．二者在垂直于接触面的方向上（即OP方向）的分速度相等．于是有：$v_0\sin\theta = v\cos\theta$，解得：$v = v_0\tan\theta$．



29 一个半径为R的半圆柱体沿水平方向向右做加速度为a的匀加速运动，在半圆柱体上搁置一根竖直杆，此杆只能沿竖直方向运动．当半圆柱体的速度为v时，杆与半圆柱体接触点P与柱心的连线与竖直方向的夹角为θ，求此时竖直杆运动的加速度．



答案 $a\tan\theta-\dfrac{v^2}{R\cos^3\theta}$ ．

解析 在半圆柱参照系中，P点的加速度由切向加速度$\overline{a_t}$和法向加速度$\overline{a_n}$构成，即

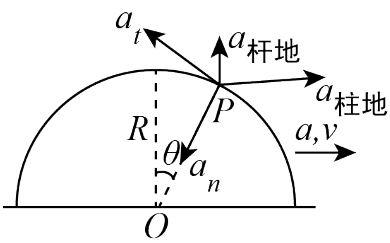
$\overline{a_{杆对柱}}=\overline{a_t}+\overline{a_n}$，其中$a_n=\dfrac{v_{杆对柱}^2}{R}=\dfrac{v^2}{R\cos^2\theta}$ ．

因此，$\overline{a_{杆对地}}=\overline{a_t}+\overline{a_n}+\overline{a_{柱对地}}$，①

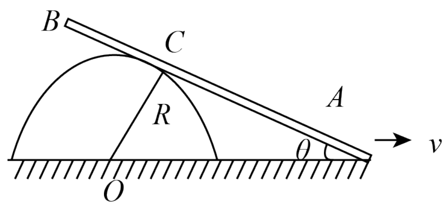
将①式中各量沿$\overline{a_n}$方向投影得：$a_{杆对地}\cos\theta=a_{柱对地}\sin\theta-a_n$，即：

$a_{杆对地}=a\tan\theta-\dfrac{v^2}{R\cos^2\theta}\dfrac{1}{\cos\theta}=a\tan\theta-\dfrac{v^2}{R\cos^3\theta}$ ．

故答案为：$a\tan\theta-\dfrac{v^2}{R\cos^3\theta}$ ．



30 如图所示，AB杆的A端以匀速v运动，在运动时杆恒与一半圆周相切，半圆周的半径为R，当杆与水平线的交角为θ时，求杆上与半圆相切点C的速度和杆与圆柱接触点C'的速度大小．

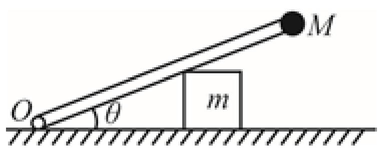


答案 $v\cos\theta$；$v\tan\theta\sin\theta$

解析 杆上C点速度为$v_C=v\cos\theta$，所以C'点的速度为$v_{C'}=v\tan\theta\sin\theta$．

故答案为：$v\cos\theta$；$v\tan\theta\sin\theta$

31 如图所示，长为L的轻细直杆一端可绕水平地面上的O点在竖直平面内转动，另一端固定一小球M，杆一直靠在正方体箱子m的左上角边上，箱子的边长为$L/4$．不计一切摩擦，当杆与水平面夹角为θ时，求小球的速度v_1与箱子的速度v_2的比值$v_1/v_2=$______．



答案 $4\sin^2\theta$

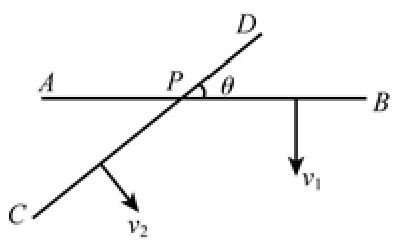
解析 略

知识点睛

（4）线状交叉物系交点速度问题

这类问题比较复杂，我们还是通过下面的实例进行说明。

如图所示，AB、CD两直杆交角为θ，交点为P，若两杆各以垂直于自身的速度v_1、v_2沿着纸面运动，求交点P运动速度的大小。



对于这个问题，很多同学认为v_1、v_2的合速度就是点P的速度，实际上这个结果是错误的。例如令$v_2=0$，即CD杆不动，很容易发现点P的移动速度并不等于v_1。因此点的速度不是v_1、v_2的合速度。那么正确的解法如何呢？这里我们提供常用的两种思路，具体结果请大家作为例题自己练习。

①微元法

做出Δt（$\Delta t\to 0$）时间后两杆的位置，结合几何关系及速度的定义进行求解。

②速度分解合成法

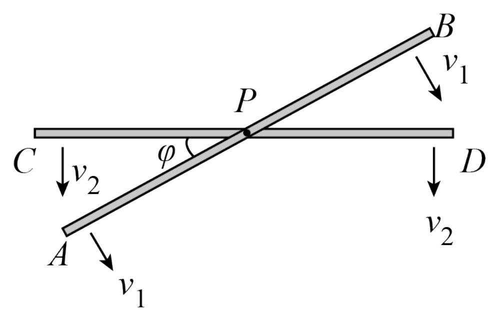
假设AB杆不动，CD杆沿自身方向运动时，P点不动，CD杆沿AB杆方向以$v_2{}'$运动时，点以同样的速度$v_2{}'$沿AB杆运动；同理，假设CD杆不同，AB杆沿自身方向运动时，P点不动，AB杆沿CD杆方向以$v_1{}'$运动时，P点以同样的速度$v_1{}'$沿CD杆运动；

因此，把两运动物体在某时刻的速度沿交点处两切线方向进行分解，沿对方物体切线方向上的分速度的矢量和即为交点在该时刻的速度。

例题精讲

32 如图（a）所示，一平面内有两直线AB和CD，相交φ角．若直线AB以速度v_1在平面内沿垂直于AB的方向移动，而直线CD以速度v_2在平面内沿垂直于CD的方向移动．求两线交于点P的速度v_P

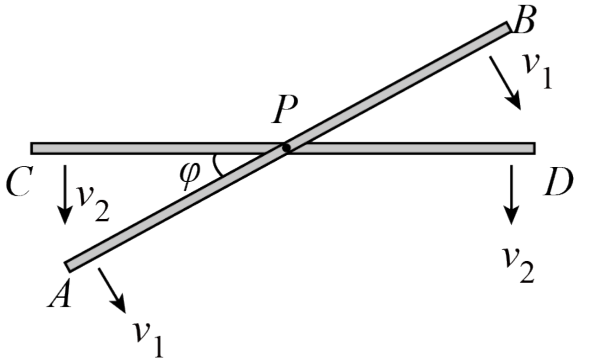
．



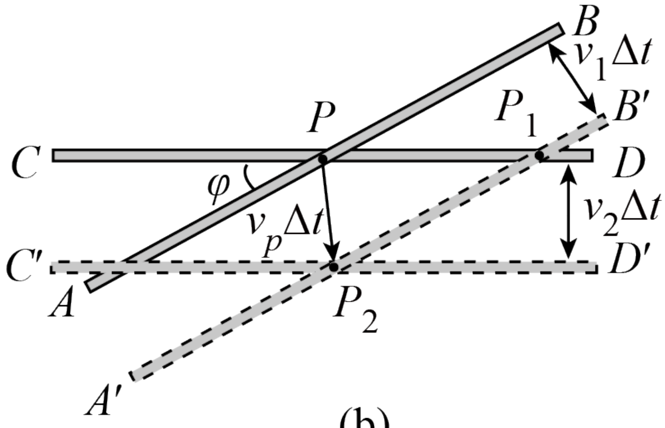
(a)

答案 $v_P=\dfrac{1}{\sin\varphi}\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\varphi}$

解析 此题解法很多，这里利用元位移方法求解，此法较为直观．



(a)



(b)

设某一时刻t_0两直线交点在P，经过Δt实践间隔，AB移动$v_1\Delta t$间距达$A'B'$，CD移动$v_2\Delta t$间距达$C'D'$．如图（b）所示，显然

$PP_1=\dfrac{v_1\Delta t}{\sin\varphi}$，$P_1P_2=\dfrac{v_2\Delta t}{\sin\varphi}$，

而且P点在相同时间内移至P_2，因此

$PP_2=v_P\Delta t$，

利用$\triangle PP_1P_2$的余弦定理得

$\overline{PP_2}^2=\overline{PP_1}^2+\overline{P_1P_2}^2-2\overline{PP_1}\cdot\overline{P_1P_2}\cos\varphi$，

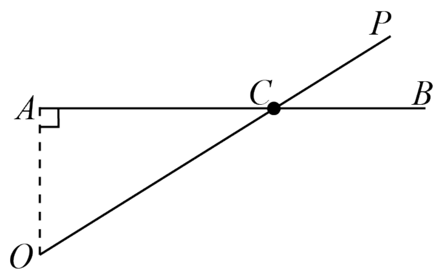
即$v_P^2=\left(\dfrac{v_1}{\sin\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{v_2}{\sin\varphi}\right)^2-2\dfrac{v_1v_2}{\sin^2\varphi}\cos\varphi$，

最后得P点的速度为

$v_P=\dfrac{1}{\sin\varphi}\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\varphi}$．

故答案为：$v_P=\dfrac{1}{\sin\varphi}\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\varphi}$．

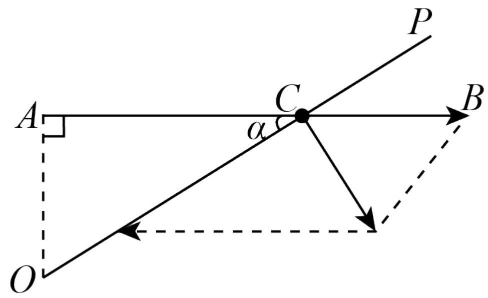
33 细杆OP长l，绕O点以角速度ω在如图所示平面匀速转动，并推动光滑小环C在固定的水平钢丝AB上滑动，已知$AO=d$，试求小环通过细杆中点时的速度．



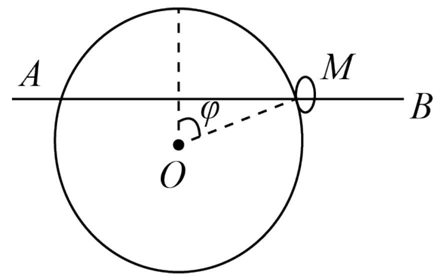
答案 $\frac{\omega l^2}{4d}$．

解析 如图所示的速度关系中，有$v_c=\omega\frac{1}{2}$，小环的速度$v=\frac{v_c}{\sin\alpha}=\frac{\omega l^2}{4d}$．

故答案为：$\frac{\omega l^2}{4d}$．



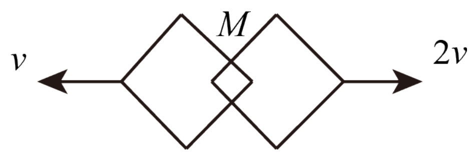
34 如图所示，水平直杆AB在圆心为O、半径为r的固定圆圈上以匀速u竖直下落，试求套在该直杆和圆圈的交点处一小滑环M的速度，设OM与竖直方向的夹角为φ．



答案 $v=\frac{u}{\sin\varphi}$

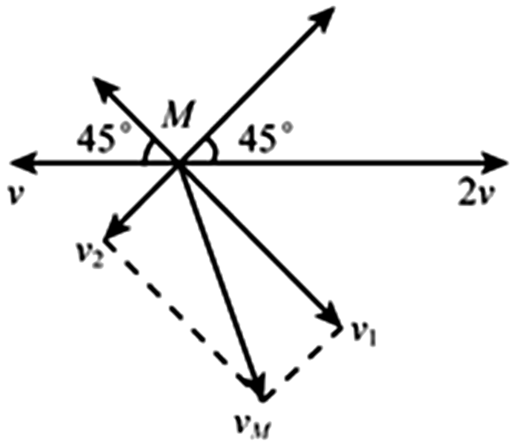
解析 略

35 两相同的正方形铁丝框如图所示放置，并沿对角线方向分别以v和$2v$的速度向两侧运动，问两框交点M的运动速度应为多少．

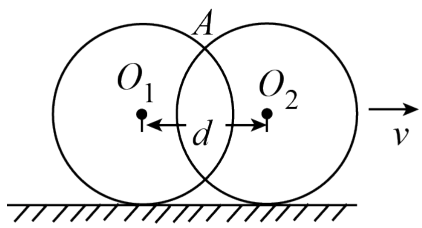


答案　M点速度为$\sqrt{\frac{5}{2}}v$．

解析　如图所示，将两个线圈的移动速度$2v$和v分别沿自己线圈和对方线圈的切向进行分解，再把沿对方切线方向的两分速度v_1和v_2进行合成，其中$v_1=2v\cos 45^\circ=\sqrt{2}v$，$v_2=v\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}v$，则$v_M=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}v$．



36　一个半径为R的环（环心为O_2）立在水平面上，另一个同样大小的环（环心为O_1）以速度v从前一环的旁边经过．试求当两环环心相距为d（$2R>d$大于0）时，两环上部的交点A的运动速度．两环均很薄，可以认为两环是在同一平面内，第二个环是紧贴着第一个环擦过去的．

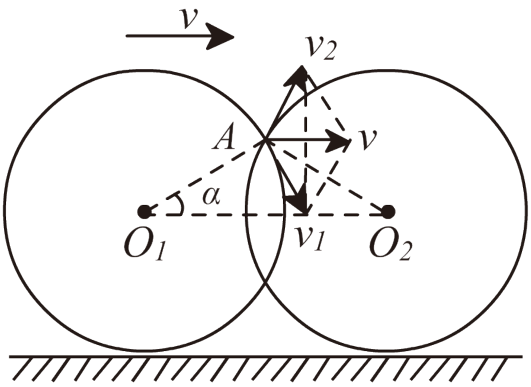


答案　$v_A=\frac{R_v}{\sqrt{4R^2-d^2}}$

解析　方法一：

将动环O_1的速度v沿两环的切线分解成v_1和v_2，交点A的速度即是v沿对方切线（O_2环）方向的分速度v_2，由图中的几何关系可得：$v_A=v_2=\frac{v}{2\sin\alpha}$，而$\sin\alpha=\frac{\sqrt{R^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}}{R}$，

所以$v_A=\dfrac{R_v}{\sqrt{4R^2-d^2}}$．

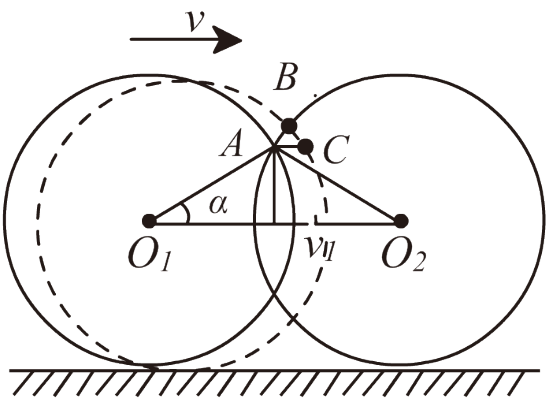


方法二：微元法

产，以经历了一段极短时间$\triangle t$，动环移到了如图所示的虚线位置，交点从图中的A点移到了B点．作AC平行于O_1O_2交虚线于C点，由于$\triangle t$很小，故图中的A、B、C三点相距很近，圆弧AB、BC分别可以看成弦AB、BC．在$\triangle t$时间里，动环的位移可以用AC表示，交点的位移用弦AB表示，其大小分别为$AC=v\triangle t$，$AB=v_A\triangle t$，所以$v_A=\dfrac{AB}{AC}v$①

设$\angle AO_1O_2=\alpha$，将AB看做一小段弦，则有$\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}-\angle CAO_2=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，在等腰三角形$ABC$中，有$AC=2AB\cos\angle BAC=2AB\sin\alpha$②

将②式代入①得$v_A=\dfrac{v}{2\sin\alpha}=\dfrac{Rv}{\sqrt{4R^2-d^2}}$．



图像法处理复杂运动（选讲）

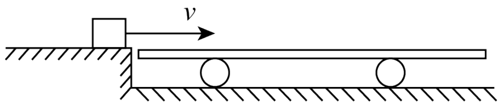
知识点睛

用图象来描述两个物理量之间的关系是物理学中常用的方法。利用图象法分析解答问题，具有直观、形象、简明的特点，可达到化难为易，化繁为简的目的。在这个小模块中我们主要介绍两类问题：

一是利用常见的x~t、v~t图处理复杂问题；二是利用不常见的特殊图象处理问题。

例题精讲

37 如图所示，上表面粗糙的小车静止在光滑水平面上，一滑块从车的左端以水平速度v冲上小车，下列说法正确的是（　）



A. 只要v足够大，滑块一定能从小车的右端冲出小车

B. 若滑块能冲出小车，则不论v多大，滑块脱离小车时小车的位移为定值

C. 若滑块能冲出小车，则v越大，小车在滑块脱离时的位移越小

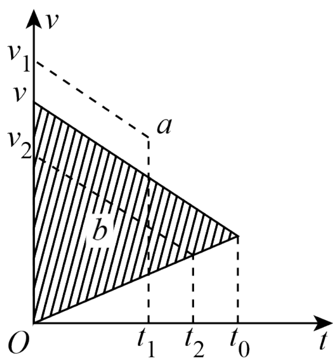
D. 若滑块不能冲出小车，则滑块的初速度v越大，滑块相对小车滑动时间越短

答案　AC

解析　本题的四个选项中有三项相对独立，如果对三项内容列式分析，无异于解一道综合性的计算题，如果利用$v-t$图象却能很快得出正确答案．

设滑块以速度v滑上小车后，经时间t_0恰好滑到小车右端（此时两者速度相等），如图所示，阴影的“面积”表示车长．当滑块初速v_1大于v时，由图线a可知，滑出的时刻提前，小车的位移变小，A、C选项正确，B错误．当滑块初速v_2小于v时，由图线b可知滑块还未滑到小车右端就与小车达到共同速度（如t_2时刻），且随着v_2的增大，滑块在小车上滑过的距离越远，所用时间越长，选项D错误．

故选AC．



38

在一条笔直的公路上依次设置三盏交通信号灯L_1、L_2和L_3，L_2与L_1相距80m，L_3与L_1相距120m．每盏信号灯显示绿色的时间间隔都是20s，显示红色的时间间隔都是40s．L_1与L_3同时显示绿色，L_2则在L_1显示红色经历了10s时开始显示绿色．规定车辆通过三盏信号灯经历的时间不得超过150s．若有一辆匀速向前驶的汽车通过L_1的时刻正好是L_1刚开始显示绿色的时刻，则此汽车能不停顿地通过三盏信号灯的最大速率为 ______ m/s．若一辆匀速向前行驶的自行车通过L_1的时刻是L_1显示绿色经历了10s的时刻，则此自行车能不停顿地通过三盏信号灯的最小速率是 ______ m/s．

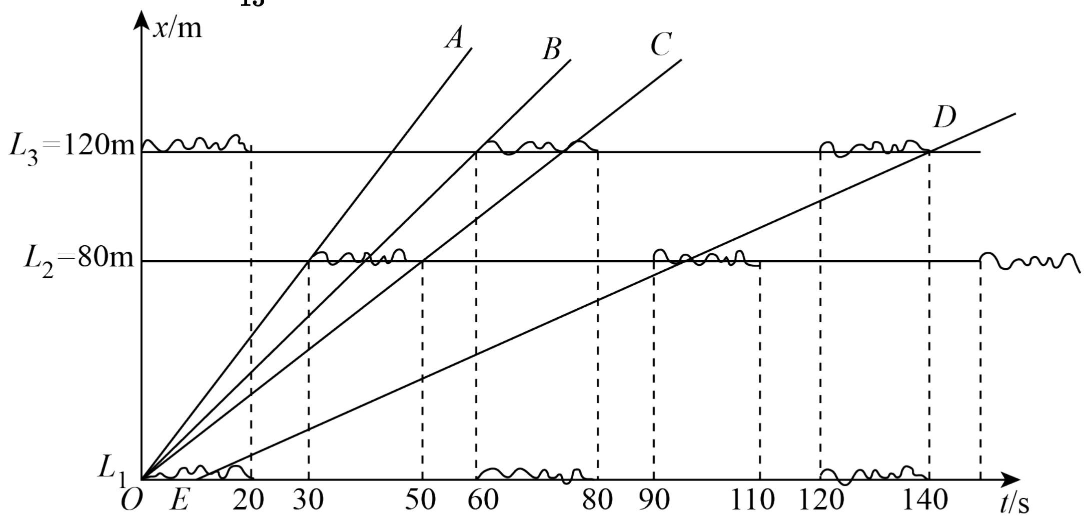
答案　1．2m/s

2．$\frac{12}{13}$m/s

解析　本题可以用$x\sim t$图象方便地求解，如图所示，L_1、L_2、L_3亮绿灯的时间为图中波浪线所示，求汽车的最大速率就是在图中找出一条能同时过L_1、L_2、L_3的波浪线部分的直线的最大斜率．显然，图中OB即为满足此条件的直线，故最大速率为$v=\frac{120}{60}\text{m/s}=2\text{m/s}$．

同理，自行车能不停地通过三盏信号灯且总时间不超过150s的最小速率对应图线ED的斜率，$v_{\min}=\frac{12}{13}\text{m/s}$．

故答案为：2m/s；$\frac{12}{13}$m/s．



39 已知一质点做变加速直线运动，初速度为v_0，其加速度随位移线性减小的关系（即加速过程中加速度与位移之间的关系）满足条件$a=a_0-ks$，式中a为任意位置处的加速度，s为位移，a_0、k为常量，求当位移为s_0时质点的瞬时速度．

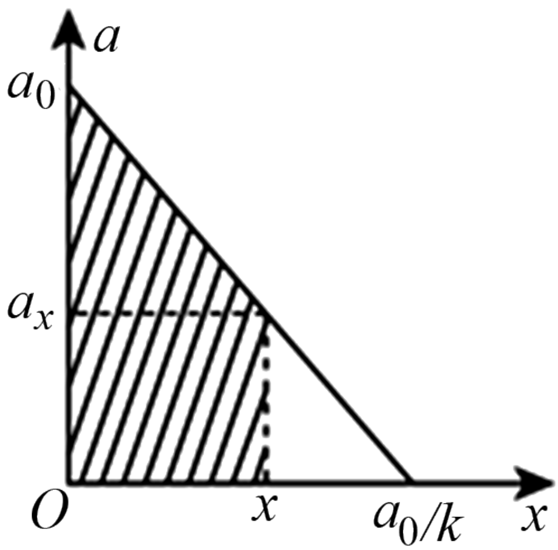
答案 $v_t=\sqrt{v_0^2+2a_0s_0-ks_0^2}$

解析 本题难度较大，因为质点做变加速直线运动，所以无法用匀变速直线运动公式直接求出位和为x时的瞬间速度，而且其加速随位移变化又不多见．

根据题中的民给函数表达式画出$a\sim x$图象，如图所示，图象中不直接出现速度这个物理量，细分析联想到公式：$v_t^2-v_0^2=2ax$，再结合图象面积的物理意义，采用“微元法”有：

$v_1^2-v_0^2=2a_0\triangle x$，$v_2^2-v_1^2=2a_1\triangle x$，$v_3^2-v_2^2=2a_2\triangle x$，

各式相加得：$v_x^2-v_0^2=2\triangle x(a_0+a_1+\cdots+a_x)$．



等式右边为图线与两坐标所围成的梯形面积的2倍，联立可得：$\frac{1}{2}(a_0+a_x)x=\frac{v_x^2-v_0^2}{2}$，

解得：$v_x=\sqrt{v_0^2+(2a_0-kx)x}$．

40 老鼠离开洞穴沿直线前进，它的速度与到洞穴的距离成反比，当它行进到离洞穴距离为d_1的甲处时速度为v_1，试求：

（1）老鼠行进到离洞穴距离为d_2的乙处时速度多大．

（2）从甲处到乙处要用去多少时间．

答案 （1）$v_2=\frac{k}{d_2}=\frac{d_1}{d_2}v_1$．

（2）$t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)(d_2-d_1)=\frac{d_2^2-d_1^2}{2d_1v_1}$．

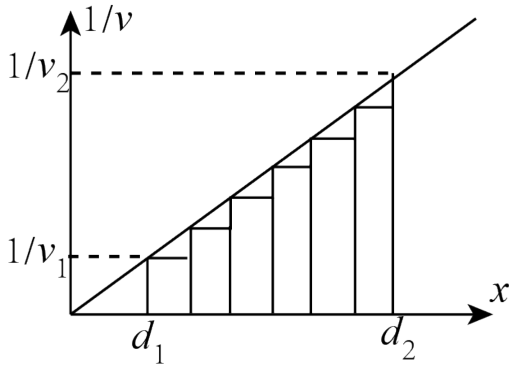
解析

（1）老鼠行进的速度与它到洞穴的距离成反比，即$v=\dfrac{k}{x}$．依题意有$k=v_1d_1$，则

$v_2=\dfrac{k}{d_2}=\dfrac{d_1}{d_2}v_1$．

故答案为：$v_2=\dfrac{k}{d_2}=\dfrac{d_1}{d_2}v_1$．

（2）老鼠行进的速度$v=\dfrac{k}{x}$，不是我们常见的运动．但是可以注意到它的$v\sim x$图象是一条双曲线，转化为$\dfrac{1}{v}\sim x$图象后，这种反比关系就变成了正比关系，即$\dfrac{1}{v}\sim x$图象是一条过原点的直线，如图所示．

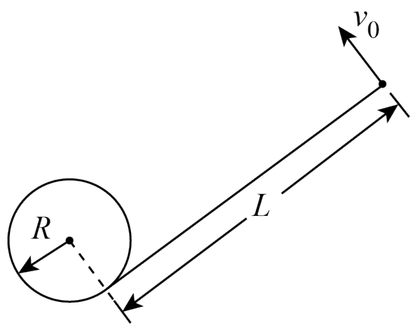


将d_1到d_2的线段分割成n等份，n很大时，每一份可以近似看成匀速直线运动．第一小段的时间$\Delta t_1=\dfrac{\Delta x}{v_1}$，其数值等于$\dfrac{1}{v}\sim x$图象最左边第一个矩形面积，依此类推，$n\to\infty$时，运动总时间等于$\dfrac{1}{v}\sim x$图中梯形面积，即：

$t=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}\right)(d_2-d_1)=\dfrac{d_2^2-d_1^2}{2d_1v_1}$．

故答案为：$t=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}\right)(d_2-d_1)=\dfrac{d_2^2-d_1^2}{2d_1v_1}$．

41 如图所示，在光滑水平面上立着一根半径为R的竖直圆柱子，借助长为L的细长线将小冰球与圆柱子相连．开始冰球位于水平面上并且线被拉紧，现在猛一推冰球，使其具有垂直于线的初速度v_0，于是冰球开始绕柱子运动，将线缠在柱子上．不计一切摩擦．线系在柱子下部，位于冰球滑动的水平面内．问经过多长时间后线全部绕在柱子上．



答案 $\dfrac{L^2}{2Rv_0}$

解析 冰球受到重力、水平面的支持力和线的力作用．由于线的拉力始终与冰球运动方向垂直，故线的拉力对冰球不做功，冰球的运动速度大小v_0不变，但方向时刻变化，同时冰球做圆周运动的半径在不断减小，相应的冰球运角速度会不断变大．因此本题不是高中常见的运动，有一定难度，可以通过合理运用图像来求解．

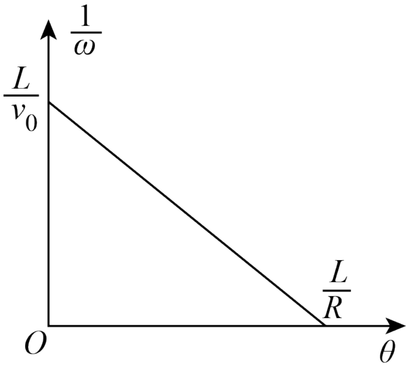
设经过一定时间后线与圆柱的切点绕圆柱的圆心转过了θ角，即有$R\theta$长的线绕在柱子上，此时冰球做圆周运动的半径变为$L-R\theta$，冰球运动的角速度$\omega=\dfrac{v_0}{L-R\theta}$，即

$\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{L}{v_0}-\dfrac{R}{v_0}\theta$，

做出$\dfrac{1}{\omega}\sim\theta$图象如图所示，直线与纵、横轴的交点分别为$\dfrac{L}{v_0}$和$\dfrac{L}{R}$．由于

$\omega=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=\dfrac{1}{\omega}\cdot\Delta\theta$，

因此直线与纵、横轴所夹三角形的面积即为冰球绕在圆柱上的时间．



冰球全部绕在柱子上的总时间$T=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{L}{v_0}\cdot\dfrac{L}{R}=\dfrac{L^2}{2Rv_0}$．

故答案为：$\dfrac{L^2}{2Rv_0}$．