1 绪 论

实验是观察的一种形式，是人们通过观察和探索科研对象有关规律和机制的一种研究方法。它是人类获取知识、检验知识的一种实践形式。因此科学地实验越来越广泛地被人类所应用，并且在现代科学中占有越来越重要的地位。在现代科学中，人们需要解决的研究课题日益复杂和多样，使得科学实验的形式也不断丰富和多样。

（一）物理实验课的教学目的

普通物理实验是理工类大学生都要修到的一门基础课程。通过多元化的实验教学过程，使学生接受系统的实验基础理论和基本技能的训练，初步掌握基础物理实验的基本内容；观察、研究有关的物理过程，提高用实验方法研究物理规律的能力，从而加深学生对物理现象及其规律的认识；初步培养学生独立进行实验操作和从事科学实验工作的能力，以及严肃认真的科学态度和工作作风，为今后的科研工作打下良好的基础。

本实验课程的主要教学目的如下：

①培养学生自学能力：通过阅读教材和查询相关资料，能理解实验原理和方法；

②培养学生动手能力：学会正确使用基本实验仪器，掌握基本物理量的测量方法和实验操作技能；

③培养学生解决问题能力：掌握正确记录和处理数据的方法，能独立分析实验结果和撰写实验报告；

④培养学生科学研究能力：通过分析实验现象，探究实验规律，培养学生的研究能力；

⑤培养学生严谨的科学态度：培养学生在实验室里实事求是、严谨踏实的工作作风，以及坚忍不拔的钻研精神；

⑥培养学生优良的品质：遵守实验室规章制度，养成团结协作精神。

物理实验主要包括力学、热学、电磁学和光学四大类实验。通过系统的实验训练有助于学生掌握物理实验的思路、方法和技巧，使学生养成良好的实验习惯，并具有一定的独立观察物理现象和独立完成实验的能力。

（二）测量

测量是指按照某种规律，用数据来描述观察到的现象，从而对事物作出量化的描述。测量学是从人类生产实践中发展起来的一门历史悠久的科学，是人类与大自然作斗争的一种手段。测量最基本的方式是比较，即将被测的未知物理量和预定的标准进行比较而确定物理量的量值。由测量所得到的被测物理量的量值表示为数值和计量单位的乘积。

根据被测物理量的性质，物理实验的测量结果大体分为两类：一是定性反映客观事物本质属性的概念。如机械运动、分子运动、热平衡、磁场、交流电等；二是定量反映客观事物本质属性的概念，这种概念就是物理量，如长度、速度、热量、功、电流强度等。

2.1 测量四要素

测量四要素主要是指被测对象、测量方法、测量精度和计量单位。通常将它们统称为测量过程四要素。

被测对象：包括长度、角度、形状、相对位置等。

测量方法：测量方法是指根据给定的测量原理，在实际测量中运用该测量原理和实际操作，以获得测量数据和测量结果。物理实验中大多实验利用了一种实验方法，以实现对某一物理量的测量。比如，光杠杆法测量杨氏模量。

测量精度：是指被测量的值与其真值相一致的程度。在测量过程中，由于各种因素的影响，不可避免地会产生或大或小的测量误差。测量误差小，则测量精度高；测量误差大，则测量精度低。

计量单位：是指用以定量表示同类量值的标准量。比如，几何量中长度的基本单位为米，平面角的角度单位为弧度，等等。

2.2 直接测量与间接测量

测量可分为直接测量和间接测量。

直接测量是指被测量直接与标准量比较而得到测量值的方法。简单地说是指无需经过函数关系的计算，直接通过测量仪器得到被测量的值。例如，测量物体的长度，可以选用游标卡尺或螺旋测微器直接测量；称量物体的质量，可以选用分析天平或电子天平称量。

间接测量是指已知被测量与某一个或若干个其它量具有一定的函数关系，通过直接测量这些相关量值，然后用函数式计算出被测量值的测量方法。简单地说是指把直接测量的量经过函数关系的计算得到被测量值。如单摆法测重力加速度 g 时，其中 T(周期)、L(摆长)是直接测量值，而 g 就是间接测量值。

一般情况下直接测量精度会更高，但是大多物理量不是用直接测量就能得到的，所以在一定条件下的间接测量变得非常重要了。

例：如图 1，圆柱体的 d 和 h 可以直接测量，圆柱体的密度可以用下面公式间接测量：

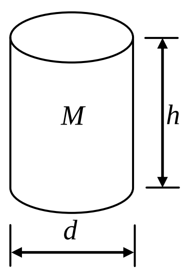

图 1

$$\rho = \frac{4M}{\pi d^2 h}$$

（三）误差

3.1 误差概念

测量值与真值之差称为误差。物理实验离不开对物理量的测量，测量有直接测量，也有间接测量。但是由于仪器、实验条件、环境等因素的限制，测量不可能无限精确，物理量的测量值与客观存在的真实值之间总会存在着一定的差异，这种差异就是测量误差。误差与错误不同，错误是可以避免的，而误差是不可能绝对避免的。

众所周知，物理实验包括实验方案设计、实际测量操作和数据处理过程。在这些过程中，测量误差是普遍存在的。测量误差是相对于真值而言的，一般地，真值是未知的，为了要对测量结果的可靠性予以标度，引进了不确定度的概念。而不确定度的计算又借用了误差计算

的理论。因此，了解测量误差的来源，分析测量误差的性质是十分必要的；这样才能做到正确处理数据和估算不确定度。了解测量误差的目的是为了更好地优化实验，合理选择测量仪器，提高实验的准确度并给出正确的无歧义的实验结果。

误差理论是计量科学的基础，也是物理实验中数据处理的依据，其中包含了许多概率和数理统计方面的知识，考虑到本科低年级学生一般不具有这方面的知识背景，在本教材中只对所用到的一些基本概念以及在本课程中的基本使用方法作一介绍，并从可操作的角度出发，在某些地方还做了简化和限制处理。

物理实验按其性质可分为验证性实验和测量性实验，其共同特点都是需要通过测量来获的被测量的量值。在实验测量中，由于设计方案的不完善、仪器性能的局限、环境的不稳定等因素，得到的结果只能是真值的近似。为了评估测量值的质量，定义了绝对测量误差、相对测量误差、算术平均误差和标准误差。

（1）绝对误差

绝对误差指测量结果与被测量真值之差，表明了误差本身的大小。绝对误差是有符号、有单位的量。

绝对误差=测量值-真值

（2）相对误差

相对误差表明了误差的严重程度。相对误差是无符号、无单位的量。常用百分数表示，又称为百分误差。

$$\text{相对误差}=\frac{\left|\text{测量值 - 真值}\right|}{\text{真值}}\times 100\%$$

（3）算术平均误差

$$\text{算术平均误差}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\text{绝对误差}\right|$$

（4）标准误差(又称标准差或均方根差，在实验教学中指有限次测量)

$$\text{标准误差}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left|\text{绝对误差}\right|^2}$$

在实际测量中，任何测量所得的结果都必定存在一定的测量误差。从设计方案开始，每一步都会有测量误差，因此，尽管提高仪器的精度可以缩小测量误差，但是测量误差永远存在，测量误差伴随着测量的全过程。因此，有必要对这一普遍现象的规律做一简单的讨论。我们讨论测量误差的目的和要求是为了了解测量误差的来源和性质，寻求减小测量误差的途径和合理的评估、科学地表达实验结果。

3.2 误差分类

习惯上将测量误差简称为误差，根据误差的性质，把误差主要分为系统误差、随机误差和粗大误差。

（1）系统误差（装置误差）

在同等条件下，对同一个待测量进行多次测量，测量值和真值的偏离总是相同的那一部分误差分量称作已定系统误差。引起这部分误差的原因有：实验方案和依据的理论公式的不完善，例如实验中依据的公式忽略了某些影响因素；仪器的精度不够，例如测量器具的刻度不准，灵敏电流计的游丝弹性偏大或偏小、电子元件老化、机械零件移位、仪表零点漂移等；环境温度和湿度等条件发生变化；测量者的心理和习惯等人为因素等等。由此可见，对同等条件下的测量，已定系统误差是不变的，不会因测量次数的多少而改变。要减小测量误差，首先就必须发现和了解实验中的已定系统误差并修正它。系统误差有规律性，通过实验方法引入修正值方法进行修正。

在有些情况下，并不知道确切的系统误差值，只知道它处于一个范围，这种系统误差称作未定系统误差。例如仪器的允差，以游标卡尺为例，有的给出允差为±0.02mm 或±0.05mm等。未定系统误差的处理方法在后面有关测量不确定度的内容中介绍。

（2）随机误差（偶然误差）

随机误差又称偶然误差，在符合重复性或复现性条件下，对同一被测量进行多次测量，每次测量值相对于真值有一个无规律的涨落（大小，方向），这就是随机误差。这涨落在足够多次测量后，发现它们服从一定的统计规律，如单峰性：误差小的出现的概率大；对称性：正负误差出现的概率相等；有界性：在一定的测量条件下，误差大的出现概率为零。随机误差是变差，但有规律，大多数实验测量的误差集合符合正态分布。随机误差是不可修正的，但可通过多次测量来减小它的影响。

（3）粗大误差（过失误差）

粗大误差是明显超出规定条件下预期的误差。粗大误差产生的原因主要有读错、写错、结果求错、仪器有缺陷和使用不正确、环境有非常大的干扰等。在实验数据中如出现异常数据，应对其进行科学的评估，以决定是否剔除。

在大部分物理实验中系统误差是测量误差的主要分量，在进行误差分析时应予以充分重视。

3.3 测量误差分布

测量误差分布表示测量误差随被测量的观测值的变化关系，从误差理论可知，对于不同的测量误差分布，测量结果落在相同置信区间中所对应的置信概率不一定相同。也就是说给出测量结果的同时，还应给出测量误差的分布类型。但是决定某类物理实验的测量误差属于哪种误差分布是一个非常复杂的过程，在本教材的范围内测量误差分布只分析符合正态分布或均匀分布，这是两种常见的测量误差分布。

（1）正态分布

正态分布又称为 Gauss 分布，其分布曲线如图 2 所示。正态分布一般表述为：对被测量 X，在重复性条件（相同的测量条件）或复现性条件（改变了的测量条件）下进行 n 次重复

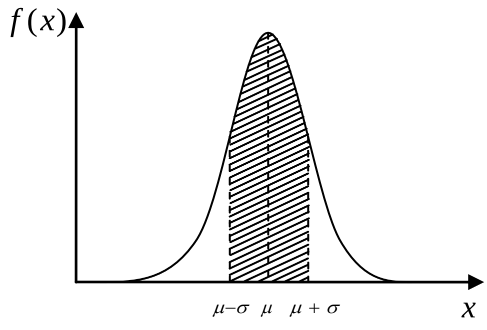

图 2

观测，观测值为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，若其满足正态分布，则当观测次数 $n\to\infty$ 时，有概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})\qquad -\infty< x <+\infty$$

其中：$\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 称为数学期望或均值，$x_i=\mu$ 为分布的中心点，此点对应的分

布最大。$f(x)$为测量值的概率密度。

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$ 称为正态分布的标准偏差，它表征了测量值的分散程度。σ越大，正态分布曲线就越平坦，即曲线越矮宽，测量值的离散性就越大，反映测量的精密度越低。曲线与 x 轴之间所包围的面积表示置信概率。测量值落在区间[-σ，σ]之内的置信概率 P 为:

$$P=\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma}f(x)dx=0.683$$

这表示测量值落在[μ-σ，μ+σ]区间的概率是 68.3%。 若把区间范围扩大到[μ-2σ，μ+2σ]，则测量值落到此区域的概率为 95.5%。落到[μ-3σ，μ+3σ]区间的概率为 99.7%。

随机误差正态分布的性质如下：

① 单峰性：绝对值小的误差出现的可能性（概率）大，绝对值大的误差出现的可能性小。
② 对称性：大小相等的正误差和负误差出现的机会均等，对称分布于真值的两侧。
③ 有界性：非常大的正误差或负误差出现的可能性几乎为零。
④ 抵偿性：当测量次数非常多时，正误差和负误差相互抵消，于是误差的代数和趋向于零。

对于正态分布中测量次数有限时，一般用贝塞尔公式来表示实验的标准偏差。其公式为：

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

（2）均匀分布

均匀分布又称矩形分布，其分布曲线如图 3 所示，若被测量服从均匀分布则有概率密度函数为：

$$f(x)=K \qquad -a<x<+a$$

测量值落在区间$[-a,+a]$中的概率：

$$P=\int_{-a}^{+a}f(x)dx=\int_{-a}^{+a}Kdx=1$$

即得：$f(x)=K=\dfrac{1}{2a}$ ，可以证明均匀分布的标准偏差$\sigma=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$，均匀分布表示测量值以等概率落入区间$[-\sqrt{3}\sigma,+\sqrt{3}\sigma]$中，而落在该区间外的概率为零。

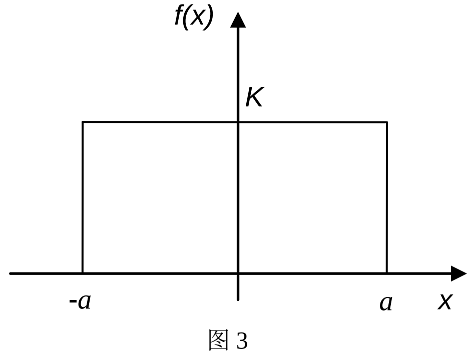

图 3

3.4 测量结果表达式

测量结果的完整表达式包括三个要素：测量值（ $\overline{X}$ ）、不确定度 u 和单位。即：

$$X = \overline{X} \pm u(\text{单位})$$

国际单位制（SI）中有七个基本单位：长度（米.m）、 质量（千克.kg） 、时间（秒.s）、电流强度（安培.A）、热力学温标（开尔文.K）、物质的量（摩尔.mol）、发光强度（坎德拉.cd）。由基本单位可以推导出的单位称为导出单位，相对应的物理量称为导出量。

3.5 精密度、准确度和精确度

精密度、准确度和精确度是物理实验教学中经常用到的几个概念。这几个概念有的是对仪器而言的，有的既是对仪器又是对测量而言的。

（1）精密度

精密度是指用该法经多次取样测定同一个均匀样品，各测定值彼此接近的程度。精密度一般以标准偏差表示。仪器的精密度，又称精度，一般是指仪器的最小分度值。如米尺的最小分度为 1mm，其精密度就是 1mm。仪器的最小分度值越小，其精度就越高，灵敏度也就越高。在正常使用情况下，仪器的精度高，准确度也就高，这表明仪器的精度是一定准确度的前提，有什么样的准确度，也就要求有什么样的精度相适应。但是，仪器的精度并不能完全反映出其准确度。例如一台一定规格的电流表，其内部的电池变质，使其实际准确度下降了，但精度却不变。可见精度与准确度是有区别的。

（2）准确度

准确度是指测定值与真实值符合的程度，仪器的准确度一般是指在规定条件下测量它指针满偏时出现的最大相对误差的百分数值。比如某电表的准确度是 2.5 级，其意义是指相对误差不超过满偏度的 2.5%，既是最大绝对误差=量程×准确度。显然用同一电表的不同量程测量同一被测量时，其最大绝对误差使不同的。因此使用电表时，就存在一个选择适当量程挡的问题。准确度一般是对电气仪器而说的，对其他仪器无所谓准确度。

（3）精确度

精确值是指用相同方法对同一试样进行多次测定，各测定值彼此接近的程度。即各次测定结果之间越接近，结果的精密度越高表现了测定的重复性和再现性。精确度是测量的准确度与精密度的总称，在实际测量中，影响精确度的可能主要是系统误差，也可能主要是随机误差，当然也可能两者对测量精确度影响都不可忽略。

3.6 精密度测量、准确度测量和精确度测量

（1）测量的精密度

测量的精密度是指对某一量测量时，各次测量的数据大小彼此接近的程度。测量精密度越高，说明各次测量数据比较接近的程度高。它是偶然误差的反映，但由于系统误差情况不确定，故测量精密度高不一定测量准确度就高。

（2）测量的准确度

测量的准确度是指测量数据的平均值偏离真值的程度。测量的准确度高，说明测量的平均值与真值偏离较小。它是系统误差的反映，但由于偶然误差情况不确定，故测量准确度高不一定测量精密度就高。

（3）测量的精确度

测量的精确度是指测量数据集中于真值附近的程度。测量的精确度高，说明测量的平均值接近真值，且各次测量数据又比较集中，即测量的系统误差和偶然误差都比较小，测量的既准确又精密。因此，测量的精确度才是对测量结果的综合评价。

为了更好地说明测量的精密度、测量的准确度、测量的精确度，下面以打靶时弹着点为例子来说明三者之间的关系和不同之处。图 4 表示射击的精密度比较高，但是准确度比较低；图 5 表示射击的准确度比较高，但是精密度比较低；图 6 表示射击的精密度比较高，准确度也比较高，所以精确度较高。

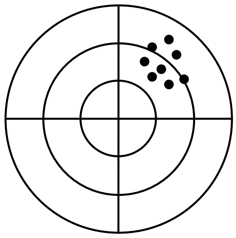

图 4

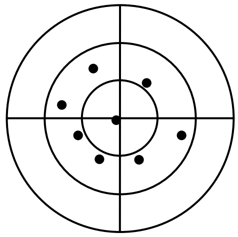

图 5

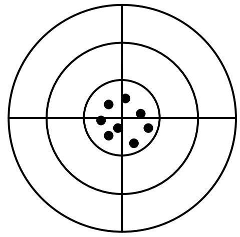

图 6

3.7 常用仪器误差

仪器精度等级：仪器的精度常指它能分辨的物理量的最小值。精度越高，它的分度越细，允许的偏差越小。

仪器示值误差：它表示仪器在正常使用下，仪器示值与被测量值之间的可能产生的最大误差的绝对值。一般写在仪器标牌上或说明书上。有的仪器直接给出精度等级。

仪器的分度值：仪器的分度值与仪器的精度等级或示值误差相对应，两者保持在同一数量级上。

仪器的灵敏阀：它表示仪器指示有了刚刚可以观察到的变化时，对应物理量的变化的大小。

下面是几种常用仪器的误差。

（1）钢尺

量程	最小分度值	示值误差
150mm	1mm	0.10mm
500mm	1mm	0.15mm
1000mm	1mm	0.20mm

（2）游标卡尺

游标卡尺的分度值一般为 0.10mm，0.02mm，0.05mm 三种。游标卡尺使用前必须检查初读值。

（3）螺旋测微计（千分尺）

按照国家标准规定，量程为 25mm 的一级螺旋测微计的示值误差为 0.004mm。螺旋测微计使用前必须检查初读值。

（4）秒表

	最小分度值	示值误差
机械式停表	0.1s	0.1s
数字毫秒表	0.1s	0.1s

（5）物理天平

量程为 500 克的物理天平，其最小分度值为 0.05 克，示值误差为 0.08 克（接近满量程）。

（6）玻璃温度计

普通温度计，量程为 0～100 度的示值误差为±1 度；工业温度计，量程为 0～150 度的示值误差为±0.5 度。

（7）旋钮式电阻箱

电阻箱一般分 0.02，0.05，0.1，0.2 四个等级（k）。示值误差等于电阻箱内电阻器阻值误差加旋钮的接触电阻误差，用公式表示为：

$$\Delta R = k\% R + m\delta$$

k	0.02	0.05	0.1	0.2
δ	0.001	0.001	0.002	0.005

一般电阻大于 10 欧姆时，上式可简化为：

$$\Delta R = k\% R$$

（8）仪表

仪表一般分七个等级：0.1，0.2，0.5，1.0，1.5，2.5，5.0，其中数字越小精度越高。其中等级可表示为:

$$k = \frac{\text{示值值误}}{\text{量程}} \times 100$$

3. 8 实例

【例 1】用一把米尺来测量长度分别为 50cm 和 5cm 的两物体，分析其绝对误差和相对误差。

解：米尺的最小刻度为 1mm，所得值的最后一位都是用眼睛估计的，对一般人来说，视觉误差在最小刻度的 0.2 倍左右。所以，取仪器上最小刻度的 0.2 倍作为人的视力带来的绝对误差，即 0.2 mm。

	绝对误差	相对误差
$L_1 = 50\,\text{cm}$	$\Delta L_1 = 0.2\,\text{mm}$	$E_1 = \frac{0.2\times 10^{-1}}{50} \times 100\% = 0.04\%$
$L_2 = 5\,\text{cm}$	$\Delta L_2 = 0.2\,\text{mm}$	$E_2 = \frac{0.2\times 10^{-1}}{5} \times 100\% = 0.4\%$

【例 2】已知电压表量程 100mV，等级 0.5，求电压表仪器示值误差。

解：$\Delta V = 100 \times 0.5\% = 0.5\,\text{mV}$

【例 3】测 1.5V 电压，要求测量结果相对误差不大于 1.5%，应该选下面哪种仪器：0.5 级量程 5 伏；1.0 级量程 2 伏；2.5 级量程 1.5 伏。

解：因为 2V×1.0%÷1.5V=1.33%，

所以选用规格为 1.0 级量程 2 伏的仪器。

（四）不确定度

4. 1 不确定度的基本概念

物理实验的测量总是存在测量误差的，即使在相同的测量条件下测量值也会存在着离散性。那么在日常生活、工业生产和科学研究中应该如何来评估、比较和再现测量结果？这就要求有一个统一的对测量结果的评判准则。ISO、IUPAP 等七个国际组织于 1993 年联合颁布了《不确定度表示指南》，我国也于 1999 年发布了中华人民共和国国家计量技术规范 JJF1059-1999《测量不确定度评定与指南》（下简称《指南》），《指南》指出“当给出完整的测量结果时，一般应报告其测量不确定度”。确定测量不确定度是评判测量结果质量的统一准则。

（1）测量不确定度的定义

测量不确定度的定义为“表征合理赋予被测量之值的分散性与测量结果相联系的参数”。

在实际测量中，不可能测得被测量的真值，所以绝对测量误差和相对测量误差只是一个误差的理论描述，无法定量计算。与绝对测量误差和相对测量误差不同，测量不确定度是一个可以通过计算得到的和测量结果有联系的确定的参数，测量结果结合这个参数给出了一个区间，此区间表征了被测量值因测量误差的存在而产生的分散性。测量结果落入该区间的概率由相应的测量误差分布决定。测量不确定度是一种定量表征测量误差的方法，是评估测量结果的统一准则。

当然，在一些验证性物理实验中常常会给出理论真值、约定真值、公认常数等来替代被测量的真值，在这种情况下也允许用绝对测量误差和相对测量误差来评估测量结果。

（2）测量不确定度的来源

产生测量不确定度的原因《指南》中列举了如下十条：

①对被测量的定义或不完整或不完善。

②实现被测量定义的方法不理想。

③取样的代表性不够，即被测量的样本不能完全代表所定义的被测量。

④对测量过程受环境影响的认识不周全，或对环境条件的测量与控制不完善。

⑤对模拟式仪器的读数存在人为偏差。

⑥测量仪器计量性能（灵敏度、鉴别力阈、分辨力、死区及稳定性等）。

⑦赋予计量标准的值和标准物质的值不准确。

⑧引用的数据或其他参量的不确定度。

⑨与测量方法和测量程序有关的近似性和假定性。

⑩在表面上看来完全相同的条件下，被测量重复观测值的变化。

这可以作为在物理实验中进行误差分析时的参考，并且可以看出，其来源绝大部分属于系统误差的范畴。

（3）不确定度的评定

在测量不确定度评定时应先科学地剔除测量数据中的异常值。在大部分的物理实验中，被测量 Y 经常会以 N 个其它变量 X_1，X_2，…，X_N，通过函数关系 $Y=f(X_1,X_2,\ldots,X_N)$ 来确定。对 Y 的测量实际上是通过对变量 X_1，X_2，…，X_N 的测量而间接得到的，对 Y 的测量称作间接测量。Y 的最佳估计值 y 可通过两种方法得到：

$$y = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{1k}, x_{2k}, \cdots x_{Nk})$$

$$y = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_N})$$

当函数的形式为线性时，上面两结果相同，但函数的形式为非线性时时，上面两结果可能不同，而以前式的计算方法较为优越。

y 的不确定度取决于 x_i 的不确定度，所以为了评估 y 的不确定度，首先应该评估 x_i 的标准不确定度。

x_i 的标准不确定度根据其评估方法不同被分成 A、B 两类。

设 A 类不确定度为 u_A，B 类不确定度为 u_B，则总不确定度为：

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

4.2 标准不确定度的 A 类分量评定

不确定度A类分量评定由重复观测引起，可利用统计学方法计算得到，记为 u_A。A类评定结果只包含给定重复（或复现）观测条件下的随机效应，A类评定结果的可靠程度决定于重复观测次数。

对被测量 X，在重复性条件（相同的测量条件）或复现性条件（改变了的测量条件）下

进行 n 次重复观测，观测值为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，则 x 的标准不确定度 A 类分量：

$$u_A=\frac{s(x_i)}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

式中 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，$s(x_i)=\sqrt{(\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$。

u_A 称作算术平均值的实验标准差，表征了因重复测量而产生的测量结果的分散性。$s(x_i)$ 称作单次测量的实验标准差，表征了重复测量中的某次测量值 x_i 相对于测量结果 $\bar{x}$ 的偏离程度。$\bar{x}$ 为测量结果，可以证明，当测量次数 n 充分多时，$\bar{x}$ 就是 x 的期望值的可靠估计值。

4.3 标准不确定度的 B 类评定

不确定度 B 类分量评定可由除 A 类分量评定外的已知信息获得，记为 u_B。B 类分量评定结果包括所用信息的有关效应，既可以是随机效应，也可以是系统效应或两者兼而有之，B 类分量评定结果可靠程度决定于信息的可靠程度。标准不确定度 B 类分量的信息来源有许多，在本教材中，直接测量时标准不确定度的 B 类分量一般只考虑测量仪器的允许误差限（最大允许误差），不同的测量仪器给出允许误差限的方式不一定相同，有时需对技术指标给出的信息进行转换才能得到允许误差限。在大多数情况下，仪器的允许误差限是标准不确定度 B 类分量的主要来源。

由于仪器的允许误差限给出的是该仪器在出厂时按国家规范或规程检定的误差可能出现的最大区间的半宽度：

$$\Delta_{仪}=k_{100}u_B$$

式中 $\Delta_{仪}$ 为测量仪器的允许误差限，k_{100} 为最大置信概率对应的扩展因子。在本教材中约定 k_{100} 值一般只取 $\sqrt{3}$（假设仪器的测量误差分布服从均匀分布），所以标准不确定度的 B 类分量：

$$u_B=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}$$

4.4 合成标准不确定度的评定

若有函数：

$$Y=f(X_1,X_2,\ldots,X_N)$$

其中 X_i 为直接测量量，Y 的最佳估计值 y 的合成标准不确定度用符号 u_y 表示，当 X_1，X_2，…，X_N 彼此独立或不相关时，合成标准不确定度（或称总不确定度）u_y 由下式得出：

$$u_y^2=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 u_{x_i}^2 \quad \text{（适用于和差形式的函数）}$$

其中标准不确定度 u_{x_i} 既可按 A 类，也可按 B 类方法评定。如果 f 的函数形式为非线性，为了计算上的方便 u_y 也可由下式得出：

$$\left(\frac{u_y}{y}\right)^2=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\right]^2 u_{x_i}^2 \qquad \text{（适用于积商形式的函数）}$$

u_y是个估计的标准差，表征 Y 的最佳估计值 y 因测量误差而存在的分散性，其中标准不确定度u_{x_i}应包含所有来源，若某来源既可按 A 类评定也可按 B 类评定，则只能选择其一，要避免重复计算。

对于 X_1，X_2，…，X_N 彼此不独立或相关时u_y的评定，本教材没有讨论，想进一步了解这方面的知识的同学可通过查阅相关资料获得。

4.5 扩展不确定度的评定

$u_c(y)$给出的是一个标准总不确定度，有时需要给出一个包含更大置信概率的区间，这时就要给合成标准不确定度$u_c(y)$乘上一个扩展因子k,以得到更大的置信区间。《指南》中给出了两种扩展不确定度的评定方法，如何在一般情况下计算k值的讨论已超出本教材的范围，在本教材中我们假定大量的测量误差$u_c(y)$接近正态分布，并以$k_p u_c(y)$的形式表示扩展不确定度U_p。对于正态分布，其置信概率 p 和扩展因子k_p的关系见下表。

表：正态分布情况下置信概率 p 与包含因子k_p间的关系

p(%)	50	68.27	90	95	95.45	99	99.73
k_p	0.67	1	1.645	1.960	2	2.576	3

扩展不确定度用U_p表示：

$$U_{95} = k_{95}u_c(y) = 1.960u_c(y)$$

或

$$U_{99} = k_{99}u_c(y) = 2.576u_c(y)$$

有时也可以采用近似处理，取$k_{95} = 2$，$k_{99} = 3$。

本教材在后面各实验的数据处理中，学生可不考虑扩展不确定度的计算要求，只需计算测量结果的总不确定度的评定。

4.6 实例

【例 1】求函数 $y=\dfrac{x_1^k\cdot x_2^m}{x_3^n}$ 的不确定度传递公式。

解：先对函数式取对数：$\ln y = k\ln x_1 + m\ln x_2 - n\ln x_3$

对各自变量求偏导数：$\dfrac{\partial \ln y}{\partial x_1}=\dfrac{k}{x_1}$，$\dfrac{\partial \ln y}{\partial x_2}=\dfrac{m}{x_2}$，$\dfrac{\partial \ln y}{\partial x_3}=\dfrac{n}{x_3}$

代入不确定度传递公式：$u_y = y\sqrt{k^2(\dfrac{u_{x_1}}{x_1})^2+m^2(\dfrac{u_{x_2}}{x_2})^2+n^2(\dfrac{u_{x_3}}{x_3})^2}$

【例 2】用螺旋测微计测量一微小长度，重复测量 6 次得到数据如下表。螺旋测微计的零点误差=-0.005mm ，螺旋测微计的仪器误差 0.004mm，求该长度l。

n	1	2	3	4	5	6
l (mm)	2.567	2.565	2.569	2.570	2.571	2.568

解：算术平均值：$\bar{l}=\dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}l_i=2.568(\text{mm})$

最佳估计值：$l_0=2.5683-(-0.005)=2.573(\text{mm})$

A 类分量：$u_A=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{6}(l_i-\bar{l})}{6(6-1)}}=0.001(\text{mm})$

B 类分量：$u_B=\Delta_{\text{仪器}}/\sqrt{3}=0.003(\text{mm})$

总不确定度：$u_l=\sqrt{u_A^2+u_B^2}=\sqrt{0.001^2+0.003^2}=0.004(\text{mm})$

测量结果：$l=2.573\pm0.004(\text{mm})$

【例 3】已知圆柱体的质量 m=76.18±0.04g，直径 D=19.84±0.02mm，高 h=31.24±0.02mm。计算圆柱体的密度及其不确定度。

解：设：$u_m=0.04$，$u_D=0.02$，$u_h=0.02$

求解：$\rho=\dfrac{m}{\pi(\dfrac{D}{2})^2h}=\dfrac{76.18\times10^{-3}}{\pi(\dfrac{19.84\times10^{-3}}{2})^2\times31.24\times10^{-3}}=7887.8\,\text{kg/m}^3$

对密度公式取对数：$\ln\rho=\ln\dfrac{4}{\pi}+\ln m-\ln D^2-\ln h$

对各自变量求偏导数：$\dfrac{\partial\ln\rho}{\partial m}=\dfrac{1}{m}$，$\dfrac{\partial\ln\rho}{\partial D}=-\dfrac{2}{D}$，$\dfrac{\partial\ln\rho}{\partial h}=-\dfrac{1}{h}$

代入不确定度公式：
$$\frac{u_\rho}{\rho}=\sqrt{(\frac{\partial\ln\rho}{\partial m})^2(u_m)^2+(\frac{\partial\ln\rho}{\partial D})(u_D)^2+(\frac{\partial\ln\rho}{\partial h})^2(u_h)^2}$$
$$=\sqrt{(\frac{1}{76.18})^2(0.04)^2+(\frac{2}{19.84})^2(0.02)^2+(\frac{1}{31.24})^2(0.02)^2}$$
$$\approx0.0022$$

总不确定度：$u_\rho=\rho\times\dfrac{u_\rho}{\rho}=7887.8\times0.0022\approx17\,\text{kg/m}^3$

测量结果：$\rho=7888\pm17(\text{kg/m}^3)$

（五）有效数字

所谓有效数字是指实际能够测量到的数字，也包括最后一位估计的欠准的数字。 一般把通过直读获得的准确数字叫做可靠数字；把通过估读得到的那个数字叫做存疑数字。把测量结果中能够反映被测量大小的带有一位存疑数字的全部数字叫有效数字。比如用一个最小分度数为 1mm 的米尺去测量一个物体的长度，由尺上读出该物体的长度为 41.15cm，其中前三位数 41.1cm 是直接根据尺上刻度读出的，称为可靠数字。而最后一位 0.05cm 是由最小刻度之间估计出来的，称为存疑数字。欠准的数字一般情况下只取一位，并且与测量量的平均值的最后一位对齐。

5.1 有效数字表示法

在实验中，对物理量进行测量、其所得的测量值都是含有误差的，对这些数值不能任意地取舍，应使其反映出测量值的准确度。所以在记录原始数据、计算以及书写测量值时，究竟应写出几位数字，有严格的要求，要根据使用的测量设备和测量结果的不确定度来定。

测量值的可靠数加上其后一位存疑数的全部数字称为有效数字。其总位数称为该测量值的有效位数。测量值的有效位数可以反映测量水平的高低。

（1）有效位数直接影响测量准确度

下面考察 $x_1 = 23.4\,\text{cm}$ 与 $x_2 = 23.40\,\text{cm}$ 是否相同？

x_1 大于 23.3cm，小于 23.5cm，在测量器具上的表现为如图 7，图中的虚线表示实际测量器具上并没有这些刻度线,测量器具的最小刻度间隔为 1cm。

x_2 大于 23.39cm，小于 23.41cm，在测量器具上的表现为如图 8，图中的短划线表示在实际测量器具上并没有这些刻度线,测量器具的最小刻度间隔为 1mm。

从图示可见，图 8 的测量器具的准确度要高于图 7，x_2 的误差要小于 x_1，显然它们是不相同的。

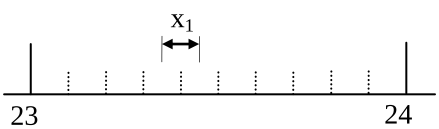

图 7

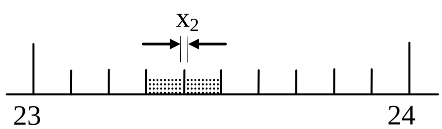

图 8

（2）不同分度值的测量器具影响测量数据的误差

例：下面考察用不同分度值的测量器具测量同一物体的厚度，得到不同的相对误差大小。

①钢直尺：d=6.4mm， △$_{仪}$＝1mm， 得：$E = \dfrac{1}{6.4} = 16\%$ 。

②游标尺：d＝6.36mm ，△$_{仪}$ ＝0.02mm，得：$E = \dfrac{0.02}{6.36} = 0.31\%$ 。

③螺旋测微计：d＝6.357mm ，△$_{仪}$＝0.004mm，得：$E = \dfrac{0.004}{6.357} = 0.06\%$ 。

可见有效数字多一位，相对误差值几乎小一个数量级。

5.2 有效数字特点

有效数字一般有如下特点：

①当被测物的量和测量仪器确定后，有效数字位数就已确定。

②原始数据的有效数字后面不能任意加上或去掉零。

③有效数字与单位换算无关，如 7.5 米→7.5×10^2 厘米

5.3 有效数字修约原则

中华人民共和国国家标准 GB-T8170-2008《数值修约规则与极限数值的表示和判定》为各类数值的修约制定了规则，“修约的含义是用一称做修约数代替一已知数，修约数来自选定的修约区间的整数倍”。此处的修约就是俗称的“四舍五入”。修约区间就是约定的最小变化间隔。要对一个已知数进行修约，首先要选定一个修约区间，如修约区间为 0.1，则修约数的变

化只能取 0.1 的整数倍，如 12.1 ，12.2 ，12.3，12.4 等。如修约区间为 10，则修约数的变化只能取 10 的整数倍，如 1210 ，1220，1230，1240 等。对数的修约分以下几种情况：

①如果只有一个修约区间的整数倍最接近已知数，则此整数倍就认为是修约数。

例：已知数 12.223,要求修约区间为 0.1；到 12.223 最近的 0.1 的整数倍为 12.2，所以修约数取 12.2。

例：已知数 1225.1,要求修约区间为 10；到 1225.1 最近的 10 的整数倍为 1230，所以修约数取 1230。

②如果有两个连续的修约区间的整数倍同等地接近已知数，则有两种不同的规则可以选用。

规则 1: 选取偶数整数倍作为修约数。

例：已知数 12.25,要求修约区间为 0.1；到 12.25 最近的 0.1 的整数倍有两个 12.2 和 12.3，修约数取 12.2。

例：已知数 1235.0,要求修约区间为 10；到 1235.0 最近的 10 的整数倍有两个 1230 和 1240，修约数取 1240。

规则 2: 取较大的整数倍作为修约后的数。

由于规则 1 可使修约误差最小，一般建议使用规则 1。

③不允许连续修约。

例：修约 15.455，修约区间为 1，正确的结果应为 15，不正确的做法为：15.455→15.46→15.6。

综上所述，修约规则可以概括如下：

①口诀：“四舍六入五凑偶”。

②具体方法是：拟保留的末位数右边第一位数为小于五则舍去右边所有数字，该拟保留的末位数不变；拟保留的末位数右边第一位数为大于五（或等于五，但是后面还有非零数字）则该拟保留的末位数加 1；拟保留的末位数右边第一位数为五（且后面没有非零数字）时就看该拟保留的末位数，若它是奇数则入（加 1），若它为偶数则不变。

例：将下例数字保留 2 位有效数字：2.1499；2.1501；2.1500；2.2500。

2.2499——（2.2）

2.1501——（2.2）

2.1500——（2.2）

2.2500——（2.2）

5.4 测量结果的有效位数表示法

（1）函数值的有效位数表示法

三角函数计算结果的有效数字与角度的有效数字位数相同。

例： sin(30.2)=0.503019=0.503

（2）对数的有效位数表示法

对数运算结果的有效数字位数，其尾数与真数的有效数字位数相同。

例： lg3.27=0.$\underline{514}$

（3）其它函数的有效位数表示法

下面给出一种简单直观的方法，即将自变量可疑位上下变动一个单位，观察函数结果在哪一位上变动，结果的可疑位就取在该位上。

例：求 $\sqrt[20]{3.25}$

因为：$\sqrt[20]{3.24}=1.0605405$

$\sqrt[20]{3.25}=1.0607039$

$\sqrt[20]{3.26}=1.0608669$

所以：$\sqrt[20]{3.25}=1.0607$

（4）测量结果的科学表示方法

测量结果数字比较大时一般应采用科学表示法，即用有效数字乘以 10 的幂指数的形式来表示。一般小数点前只取一位数字，幂指数不是有效数字。

例：1.5kg 可写成 1.5×10^3g，不能写成 1500g。

（5234 ± 1）km 应写成（5.234 ± 0.001）$\times10^6$m。

（0.000456 ± 0.000003）s 应写成（4.56 ± 0.03）$\times10^{-4}$s。

5.5 测量不确定度的有效位数

通常合成标准不确定度和扩展不确定度最多只能取两位有效数字，可以理解为取 1 位和 2 位都可以，2 位以上是不允许的。在本教材中我们有如下约定：

（1）不确定度保留位数法则

当合成标准不确定度和扩展不确定度最左边的第一位非零有效数字是 1 和 2 时，可取 2 位，而 3 以上则只可用一位有效数字。

（2）不确定度的修约法则

为了确保不确定度结果的可靠性，对测量不确定度的修约，本教材约定，欲保留的最低位后的这位数不为零则进位，如为零则舍去。

例：$u_c=0.12134$，保留 2 位有效数，$u_c=0.13$

$u_c=0.1201$，保留 2 位有效数，$u_c=0.12$

$u_c=0.3201$，保留 1 位有效数，$u_c=0.4$

$u_c=0.3021$，保留 1 位有效数，$u_c=0.3$

（3）测量结果的有效位数法则

测量结果的有效位数由测量不确定度决定。一旦测量不确定度的有效位数确定了，则应采用它的修约区间来修约测量结果。

例：被测质量 m 的测量结果为 m =100.02144550g。其合成标准不确定度 $u_c(m)=0.0001775\,\text{g}$，求 m 的测量结果。

解：如果保留 2 位有效数，不确定度应修约成 $0.18\,\text{mg}=0.00018\,\text{g}$，其修约区间为 $0.00001\,\text{g}$。用这个修约间隔来修约测量结果，得 $m=100.02145\,\text{g}$。

5.6 有效位数与换算单位

（1）十进制单位变换

在十进制换算单位中，测量结果的单位变换不影响有效数字位数。

例：1.2kg＝1.2×10^3g，1200g＝1.200kg；切不可写为 1.2kg＝1200g，1200g＝1.2kg。

（2）非十进制单位变换

保持误差所在位在单位变换后还是有效数字的末位。

例：$\overline{\varphi}=93.5°$ 用弧度表示。

解：先粗略判断其误差不小于 $0.1°$。若要改用弧度为单位，则先换算其误差约为 $\frac{\pi}{180}\times0.1\approx0.002\,\text{rad}$ ，所以 $\overline{\varphi}=\frac{\pi}{180}\times93.5°=1.632\,\text{rad}$

5.7 有效数字的运算法则

本教材约定，有效数字运算遵循下面的法则：

（1）存疑数法则

可靠数加（减、乘、除）存疑数仍然是存疑数。

（2）加减法则

诸数相加（减）时，其结果的可疑数字位置与诸数中可疑数字最大的位置一致。

例：

$$\begin{array}{r} 12.3\underline{4} \\ +\quad 2.3574 \\ \hline 14.6\underline{9}74=14.7\underline{0} \end{array}$$

（3）乘除法则

诸数相乘（除）时，其结果的乘积（商）的有效数字位数与参加运算者的诸数中有效数字位数最少者相同。

例：

$$\begin{array}{r} 2.3574 \\ \times\quad \underline{12.3} \\ \hline 7\,0\,7\,2\,2 \\ 4\,7\,1\,4\,8 \\ +\,2\,3\,5\,7\,4 \\ \hline \underline{2\,8.9}\,9\,6\,0\,2\quad=\underline{29.0} \end{array}$$

（4）带误差的加减法则

带误差的加减法的合成不确定度公式均为$u_y=\sqrt{u_{x_1}^2+u_{x_2}^2}$ 。

例：求解(3.12±0.02)+(5.23±0.03)

因为$x_1=3.12$，$x_2=5.23$，$u_{x_1}=0.02$，$u_{x_2}=0.03$，代入公式得：

(3.12±0.02)+(5.23±0.03)=8.35 ±0.04

（5）带误差的乘除法则

带误差的乘除法的合成不确定度公式均为$u_y=y\sqrt{(\frac{u_{x_1}}{x_1})^2+(\frac{u_{x_2}}{x_2})^2}$ 。

例：求解(3.12±0.02)×(5.23±0.04)

因为$x_1=3.12$，$x_2=5.23$，$u_{x_1}=0.02$，$u_{x_2}=0.04$，代入公式得：

(3.12±0.02)×(5.23±0.04)=16.32±0.17

（6）函数运算的取位方法则

函数运算的取位方法通过函数计算来确定。

例：已知 $x=56.7$，$y=\ln x$，求 y。

解：因 x 的有误差值是在十分位上，所以取 $u_x=0.1$ ，再利用误差传递公式 $u_y=|f'(x)|u_x$ 去估计 y 的误差位。

$u_y=\frac{u_x}{x}\approx 0.002$，说明 y 的误差值在千分位上，所以 y=ln56.7=4.038。

提出有效数的有效位数和运算规则的目的是为了减少因运算而产生的误差和减轻计算工作量，但在计算器已普及使用的今天，数据运算已变得非常简单和可靠，所以在实际操作中只要求把握两头就可以了，即读取原始数据时要记住有效位数的含义，在表示测量结果时要记住确定不确定度和测量结果有效位数的方法。一般情况下中间运算结果都可不进行修约。

5.8 常用函数的不确定度传递公式

函数式	不确定度传递公式
$y = x_1 + x_2$	$u_y = \sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}$
$y = x_1 - x_2$	$u_y = \sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}$
$y = ax_1 + bx_2$	$u_y = \sqrt{a^2u_{x_1}^2 + b^2u_{x_2}^2}$
$y = x_1 \cdot x_2$	$u_y = y\sqrt{(\frac{u_{x_1}}{x_1})^2 + (\frac{u_{x_2}}{x_2})^2}$
$y = x_1 / x_2$	$u_y = y\sqrt{(\frac{u_{x_1}}{x_1})^2 + (\frac{u_{x_2}}{x_2})^2}$
$y = x_1^m \cdot x_2^n$	$u_y = y\sqrt{m^2(\frac{u_{x_1}}{x_1})^2 + n^2(\frac{u_{x_2}}{x_2})^2}$
$y = kx$	$u_y = ku_x$
$y = \ln x$	$u_y = \frac{u_x}{x}$
$y = \sin x$	$u_y = \lvert\cos x\rvert u_x$

5.9 实例

【例 1】：已知数 15.4546mm，要求修约区间为 1mm。

解： 15.4546mm $\rightarrow$ 15mm。

错解：15.4546mm $\rightarrow$ 15.455mm $\rightarrow$ 15.46mm $\rightarrow$ 15.5mm $\rightarrow$ 16mm。

【例 2】：将下列数值取四位有效数字。

解： $3.141\underline{59}$→3.142（入）

$2.717\underline{29}$→2.717（舍）

$5.165\underline{519}$→3.166（入）

$4.510\underline{500}$→4.510（凑偶）

$4.511\underline{500}$→4.512（凑偶）

【例 3】改错(9.80+0.034)cm，(2.804+0.03)cm，

解：分别改为：(9.80+0.04)cm，(2.80+0.03)cm。

（六）数据处理

数据处理是物理实验过程中的一个重要步骤，数据处理方法包括数据计算的方法和结果表达的方法。根据不同的测量数据类型和不同的测量结果表示要求，可以采用不同的数据处理方法。例如用列表法来展示数据处理的过程，用图示法来表示两个物理量间的关系，用逐差法或最小二乘法来处理等间隔测量的数据等。现简单介绍一些常用的数据处理方法，有列表法、作图法、最小二乘法和逐差法。

6.1 数据计算

在数据处理过程中数据计算是最根本的，其中包括了测量结果的计算和测量不确定度的计算，它是表达测量结果的基本要素。对不同的测量数据类型要采用不同的处理方法。下面举例说明在直接测量、间接测量的不确定度计算方法及测量结果表示方法。

（1）直接测量

例：用最大允许误差为±（0.005% ×读数＋3×最低位数值）；满量程值$1999.9k\Omega$；最低位数值$0.01k\Omega$的数字多用表测量$1M\Omega$电阻的阻值。测得数据如下表：

次数	读数 R/kΩ	次数	读数 R/kΩ
1	999.31	6	999.23
2	999.41	7	999.14
3	999.59	8	999.06
4	999.26	9	999.92
5	999.54	10	999.62
平均值$\overline{R}$	999.408		

解：

①不确定度 A 类评定

测量结果：$\overline{R}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}R_i=999.41\text{k}\Omega$

算术平均值的实验标准差：$u_A=\sqrt{\frac{1}{10(10-1)}\sum_{i=1}^{10}(R_i-999.41)^2}=0.09\,\text{k}\Omega$

②不确定度按 B 类评定

数字多用表不准确引入的标准不确定度分量u_B按 B 类评定。

$$a=0.005\%\times\overline{R}+3\times0.01\text{k}\Omega$$

设仪器测量误差在该区间为均匀分布，则$k=\sqrt{3}$，其标准不确定度 B 类评定为：

$$u_B=\frac{a}{k}=\frac{0.005\%\times999.408\,\text{k}\Omega+3\times0.01\text{k}\Omega}{\sqrt{3}}=0.05\,\text{k}\Omega$$

③合成标准不确定度

$$u=\sqrt{u_A^2+u_B^2}=\sqrt{0.09^2+0.05^2}=0.11\text{k}\Omega$$

④测量结果

$$R=999.41\pm0.11\text{k}\Omega$$

（2）间接测量

例：用单摆的振动测量重力加速度，已知：重力加速度$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$，单摆的振动周期$T=2.007\pm0.001\text{s}$，摆长$l=99.93\pm0.05\,\text{cm}$，求$g$的测量结果。

解：单摆的振动周期T和摆长l为直接测量量，其测量结果已用上例所述的方法获得，其中$u(T)=0.001\text{s}$，$u(l)=0.05\text{cm}$都为标准不确定度。

①g 的测量结果

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}=\frac{4\times3.142^2\times99.93}{2.007^2}=979.7\ \text{cm}/\text{S}^2$$

②求合成标准不确定度

对函数两边取对数得：

$$\ln g = \ln 4\pi^2 + \ln l - 2\ln T$$

对各个自变量求偏导得：

$$\frac{\partial \ln g}{\partial l} = \frac{1}{l}、\quad \frac{\partial \ln g}{\partial T} = -\frac{2}{T}$$

代入合成标准不确定度公式为：

$$\frac{u_c}{g} = \sqrt{(\frac{\partial \ln g}{\partial l})^2 u^2(l) + (\frac{\partial \ln g}{\partial T})^2 u^2(T)} = \sqrt{(\frac{1}{l})^2 u^2(l) + (\frac{2}{T})^2 u^2(T)}$$

$$= \sqrt{(\frac{1}{100})^2 \times 0.05^2 + (\frac{2}{2})^2 \times 0.001^2} = 1.1\times 10^{-3} = 0.0011$$

合成标准不确定度为：

$$u_c = 979.7 \times \frac{u_c(g)}{g} = 979.7 \times 0.0011 = 1.07767 = 1.1\mathrm{cm/s}^2$$

③测量结果

$$g = 979.7 \pm 1.1 cm/\mathrm{s}^2$$

6.2 列表法

列表法一般多用于数据的展示，它将很多信息列在一张表中，可以直观的展示各量之间的关系。

（1）列表法的特点

①简单而明了地表示出物理量之间的关系。

②便于随时检查数据是否合理，结果是否正确，及时发现问题，避免出错。

③有助于找出物理量之间的规律性的联系，进而得出它们间的关系。

例：某金属丝受力与伸长（形变）间的关系。

序号 i	砝码标示值 M_i(kg)	标尺读数 Y_i(cm)	标尺读数 Y_i'(cm)	平均值 $\bar{Y}_i$(cm)	$\Delta\bar{Y}(=\bar{Y}_{i+4}-\bar{Y}_i)$(cm)
0	1	0.80	0.80	0.80	1.95
1	2	1.28	1.30	1.29	1.95
2	3	1.76	1.80	1.78	1.94
3	4	2.24	2.28	2.26	1.94
4	5	2.72	2.78	2.75	$\overline{\Delta Y} = 1.94$cm $u(\overline{\Delta Y}) = 0.004$cm
5	6	3.21	3.27	3.24	
6	7	3.70	3.74	3.72	
7	8	4.18	4.22	4.20	
8	9				

（2）列表法的要求：

①要写出所列表的名称，列表要简明，便于看出有关量之间的关系。

②列表要标明各符号所代表的物理量意义，写明单位，单位及量值的数量级写在该符号的标题栏中。

③表中所列的数据要正确反映测量结果的有效数字。

④列表的形式不限，一般个别联系不大的数据可不必列入表内，除原始数据外，计算过程中的中间结果和最后结果也可以列入其中。

6.3 作图法

作图法可用来展示测量结果，也可用来计算数据。尤其是可以通过外延的方法得到无法实际测量的数据。

（1）作图法的作用和优点

①作图法可以把一系列实验数据之间的关系很直观地从图纸上表达出来。
②通过作图，所作代表线可起到平均的作用，以减小随机效应引入的影响。
③可以从所作的代表线上求值，例如求斜率，求截距等。
④用有限个测量点作图，可在图上读出没有进行测量的点的数据。
⑤在一定的条件下，还可以将自变量外延到测量范围以外，以得到无法实际测量的对应值。

（2）作图的规则

①手工作图一定要使用坐标纸，自己画方格子再作图是不允许的。坐标纸的种类有直角坐标纸（毫米方格纸）、对数坐标纸、半对数坐标纸、极坐标纸等。
②非线性函数可以通过坐标变换将其线性化。

例：$y=a+b/x$，令 $\frac{1}{x}=n$，有 $y=a+bn$；

$y=a+b\sin x$，令 $n=\sin x$，有 $y=a+bn$；

$y=ax^b$，两边取对数 $\ln y=\ln a+b\ln x$，令 $\ln y=N,\ln x=n$ 有 $N=\ln a+bn$。

③参加作图的数据应是已修约数据，如果作图的用途是为了定性地展示数据，以表现变量之间的关系，则作图纸张大小的选择适中即可。但在定量测量中，作图的目的还包括了计算某些物理量，如斜率、截距等，则作图纸张大小的选择应以能反映变量的不确定度为原则，一般情况下，图纸的最小刻度可和变量的有效位数的次末位相对应。
④习惯上以自变量为横坐标，因变量为纵坐标，用粗线画出两坐标和方向，轴末端注明物理量名称和单位，每隔一定间距均匀地标出坐标值，通常以 1，2，5 进行分度，坐标原点不一定从零开始。
⑤可用“×”、“·”、“⊙”、“+”等符号描点，用直尺或曲线板，根据不同内容连成光滑的直线或曲线。连线不能太粗，以免影响读数的准确度。原则上应使连线到各测量点的距离保持最近，测量点应均匀分布在连线两侧。
⑥如需用作图法来计算某些量值，则参加运算的点的坐标应在图上标出。
⑦应写上图名和图注。

现在，运用某些计算机软件如 Excel、Oringe、Matlab 等，借助电脑就可以作出非常精美的图形，但在用电脑作图时，尤其应特别注意上述规则。

例：用准确度 0.2 级的双臂电桥测量某材料在不同温度下的电阻值，准确度 1 级的数显温度计满量程值 120℃、分辨率 0.1℃，作 *R-t* 图。数据见下表

t(℃)	32.3	36.6	41.3	46.3	51.3	56.1	61.3	66.1	71.0	75.2
R(Ω)	0.1558	0.1584	0.1612	0.1640	0.1670	0.1698	0.1729	0.1757	0.1785	0.1808

解：选横坐标为温度 *t*(℃)，纵坐标为电阻值 *R*(Ω)。根据仪器指标温度 *t* 的扩展不确定度 $U(t)=\Delta_{仪t}=1\%\times120+0.1=1.3℃$，取横坐标最小刻度为 0.5℃/mm，则横坐标长度约为 $(75.2-32.3)\div0.5=85.8\mathrm{mm}$。电阻值 *R* 的不确定度 $U(R)=\Delta_{仪R}=0.2\%\times0.2=0.0004\Omega$ 取纵坐标最小刻度为 0.0002Ω/mm，则纵坐标长度约为 $(0.1808-0.1558)\div0.0002=125\mathrm{mm}$ 如图 9 为电阻值 *R* 与温度 *t* 的关系曲线图。

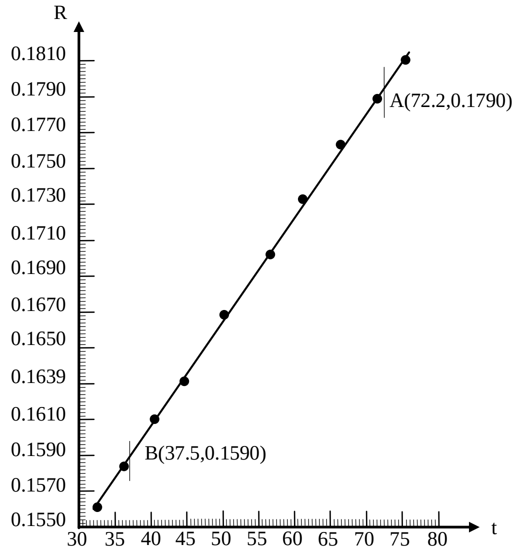

图 9

6.4 最小二乘法

作图法可以通过一组实验数据 x_i, y_i 把变量 X, Y 之间的关系很直观地在图纸上表达出来，但有时希望知道的是 X, Y 的函数关系式，即希望能确定直线方程 $Y = a + bX$ 中的两个参数 a、b，这时可用最小二乘法来实现。

对于一组 n 对测量值 x_i, y_i，估计其具有线性关系，假定实验要确定的最佳直线为 $y = a + bx_i$，并假定 x_i 的测量误差和 y_i 相比要小许多，由于测量误差的存在，y_i 总是不可能完全落在直线上，它们的偏离 $\varepsilon_i = y_i - y = y_i - a - bx_i$。由标准偏差的定义：

$$s = \sqrt{\frac{\sum_1^n (y_i - y)^2}{n}}$$

可见，如果 $\sum_1^k (y_i - y)^2 = \sum_1^k \varepsilon_i^2$ 最小，则标准偏差最小，即 y 为 Y 的最佳估计，故称最小二乘法。

$\sum_{i=1}^k \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1} (y_i - a - bx_i)^2$ 为最小的充要条件为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^k (y_i - a - bx_i)^2 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^k (y_i - a - bx_i)^2 = 0 \end{cases}$$

解之可得：

$$b = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

式中$\overline{x \cdot y} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i$，$\bar{x} \cdot \bar{y} = (\frac{1}{n}\sum x_i)(\frac{1}{n}\sum y_i)$，

$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x_i^2$，$\bar{x}^2 = [\frac{1}{n}\sum x_i]^2$

x_i, y_i间线性程度的好坏一定程度上可用相关系数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

判定，r越接近 1，x_i, y_i间的线性程度越好。

参数a、b的 A 类标准不确定度为：

$$u_A(b) = \frac{s_y}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}, \quad u_A(a) = u(b)\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

其中：

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - a - bx_i)^2}{n - 2}}$$

现在函数型计算器的使用已非常普遍，利用函数型计算器的回归运算功能，也可以非常方便的得到直线方程的两个参数a、b和相关系数r。

6.5 逐差法

逐差法是直线拟合过程中自变量为等间隔读数时确定直线参数b的平均值的一种简化算法。

例：现测得一组数据如下表，估计有线性关系$Y = bX$，且$x_{i+1} - x_i = c$为常数，求参数b的平均值。

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8

解：将数据分成前后两组，对应数据相减并相除可得：

$$b_1 = \frac{y_5 - y_1}{x_5 - x_1} = \frac{y_5 - y_1}{4c}, \quad b_2 = \frac{y_6 - y_2}{x_6 - x_2} = \frac{y_6 - y_2}{4c},$$

$$b_3 = \frac{y_7 - y_3}{x_7 - x_3} = \frac{y_7 - y_3}{4c}, \quad b_4 = \frac{y_8 - y_4}{x_8 - x_4} = \frac{y_8 - y_4}{4c}$$

则：

$$\bar{b} = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{4} = \frac{(y_5 - y_1) + (y_6 - y_2) + (y_7 - y_3) + (y_8 - y_4)}{4 \times 4c}$$

逐差法现在常常被用来计算被测量为等间隔读数时的前后差值的平均值。