中国计量学院学报 15(3): 0181~0185, 2004
Journal of China Jiliang University

【文章编号】 1004-1540(2004)03-0181-05

扩展不确定度分析与评定

袁玉静[1],钱绍圣[2]
(1.核工业第五研究设计院,河南 郑州 450052; 2.清华大学 工程物理系,北京 100084)

【摘 要】 ISO《测量不确定度表示指南》给出两种选择包含因子的方法:韦尔奇-萨特思韦特公式法和简便方法.文章据此对扩展不确定度的影响因素进行分析,并针对使用简便方法引起的包含因子的误差、不确定度以及扩展不确定度的不确定度进行分析和评定,以阐明有效自由度对包含因子和扩展不确定度的影响.

【关键词】 扩展不确定度;包含因子;误差
【中图分类号】 TB9 【文献标识码】 A

Analysis and evaluation of expanded uncertainty

YUAN Yu-jing[1], QIAN Shao-sheng[2]
(1. The No.5 Research and Design Institute of CNNC, Zhengzhou 450052, China;
2. Engineering Physics Department of Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract The ISO *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* presented two methods to choose a coverage factor: the Welch-Satterthwaite formula method and a simpler approach. This paper analyzes the influencing factors of expanded uncertainty according to the two methods. The error, the uncertainty of the coverage factor, and the uncertainty of expanded uncertainty that result from the simpler approach are also analyzed and evaluated to illustrate how the effective degrees of freedom influence the coverage factor and expanded uncertainty.

Key words expanded uncertainty; coverage factor; error

报告测量结果时,在准确度要求比较高的情况下常常需要使用扩展不确定度.扩展不确定度

【收稿日期】 2004-05-06
【作者简介】 袁玉静(1976-),女,河南太康人,工程师.主要从事核工程与核技术设计与研究.

的表达公式是 $U = ku_c(y)$,其中 k 是包含因子,$u_c(y)$ 是合成标准不确定度.根据 ISO《导则》选择包含因子主要采用两种方法.第一种方法是在被测量呈正态或近似正态分布,而有效自由度较小时采用韦尔奇-萨特思韦特(Welch-Satterthwaite)公式法(简称 W-S法).第二种是简便方法,也是在实际应用中经常使用的方法,即当置信水平 P 要求为 0.95时,取 $k=2$;置信水平 P 要求为 0.99时,取 $k=3$.第二种方法适用于被测量呈正态或近似正态分布且有效自由度较大的情形[1].在实际工作应用以及有关确定测量结果或仪器装置的不确定度的文献中我们会发现,确定 k 时很多情况下并不计算或讨论有效自由度的大小而直接取 k 为 3 或 2,然后确定扩展不确定度.我认为这并不是一种非常安全的做法,因为在有效自由度较小的情况下采用简便方法确定 k 与 W-S法相比有较大的误差,从而又与 $u_c(y)$ 的不确定度一起综合影响扩展不确定度,使之产生较大的不确定度.

1 包含因子 k 分析

根据 W-S 法计算 k 因子:

利用 Welch-Satterthwaite公式[1]计算有效自由度 ν_{eff}:

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \tag{1}$$

式(1)中,$u_i(y) = |c_i|\,u(x_i)$,c_i 是灵敏系数;ν_i 是 $u(x_i)$ 的自由度.

把求得的 ν_{eff} 值修约为整数,按照所要求的置信水平 P 查 t 分布的 $t_p(\nu)$ 值表,得到 $t(\nu_{\mathrm{eff}})$ 值即 k 值.

假设被测量 Y 为可以直接测量的量,按 B类方法进行评定时,假设 Y 为均匀分布,则 B类标准不确定度 $u_B(y)$ 的自由度趋向无穷大.A类标准不确定度 $u_A(y)$ 的自由度 $\nu_A = n-1$,n 是独立重复观测次数.由 $u_c^2(y) = u_A^2(y) + u_B^2(y)$,并假设 $m = u_A(y)/u_B(y)$,上式可变为:

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{[u_A^2(y) + u_B^2(y)]^2}{\frac{u_A^4(y)}{\nu_A}} = (n-1)(1 + 2m^{-2} + m^{-4}) \tag{2}$$

从(2)式可以看出,有效自由度 ν_{eff} 是 n 和 m 的函数.而包含因子 k 是有效自由度 ν_{eff} 和置信水平 P 的函数,即:

$$\nu_{\mathrm{eff}} = f(n, m) \tag{3}$$

$$k = f(\nu_{\mathrm{eff}}, p) \tag{4}$$

它们的关系曲线分别如图 1和图 2所示:

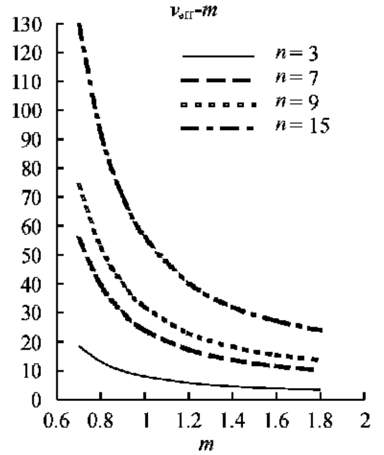

图 1 ν_{eff}-m 关系曲线

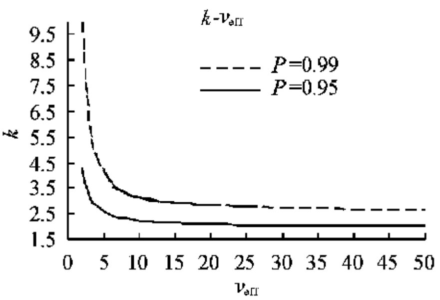

图 2 k-ν_{eff} 关系曲线

假定按照 W-S 法求得的包含因子 k 值记为 $t_P(\nu_{\mathrm{eff}})$,并以此为标准,则用简便方法选 k 的相对误差为:

$$W_k = |(k - t_P(\nu_{\mathrm{eff}}))| / t_P(\nu_{\mathrm{eff}}) \tag{5}$$

当 P 取 0.99,即 k 取 3时:

$$W_k = |(3 - t_P(\nu_{\mathrm{eff}}))| / t_P(\nu_{\mathrm{eff}}) \tag{6}$$

当 P 取 0.95,即 k 取 2时:

$$W_k = |(2 - t_P(\nu_{\mathrm{eff}}))| / t_P(\nu_{\mathrm{eff}}) \tag{7}$$

根据公式(6)、(7)以及图 2所示的 k-ν_{eff} 曲线,可以确定用简便方法选取 k 值引起的误差曲线如图 3

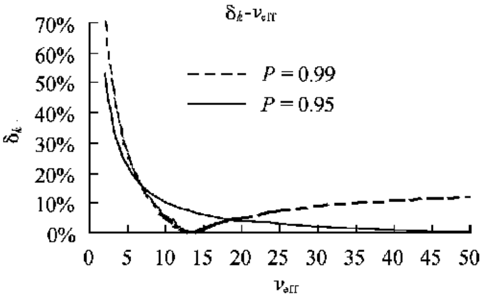

图 3　$\delta_k - \nu_{eff}$ 误差曲线

从图 3所示的误差曲线上可以看到,取 $P=0.99$时随有效自由度的增加,相对误差逐渐下降,有效自由度增加到 13时,相对误差几乎为零,即此时用简便方法选取 k值跟用 W-S法求得的 k值基本相等.但随有效自由度的继续增大,相对误差又逐渐增加,增加速度比较缓慢,当有效自由度为无穷大时,相对误差大概为 16%.但当有效自由度大于 13时,$k=3(P=0.99)$是偏于保守的取法.根据 $P=0.95$的误差曲线,有效自由度增加,相对误差单一方向下降.有效自由度大于 50时,相对误差几乎为零.从图 3可以看出,当有效自由度值较小时,引起的误差相当大.如当有效自由度值取 2时,取 $P=0.99$,则 $\delta_k=69.8\%$;取 $P=0.95$,则 $\delta_k=53.5\%$.假设要求 k值相对误差不超过 10%,则从图 3可以确定,$P=0.99$时满足要求的有效自由度的区间范围是 $8<\nu_{eff}<35$.由于当 $\nu_{eff}>13$时,取 $k=3$偏于保守引起的的误差可以忽略,所以,若要求 k值相对误差不超过 10%,则有效自由度 ν_{eff}只需大于 8.同理,$P=0.95$时满足误差要求的有效自由度的取值区间是 $\nu_{eff}>10$.可见,在测量结果要求比较高的情况下,用简便方法选取 k值时,应首先判断有效自由度是否大于 10,这样才能将误差控制在一定的范围内;否则,当有效自由度比较小时,会产生较大的误差.这与 ISO《导则》中用简便方法确定包含因子时对有效自由度的要求是一致的.

另外,根据图 1表示的有效自由度与 m及 n的关系,当测量次数 n一定时,对确定的自由度,有唯一的 m值与之对应.比如当 $n=3$时,若 $\nu_{eff}>10$则从图 1可知 m须小于 0.9,而且,测量次数增加,满足要求的 m值的点相应右移.从(2)式和图 1可以判断,当测量次数大于 10时,无论 m取多大,有效自由度恒大于 10.

从上面的分析可见,影响有效自由度的两个因素分别是测量次数 n和 A类标准不确定度与 B类标准不确定度的比值 m.用简便方法确定包含因子时,对于给定的测量次数($n\leqslant 10$),m的值不允许太大,即 A类标准不确定度相对于 B类标准不确定度不能差别太大,否则,会引起较大的 k值误差.根据公式(2)和(6)可做 δ_k-m误差曲线如图 4所示(以 $p=0.99$为例):

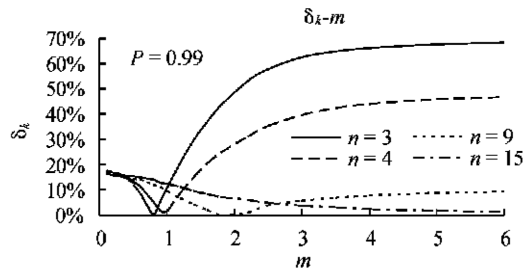

图 4　δ_k-m误差曲线

从图 4可以推知,当测量次数增加时,曲线趋于平缓而且与水平轴的交点右移,引起的误差相应减小.在用 W-S法进行扩展不确定度评定中,A类标准不确定度和 B类标准不确定度不仅影响合成标准不确定度而且影响包含因子 k值的确定.测量次数 n一定,A类不确定度影响为主,即 $u_A>u_B$时,从图 1知有效自由度偏小,根据有效自由度值和图 2确定的 k值相对较大,$U=ku_A(y)$.而 B类不确定度影响为主,即 $u_B>u_A$时,从图 1知有效自由度较大,相应确定的 k值相对较小,$U=ku_B(y)$.

2　包含因子 k的不确定度

根据方差概念:设 ξ是一个随机变量,若 $E\{[\xi-E(\xi)]^2\}$存在,则称 $E\{[\xi-E(\xi)]^2\}$为 ξ的方差,即 $V(\xi)=E\{[\xi-E(\xi)]^2\}$.

这里以 W-S法为标准,包含因子 k的数学期望是 $E(k)$,则:

$$Var(k)=E\{[k-E(k)]^2\}$$

假设 $E(k)$与 $t_p(\nu_{eff})$之差可以忽略则:

$$Var(k)\approx E\{[k-t_P(\nu_{eff})]^2\}=[k-t_P(\nu_{eff})]^2$$

所以 k的标准偏差 $\sigma(k)=|k-t_P(\nu_{eff})|$,取

$e(k)$ 为 k的标准不确定度,则:

$$u(k) = |k - t_P(\nu_{eff})| \qquad (8)$$

从式(8)和图 2可以确定包含因子 k分别取 3和 2时的标准不确定度.其与有效自由度的关系如下:

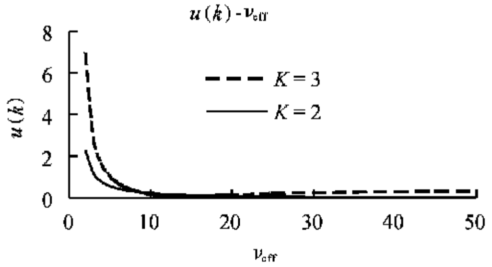

图 5 $u(k) - \nu_{eff}$ 关系曲线

从图 5可以观察到,无论包含因子值是 3还是 2,它们的不确定度均随着有效自由度的增大而减小.取 $k=3$时,有一最佳有效自由度区间(10~30),使得在该区间内,k的不确定度最小.而取 $k=2$时,几乎是有效自由度大于一定值(~20)后,k的不确定度就变得很小,有效自由度大于 35时,k的不确定度接近于零.

包含因子 k的相对不确定度:

$$\frac{u(k)}{k} = \frac{|k - t_p(\nu_{eff})|}{k} \qquad (9)$$

k分别取 3和 2时,如图 6所示:

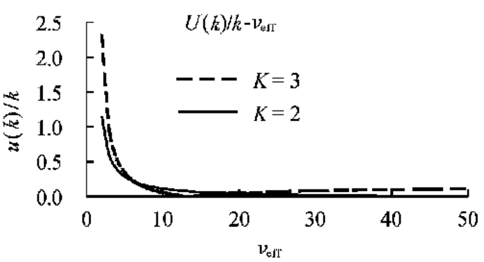

图 6 $u(k)/k - \nu_{eff}$ 关系曲线

3 扩展不确定度 U的不确定度

根据扩展不确定度公式 $U = ku_c(y)$,扩展不确定度有 k和 $u_c(y)$的两个不确定度分量组成.根据《导则》[1] $u(x_i)$的自由度

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2}$$

以 $u_c(y)$代替 $u(x_i)$,则 $u_c(y)$的自由度

$$\nu_{eff} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u_c(y)}{u_c(y)}\right]^{-2}$$

所以

$$\Delta u_c(y) \approx \sqrt{\frac{u_c^2(y)}{2\nu_{eff}}} \qquad (10)$$

假设包含因子 k与合成标准不确定度 $u_c(y)$不相关,根据不确定度传递规律[1]

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)$$

和式(10)可以推知:

$$u^2(U) = u_c^2(y)u^2(k) + k^2u^2[u_c(y)]$$

$$\begin{aligned} u(U) &= \sqrt{u_c^2(y)u^2(k) + k^2u^2[u_c(y)]} \\ &= \sqrt{u_c^2(y)[k - t_P(\nu_{eff})]^2 + k^2u_c^2(y)/(2\nu_{eff})} \\ &= u_c(y)\sqrt{[k - t_P(\nu_{eff})]^2 + k^2/(2\nu_{eff})} \end{aligned} \qquad (11)$$

所以扩展不确定度的相对不确定度:

$$\frac{u(U)}{U} = \sqrt{\left[\frac{k - t_p(\nu_{eff})}{k}\right]^2 + \frac{1}{2\nu_{eff}}} \qquad (12)$$

从式(12)可以看出,$u(U)/U$是包含因子 k和有效自由度 ν_{eff}的函数.

取 $k=3$时(12)式变为

$$\frac{u(U)}{U} = \sqrt{\left[\frac{3 - t_p(\nu_{eff})}{3}\right]^2 + \frac{1}{2\nu_{eff}}} \qquad (13)$$

当取 $k=2$时,(12)式变为

$$\frac{u(U)}{U} = \sqrt{\left[\frac{2 - t_p(\nu_{eff})}{2}\right]^2 + \frac{1}{2\nu_{eff}}} \qquad (14)$$

由于 $t_p(\nu_{eff})$可由 ν_{eff}通过查表得到,所以 $u(U)/U$变为 ν_{eff}的单值函数.根据式(13)、(14)可作 $u(U)/U - \nu_{eff}$关系曲线如图 7所示:

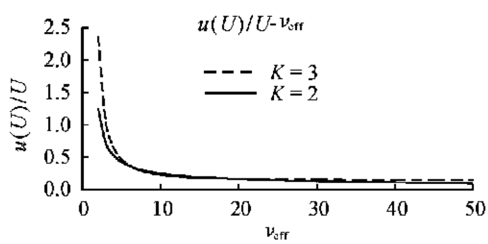

图 7 $u(U)/U - \nu_{eff}$ 关系曲线

从图 7明显可以看出,当有效自由度小于 5

或大于 20时,用简便方法取 $k=3$时扩展不确定度的相对不确定度较取 $k=2$时大. 而当有效自由度范围在 5~20之间时,两曲线的重合性较大. 现把该区间放大如图 8.

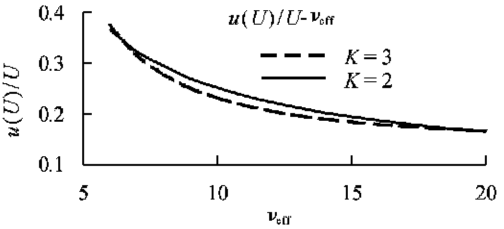

图 8　指定区间的 $u(U)/U-\nu_{eff}$ 关系曲线

根据图 8可以看出在有效自由度为 5~20的区间内,情况正好相反,取 $k=2$时扩展不确定度的相对不确定度较取 $k=3$时大. 这表明在应用中,当有效自由度范围落在这一区间内时,取 $k=3$具有稍大的可靠性. 实际上,多数情况下尤其是在国际应用中包含因子的取值通常为 2以满足 0.95的置信概率要求. 在做某些测量标准的验定或校准时,取 $k=3$以使测量结果达到 0.99的置信水平.

纵观式 (8) 和 (11) 可以看出,较之 k的不确定度评定,在扩展不确定度 U的不确定度评定中,除包含因子 k的影响外,还引入了另外一个影响分量 $u_c(y)$,使得扩展不确定度变得较为复杂起来. 因为它不仅要考虑 $u_c(y)$ 本身而且需要考虑 $u_c(y)$ 的不确定度或自由度.

比较包含因子 k的相对不确定度公式 (9) 和扩展不确定度 U的相对不确定度公式 (12) 可以看出,式 (12) 比式 (9) 多出一个 $1/(2\nu_{eff})$ 项,这一项表征的正是 $u_c(y)$ 的影响. 对照图 6和图 7也可以看出,二者的变化趋势是一致的,k分别取为 3和 2时两曲线都有两个交点. 但是考虑进 $u_c(y)$ 的影响后,U的不确定度比单纯考虑 k的影响要变得大一些. 表 1数据更直观地表明这一影响.

表 1　包含因子和扩展不确定度的相对不确定度　%

ν_{eff}	$u(k)/k$ ($k=3$)	$u(U)/U$ ($k=3$)	$u(k)/k$ ($k=2$)	$u(U)/U$ ($k=2$)
5	34.3	46.7	28.5	42.6
10	5.7	23.1	11.5	25.1
15	1.7	18.3	6.5	19.4
20	5.0	16.6	4.5	16.4
50	10.7	14.6	0.5	10.0

根据式 (9) 和 (12),二者的差别仅在于根号下的 $1/(2\nu_{eff})$ 项,若 $u_c(y)$ 的不确定度极小,即 ν_{eff} 很大,则该项可以忽略. 此时式 (9) 就是式 (12) 在 $u_c(y)$ 不确定度为零时的极端情况. 在 ISO《导则》中,仅对用简便方法选择包含因子 k引起的误差进行举例,并没有深入的分析和研究,这里谨给出在此方面的一些看法,希望当我们使用简便方法给出一个含有扩展不确定度的报告结果的时候,对于该扩展不确定度本身究竟有多大的可靠性做到心中有数.

4　总　结

根据前面的分析,有效自由度是影响包含因子和扩展不确定度的一个重要因素. 在有效自由度较小的情况下,包含因子的误差、不确定度以及扩展不确定度的不确定度都呈现较大的值. 在文章给定的化简条件下,有效自由度由测量次数 n 和 A、B两类标准不确定度比值 m确定. 有效自由度在较大的 m和较小的 n影响下表现较小的数值,使包含因子和扩展不确定度产生较大不确定度. 所以,欲提高报告结果的质量,需要控制一定的 m值和提高测量次数. 在高质量的结果报告中,使用简便方法确定包含因子时,须慎重考虑有效自由度的大小是否满足《导则》的要求.

【参　考　文　献】

[1] ISO. Guide to the expression of uncertainty in measurement[M]. Switzerland ISO, 1993.

[2] TURZENIECKA D. Comments on the accuracy of some approximate methods of evaluation of expanded uncertainty[J]. Metrologia, 1999, 36(2): 113-116.

[3] TURZENIECKA D. Errors in the evaluation of the coverage factor as a criterion of applications of approximate methods of evaluation of expanded uncertainty[J]. Measurement, 2000, 27(4): 223-229.

[4] 钱绍圣. 测量不确定度: 实验数据的处理与表示[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

[5] 李慎安. 测量结果不确定度的估计与表达[M]. 北京: 中国计量出版社, 1997.

[6] 国家质量技术监督局. 测量不确定度评定与表示指南[M]. 北京: 中国计量出版社, 2001.