

实验报告

姓名：朱沾丞 学号：PB19111674

实验名称 单摆测当地重力加速度

实验目的 用单摆的振动周期来测定当地的重力加速度

实验原理 当单摆摆角较小（小于 5° ）时，单摆的周期近似为 $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ，得到 $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$ ，

故测得摆长和周期后，可计算当地重力加速度。

基础实验

实验仪器 细线，小球（用 11 个硬币代替），2m 钢卷尺，手机，支架

实验步骤

- 1、在墙面上固定好支架，用细线将 11 个硬币固定后将绳子悬挂于支架上。
- 2、使绳子自然竖直静止后，测量从悬挂点到 11 枚硬币质心的距离，并记录。
- 3、将硬币在摆的平面内拉起一个小角度（小于 5° ），小心释放，待硬币通过最低点时开始计时，至 30 个周期时停止计时，记录数据。
- 4、重复步骤 2、3。
- 5、整理实验器材。
- 6、分析数据，撰写实验报告

测量数据

表 1 测量单摆的周期和摆长的实验数据表格

实验次数	1	2	3	4	5	6	7
摆长 (cm)	1.0090	1.0050	1.0075	1.0077	1.0055	1.0058	1.0070
30个周期	60.05	60.03	60.26	60.30	60.26	60.16	60.11

数据处理

实验所得到的重力加速度值：

$$\bar{L} = \frac{\sum L_i}{n} = \frac{1.0090 + 1.0050 + 1.0075 + 1.0077 + 1.0055 + 1.0058 + 1.0070}{7} = 1.00679m$$

$$\bar{T} = \frac{\sum T_i}{30n} = \frac{60.05 + 60.03 + 60.26 + 60.30 + 60.26 + 60.16 + 60.11}{30 \times 7} = 2.0056s$$

$$\text{故 } \bar{g} = \frac{4\pi^2 \bar{L}}{\bar{T}^2} = 9.88m/s^2$$

误差分析

不确定度分析

先计算 L 的不确定度 $U_{L,0.95}$

$$\bar{L} = \frac{\sum L_i}{n} = \frac{1.0090 + 1.0050 + 1.0075 + 1.0077 + 1.0055 + 1.0058 + 1.0070}{7} = 1.00679m$$

$$\begin{aligned}\sigma_L &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (Li - \bar{L})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{6} [(1.0090 - 1.00679)^2 + (1.0050 - 1.00679)^2 + (1.0075 - 1.00679)^2 + (1.0077 - 1.00679)^2 + (1.0055 - 1.00679)^2 + (1.0058 - 1.00679)^2 + (1.0070 - 1.00679)^2]} \\ &= 0.0014m\end{aligned}$$

$$U_{L,0.95} = \sqrt{(t_{0.95} \frac{\sigma_L}{\sqrt{n}})^2 + (k_{0.95} \frac{\Delta_{\text{仪}}}{C})^2} = \sqrt{(2.46 \cdot \frac{0.0014}{\sqrt{7}})^2 + (1.96 \cdot \frac{0.0012}{3})^2} = 0.0015m, \quad P = 0.95$$

下计算 T 的不确定度 $U_{T,0.95}$

$$\bar{T} = \frac{\sum T_i}{30n} = \frac{60.05 + 60.03 + 60.26 + 60.30 + 60.26 + 60.16 + 60.11}{30 \times 7} = 2.0056s$$

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\frac{T_i}{30} - \bar{T})^2} \\ &= \sqrt{\frac{(\frac{60.05}{30} - 2.0056)^2 + (\frac{60.03}{30} - 2.0056)^2 + (\frac{60.32}{30} - 2.0056)^2 + (\frac{60.30}{30} - 2.0056)^2 + (\frac{60.26}{30} - 2.0056)^2 + (\frac{60.16}{30} - 2.0056)^2 + (\frac{60.11}{30} - 2.0056)^2}{6}} \\ &= 0.004s\end{aligned}$$

$$u_{A,T} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\frac{T_i}{30} - \bar{T})^2}}{\sqrt{n}} = \frac{0.004}{\sqrt{7}}s = 0.0015s$$

$$u_{B,T} = \frac{\Delta}{C} = \frac{\frac{1}{30} \sqrt{\Delta_{\text{估}}^2 + \Delta_{\text{仪}}^2}}{C} = \frac{\frac{1}{30} \sqrt{0.2^2 + 0.01^2}}{3} = 0.0022s$$

$$U_{T,0.95} = \sqrt{\Delta_{AT}^2 + \Delta_{BT}^2} = \sqrt{(t_{0.95} \frac{\sigma_T}{\sqrt{n}})^2 + (k_{0.95} \frac{\Delta}{C})^2} = \sqrt{(2.46 \cdot \frac{0.004}{\sqrt{7}})^2 + (1.96 \cdot \frac{\frac{1}{30} \sqrt{0.2^2 + 0.01^2}}{3})^2} = 0.006s, \quad P = 0.95$$

现计算 g 的不确定度

$$\text{则 } \frac{U_{g,0.95}}{\bar{g}} = \sqrt{(\frac{U_{L,0.95}}{\bar{L}})^2 + (2 \times \frac{U_{T,0.95}}{\bar{T}})^2} = \sqrt{(\frac{0.015}{1.00679})^2 + (2 \times \frac{0.006}{2.006})^2} = 0.0062$$

$$\text{得到 } U_{g,0.95} = 9.88 \times 0.0062m/s^2 = 0.06m/s^2$$

$$g = \bar{g} \pm U_{g,0.95} = (9.88 \pm 0.06)m/s^2, P = 0.95$$

$$\text{当地重力加速度 } g_E = 9.79m/s^2$$

$$\text{相对误差 } \delta = \frac{|g_E - \bar{g}|}{g_E} = 1.5\%$$

定性误差分析

1、绳子的重量实际上不可忽略，因此原体系相当于一个复摆。

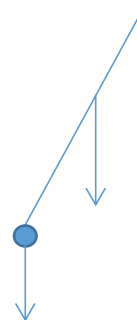
$$\text{由受力分析 } MgL \sin \theta + \frac{1}{2} mgL \sin \theta = J\beta$$

$$\text{其中 } J = ML^2 + \frac{1}{3} mL^2$$

由于 θ 是小角度， $\sin \theta \approx \theta$

解得 $w = \sqrt{\frac{g}{L} \times \frac{M + \frac{1}{2}m}{M + \frac{1}{3}m}}$

故真实的重力加速度 $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \times \frac{M + \frac{1}{3}m}{M + \frac{1}{2}m}$



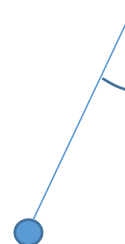
可见实际测得的重力加速度 g 应大于真实的重力加速度

2、由于释放之后，小球可能并不只是在平面内做摆动，还可能在空间做一圆锥摆运动，其表现的运动过程为二者的叠加。设想一圆锥摆运动。

拉力的水平分力提供向心力，有

$$mg \tan \theta = m\omega^2 L \sin \theta$$

解得 $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \cos \theta$



由此可知，而两者的合运动测得的 $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$ ，其应当是偏大的。

提升实验

实验仪器 手机（安装 phyphox 软件），细线，支架

实验步骤

- 1、在墙面上固定好支架，将手机用细线绑起，并将细线挂在支架上。
- 2、待手机自然竖直静止后，测量自悬挂点到手机质心的距离。
- 3、开启录屏后打开手机软件 phyphox 中的“摆”功能，并开始测量。（注意不要让手机旋转）
- 4、将手机拉起一个小角度（小于 5° ），小心释放，并需保证手机在运动时始终在摆平面内，避免手机的旋转。（可通过在开始测量前静置足够长时间并在释放时使手指同时释放做到）
- 5、导出实验数据及手机录频。
- 6、整理器材。
- 7、分析数据，撰写实验报告。

实验数据

图 1 利用 phyphox 测量重力加速度的截图



实验原理

利用 phyphox 软件及手机中自带的传感器测量小幅摆动的周期，并计算出当地重力加速度。

误差分析

- 1、可能细线仍有一定的弹性，导致在摆动过程中，实际摆长大于一开始测得的摆长，最终导致 phyphox 计算得到的重力加速度值偏小
- 2、手机在实际运动中还会受到空气阻力的影响，此处我们设阻力 $f = -kv$ （负号代表方向与速度方向相反），则，我们列小球的动力学方程：

$$ma = -mg \frac{x}{L} - kv$$

$$\text{得到 } \ddot{x} + \frac{k}{m} \dot{x} + \frac{g}{L} x = 0, \text{ 令 } 2\beta = \frac{k}{m}, \omega = \frac{g}{L}$$

解该微分方程， $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega x = 0$ ，应当为一对复根 $x = -\beta \pm i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ ，

得到 $x = Ae^{-\beta} \sin(\omega't + \varphi)$ ，其中 $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} < \omega$ ，

因此 phyphox 测得的重力加速度 $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$ 会小于实际的重力加速度。

高阶实验

实验仪器 手机， tracker 软件， 小球（用 11 个硬币代替）， 细线， 支架

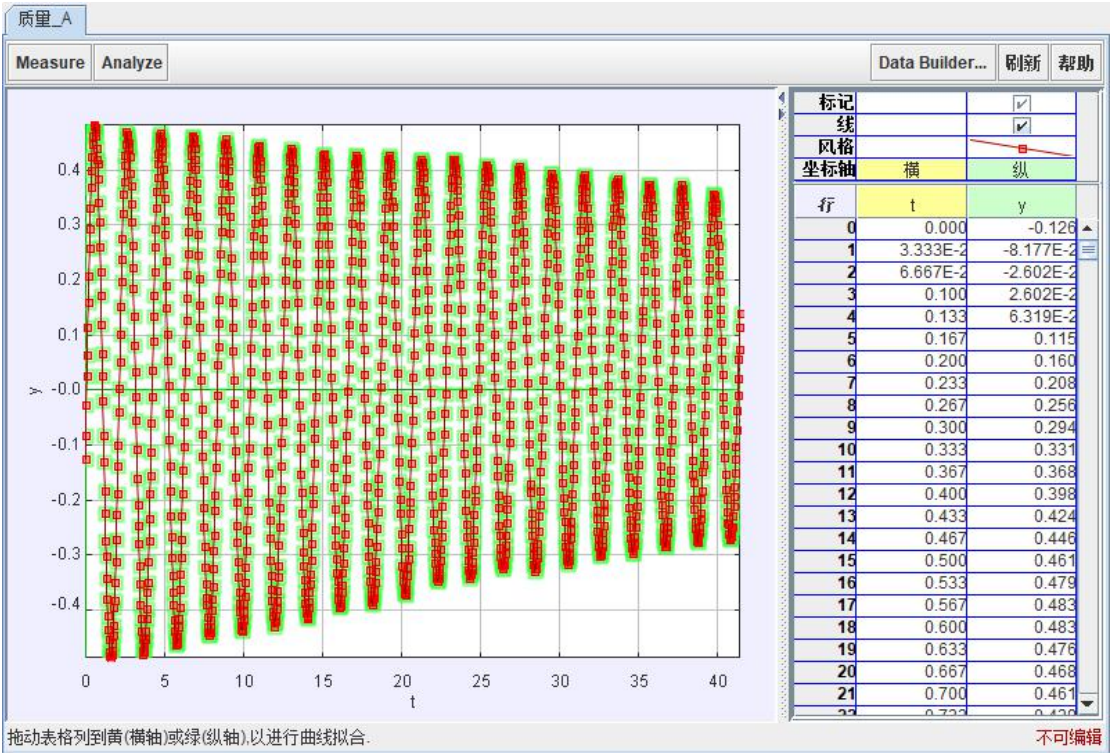
实验步骤

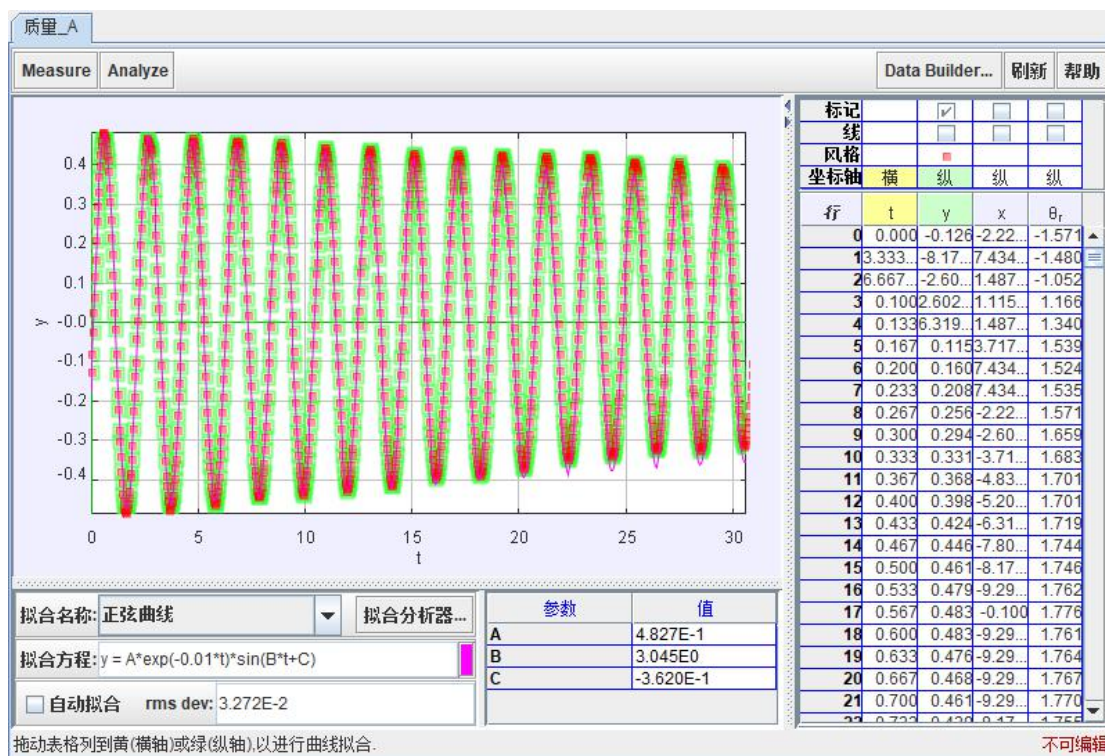
- 1、在墙面上固定好支架，用细线将 11 个硬币固定后将绳子悬挂于支架上。
- 2、使绳子自然竖直静止后，测量从悬挂点到 11 枚硬币质心的距离，并记录。
- 3、在摆平面内将硬币拉起一个较大的角度，然后用手机开始录制视频。
- 4、小心释放硬币，用手机录制下大角度摆动的过程。
- 5、整理器材。
- 6、导出视频，用 Tracker 软件分析视频。
- 7、撰写实验报告。

实验数据

摆长 $L=1.036\text{m}$

图 2 大角度摆数据分析的 Tracker 截图





数据处理

拟合曲线 $y = 0.4827 * e^{-0.01t} * \sin(3.045t - 0.362)$ m

最大角度 $\theta = \arcsin \frac{A}{L} = 27.94^\circ$

未修正的重力加速度为 $g = l\omega^2 = 9.60 \text{ m/s}^2$

修正后的重力加速度为 $g = l * (\omega * (1 + \frac{1}{4} \sin^2(\frac{\theta}{2})))^2 = 9.887 \text{ m/s}^2$

误差分析

- 1、同基础实验部分，绳子质量不可忽略导致实际做一个复摆运动，角速度 ω 还有一个修正项，并最终使得我们得到的重力加速度大于实际的重力加速度。
- 2、给出的重力加速度修正公式保留了一阶近似，可以保留到更高阶。
- 3、拟合过程中相关量并不十分精确，比如角速度，相差 0.01 rad/s 在图中难以看出差别，导致拟合曲线可能有偏差。

实验小结

本实验采用三种方法测量当地重力加速度，每个实验也面临着一些问题，基础实验受空气阻力影响较大，测量到后期，重物的摆动已经不明显，因此在实验过程中，测量的总时长不宜太长。提升实验中 phyphox 软件测量的重力加速度值不断的跳动，这既与摆动过程受到外界影响有关，而且也与在手机摆动过程中伴随着微小的转动有关。高阶实验利用 Tracker 拟合及修正因子来确定重力加速度，实际上在拍摄的视频中，由于在最低点处速度较快，在有些帧上显示有重影，比较难以确定具体的位置。

实验合影

