周期性边界条件下样条插值线性方程组的快速求解

程晓晗，　封建湖
（长安大学 理学院，西安 710064）

［摘　要］研究周期性边界条件下样条插值线性方程组的求解问题. 结合该类线性方程组的自身特点，分析其内部关系，建立了一种快速求解方法. 经运算量分析表明，该方法的计算量是线性量级.

［关键词］线性方程组；样条插值；周期性边界条件；迭代法
［中图分类号］O241　　［文献标识码］C　　［文章编号］1672-1454(2020)06-0080-03

1　引　　言

样条插值法不仅保持插值函数连续而且具有处处光滑的优点，在机械设计、数据分析和动力学分析中有着广泛的应用[1-4]. 三次样条插值是一种最常用的样条插值方法，常采用三弯矩法或三转角法来构造，最终样条插值函数的确定需要求解一个稀疏线性方程组. 在转角边界条件或弯矩边界条件下，样条插值线性方程组的系数矩阵为三对角矩阵，可采用计算量为线性量级的追赶法求解[5]. 但在周期性边界条件下，样条插值线性方程组的系数矩阵不是三对角矩阵，常采用高斯消去法求解. 众所周知，高斯消去法在求解过程中会产生大量的非零元素，从而导致存储量和计算量均比较大，常用于低阶、稠密线性方程组的求解. 鉴于此，本文结合周期性边界条件下的样条插值线性方程组的特点，将 M_0 作为参数，通过逐次代入过程得到了 M_0 和 $M_i\ (i=1,\cdots,n-1)$ 的关系式. 利用这些关系式确定了 M_0 的值，进而求得 $M_i\ (i=1,\cdots,n-1)$ 的值. 该方法编程实现简单，存储量小，经运算量分析表明，该方法的计算量为线性量级.

2　方法的建立与分析

当给定周期性边界条件时，样条插值线性方程组具有如下形式[6]

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & \mu_0 \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ \mu_{n-1} & & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

［收稿日期］2020-04-02；［修改日期］2020-07-22
［基金项目］高等学校大学数学教学研究与发展中心项目(CMC20190319)；国家自然科学基金项目(11601037，11971075)；陕西省自然科学研究计划项目(2018JQ1027)；中央高校基本科研业务费项目(300102120107)
［作者简介］程晓晗(1987—)，男，博士，副教授，从事偏微分方程数值解研究. Email：xhcheng@chd.edu.cn

将 M_0 作为参数,从方程组(1)的第二个方程解出 M_1 可得

$$M_1 = \frac{1}{2}d_1 - \frac{1}{2}\lambda_1 M_0 - \frac{1}{2}\mu_1 M_2. \tag{2}$$

进一步可将(2)式改写为

$$\begin{cases} M_1 = p_1 + q_1 M_0 + r_1 M_2, \\ p_1 = \frac{1}{2}d_1, \quad q_1 = -\frac{1}{2}\lambda_1, \quad r_1 = -\frac{1}{2}\mu_1. \end{cases} \tag{3}$$

将(3)式中的 M_1 代入方程组(1)的第三个方程可得

$$\begin{cases} M_2 = p_2 + q_2 M_0 + r_2 M_3, \\ p_2 = \frac{d_2 - \lambda_2 p_1}{2 + \lambda_2 r_1}, \quad q_2 = -\frac{\lambda_2 q_1}{2 + \lambda_2 r_1}, \quad r_2 = -\frac{\mu_2}{2 + \lambda_2 r_1}. \end{cases} \tag{4}$$

再将(4)式中的 M_2 代入方程组(1)的第四个方程,解得

$$\begin{cases} M_3 = p_3 + q_3 M_0 + r_3 M_4, \\ p_3 = \frac{d_3 - \lambda_3 p_2}{2 + \lambda_3 r_2}, \quad q_3 = -\frac{\lambda_3 q_2}{2 + \lambda_3 r_2}, \quad r_3 = -\frac{\mu_3}{2 + \lambda_3 r_2}. \end{cases}$$

依此类推,可得

$$\begin{cases} M_i = p_i + q_i M_0 + r_i M_{i+1}, \\ p_i = \frac{d_i - \lambda_i p_{i-1}}{2 + \lambda_i r_{i-1}}, \quad q_i = -\frac{\lambda_i q_{i-1}}{2 + \lambda_i r_{i-1}}, \quad r_i = -\frac{\mu_i}{2 + \lambda_i r_{i-1}}, \end{cases} \quad i = 2,3,\cdots,n-2. \tag{5}$$

当 $i = n-2$ 时, $M_{n-2} = p_{n-2} + q_{n-2}M_0 + r_{n-2}M_{n-1}$,将其代入方程组(1)的最后一个方程,可得

$$\begin{cases} M_{n-1} = p_{n-1} + q_{n-1} M_0, \\ p_{n-1} = \frac{d_{n-1} - \lambda_{n-1} p_{n-2}}{2 + \lambda_{n-1} r_{n-2}}, \quad q_{n-1} = -\frac{\mu_{n-1} + \lambda_{n-1} q_{n-2}}{2 + \lambda_{n-1} r_{n-2}}. \end{cases} \tag{6}$$

将(6)式中的 $M_{n-1} = p_{n-1} + q_{n-1}M_0$ 代入方程组(1)的第一个方程,可得

$$(2 + \mu_0 q_{n-1})M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0 - \mu_0 p_{n-1}. \tag{7}$$

进一步将式(7)改写为

$$\begin{cases} A_0 M_0 + B_0 M_1 = C_0, \\ A_0 = 2 + \mu_0 q_{n-1}, \quad B_0 = \lambda_0, \quad C_0 = d_0 - \mu_0 p_{n-1}. \end{cases} \tag{8}$$

将式(3)中的 $M_1 = p_1 + q_1 M_0 + r_1 M_2$ 代入(8)式,可得

$$\begin{cases} A_1 M_0 + B_1 M_2 = C_1, \\ A_1 = A_0 + B_0 q_1, \quad B_1 = B_0 r_1, \quad C_1 = C_0 - B_0 p_1. \end{cases}$$

一般地,有

$$\begin{cases} A_i M_0 + B_i M_{i+1} = C_i, \\ A_i = A_{i-1} + B_{i-1} q_i, \quad B_i = B_{i-1} r_i, \ C_i = C_{i-1} - B_{i-1} p_i, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,n-2. \tag{9}$$

注意到 $A_{n-2}M_0 + B_{n-2}M_{n-1} = C_{n-2}$,将(6)式中的 $M_{n-1} = p_{n-1} + q_{n-1}M_0$ 代入该式,解得

$$M_0 = \frac{C_{n-2} - B_{n-2} p_{n-1}}{A_{n-2} + B_{n-2} q_{n-1}}. \tag{10}$$

将 M_0 代入(9)式,解得

$$M_{i+1} = \frac{C_i - A_i M_0}{B_i}, \quad i = n-2, n-3, \cdots, 1, 0, \tag{11}$$

由此得到所有的 M_i($i = 0,1,\cdots,n-1$) .

基于前面的分析和讨论,可得求解方程组(1)的步骤如下:

第一步:根据(3)式、(5)式和(6)式,计算出 $p_i, q_i, r_i (i = 1,2,\cdots,n-2)$ 和 p_{n-1}, q_{n-1};

第二步:根据(8)式和(9)式,计算出 $A_i, B_i, C_i (i = 0,1,\cdots,n-2)$;

第三步:根据(10)式和(11)式,计算出方程组的解 $M_i (i = 0,1,\cdots,n-1)$.

上述步骤分别需要 $6n-10$, $3n-4$ 和 $2n+1$ 次乘除法,合计为 $(11n-13)$ 次乘除法,所以本文方法

的计算量是线性量级.大家熟知的高斯消去法需要的乘除法次数为($n^3/3+n^2-n/3$).由此可见,当n较大时,本文方法的运算量比高斯消去法少很多.

3 结 论

周期性边界条件下的样条插值线性方程组常采用高斯消去法进行求解,存在着存储量和计算量大的问题.本文针对该类线性方程组,分析其内部关系,通过逐次代入的方法推导出一种快速求解方法.通过分析运算量得到,该方法的计算量是线性量级.该方法编程实现简单,存储量小,计算效率高,是求解该类方程组的一种有效方法.

致谢 作者非常感谢相关文献对本文的启发以及审稿专家提出的宝贵意见.

[参 考 文 献]

[1] 周金明,朱晓临,张伟.结合数学建模,改革《数值分析》教学[J].大学数学,2013,29(5):13-17.
[2] 王勇,章定国,范纪华,等.基于B样条插值法的柔性矩形薄板的动力学分析[J].振动工程学报,2019,32(5):811-821.
[3] 张凯选,马传宁.结合三次样条和时序模型的桥墩沉降预测[J].测绘科学,2016,41(12):229-232.
[4] 梁凯豪,高凌云,梁海东.一类排序问题的求解及效果评估[J].大学数学,2010,26(4):157-161.
[5] 张诚坚,何南忠,覃婷婷.计算方法[M].2版.北京:高等教育出版社,2016:106-112.
[6] 封建湖,聂玉峰,车刚明.数值分析原理[M].北京:科学出版社,2007:39-43.

A Fast Algorithm for Solving Linear Equations of Spline Interpolation under Period Boundary Condition

CHENG Xiao-han, *FENG Jian-hu*
(School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: This paper studies the problem of solving linear equations of spline interpolation under period boundary condition. By analyzing the feature and the inner relations of the linear equations, a fast iteration algorithm is established. Finally, we demonstrated that this method's computational quantity is linear of magnitude.

Key words: linear equations; spline interpolation; period boundary condition; iteration algorithm