

文章编号: 1007-2934(2019)06-0077-03

单摆实验中角振幅对实验结果的影响

潘萌 张杰 狄红卫

(暨南大学 理工学院 广东 广州 510632)

摘要: 研究了单摆测重力加速度实验中角振幅的影响。结果表明, 随意选取角振幅可能导致实验结果不确定性的增加, 及人为的系统性偏差; 在实验中, 不同摆长下宜选取相同的角振幅。

关键词: 单摆; 角振幅; 数据分析

中图分类号: O4-33

文献标志码: A

DOI: 10.14139/j.cnki.cn22-1228.2019.06.018

单摆测重力加速度是一个传统的经典力学实验^[1]。随着测量精度的改进(如使用光电计时装置^[2])和计算能力的提高(如利用计算机进行数据分析^[3]), 一些在以前忽略的因素就有可能表现出来。

一般的单摆实验只要求角振幅小于 5° , 对具体如何取值不作要求^[1]。实际操作中可能会存在角振幅随意取值, 或短摆长时取较大角振幅、长摆长时取较小角振幅的情况。

首先在角振幅为 2° 与 4° 的情况下分别进行实验测量和数据分析, 然后将角振幅为 2° 与 4° 的实验数据随机组合进行数据分析, 最后在短摆长时选取 4° 实验数据、长摆长时选取 2° 实验数据进行数据分析, 以研究单摆角振幅对实验结果的影响。

1 角振幅对单摆周期的影响

图1为单摆示意图。

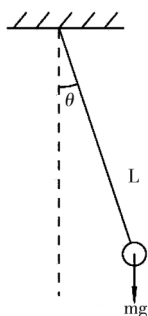


图1 单摆

忽略细绳质量并将摆球当质点看待,

则有^[4]:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta \quad (1)$$

其中 θ 为摆角, t 为时间, g 为重力加速度, L 为摆长。

当摆角振幅 θ_m 很小时, 单摆周期为:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2)$$

当 θ_m 不是很小时, 单摆周期为:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}(1 + \delta) \quad (3)$$

其中 $\delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_m}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_m}{2} + \dots$, 为考虑角振幅大小后的修正项。当 $\theta_m = 2^\circ$ 时 $\delta \approx 0.00008$; 当 $\theta_m = 4^\circ$ 时 $\delta \approx 0.00030$ 。

在一系列摆长下测出单摆周期后, 即可利用(2)式或(3)式通过数据分析得出重力加速度的值。

2 实验内容和数据

实验使用西安教学仪器厂生产的J-LD33-1型单摆, 摆长测量使用与该单摆相配套的专用米尺等, 周期测量使用暨南大学思源实验室研制的JSQ-2型光电计时计数器。

实验时选取多个摆长, 在角振幅为 2° 与 4° 的情况下对单摆周期分别进行3次测量。实验数据见表1。

收稿日期: 2019-05-09

基金项目: 广州市高校创新创业教育项目(201709k07), 暨南大学第20批教学改革研究项目(JG2018030)

* 通讯联系人

表1 单摆实验数据

L/m	29T/s($\theta_m = 2^\circ$)			29T/s($\theta_m = 4^\circ$)		
	第1次	第2次	第3次	第1次	第2次	第3次
0.598 9	44.98	44.98	44.97	45.04	45.04	45.04
0.699 9	48.64	48.63	48.63	48.70	48.70	48.70
0.799 8	52.00	52.00	52.01	52.08	52.08	52.08
0.900 9	55.21	55.22	55.22	55.27	55.27	55.27
1.000 2	58.18	58.18	58.18	58.25	58.25	58.25
1.100 4	61.02	61.01	61.01	61.08	61.08	61.08

3 实验数据的分析

数据分析的方法有很多。列表法^[1]利用(2)式或(3)式直接计算、求平均,具有使用简单的特点。

图解法^[1]则将(2)式或(3)式转换为:

$$L = \frac{g}{4\pi^2} T_0^2 \quad (4)$$

或

$$L = \frac{g}{4\pi^2(1+\delta)^2} T^2 \quad (5)$$

然后在坐标纸上以 L 为纵坐标,以 T_0^2 或 T^2 为横坐标绘出实验点及相适合的直线,得出直线的斜率

$$b = \frac{g}{4\pi^2} \text{ 或 } \frac{g}{4\pi^2(1+\delta)^2} \text{ 进而求出重力加速度:}$$

$$g = 4\pi^2 b \quad (6)$$

或

$$g = 4\pi^2(1+\delta)^2 b \quad (7)$$

图解法具有直观、可克服摆长测量整体偏差的特点。

最小二乘法^[1]利用 L 与 T_0^2 或 T^2 之间的线性关系拟合得出斜率,进而求出重力加速度。最小二乘法具有计算精度高的特点。一些数据分析软件,如 Origin 软件、Matlab 软件中的 polyfit 函数等,实际上采用的就是最小二乘法。

数据分析采用最小二乘法以获得高计算精度。在 Matlab 环境下,通过编程,实现数据的处理与随机组合、最小二乘拟合等。

3.1 最小二乘拟合

若变量 x, y 之间存在线性关系 $y = a + bx$, 已有 n 对观测值 $(x_i, y_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$, 则参数 a, b 的最佳估计值为^[5]:

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

\hat{b} 的标准差为:

$$s_b = \frac{s_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$\text{其中 } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2}.$$

根据上述公式可计算出拟合参数 \hat{b} 及其标准差 s_b 。

3.2 2° 与 4° 实验数据的分析

对 2° 与 4° 实验数据,分别对 3 次测量的数据求平均,并对测量所得的 29 倍周期值除以 29 以得到 1 倍的周期值,然后利用 L 与 T^2 之间的线性关系拟合得出斜率 b ,进而利用(6)式或(7)式求出重力加速度。计算结果见表 2 和图 2(a)。

表2 重力加速度的实际值及实验数据拟合结果(m/s²)

实际值	实验数据拟合结果			
	2°数据①	4°数据②	随机选取③	短4°长2°④
9.788	9.791±0.008	9.783±0.007	9.784±0.011	9.836±0.015

①已按(7)式进行角振幅修正,不进行角振幅修正(按(6)式)的结果为 9.790 ± 0.008 ; ②已进行角振幅修正,不进行角振幅修正的结果为 9.777 ± 0.007 ; ③随机选取 2° 或 4° 实验数据,共进行 1 000 轮,所得重力加速度 g_{MC} 的分布见图 2 的右图,由该分布可得出其期望值和标准差; ④较短的摆长选取 4° 实验数据、较长的摆长选取 2° 实验数据。

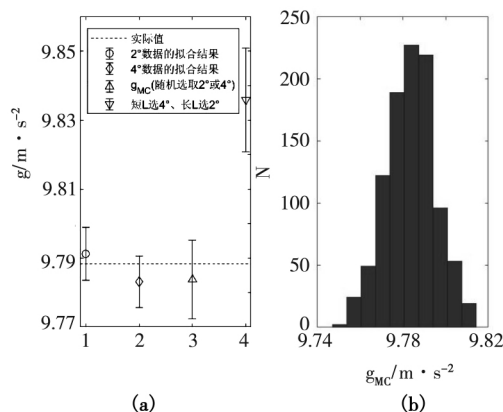


图2 重力加速度的实际值及实验数据拟合结果

由表 2 可见,角振幅为 2° 时角振幅对结果影响很小:不考虑角振幅修正情况下得出的重力加速度为 $9.790 \pm 0.008 \text{ m/s}^2$,考虑角振幅修正的结果为 $9.791 \pm 0.008 \text{ m/s}^2$,与广州地区重力加速度的实际值 9.788 m/s^2 相比,相差皆在一个标准差之内。角振幅为 4° 时角振幅对结果略有影响:不

考虑角振幅修正的结果为 $9.777 \pm 0.007 \text{ m/s}^2$, 与实际值相差在两个标准差之内; 考虑角振幅修正的结果为 $9.783 \pm 0.007 \text{ m/s}^2$, 与实际值相差在一个标准差之内。

3.3 2° 与 4° 实验数据随机组合的分析

在每个摆长下的 6 个测量值 (2° 与 4° 各 3 个, 见表 1) 中, 采用蒙特卡罗 (Monte Carlo) 方法随机选取 3 个组合在一起, 然后对组合数据进行分析。

随机组合与分析共进行了 1 000 轮, 所得的 1 000 个重力加速度 g_{MC} 的分布见图 2(b)。根据该分布可以得出随机组合情况下的期望值和标准差, 结果见表 2 和图 2(a)。

由表 2 可见, 随机组合情况下得出的重力加速度为 $9.784 \pm 0.011 \text{ m/s}^2$, 与实际值相差在一个标准差之内, 然而其标准差与单纯 2° 或单纯 4° 的标准差相比都有明显的增大, 说明角振幅的随机选取会引起实验结果不确定性的增加。

3.4 按摆长选取实验数据的分析

从减小角振幅影响的角度考虑, 我们希望单摆线振幅尽量地小, 然而光电计时装置却又要求单摆有大于摆球半径的线振幅。在线振幅一定的情况下, 短摆长的角振幅较大, 长摆长的角振幅较小。

为研究在实际操作中可能存在的按摆长选取角振幅的情况, 在较短的 3 个摆长 (见表 1) 下选取 4° 的实验数据, 在较长的 3 个摆长下选取 2° 的实验数据, 然后进行数据分析。结果见表 2 和图 2(a)。

由表 2 可见, 短摆长选 4° 、长摆长选 2° 情况下得出的重力加速度为 $9.836 \pm 0.015 \text{ m/s}^2$, 不仅

标准差有更明显的增大, 而且得出的值与实际值相差在 3 个标准差之外, 说明按摆长选取角振幅不仅会导致实验结果不确定性的增加, 而且会产生人为的系统性偏差。

4 总 结

研究单摆测重力加速度实验中, 角振幅对实验结果的影响。结果表明: 角振幅为 2° 时角振幅引起的修正很小, 可以忽略; 角振幅为 4° 时对结果略有影响; 随机选取角振幅 (2° 与 4° 等几率选取), 会引起实验结果不确定性的增加; 短摆长选 4° 、长摆长选 2° , 不仅会导致实验结果不确定性的增加, 而且会产生人为的系统性偏差。

因此, 在单摆实验中, 不同摆长下宜选取相同的角振幅, 以避免随意选取角振幅可能导致的实验结果不确定性的增加, 及人为的系统性偏差。

参考文献:

- [1] 温建平, 刘通宁, 李文辉, 等. 单摆实验数据处理方法的研究[J]. 大学物理实验, 2014, 27(1): 92-96.
- [2] 韩万强, 刘虎. 利用智能毫秒表改进大学物理实验计时系统的尝试[J]. 大学物理实验, 2010, 23(5): 41-42.
- [3] 李斌. MATLAB 在大学物理实验常用数据处理中的应用[J]. 大学物理实验, 2018, 31(4): 93-96.
- [4] 孙丙西. 单摆测重力加速度的修正公式[J]. 内蒙古民族大学学报(自然科学版), 2005, 20(6): 658-659.
- [5] 陈璐. 两个线性变量实验数据处理的研究[J]. 大学物理实验, 2016, 29(3): 126-128.

Effect of Angular Amplitude on Experimental Results in Simple Pendulum Experiment

PAN Meng, ZHANG Jie, DI Hongwei

(College of Science and Engineering, Jinan University, Guangzhou 510632, China)

Abstract: The influence of angular amplitude in the experiment of measuring acceleration of gravity by simple pendulum is studied. The results show that arbitrary choice of angular amplitude may increase the uncertainty of experimental results and result in artificial systematic deviation. In experiments, the same angular amplitude should be chosen under different pendulum lengths.

Key words: simple pendulum; angular amplitude; data analysis