实验报告

姓名：朱沾丞 学号：PB19111674

实验名称 利用误差均分原理设计单摆实验

实验目的 利用单摆公式，通过计算确定合适的器材及实验进行的次数，并设计相应的实验，使得所测重力加速度 g 的最大相对不确定度(P=1,计算时可用 P=0.997)小于 5%。

实验可供选择的仪器 1m 钢卷尺，2m 钢卷尺，秒表（精确到 0.01s），细线，重物（用 11 枚硬币代替），支架

实验设计

由$g=\dfrac{4\pi^2 L}{T^2}$，两边取自然对数得$\ln g=\ln 4\pi^2+\ln L-2\ln T$,

两边取微分，得$\dfrac{dg}{g}=\dfrac{dL}{L}-\dfrac{2dT}{T}$,即最大相对不确定度$\dfrac{\Delta g}{g}=\dfrac{\Delta L}{L}+\dfrac{2\Delta T}{T}$

由均分原理得$\dfrac{2\Delta T}{T}\le 2.5\%,\dfrac{\Delta L}{L}\le 2.5\%$

先考虑$\dfrac{2\Delta T}{T}\le 2.5\%$

估测周期$T\approx 2\text{s}$，且人的估计误差$\Delta_{人}\approx 0.2\text{s}$,秒表的极限不确定度$\Delta_{秒}=0.01\text{s}$

而$\Delta T=\sqrt{(t_{0.997}\dfrac{\sigma_T}{\sqrt{n}})^2+(k_{0.997}\dfrac{\Delta}{C})^2}$,由$\dfrac{2\Delta T}{T}\le 2.5\%$

故满足上述不等式的必要条件为$\dfrac{2k_{0.997}\dfrac{\Delta}{C}}{T}=\dfrac{2\sqrt{{\Delta_{人}}^2+{\Delta_{秒}}^2}}{NT}\le 2.5\%$

$\Rightarrow N\ge\dfrac{2\sqrt{{\Delta_{人}}^2+{\Delta_{秒}}^2}}{2.5\%T}=\dfrac{2\sqrt{0.2^2+0.01^2}}{2.5\%\cdot 2}=8.01$故应有$N\ge 9$

而在实验中我们一次测量50个周期。

再考虑$\dfrac{\Delta L}{L}\le 2.5\%$

估测摆长为0.98m,故选取1m钢卷尺，其$\Delta_{仪}=8\times 10^{-4}\,\text{m}$

$$\frac{\Delta L}{L}=\sqrt{(t_{0.997}\frac{\sigma_L}{\sqrt{n}})^2+(k_{0.997}\frac{\Delta_{仪}}{C})^2}\le 2.5\%$$

满足不等式的必要条件为$\dfrac{k_{0.997}\dfrac{\Delta_{仪}}{C}}{L}\le 2.5\%$

则$1m$钢卷尺$\Delta_{仪}=0.0008\text{m}$,代入得$\dfrac{k_{0.997}\dfrac{\Delta_{仪}}{C}}{L}=\dfrac{3\cdot\dfrac{0.0008}{3}}{0.98}=0.082\%\le 2.5\%$能够满足要求。

为了进一步保证实验精度，选择进行8次重复实验以减小A类不确定度

实验步骤

1、将系有重物的细绳悬挂在支架上，用 1m 钢卷尺测量悬挂点到重物质心的距离。

2、将重物在单摆平面内拉开一个小角度（小于 5°），小心释放后，待重物经过最低点时开始计时，一共测量 50 个周期后记录时间。

3、重复步骤 1，2 直至测满 8 次。

4、整理实验器材。

5、处理数据，撰写实验报告。

实验数据

利用误差均分原理设计单摆实验的实验数据								
实验次数	1	2	3	4	5	6	7	8
摆长	98.12cm	98.40cm	98.52cm	98.43cm	98.25cm	98.45cm	98.39cm	98.50cm
50个周期	100.18s	100.21s	99.98s	99.84s	100.37s	100.16s	100.06s	100.33s

数据处理

$$\overline{L}=\frac{\sum L}{n}=\frac{98.12+98.40+98.52+98.43+98.25+98.45+98.39+98.50}{8}cm=98.383cm$$

$$\overline{T}=\frac{\sum T}{50n}=\frac{100.18+100.21+99.98+99.84+100.37+100.16+100.06+100.33}{50\times 8}=2.0028s$$

$$故\overline{g}=\frac{4\pi^2\overline{L}}{\overline{T}^2}=9.683m/s^2$$

下求其不确定度

先计算 L 的不确定度

$$\sigma_L=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(L-\overline{L})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{(0.9812-0.98383)^2+(0.9840-0.98383)^2+(0.9852-0.98383)^2+(0.9843-0.98383)^2+(0.9825-0.98383)^2+(0.9845-0.98383)^2++(0.9839-0.98383)^2+(0.9850-0.98383)^2}{7}}$$

$$=1.3\times10^{-3}m$$

$$故U_{L.0,997}=\sqrt{(t_{0.997}\frac{\sigma_L}{\sqrt{n}})^2+(k_{0.997}\frac{\Delta_{仪}}{C})^2}=\sqrt{(4.53\cdot\frac{0.0013}{\sqrt{8}})^2+(3\cdot\frac{0.0008}{3})^2}=2.2\times10^{-3}m$$

$$\sigma_T=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(\frac{t}{50}-\overline{T})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{(\frac{100.18}{50}-2.0028)^2+(\frac{100.21}{50}-2.0028)^2+(\frac{99.98}{50}-2.0028)^2+(\frac{99.84}{50}-2.0028)^2+(\frac{100.37}{50}-2.0028)^2+(\frac{100.16}{50}-2.0028)^2+(\frac{100.06}{50}-2.0028)^2+(\frac{100.33}{50}-2.0028)^2}{7}}m$$

$$=3.5\times10^{-3}m$$

$$U_{T,0.997}=\sqrt{(t_{0.997}\frac{\sigma_T}{\sqrt{n}})^2+(k_{0.997}\frac{\Delta}{C})^2}=\sqrt{(4.53\cdot\frac{0.0035}{\sqrt{8}})^2+(3\cdot\frac{\frac{1}{50}\sqrt{0.2^2+0.01^2}}{3})^2}=0.007s,P=0.997$$

现计算g的不确定度$U_{g,0.997}$

$$由\frac{U_{g,0.997}}{\overline{g}}=\sqrt{(\frac{U_{L,0.997}}{\overline{L}})^2+(2\times\frac{U_{T,0.997}}{\overline{T}})^2}=\sqrt{(\frac{0.0022}{0.98383})^2+(2\times\frac{0.007}{2.0028})^2}=0.73\%,P=0.997$$

$$得U_{g,0.997}=\overline{g}\times0.73\%=0.07m/s^2$$

$$故g=\overline{g}\pm U_{g,0.997}=(9.68\pm0.07)m/s^2,P=0.997$$

定性误差分析

1、单摆在运动过程中会受到空气阻力的影响，故其实是一个阻尼振动。

我们列出小球的动力学方程：

$$\mathrm{ma}=-mg\frac{x}{L}-kv$$

得到 $\ddot{\mathrm{x}}+\frac{k}{m}\dot{x}+\frac{g}{L}x=0$，令 $2\beta=\frac{\mathrm{k}}{m},\omega=\frac{g}{L}$

解该微分方程，$\ddot{\mathrm{x}}+2\beta\dot{x}+\omega x=0$，应当为一对复根 $\mathrm{x}=-\beta\pm i\sqrt{\omega^2-\beta^2}$，

得到 $\mathrm{x}=Ae^{-\beta}\sin(\omega' t+\varphi)$，其中 $\omega'=\sqrt{\omega^2-\beta^2}<\omega$

即我们测得的重力加速度为 $\mathrm{g}=\overline{L}\,\omega'^2<\overline{L}\,\omega^2=\frac{4\pi^2\overline{L}}{\overline{T}^2}$

2、在利用单摆公式时，我们采用了一定的近似处理，即将 $\sin\theta$ 处理为 θ，且将细线看做是无质量的，均会产生一定的误差。

若考虑细线的质量则

实验小结

1、在本实验中，我们利用最大不确定度小于 5%的要求，可以计算出一次时间测量至少测量多少个周期以及应该采用的仪器。而由于对最大不确定度的要求不高，仅为 5%，我们实际所采用的测量方案都能够很好的我们所需达到的要求。因此实验相对而言更加精确。

2、在实验中，悬挂重物时，应充分释放掉绳子中的力，防止重物在摆动过程中发生旋转。同时释放重物时也应尽可能轻缓，防止出现圆锥摆运动。