Practical Optimization Algorithms

徐 翔

数学科学学院
浙江大学

May 27, 2021

第十一讲: 二次规划(Linear and Quadratic Programming)

简介(Introduction)

简介

- 一般形式：

$$\min_x q(x) = \frac{1}{2}x^T G x + x^T c$$
$$s.t. \begin{cases} a_i^T x = b_i, & i \in \mathcal{E} \\ a_i^T x \geq b_i, & i \in \mathcal{I}. \end{cases}$$

其中G是对称矩阵。

简介

- 一般形式：

$$
\begin{aligned}
&\min_x q(x) = \frac{1}{2}x^T G x + x^T c \\
&s.t. \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_i^T x = b_i, & i \in \mathcal{E} \\ a_i^T x \geq b_i, & i \in \mathcal{I}. \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

  其中G是对称矩阵。

- 二次规划一定可以在有限步内完成，运算量取决于目标函数和不等式约束个数。

简介

- 一般形式：

$$\min_x q(x) = \frac{1}{2}x^T G x + x^T c$$
$$s.t. \begin{cases} a_i^T x = b_i, & i \in \mathcal{E} \\ a_i^T x \geq b_i, & i \in \mathcal{I}. \end{cases}$$

  其中G是对称矩阵。

- 二次规划一定可以在有限步内完成，运算量取决于目标函数和不等式约束个数。
- 如果G是半正定的，即是凸规划问题，那么困难程度等价于线性规划。

简介

- 一般形式：

$$\min_x q(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + x^T c$$
$$s.t. \begin{cases} a_i^T x = b_i, & i \in \mathcal{E} \\ a_i^T x \geq b_i, & i \in \mathcal{I}. \end{cases}$$

其中G是对称矩阵。

- 二次规划一定可以在有限步内完成，运算量取决于目标函数和不等式约束个数。
- 如果G是半正定的，即是凸规划问题，那么困难程度等价于线性规划。
- 如果G不定，那么困难显著增加，因为会存在多个平衡点或者局部极小解。

简介

- 一般形式：

$$\min_x q(x) = \frac{1}{2}x^T G x + x^T c$$
$$s.t. \quad \begin{cases} a_i^T x = b_i, & i \in \mathcal{E} \\ a_i^T x \geq b_i, & i \in \mathcal{I}. \end{cases}$$

  其中G是对称矩阵。

- 二次规划一定可以在有限步内完成，运算量取决于目标函数和不等式约束个数。
- 如果G是半正定的，即是凸规划问题，那么困难程度等价于线性规划。
- 如果G不定，那么困难显著增加，因为会存在多个平衡点或者局部极小解。
- 这里先考虑凸规划问题，即有唯一的全局极小解。

仅有等式约束

- 一般形式：

$$\min_x q(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + x^T c$$
$$s.t.\ \ Ax = b,$$

其中A是$m \times n$的矩阵（可以看做是非线性约束的线性化Jacobian，即$\nabla c_i(x)$）。

仅有等式约束

- 一般形式：

$$
\begin{aligned}
&\min_x q(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + x^T c \\
&s.t. \;\; Ax = b,
\end{aligned}
$$

其中A是$m \times n$的矩阵（可以看做是非线性约束的线性化Jacobian，即$\nabla c_i(x)$）。

- 根据一阶最优性KKT条件，等价于求解如下问题的解

$$
\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix}
$$

仅有等式约束

- 一般形式：

$$\min_x q(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + x^T c$$
$$s.t.\ \ Ax = b,$$

其中A是$m \times n$的矩阵（可以看做是非线性约束的线性化Jacobian，即$\nabla c_i(x)$）。

- 根据一阶最优性KKT条件，等价于求解如下问题的解

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix}$$

- 如果我们把计算格式写成 $x^* = x + p$, x是当前的值，p是更新量，则可以得到如下方程

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$$

其中$h = Ax - b$, $g = c + Gx$, $p = x^* - x$. 以上系数矩阵称为KKT矩阵。

仅有等式约束

回忆一下我们记Z是A的零空间的基构成的矩阵，即 $AZ=0$, $rank(Z){=}n-m$, $Z\in R^{n\times(n-m)}$

引理1

假设A是行满秩的，并且假设约化后的Hessian矩阵Z^TGZ是正定的， 则KKT矩阵是非奇异的，并且存在唯一的解(x^*,λ^*)

仅有等式约束

回忆一下我们记Z是A的零空间的基构成的矩阵，即 $AZ=0$, $rank(Z)$=$n-m$, $Z\in R^{n\times(n-m)}$

引理1

假设A是行满秩的，并且假设约化后的Hessian矩阵Z^TGZ是正定的， 则KKT矩阵是非奇异的，并且存在唯一的解(x^*,λ^*)

证明(反证法)

仅有等式约束

回忆一下我们记Z是A的零空间的基构成的矩阵，即 $AZ=0$, $rank(Z)$=$n-m$, $Z\in R^{n\times(n-m)}$

引理1

假设A是行满秩的，并且假设约化后的Hessian矩阵Z^TGZ是正定的， 则KKT矩阵是非奇异的，并且存在唯一的解(x^*,λ^*)

证明(反证法)

- 假设存在不同时为0的w, v满足

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}=0$$

仅有等式约束

回忆一下我们记Z是A的零空间的基构成的矩阵，即 $AZ=0$, $rank(Z)$=$n-m$, $Z\in R^{n\times(n-m)}$

引理1

假设A是行满秩的，并且假设约化后的Hessian矩阵Z^TGZ是正定的， 则KKT矩阵是非奇异的，并且存在唯一的解(x^*,λ^*)

证明(反证法)

- 假设存在不同时为0的w, v满足

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}=0$$

- 可以得到$Aw=0$。

仅有等式约束

回忆一下我们记Z是A的零空间的基构成的矩阵，即 $AZ=0$, $rank(Z)$=$n-m$, $Z\in R^{n\times(n-m)}$

引理1

假设A是行满秩的，并且假设约化后的Hessian矩阵Z^TGZ是正定的， 则KKT矩阵是非奇异的，并且存在唯一的解(x^*,λ^*)

证明(反证法)

- 假设存在不同时为0的w, v满足

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}=0$$

- 可以得到$Aw=0$。进而可以得到

$$0=\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}=w^TGw$$

仅有等式约束

仅有等式约束

- 由于w在A的零空间中，即$w = Zu$.因此我们可以得到

$$0 = w^T G w = u^T Z^T G Z u$$

仅有等式约束

- 由于w在A的零空间中，即$w = Zu$.因此我们可以得到

$$0 = w^T G w = u^T Z^T G Z u$$

- 由于$Z^T G Z$是正定的，因此可以推出 $u = 0$。因此$w = 0$。

仅有等式约束

- 由于w在A的零空间中，即$w = Zu$.因此我们可以得到

$$0 = w^T G w = u^T Z^T G Z u$$

- 由于$Z^T G Z$是正定的，因此可以推出 $u = 0$。因此$w = 0$。
- 再根据

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = 0$$

得到$A^T v = 0$。显然由于A是行满秩的，因此可以得到$v = 0$。

仅有等式约束

- 由于w在A的零空间中，即$w = Zu$.因此我们可以得到

$$0 = w^T G w = u^T Z^T G Z u$$

- 由于$Z^T G Z$是正定的，因此可以推出 $u = 0$。因此$w = 0$。
- 再根据

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = 0$$

得到$A^T v = 0$。显然由于A是行满秩的，因此可以得到$v = 0$。

- 这与假设不符。因此KKT矩阵一定是非奇异的。

定理1:

假设A是行满秩的，并且假设约化后的Hessian矩阵$Z^T G Z$是正定的，则x^*是二次规划问题的全局唯一解。

直接求解KKT系统

- 下面我们介绍一种直接求解KKT系统的算法。

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$$

直接求解KKT系统

- 下面我们介绍一种直接求解KKT系统的算法。

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$$

- 首先我们的一个观察：只要$m \geq 1$，KKT矩阵一定是非正定的。

直接求解KKT系统

- 下面我们介绍一种直接求解KKT系统的算法。

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$$

- 首先我们的一个观察：只要$m \geq 1$，KKT矩阵一定是非正定的。
- 定义三个重要的量n_+, n_-, n_0，分别是KKT矩阵的正、负和零特征值的个数，记(n_+, n_-, n_0) 为矩阵的惯性指标(inertia)。

定理2

记K为KKT矩阵，假设A是行满秩m. 则x^*是二次规划问题的

$$\text{inertia}(K) = \text{inertia}(Z^T G Z) + (m, m, 0)$$

因此，如果$Z^T G Z$是正定的，那么$\text{inertia}(K) = (n, m, 0)$.

矩阵分解

- 最有效的方法是不定对称分解

矩阵分解

- 最有效的方法是不定对称分解
- 一个一般的对称矩阵K，一定存在如下分解

$$P^T K P = L B L^T$$

其中P是个初等变换矩阵，L是下三角矩阵（对角元为1），B是块对角矩阵（每个块最多2×2）。

矩阵分解

- 最有效的方法是不定对称分解
- 一个一般的对称矩阵K，一定存在如下分解

$$P^T K P = L B L^T$$

其中P是个初等变换矩阵，L是下三角矩阵（对角元为1），B是块对角矩阵（每个块最多2×2）。

- 这个分解的计算量大约与高斯消元法的运算量相当

矩阵分解

- 最有效的方法是不定对称分解
- 一个一般的对称矩阵K，一定存在如下分解

$$P^T K P = L B L^T$$

  其中P是个初等变换矩阵，L是下三角矩阵（对角元为1），B是块对角矩阵（每个块最多2×2）。
- 这个分解的计算量大约与高斯消元法的运算量相当
- 求解顺序：首先求解 $Lz = P^T \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ 得到z。

矩阵分解

- 最有效的方法是不定对称分解
- 一个一般的对称矩阵K，一定存在如下分解

$$P^TKP = LBL^T$$

其中P是个初等变换矩阵，L是下三角矩阵（对角元为1），B是块对角矩阵（每个块最多2×2）。

- 这个分解的计算量大约与高斯消元法的运算量相当
- 求解顺序：首先求解 $Lz = P^T\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ 得到z。然后求解$B\hat{z} = z$ 得到$\hat{z}$。

矩阵分解

- 最有效的方法是不定对称分解
- 一个一般的对称矩阵K，一定存在如下分解

$$P^T K P = L B L^T$$

其中P是个初等变换矩阵，L是下三角矩阵（对角元为1），B是块对角矩阵（每个块最多2×2）。

- 这个分解的计算量大约与高斯消元法的运算量相当
- 求解顺序：首先求解 $Lz = P^T \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ 得到z。然后求解$B\hat{z} = z$ 得到$\hat{z}$。再求解$L^T \bar{z} = \hat{z}$得到$\bar{z}$。

矩阵分解

- 最有效的方法是不定对称分解
- 一个一般的对称矩阵K，一定存在如下分解

$$P^T K P = L B L^T$$

  其中P是个初等变换矩阵，L是下三角矩阵（对角元为1），B是块对角矩阵（每个块最多2×2）。
- 这个分解的计算量大约与高斯消元法的运算量相当
- 求解顺序：首先求解 $Lz = P^T \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ 得到z。然后求解$B\hat{z} = z$ 得到$\hat{z}$。再求解$L^T\bar{z} = \hat{z}$得到$\bar{z}$。最后计算$\begin{bmatrix} -p \\ \lambda^* \end{bmatrix} = P\bar{z}$。

矩阵分解

- 最有效的方法是不定对称分解
- 一个一般的对称矩阵K，一定存在如下分解

$$P^T K P = L B L^T$$

其中P是个初等变换矩阵，L是下三角矩阵（对角元为1），B是块对角矩阵（每个块最多2×2）。

- 这个分解的计算量大约与高斯消元法的运算量相当
- 求解顺序：首先求解 $Lz = P^T \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ 得到z。然后求解$B\hat{z} = z$ 得到$\hat{z}$。再求解$L^T \bar{z} = \hat{z}$得到$\bar{z}$。最后计算$\begin{bmatrix} -p \\ \lambda^* \end{bmatrix} = P\bar{z}$。
- 其他方法，如 Schur补方法(Schur-Complement)，零空间法 (Null-space)等。

迭代法求解KKT系统

- 如果KKT系统规模很大，一般不适用于直接法求解，而应该使用迭代法求解。

迭代法求解KKT系统

- 如果KKT系统规模很大，一般不适用于直接法求解，而应该使用迭代法求解。
- 一般不推荐共轭梯度法，原因是对非正定系统，可能会导致数值不稳定。

迭代法求解KKT系统

- 如果KKT系统规模很大，一般不适用于直接法求解，而应该使用迭代法求解。
- 一般不推荐共轭梯度法，原因是对非正定系统，可能会导致数值不稳定。
- 比较好的选择是Krylov子空间法，包括GMRES，QMR，LSQR方法等。

不等式约束的二次规划问题

不等式约束问题

- 积极集方法(active set method)在1970s广泛应用，比较适合小规模或中等规模问题。

不等式约束问题

- 积极集方法(active set method)在1970s广泛应用，比较适合小规模或中等规模问题。
- 内点法(Interior point method)在1990s广泛应用，比较适合大规模问题的计算。

不等式约束问题

- 积极集方法(active set method)在1970s广泛应用，比较适合小规模或中等规模问题。
- 内点法(Interior point method)在1990s广泛应用，比较适合大规模问题的计算。
- 内点法不一定是最有效的，因为需要求解很多二次规划子问题。

一阶最优性条件

- 写出相应的拉格朗日函数

$$L(x,\lambda) = \frac{1}{2}x^T Gx + x^T c - \sum_{i\in\mathcal{E}\cup\mathcal{I}} \lambda_i(a_i^T x - b_i)$$

一阶最优性条件

- 写出相应的拉格朗日函数

$$L(x,\lambda) = \frac{1}{2}x^T G x + x^T c - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i (a_i^T x - b_i)$$

- 活跃集$\mathcal{A}(x^*)$包括了

$$\mathcal{A}(x^*) = \{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I} | a_i^T x^* = b_i\}.$$

一阶最优性条件

- 写出相应的拉格朗日函数

$$L(x,\lambda)=\frac{1}{2}x^TGx+x^Tc-\sum_{i\in\mathcal{E}\cup\mathcal{I}}\lambda_i(a_i^Tx-b_i)$$

- 活跃集$\mathcal{A}(x^*)$包括了

$$\mathcal{A}(x^*)=\{i\in\mathcal{E}\cup\mathcal{I}|a_i^Tx^*=b_i\}.$$

- 根据KKT条件，我们得到

$$\begin{aligned}
Gx^*+c-\sum_{i\in\mathcal{A}(x^*)}\lambda_i^*a_i&=0,\\
a_i^Tx^*&=b_i, && \text{for all } i\in\mathcal{A}(x^*),\\
a_i^Tx^*&\geq b_i, && \text{for all } i\in\mathcal{I}\setminus\mathcal{A}(x^*),\\
\lambda_i^*&\geq 0, && \text{for all } i\in\mathcal{I}\cap\mathcal{A}(x^*).
\end{aligned}$$

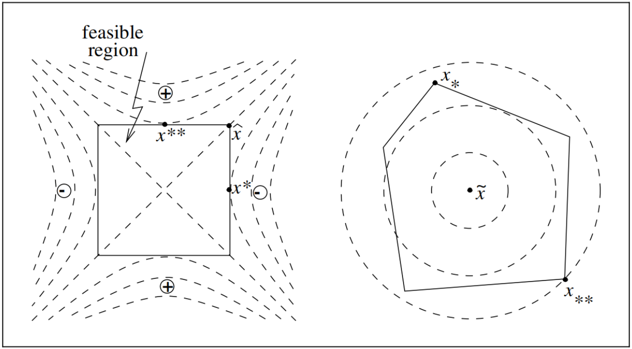
定理3：如果存在λ^*和x^*满足上述方程，并且G是半正定的，则x^*一定是原二次规划问题的全局唯一解。

一阶最优性条件

- 如果G不定，那么通常原问题不止一个解，这种情况不再是凸规划问题，而是叫不定二次规划或者负定二次规划。

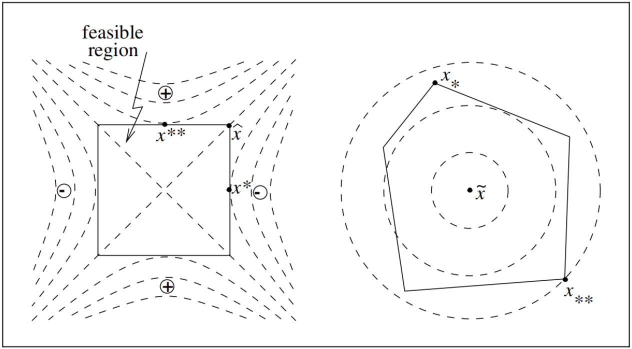
一阶最优性条件

- 如果G不定，那么通常原问题不止一个解，这种情况不再是凸规划问题，而是叫不定二次规划或者负定二次规划。



一阶最优性条件

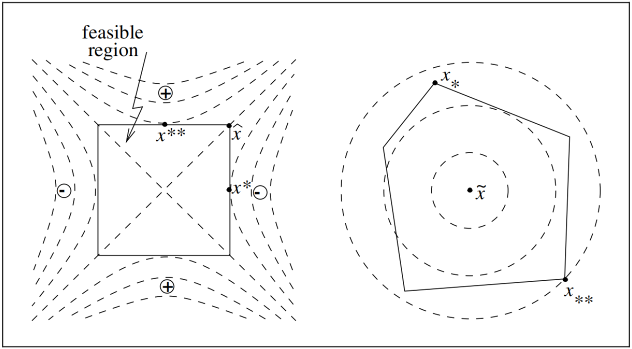
- 如果G不定，那么通常原问题不止一个解，这种情况不再是凸规划问题，而是叫不定二次规划或者负定二次规划。



- 左边是不定问题，x^{**}是极大值，x^*是个局部极小，中心点是个鞍点(saddle point)。

一阶最优性条件

- 如果G不定，那么通常原问题不止一个解，这种情况不再是凸规划问题，而是叫不定二次规划或者负定二次规划。



- 左边是不定问题，x^{**}是极大值，x^*是个局部极小，中心点是个鞍点(saddle point)。
- 右边是负定问题，$\tilde{x}$是全局最大值， x^*, x^{**}都是局部极小值点。

退化性(Degeneracy)

- 另一个困难是退化性导致的。通常可以分为两种

退化性(Degeneracy)

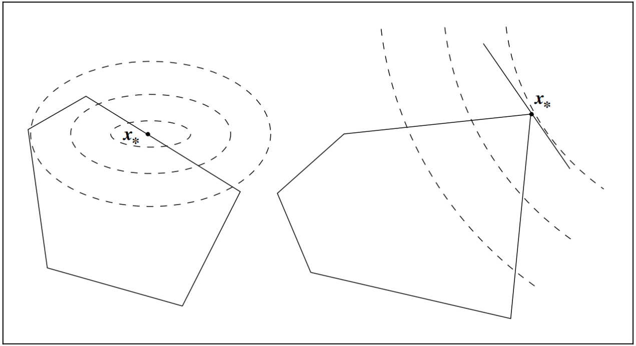
- 另一个困难是退化性导致的。通常可以分为两种
  - 活跃的约束的梯度$a_i,\ i \in \mathcal{A}(x^*)$，是线性相关的

退化性(Degeneracy)

- 另一个困难是退化性导致的。通常可以分为两种
  - 活跃的约束的梯度$a_i, i \in \mathcal{A}(x^*)$，是线性相关的
  - 严格的补条件并不满足，即存在某些$\lambda_i^* = 0$对于$i \in \mathcal{A}(x^*)$

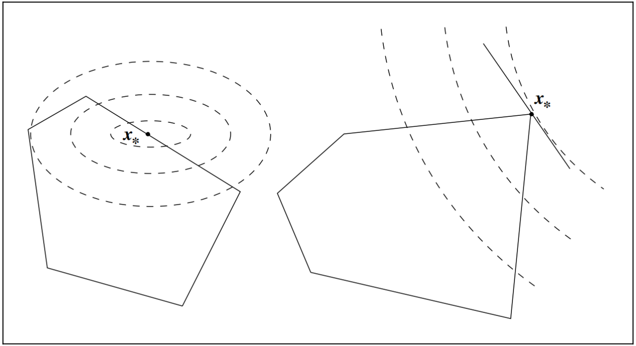
退化性(Degeneracy)

- 另一个困难是退化性导致的。通常可以分为两种
  - 活跃的约束的梯度$a_i, i \in \mathcal{A}(x^*)$，是线性相关的
  - 严格的补条件并不满足，即存在某些$\lambda_i^* = 0$对于$i \in \mathcal{A}(x^*)$



退化性(Degeneracy)

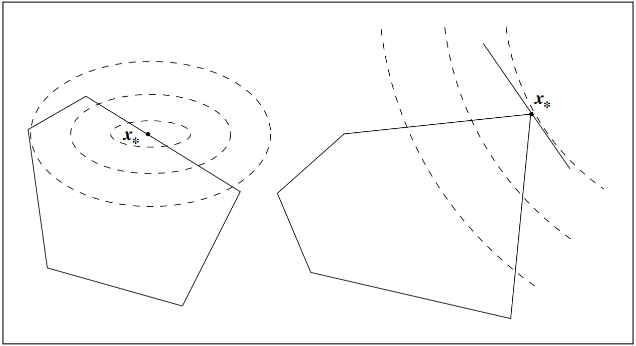
- 另一个困难是退化性导致的。通常可以分为两种
  - 活跃的约束的梯度$a_i, i \in \mathcal{A}(x^*)$，是线性相关的
  - 严格的补条件并不满足，即存在某些$\lambda_i^* = 0$对于$i \in \mathcal{A}(x^*)$



- 左边图中在x^*处仅有一个活跃的约束，也是无约束优化问题的解，因此$\lambda_i \equiv 0$.

退化性(Degeneracy)

- 另一个困难是退化性导致的。通常可以分为两种
  - 活跃的约束的梯度$a_i, i \in \mathcal{A}(x^*)$，是线性相关的
  - 严格的补条件并不满足，即存在某些$\lambda_i^* = 0$对于$i \in \mathcal{A}(x^*)$



- 左边图中在x^*处仅有一个活跃的约束，也是无约束优化问题的解，因此$\lambda_i \equiv 0$.
- 在x^*处有三个活跃的约束，但是在二维向量空间里，三个必定线性相关。

积极集方法求解凸二次规划问题

- 给定当前x_k，工作集W_k，假设在工作集中所有的a_i是线性无关的.

积极集方法求解凸二次规划问题

- 给定当前x_k，工作集W_k，假设在工作集中所有的a_i是线性无关的.
- 首先检验x_k是否是工作集上的最优解，如果不是，需要得到更新一步p，通过求解工作集上的相关的 等式约束二次规划问题，不在工作集中的约束先不考虑。

积极集方法求解凸二次规划问题

- 给定当前x_k，工作集W_k，假设在工作集中所有的a_i是线性无关的.
- 首先检验x_k是否是工作集上的最优解，如果不是，需要得到更新一步p，通过求解工作集上的相关的 等式约束二次规划问题，不在工作集中的约束先不考虑。
- 具体说来，设$p = x - x_k$, $g_k = Gx_k + c$. 把x代入原来的目标函数得到

$$q(x) = q(x_k + p) = \frac{1}{2}p^T Gp + g_k^T p + \rho_k, \text{ 这里 } \rho_k = \frac{1}{2}x_k^T Gx_k + c^T x_k$$

积极集方法求解凸二次规划问题

- 给定当前x_k，工作集$\mathcal{W}_k$，假设在工作集中所有的a_i是线性无关的.
- 首先检验x_k是否是工作集上的最优解，如果不是，需要得到更新一步p，通过求解工作集上的相关的 等式约束二次规划问题，不在工作集中的约束先不考虑。
- 具体说来，设$p = x - x_k$, $g_k = Gx_k + c$. 把x代入原来的目标函数得到

$$q(x) = q(x_k + p) = \frac{1}{2}p^T Gp + g_k^T p + \rho_k, \text{ 这里 } \rho_k = \frac{1}{2}x_k^T Gx_k + c^T x_k$$

- 由于ρ_k不影响求解，因此我们可以通过求解如下的等式约束优化子问题得到p

$$\begin{aligned} \min_p \quad & \frac{1}{2}p^T Gp + g_k^T p \\ s.t. \quad & a_i^T p = 0, \quad i \in \mathcal{W}_k. \end{aligned}$$

积极集方法求解凸二次规划问题

- 给定当前x_k，工作集$\mathcal{W}_k$，假设在工作集中所有的a_i是线性无关的.
- 首先检验x_k是否是工作集上的最优解，如果不是，需要得到更新一步p，通过求解工作集上的相关的 等式约束二次规划问题，不在工作集中的约束先不考虑。
- 具体说来，设$p = x - x_k$, $g_k = Gx_k + c$. 把x代入原来的目标函数得到

$$q(x) = q(x_k + p) = \frac{1}{2}p^T Gp + g_k^T p + \rho_k, \text{ 这里 } \rho_k = \frac{1}{2}x_k^T Gx_k + c^T x_k$$

- 由于ρ_k不影响求解，因此我们可以通过求解如下的等式约束优化子问题得到p

$$\begin{aligned} \min_p \quad & \frac{1}{2}p^T Gp + g_k^T p \\ s.t. \quad & a_i^T p = 0, \quad i \in \mathcal{W}_k. \end{aligned}$$

- 假设该问题的解是$p_k \neq 0$，我们需要确定沿着该方向可以走多远。如果$x_k + p_k$是对于任何约束条件是可行的，那可以接受 $x_{k+1} = x_k + p_k$. 否则...

积极集方法求解凸二次规划问题

- 否则可以设$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, $\alpha \in (0,1]$

积极集方法求解凸二次规划问题

- 否则可以设$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$，$\alpha \in (0, 1]$
- 当$i \notin \mathcal{W}_k$，我们可以显式地得到α_k。因为当$i \in \mathcal{W}_k$时，约束条件会自动满足 无论α_k取多少。

积极集方法求解凸二次规划问题

- 否则可以设$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$，$\alpha \in (0, 1]$
- 当$i \notin \mathcal{W}_k$，我们可以显式地得到α_k。因为当$i \in \mathcal{W}_k$时，约束条件会自动满足 无论α_k取多少。
- 如果$a_i^T p_k \geq 0$当$i \notin \mathcal{W}_k$，对任意的$\alpha_k \geq 0$，都有$a_i^T(x_k + \alpha_k p_k) \geq a_i^T x_k \geq b_i$.

积极集方法求解凸二次规划问题

- 否则可以设$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$，$\alpha \in (0, 1]$
- 当$i \notin \mathcal{W}_k$，我们可以显式地得到α_k。因为当$i \in \mathcal{W}_k$时，约束条件会自动满足 无论α_k取多少。
- 如果$a_i^T p_k \geq 0$当$i \notin \mathcal{W}_k$，对任意的$\alpha_k \geq 0$，都有$a_i^T (x_k + \alpha_k p_k) \geq a_i^T x_k \geq b_i$.
- 如果$a_i^T p_k < 0$当$i \notin \mathcal{W}_k$，为了$a_i^T (x_k + \alpha_k p_k) \geq b_i$，必须

$$\alpha_k \leq \frac{b_i - a_i^T x_k}{a_i^T p_k}.$$

积极集方法求解凸二次规划问题

- 否则可以设$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$，$\alpha \in (0, 1]$
- 当$i \notin \mathcal{W}_k$，我们可以显式地得到α_k。因为当$i \in \mathcal{W}_k$时，约束条件会自动满足 无论α_k取多少。
- 如果$a_i^T p_k \geq 0$当$i \notin \mathcal{W}_k$，对任意的$\alpha_k \geq 0$，都有$a_i^T(x_k + \alpha_k p_k) \geq a_i^T x_k \geq b_i$.
- 如果$a_i^T p_k < 0$当$i \notin \mathcal{W}_k$，为了$a_i^T(x_k + \alpha_k p_k) \geq b_i$，必须

$$\alpha_k \leq \frac{b_i - a_i^T x_k}{a_i^T p_k}.$$

- 因此为了保证在可行域内，且能让目标函数最大可能地降低 我们取

$$\alpha_k = \min\left(1, \min_{i \notin \mathcal{W}_k, a_i^T p_k < 0} \frac{b_i - a_i^T x_k}{a_i^T p_k}\right).$$

积极集方法求解凸二次规划问题

- 否则可以设$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, $\alpha \in (0, 1]$
- 当$i \notin \mathcal{W}_k$，我们可以显式地得到α_k。因为当$i \in \mathcal{W}_k$时，约束条件会自动满足 无论α_k取多少。
- 如果$a_i^T p_k \geq 0$当$i \notin \mathcal{W}_k$，对任意的$\alpha_k \geq 0$，都有$a_i^T(x_k + \alpha_k p_k) \geq a_i^T x_k \geq b_i$.
- 如果$a_i^T p_k < 0$当$i \notin \mathcal{W}_k$，为了$a_i^T(x_k + \alpha_k p_k) \geq b_i$，必须

$$\alpha_k \leq \frac{b_i - a_i^T x_k}{a_i^T p_k}.$$

- 因此为了保证在可行域内，且能让目标函数最大可能地降低 我们取

$$\alpha_k = \min\left(1, \min_{i \notin \mathcal{W}_k, a_i^T p_k < 0} \frac{b_i - a_i^T x_k}{a_i^T p_k}\right).$$

- 我们称上式中取到最小值的那个i的约束为blocking constrains.

积极集方法求解凸二次规划问题

- 否则可以设$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, $\alpha \in (0,1]$
- 当$i \notin \mathcal{W}_k$，我们可以显式地得到α_k。因为当$i \in \mathcal{W}_k$时，约束条件会自动满足 无论α_k取多少。
- 如果$a_i^T p_k \geq 0$当$i \notin \mathcal{W}_k$，对任意的$\alpha_k \geq 0$，都有$a_i^T(x_k + \alpha_k p_k) \geq a_i^T x_k \geq b_i$.
- 如果$a_i^T p_k < 0$当$i \notin \mathcal{W}_k$，为了$a_i^T(x_k + \alpha_k p_k) \geq b_i$，必须

$$\alpha_k \leq \frac{b_i - a_i^T x_k}{a_i^T p_k}.$$

- 因此为了保证在可行域内，且能让目标函数最大可能地降低 我们取

$$\alpha_k = \min\left(1, \min_{i \notin \mathcal{W}_k, a_i^T p_k < 0} \frac{b_i - a_i^T x_k}{a_i^T p_k}\right).$$

- 我们称上式中取到最小值的那个i的约束为blocking constrains.
- 如果$\alpha_k = 1$，则没有blocking constrains.

积极集方法求解凸二次规划问题

- 如果$\alpha_k < 1$，则把block constrain加入到工作集$\mathcal{W}_k$,构成新的$\mathcal{W}_{k+1}$.

积极集方法求解凸二次规划问题

- 如果$\alpha_k < 1$，则把block constrain加入到工作集$\mathcal{W}_k$,构成新的$\mathcal{W}_{k+1}$.
- 重复以上过程，直到关于p我们找到一个$\hat{x}$能够在当前的工作集$\hat{\mathcal{W}}$上极小化目标 函数。

积极集方法求解凸二次规划问题

- 如果$\alpha_k < 1$，则把block constrain加入到工作集$\mathcal{W}_k$,构成新的$\mathcal{W}_{k+1}$.
- 重复以上过程，直到关于p我们找到一个$\hat{x}$能够在当前的工作集$\hat{\mathcal{W}}$上极小化目标 函数。
- 这个很容易校验，因为子问题

$$\begin{aligned} \min_{p} \quad & \frac{1}{2}p^T G p + g_k^T p \\ s.t. \quad & a_i^T p = 0, \quad i \in \mathcal{W}_k. \end{aligned}$$

的解是$p = 0$.

积极集方法求解凸二次规划问题

- 如果$\alpha_k < 1$，则把block constrain加入到工作集$\mathcal{W}_k$,构成新的$\mathcal{W}_{k+1}$.
- 重复以上过程，直到关于p我们找到一个$\hat{x}$能够在当前的工作集$\hat{\mathcal{W}}$上极小化目标 函数。
- 这个很容易校验，因为子问题

$$\min_{p} \quad \frac{1}{2}p^T G p + g_k^T p$$
$$s.t. \quad a_i^T p = 0, \quad i \in \mathcal{W}_k.$$

  的解是$p = 0$.
- 当$p = 0$时，可得

$$\sum_{i \in \hat{\mathcal{W}}} a_i \hat{\lambda}_i = g = G\hat{x} + c$$

  对于某些拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$.

积极集方法求解凸二次规划问题

- 如果$\alpha_k < 1$，则把block constrain加入到工作集$\mathcal{W}_k$,构成新的$\mathcal{W}_{k+1}$.
- 重复以上过程，直到关于p我们找到一个$\hat{x}$能够在当前的工作集$\hat{\mathcal{W}}$上极小化目标 函数。
- 这个很容易校验，因为子问题

$$\begin{aligned} \min_p \quad & \frac{1}{2}p^T G p + g_k^T p \\ s.t. \quad & a_i^T p = 0, \quad i \in \mathcal{W}_k. \end{aligned}$$

  的解是$p = 0$.
- 当$p = 0$时，可得

$$\sum_{i \in \hat{\mathcal{W}}} a_i \hat{\lambda}_i = g = G\hat{x} + c$$

  对于某些拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$.
- 如果不在工作集中的$\hat{\lambda}_i$取为0，当$i \notin \hat{\mathcal{W}}$。那么$(\hat{x}, \hat{\lambda}_i)$就是 满足KKT条件的第一个条件,即 $\nabla L(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0$。

积极集方法求解凸二次规划问题

- 如果$\alpha_k < 1$，则把block constrain加入到工作集$\mathcal{W}_k$,构成新的$\mathcal{W}_{k+1}$.
- 重复以上过程，直到关于p我们找到一个$\hat{x}$能够在当前的工作集$\hat{\mathcal{W}}$上极小化目标 函数。
- 这个很容易校验，因为子问题

$$\begin{aligned} \min_{p} \quad & \frac{1}{2}p^T G p + g_k^T p \\ s.t. \quad & a_i^T p = 0, \quad i \in \mathcal{W}_k. \end{aligned}$$

  的解是$p = 0$.
- 当$p = 0$时，可得

$$\sum_{i \in \hat{\mathcal{W}}} a_i \hat{\lambda}_i = g = G\hat{x} + c$$

  对于某些拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$.
- 如果不在工作集中的$\hat{\lambda}_i$取为0，当$i \notin \hat{\mathcal{W}}$。那么$(\hat{x}, \hat{\lambda}_i)$就是 满足KKT条件的第一个条件,即 $\nabla L(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0$。
- 由于控制α_k保持落在可行域内，因此KKT的第二、三个条件也满足。

积极集方法求解凸二次规划问题

- 最后考虑λ_i的符号。

积极集方法求解凸二次规划问题

- 最后考虑λ_i的符号。
- 主要考虑工作集中的不等式约束那些，即$i \in \hat{\mathcal{W}} \cap \mathcal{I}$. 如果这些$\hat{\lambda}_i \geq 0$，那么KKT的第四个 条件也满足了，我们可以确定$(\hat{x}, \hat{\lambda})$是满足KKT条件的。

积极集方法求解凸二次规划问题

- 最后考虑λ_i的符号。
- 主要考虑工作集中的不等式约束那些，即$i \in \hat{\mathcal{W}} \cap \mathcal{I}$. 如果这些$\hat{\lambda}_i \geq 0$，那么KKT的第四个 条件也满足了，我们可以确定$(\hat{x}, \hat{\lambda})$是满足KKT条件的。
- 事实上，如果某个$\hat{\lambda}_j < 0$, $j \in \hat{\mathcal{W}} \cap \mathcal{I}$，那么我们可以通过 在工作集中去掉$j$，然后重新在新的工作集上求解子问题。

积极集方法求解凸二次规划问题

- 最后考虑λ_i的符号。
- 主要考虑工作集中的不等式约束那些，即$i \in \hat{\mathcal{W}} \cap \mathcal{I}$. 如果这些$\hat{\lambda}_i \geq 0$，那么KKT的第四个 条件也满足了，我们可以确定$(\hat{x}, \hat{\lambda})$是满足KKT条件的。
- 事实上，如果某个$\hat{\lambda}_j < 0,\ j \in \hat{\mathcal{W}} \cap \mathcal{I}$，那么我们可以通过 在工作集中去掉$j$，然后重新在新的工作集上求解子问题。

定理4

假设$\hat{x}$在工作集$\hat{\mathcal{W}}$上满足一阶最优性条件。再假设当前工作集中所有的线性约束 条件a_i线性无关，并且存在某个j，对应的拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_j < 0$. 假设p是在当前工作集中去掉j后的解 即：

$$\begin{aligned} \min_{p} \quad & \frac{1}{2}p^T G p + (G\hat{x} + c)^T p, \\ s.t. \quad & a_i^T p = 0, \quad \text{for all } i \in \hat{\mathcal{W}} \text{ and } i \neq j. \end{aligned}$$

积极集方法求解凸二次规划问题

- 最后考虑λ_i的符号。
- 主要考虑工作集中的不等式约束那些，即$i \in \hat{\mathcal{W}} \cap \mathcal{I}$. 如果这些$\hat{\lambda}_i \geq 0$，那么KKT的第四个 条件也满足了，我们可以确定$(\hat{x}, \hat{\lambda})$是满足KKT条件的。
- 事实上，如果某个$\hat{\lambda}_j < 0, j \in \hat{\mathcal{W}} \cap \mathcal{I}$，那么我们可以通过 在工作集中去掉$j$，然后重新在新的工作集上求解子问题。

定理4

假设$\hat{x}$在工作集$\hat{\mathcal{W}}$上满足一阶最优性条件。再假设当前工作集中所有的线性约束 条件a_i线性无关，并且存在某个j，对应的拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_j < 0$. 假设p是在当前工作集中去掉j后的解 即：

$$\begin{aligned} \min_p \quad & \frac{1}{2} p^T G p + (G\hat{x} + c)^T p, \\ s.t. \quad & a_i^T p = 0, \quad \text{for all } i \in \hat{\mathcal{W}} \text{ and } i \neq j. \end{aligned}$$

则p是可行的方向，$a_j^T p \geq 0$. 并且如果p满足二阶的充分条件，那么可以得到$a_j^T p > 0$, 并且p是目标函数$q(x)$ 的一个下降方向。

积极集方法求解凸二次规划问题

- 当$\lambda_j < 0$时，说明第j个约束并不是活跃的，目标函数可以沿着该方向继续下降。

积极集方法求解凸二次规划问题

- 当$\lambda_j < 0$时，说明第j个约束并不是活跃的，目标函数可以沿着该方向继续下降。
- 当有多个$\lambda_j < 0$时，通常选取绝对值最大的那个，因为沿着该方向是下降最多的。

积极集算法实现

ALGORITHM 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集W_0;设$k = 0$;

积极集算法实现

Algorithm 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集$\mathcal{W}_0$;设$k=0$;

for $k = 0, 1, 2, \cdots$

求解子问题得到p_k

积极集算法实现

ALGORITHM 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集$\mathcal{W}_0$;设$k = 0$;

for $k = 0, 1, 2, \cdots$

  求解子问题得到p_k

  if $p_k = 0$

积极集算法实现

Algorithm 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集$\mathcal{W}_0$;设$k=0$;

for $k=0,1,2,\cdots$

求解子问题得到p_k

if $p_k=0$

计算相应的拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$ with $\hat{\mathcal{W}}=\mathcal{W}_k$;

积极集算法实现

Algorithm 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集$\mathcal{W}_0$;设$k=0$;

for $k = 0, 1, 2, \cdots$

  求解子问题得到p_k

  if $p_k = 0$

    计算相应的拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$ with $\hat{\mathcal{W}} = \mathcal{W}_k$;

    if $\hat{\lambda}_i \geq 0$ for all $i \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}$

积极集算法实现

Algorithm 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集$\mathcal{W}_0$;设$k=0$;

for $k = 0, 1, 2, \cdots$

  求解子问题得到p_k

  if $p_k = 0$

    计算相应的拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$ with $\hat{\mathcal{W}} = \mathcal{W}_k$;

    if $\hat{\lambda}_i \geq 0$ for all $i \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}$

        Stop with $x^* = x_k$;

积极集算法实现

ALGORITHM 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集$\mathcal{W}_0$;设$k=0$;

for $k = 0, 1, 2, \cdots$

  求解子问题得到p_k

  if $p_k = 0$

    计算相应的拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$ with $\hat{\mathcal{W}} = \mathcal{W}_k$;

    if $\hat{\lambda}_i \geq 0$ for all $i \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}$

        Stop with $x^* = x_k$;

    else

积极集算法实现

ALGORITHM 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集$\mathcal{W}_0$;设$k=0$;

for $k=0,1,2,\cdots$

求解子问题得到p_k

if $p_k=0$

计算相应的拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$ with $\hat{\mathcal{W}}=\mathcal{W}_k$;

if $\hat{\lambda}_i \geq 0$ for all $i \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}$

Stop with $x^*=x_k$;

else

$j \leftarrow \arg\min_{j \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}} \hat{\lambda}_j$

积极集算法实现

Algorithm 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集$\mathcal{W}_0$;设$k = 0$;
for $k = 0, 1, 2, \cdots$
    求解子问题得到p_k
    if $p_k = 0$
        计算相应的拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$ with $\hat{\mathcal{W}} = \mathcal{W}_k$;
        if $\hat{\lambda}_i \geq 0$ for all $i \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}$
            Stop with $x^* = x_k$;
        else
            $j \leftarrow \arg\min_{j \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}} \hat{\lambda}_j$
            设$x_{k+1} \leftarrow x_k$, $\mathcal{W}_{k+1} \leftarrow \mathcal{W}_k \setminus \{j\}$;

积极集算法实现

Algorithm 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集$\mathcal{W}_0$;设$k=0$;

for $k=0,1,2,\cdots$

  求解子问题得到p_k

  if $p_k=0$

    计算相应的拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$ with $\hat{\mathcal{W}}=\mathcal{W}_k$;

    if $\hat{\lambda}_i \geq 0$ for all $i \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}$

      Stop with $x^* = x_k$;

    else

      $j \leftarrow \arg\min_{j\in\mathcal{W}_k\cap\mathcal{I}} \hat{\lambda}_j$

      设$x_{k+1} \leftarrow x_k$, $\mathcal{W}_{k+1} \leftarrow \mathcal{W}_k \setminus \{j\}$;

  else $p_k \neq 0$;

积极集算法实现

Algorithm 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集$\mathcal{W}_0$;设$k=0$;

for $k=0,1,2,\cdots$

  求解子问题得到p_k

  if $p_k=0$

    计算相应的拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$ with $\hat{\mathcal{W}}=\mathcal{W}_k$;

    if $\hat{\lambda}_i \geq 0$ for all $i \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}$

        Stop with $x^*=x_k$;

    else

      $j \leftarrow \arg\min_{j \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}} \hat{\lambda}_j$

      设$x_{k+1} \leftarrow x_k$, $\mathcal{W}_{k+1} \leftarrow \mathcal{W}_k \setminus \{j\}$;

  else $p_k \neq 0$;

    计算 α_k, $x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k p_k$

积极集算法实现

ALGORITHM 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集$\mathcal{W}_0$;设$k=0$;

for $k = 0, 1, 2, \cdots$

  求解子问题得到p_k

  if $p_k = 0$

    计算相应的拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$ with $\hat{\mathcal{W}} = \mathcal{W}_k$;

    if $\hat{\lambda}_i \geq 0$ for all $i \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}$

      Stop with $x^* = x_k$;

    else

      $j \leftarrow \arg\min_{j \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}} \hat{\lambda}_j$

      设$x_{k+1} \leftarrow x_k$, $\mathcal{W}_{k+1} \leftarrow \mathcal{W}_k \setminus \{j\}$;

  else $p_k \neq 0$;

    计算 α_k, $x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k p_k$

    if 存在 blocking constrains;

积极集算法实现

Algorithm 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集$\mathcal{W}_0$;设$k=0$;

for $k = 0, 1, 2, \cdots$

求解子问题得到p_k

if $p_k = 0$

计算相应的拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$ with $\hat{\mathcal{W}} = \mathcal{W}_k$;

if $\hat{\lambda}_i \geq 0$ for all $i \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}$

Stop with $x^* = x_k$;

else

$j \leftarrow \arg\min_{j \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}} \hat{\lambda}_j$

设$x_{k+1} \leftarrow x_k$, $\mathcal{W}_{k+1} \leftarrow \mathcal{W}_k \setminus \{j\}$;

else $p_k \neq 0$;

计算 α_k, $x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k p_k$

if 存在 blocking constrains;

Obtain $\mathcal{W}_{k+1}$ by adding one of the blocking constrains to $\mathcal{W}_k$

积极集算法实现

ALGORITHM 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集$\mathcal{W}_0$;设$k=0$;

for $k=0,1,2,\cdots$

  求解子问题得到p_k

  if $p_k=0$

    计算相应的拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$ with $\hat{\mathcal{W}}=\mathcal{W}_k$;

    if $\hat{\lambda}_i \geq 0$ for all $i \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}$

        Stop with $x^*=x_k$;

    else

      $j \leftarrow \arg\min_{j\in\mathcal{W}_k\cap\mathcal{I}} \hat{\lambda}_j$

      设$x_{k+1} \leftarrow x_k$, $\mathcal{W}_{k+1} \leftarrow \mathcal{W}_k \setminus \{j\}$;

  else $p_k \neq 0$;

    计算 α_k, $x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k p_k$

    if 存在 blocking constrains;

      Obtain $\mathcal{W}_{k+1}$ by adding one of the blocking constrains to $\mathcal{W}_k$

    else

      $\mathcal{W}_{k+1} \leftarrow \mathcal{W}_k$

积极集算法实现

ALGORITHM 1: (凸二次规划的积极集方法)

初始点x_0和初始的工作集$\mathcal{W}_0$;设$k=0$;

for $k = 0, 1, 2, \cdots$
  求解子问题得到p_k
  if $p_k = 0$
    计算相应的拉格朗日乘子$\hat{\lambda}_i$ with $\hat{\mathcal{W}} = \mathcal{W}_k$;
    if $\hat{\lambda}_i \geq 0$ for all $i \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}$
      Stop with $x^* = x_k$;
    else
      $j \leftarrow \arg\min_{j \in \mathcal{W}_k \cap \mathcal{I}} \hat{\lambda}_j$
      设$x_{k+1} \leftarrow x_k$, $\mathcal{W}_{k+1} \leftarrow \mathcal{W}_k \setminus \{j\}$;
  else $p_k \neq 0$;
    计算 α_k, $x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k p_k$
    if 存在 blocking constrains;
      Obtain $\mathcal{W}_{k+1}$ by adding one of the blocking constrains to $\mathcal{W}_k$
    else
      $\mathcal{W}_{k+1} \leftarrow \mathcal{W}_k$
end for

积极集算法实现

- 如何确定初始值？（“Phase I”方法,使用线性规划的解来作为二次规划的初值）

积极集算法实现

- 如何确定初始值？（“Phase I”方法,使用线性规划的解来作为二次规划的初值）
- 给定一个$\tilde{x}$，定义如下问题

$$
\begin{aligned}
\min_{(x,z)} \quad & e^T z \\
s.t. \quad & a_i^T x + \gamma_i z_i = b_i, \quad i \in \mathcal{E}, \\
& a_i^T x + \gamma_i z_i \geq b_i, \quad i \in \mathcal{I}, \\
& z \geq 0,
\end{aligned}
$$

其中$e = (1, \cdots, 1)^T$, $\gamma_i = -\text{sign}(a_i^T \tilde{x} - b_i)$ for $i \in \mathcal{E}$ and $\gamma_i = 1$ for $i \in \mathcal{I}$.

积极集算法实现

- 如何确定初始值？ (“Phase I” 方法,使用线性规划的解来作为二次规划的初值)
- 给定一个$\tilde{x}$，定义如下问题

$$
\begin{aligned}
\min_{(x,z)} \quad & e^T z \\
s.t. \quad & a_i^T x + \gamma_i z_i = b_i, \quad i \in \mathcal{E}, \\
& a_i^T x + \gamma_i z_i \geq b_i, \quad i \in \mathcal{I}, \\
& z \geq 0,
\end{aligned}
$$

其中$e = (1, \cdots, 1)^T$, $\gamma_i = -\mathrm{sign}(a_i^T \tilde{x} - b_i)$ for $i \in \mathcal{E}$ and $\gamma_i = 1$ for $i \in \mathcal{I}$.

- 可以通过线性规划求解上述子问题，初始值可以选取

$$
x = \tilde{x}, \quad z_i = |a_i^T \tilde{x} - b_i| (i \in \mathcal{E}), \quad z_i = \max(b_i - a_i^T \tilde{x}, 0)(i \in \mathcal{I}).
$$

积极集算法实现

- 如何确定初始值？（“Phase I”方法,使用线性规划的解来作为二次规划的初值)
- 给定一个$\tilde{x}$，定义如下问题

$$\begin{aligned}\min_{(x,z)} \quad & e^T z \\ s.t. \quad & a_i^T x + \gamma_i z_i = b_i, \quad i \in \mathcal{E}, \\ & a_i^T x + \gamma_i z_i \geq b_i, \quad i \in \mathcal{I}, \\ & z \geq 0,\end{aligned}$$

其中$e = (1, \cdots, 1)^T$, $\gamma_i = -\text{sign}(a_i^T \tilde{x} - b_i)$ for $i \in \mathcal{E}$ and $\gamma_i = 1$ for $i \in \mathcal{I}$.

- 可以通过线性规划求解上述子问题，初始值可以选取

$$x = \tilde{x}, \quad z_i = |a_i^T \tilde{x} - b_i| (i \in \mathcal{E}), \quad z_i = \max(b_i - a_i^T \tilde{x}, 0)(i \in \mathcal{I}).$$

- 可以验证，如果$\tilde{x}$是原问题可行域内的一个点，则$(\tilde{x}, 0)$是上述子问题的一个最优解。

积极集算法实现

- 另一种选初值的方法是通过罚函数方法。（在目标函数里增加一项，使得解落到不可行区域的测度为0）

积极集算法实现

- 另一种选初值的方法是通过罚函数方法。（在目标函数里增加一项，使得解落到不可行区域的测度为0）
- 引入人工变量很大的M和η，定义如下问题

$$
\begin{aligned}
\min_{x,\eta} \quad & \frac{1}{2}x^TGx + x^Tc + M\eta \\
s.t. \quad & (a_i^Tx - b_i) \le \eta, \quad i \in \mathcal{E} \\
& -(a_i^Tx - b_i) \le \eta, \quad i \in \mathcal{E} \\
& b_i - a_i^Tx \le \eta, \quad i \in \mathcal{I} \\
& 0 \le \eta.
\end{aligned}
$$

积极集算法实现

- 另一种选初值的方法是通过罚函数方法。（在目标函数里增加一项，使得解落到不可行区域的测度为0）
- 引入人工变量很大的M和η，定义如下问题

$$\begin{aligned} \min_{x,\eta} \quad & \frac{1}{2}x^TGx + x^Tc + M\eta \\ s.t. \quad & (a_i^Tx - b_i) \le \eta, \quad i \in \mathcal{E} \\ & -(a_i^Tx - b_i) \le \eta, \quad i \in \mathcal{E} \\ & b_i - a_i^Tx \le \eta, \quad i \in \mathcal{I} \\ & 0 \le \eta. \end{aligned}$$

- 根据罚函数方法，当M充分大，$\eta = 0$时，上述问题的解就是原问题的解。

积极集算法实现

- 另一种选初值的方法是通过罚函数方法。（在目标函数里增加一项，使得解落到不可行区域的测度为0）
- 引入人工变量很大的M和η，定义如下问题

$$
\begin{aligned}
\min_{x,\eta} \quad & \frac{1}{2}x^TGx + x^Tc + M\eta \\
s.t. \quad & (a_i^Tx - b_i) \le \eta, \quad i \in \mathcal{E} \\
& -(a_i^Tx - b_i) \le \eta, \quad i \in \mathcal{E} \\
& b_i - a_i^Tx \le \eta, \quad i \in \mathcal{I} \\
& 0 \le \eta.
\end{aligned}
$$

- 根据罚函数方法，当M充分大，$\eta = 0$时，上述问题的解就是原问题的解。
- 我们的策略是选取一个比较大的M，通过常规方法求解上述问题。

积极集算法实现

- 另一种选初值的方法是通过罚函数方法。（在目标函数里增加一项，使得解落到不可行区域的测度为0）
- 引入人工变量很大的M和η，定义如下问题

$$
\begin{aligned}
\min_{x,\eta} \quad & \frac{1}{2}x^T Gx + x^T c + M\eta \\
s.t. \quad & (a_i^T x - b_i) \leq \eta, \quad i \in \mathcal{E} \\
& -(a_i^T x - b_i) \leq \eta, \quad i \in \mathcal{E} \\
& b_i - a_i^T x \leq \eta, \quad i \in \mathcal{I} \\
& 0 \leq \eta.
\end{aligned}
$$

- 根据罚函数方法，当M充分大，$\eta = 0$时，上述问题的解就是原问题的解。
- 我们的策略是选取一个比较大的M，通过常规方法求解上述问题。
- 如果我们找到一个解，$\eta > 0$，那我们可以继续增大M继续寻找。

内点法

- $$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & q(x) = \frac{1}{2}x^T G x + x^T c \\ s.t. & Ax \geq b. \end{array}$$

  其中G是对称半正定的矩阵，A是$m \times n$的矩阵。

内点法

- $$\begin{aligned} \min_{x} \quad & q(x) = \frac{1}{2}x^TGx + x^Tc \\ s.t. \quad & Ax \geq b. \end{aligned}$$

  其中G是对称半正定的矩阵，A是$m \times n$的矩阵。

- 对应的KKT系统

  $$\begin{aligned} & Gx - A^T\lambda + c = 0, \\ & Ax - b \geq 0, \\ & (Ax - b)_i\lambda_i = 0, \ i = 1, 2, \cdots, m, \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

内点法

- $$\min_x \quad q(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + x^T c$$
  $$s.t. \qquad Ax \geq b.$$

  其中G是对称半正定的矩阵，A是$m \times n$的矩阵。

- 对应的KKT系统　　　　引入变量$y = Ax - b$

$$\begin{aligned}
&Gx - A^T\lambda + c = 0, && \to Gx - A^T\lambda + c = 0,\\
&Ax - b \geq 0, && \to Ax - b - y = 0,\\
&(Ax - b)_i\lambda_i = 0,\ i = 1, 2, \cdots, m, && \to y_i\lambda_i = 0,\ i = 1, 2, \cdots, m,\\
&\lambda \geq 0. && \to (y, \lambda) \geq 0.
\end{aligned}$$

内点法: 求解主-对偶系统

- 线性规划中内点法可以推广到二次规划

内点法: 求解主-对偶系统

- 线性规划中内点法可以推广到二次规划
- 定义一个新的变量$\mu = \frac{y^T\lambda}{m}$，再定义扰动的KKT系统

内点法：求解主-对偶系统

- 线性规划中内点法可以推广到二次规划
- 定义一个新的变量$\mu = \frac{y^T\lambda}{m}$，再定义扰动的KKT系统

$$F(x, y, \lambda; \sigma\mu) = \begin{bmatrix} Gx - A^T\lambda + c \\ Ax - y - b \\ \mathcal{Y}\Lambda e - \sigma\mu e \end{bmatrix} = 0$$

其中$\sigma \in [0, 1]$，$\mathcal{Y} = \mathrm{diag}(y_1, \cdots, y_m)$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$,
$e = (1, \cdots, 1)^T$

内点法: 求解主-对偶系统

- 线性规划中内点法可以推广到二次规划
- 定义一个新的变量$\mu = \frac{y^T \lambda}{m}$，再定义扰动的KKT系统

$$F(x, y, \lambda; \sigma\mu) = \begin{bmatrix} Gx - A^T\lambda + c \\ Ax - y - b \\ \mathcal{Y}\Lambda e - \sigma\mu e \end{bmatrix} = 0$$

其中$\sigma \in [0, 1]$，$\mathcal{Y} = \mathrm{diag}(y_1, \cdots, y_m)$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$, $e = (1, \cdots, 1)^T$

- 当$\sigma\mu \to 0$，则上述问题的解趋于原二次规划问题的解。

内点法：求解主-对偶系统

- 线性规划中内点法可以推广到二次规划
- 定义一个新的变量$\mu = \frac{y^T\lambda}{m}$，再定义扰动的KKT系统

$$F(x, y, \lambda; \sigma\mu) = \begin{bmatrix} Gx - A^T\lambda + c \\ Ax - y - b \\ \mathcal{Y}\Lambda e - \sigma\mu e \end{bmatrix} = 0$$

其中$\sigma \in [0, 1]$，$\mathcal{Y} = \mathrm{diag}(y_1, \cdots, y_m)$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$, $e = (1, \cdots, 1)^T$

- 当$\sigma\mu \to 0$，则上述问题的解趋于原二次规划问题的解。
- 固定μ，使用牛顿法求解上述系统，我们可以得到如下的线性对偶系统

$$\begin{bmatrix} G & 0 & -A^T \\ A & -I & 0 \\ 0 & \Lambda & \mathcal{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d \\ -r_p \\ -\Lambda\mathcal{Y}e + \sigma\mu e \end{bmatrix} \tag{12.1}$$

其中$r_d = Gx - A^T\lambda + c$, $r_p = Ax - y - b$.

内点法: 求解主-对偶系统

- 线性规划中内点法可以推广到二次规划
- 定义一个新的变量$\mu = \frac{y^T\lambda}{m}$，再定义扰动的KKT系统

$$F(x,y,\lambda;\sigma\mu) = \begin{bmatrix} Gx - A^T\lambda + c \\ Ax - y - b \\ \mathcal{Y}\Lambda e - \sigma\mu e \end{bmatrix} = 0$$

其中$\sigma \in [0,1]$，$\mathcal{Y} = \mathrm{diag}(y_1, \cdots, y_m)$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$, $e = (1, \cdots, 1)^T$

- 当$\sigma\mu \to 0$，则上述问题的解趋于原二次规划问题的解。
- 固定μ，使用牛顿法求解上述系统，我们可以得到如下的线性对偶系统

$$\begin{bmatrix} G & 0 & -A^T \\ A & -I & 0 \\ 0 & \Lambda & \mathcal{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d \\ -r_p \\ -\Lambda\mathcal{Y}e + \sigma\mu e \end{bmatrix} \tag{12.1}$$

其中$r_d = Gx - A^T\lambda + c$, $r_p = Ax - y - b$.

- 迭代格式: $(x^+, y^+, \lambda^+) = (x, y, \lambda) + \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta\lambda)$
α的选取使得$(y^+, \lambda^+) > 0$

内点法: 求解主-对偶系统

- 在内点法中，最主要的工作量是求解扰动的KKT系统 $F(x,y,\lambda;\sigma\mu)=0$。

内点法: 求解主-对偶系统

- 在内点法中，最主要的工作量是求解扰动的KKT系统 $F(x, y, \lambda; \sigma\mu) = 0$。
- 但是与线性规划中的内点相比，求解要更困难。可以使用直接矩阵分解法，或者使用合适的预条件求解器。

内点法: 求解主-对偶系统

- 在内点法中，最主要的工作量是求解扰动的KKT系统 $F(x, y, \lambda; \sigma\mu) = 0$。
- 但是与线性规划中的内点相比，求解要更困难。可以使用直接矩阵分解法，或者使用合适的预条件求解器。
- 首先我们把相应的牛顿迭代系统写成一个紧凑的形式

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & \Lambda^{-1}y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d \\ -r_p + (-y + \sigma\mu\Lambda^{-1}e) \end{bmatrix}$$

内点法: 求解主-对偶系统

- 在内点法中，最主要的工作量是求解扰动的KKT系统 $F(x, y, \lambda; \sigma\mu) = 0$。
- 但是与线性规划中的内点相比，求解要更困难。可以使用直接矩阵分解法，或者使用合适的预条件求解器。
- 首先我们把相应的牛顿迭代系统写成一个紧凑的形式

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & \Lambda^{-1}y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d \\ -r_p + (-y + \sigma\mu\Lambda^{-1}e) \end{bmatrix}$$

- 通过计算，我们可以得到如下系统

$$(G + A^T y^{-1}\Lambda A)\Delta x = -r_d + A^T y^{-1}\Lambda[-r_p - y + \sigma\mu\Lambda^{-1}e].$$

内点法: 求解主-对偶系统

- 在内点法中，最主要的工作量是求解扰动的KKT系统 $F(x, y, \lambda; \sigma\mu) = 0$。
- 但是与线性规划中的内点相比，求解要更困难。可以使用直接矩阵分解法，或者使用合适的预条件求解器。
- 首先我们把相应的牛顿迭代系统写成一个紧凑的形式

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & \Lambda^{-1}\mathcal{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d \\ -r_p + (-y + \sigma\mu\Lambda^{-1}e) \end{bmatrix}$$

- 通过计算，我们可以得到如下系统

$$(G + A^T\mathcal{Y}^{-1}\Lambda A)\Delta x = -r_d + A^T\mathcal{Y}^{-1}\Lambda[-r_p - y + \sigma\mu\Lambda^{-1}e].$$

- 上面这个方程可以用修正Cholesky算法求解，而且当$A^T\mathcal{Y}^{-1}\Lambda A$不像$G$那样稠密，不等式约束较多时，该算法更有效，计算量会 显著低于直接求解紧凑形式。

内点法:如何选步长?

- 在线性规划内点法中, 对于主-对偶系统选取不同的α^{pri}和α^{dual}，可以使算法更有效

内点法:如何选步长?

- 在线性规划内点法中, 对于主-对偶系统选取不同的α^{pri}和α^{dual}，可以使算法更有效
- 在二次规划内点法中，我们定义如下的迭代

$$(x^+, y^+) = (x, y) + \alpha^{pri}(\Delta x, \Delta y), \lambda^+ = \lambda + \alpha^{dual}\Delta\lambda,$$

注意α的选取使得$(x^+, y^+) > 0$。

内点法:如何选步长?

- 在线性规划内点法中, 对于主-对偶系统选取不同的α^{pri}和α^{dual}，可以使算法更有效
- 在二次规划内点法中，我们定义如下的迭代

$$(x^+, y^+) = (x, y) + \alpha^{pri}(\Delta x, \Delta y), \lambda^+ = \lambda + \alpha^{dual}\Delta\lambda,$$

注意α的选取使得$(x^+, y^+) > 0$。

- 先计算更新后的残量

$$r_p^+ = (1 - \alpha^{pri})r_p,\ r_d^+ = (1 - \alpha^{dual})r_d + (\alpha^{pri} - \alpha^{dual})G\Delta x$$

内点法:如何选步长?

- 在线性规划内点法中, 对于主-对偶系统选取不同的α^{pri}和α^{dual}，可以使算法更有效
- 在二次规划内点法中，我们定义如下的迭代

$$(x^+, y^+) = (x, y) + \alpha^{pri}(\Delta x, \Delta y), \lambda^+ = \lambda + \alpha^{dual}\Delta\lambda,$$

注意α的选取使得$(x^+, y^+) > 0$。

- 先计算更新后的残量

$$r_p^+ = (1 - \alpha^{pri})r_p,\ r_d^+ = (1 - \alpha^{dual})r_d + (\alpha^{pri} - \alpha^{dual})G\Delta x$$

- 如果$\alpha^{pri} = \alpha^{dual} = \alpha$，则两个残量都线性下降。

内点法:如何选步长?

- 在线性规划内点法中，对于主-对偶系统选取不同的α^{pri}和α^{dual}，可以使算法更有效
- 在二次规划内点法中，我们定义如下的迭代

$$(x^+, y^+) = (x, y) + \alpha^{pri}(\Delta x, \Delta y), \lambda^+ = \lambda + \alpha^{dual}\Delta\lambda,$$

  注意α的选取使得$(x^+, y^+) > 0$。

- 先计算更新后的残量

$$r_p^+ = (1 - \alpha^{pri})r_p,\ r_d^+ = (1 - \alpha^{dual})r_d + (\alpha^{pri} - \alpha^{dual})G\Delta x$$

- 如果$\alpha^{pri} = \alpha^{dual} = \alpha$，则两个残量都线性下降。
- 如果取不一样的值，有可能会导致其中对偶系统的残量上升，进而导致算法发散。

内点法:如何选步长?

- 一种选择是选取相同的步长

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \min(\alpha_\tau^{pri}, \alpha_\tau^{dual}), \\
\alpha_\tau^{pri} &= \max\{\alpha \in (0,1] : y + \alpha\Delta y \geq (1-\tau)y\}, \\
\alpha_\tau^{dual} &= \max\{\alpha \in (0,1] : \lambda + \alpha\Delta\lambda \geq (1-\tau)\lambda\},
\end{aligned}
$$

其中$\tau \in (0,1)$，是用于控制我们到最大步长的距离(是满足 $y+\alpha\Delta y \geq 0$ 和 $\lambda+\alpha\Delta\lambda \geq 0$ 的最大 α)。

内点法:如何选步长?

- 一种选择是选取相同的步长

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \min(\alpha_\tau^{pri}, \alpha_\tau^{dual}),\\
\alpha_\tau^{pri} &= \max\{\alpha \in (0,1] : y + \alpha\Delta y \geq (1-\tau)y\},\\
\alpha_\tau^{dual} &= \max\{\alpha \in (0,1] : \lambda + \alpha\Delta\lambda \geq (1-\tau)\lambda\},
\end{aligned}
$$

其中$\tau \in (0,1)$，是用于控制我们到最大步长的距离(是满足 $y + \alpha\Delta y \geq 0$ 和 $\lambda + \alpha\Delta\lambda \geq 0$ 的最大 α)。

- 但是一般的数值例子显示，对主-对偶系统选取不同的α，可以得到更快的收敛性。

内点法:如何选步长?

- 一种选择是选取相同的步长

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \min(\alpha_\tau^{pri}, \alpha_\tau^{dual}),\\
\alpha_\tau^{pri} &= \max\{\alpha \in (0,1] : y + \alpha\Delta y \geq (1-\tau)y\},\\
\alpha_\tau^{dual} &= \max\{\alpha \in (0,1] : \lambda + \alpha\Delta\lambda \geq (1-\tau)\lambda\},
\end{aligned}
$$

其中$\tau \in (0,1)$，是用于控制我们到最大步长的距离(是满足 $y + \alpha\Delta y \geq 0$ 和 $\lambda + \alpha\Delta\lambda \geq 0$ 的最大 α)。

- 但是一般的数值例子显示，对主-对偶系统选取不同的α，可以得到更快的收敛性。

- 一种选择不同步长的策略

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \|Gx^+ - A^T\lambda^+ + c\|_2^2 + \|Ax^+ - y^+ - b\|_2^2 + (y^+)^T z^+\\
s.t. \quad & 0 \leq \alpha^{pri} \leq \alpha_\tau^{pri}, \qquad 0 \leq \alpha^{dual} \leq \alpha_\tau^{dual}
\end{aligned}
$$

内点法:实用的主-对偶算法

- 目前最有效的算法是预估-校正算法（起源于线性规划、推广到二次规划）

内点法:实用的主-对偶算法

- 目前最有效的算法是预估-校正算法（起源于线性规划、推广到二次规划）
- 首先设$\sigma = 0$，计算一个仿射伸缩步$(\Delta x^{aff}, \Delta y^{aff}, \Delta\lambda^{aff})$

内点法:实用的主-对偶算法

- 目前最有效的算法是预估-校正算法（起源于线性规划、推广到二次规划）
- 首先设$\sigma = 0$，计算一个仿射伸缩步$(\Delta x^{aff}, \Delta y^{aff}, \Delta \lambda^{aff})$
- 然后基于此，再计算校正系统：

$$\begin{bmatrix} G & 0 & -A^T \\ A & -I & 0 \\ 0 & \Lambda & \mathcal{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d \\ -r_p \\ -\Lambda \mathcal{Y} e - \Delta \Lambda^{aff} \Delta \mathcal{Y}^{aff} e + \sigma \mu e \end{bmatrix} \tag{12.2}$$

内点法:实用的主-对偶算法

Algorithm 2: QP的预估-校正算法

计算 (x_0, y_0, λ_0) with $(y_0, \lambda_0) > 0$;

for $k = 0, 1, 2, \cdots$

Set $(x, y, \lambda) = (x_k, y_k, \lambda_k)$，求解主-对偶系统(12.1) with $\sigma = 0$,
得到$(\Delta x^{aff}, \Delta y^{aff}, \Delta\lambda^{aff})$

计算$\mu = \frac{y^T\lambda}{m}$

计算$\hat{\alpha}_{aff} = \max\{\alpha \in (0, 1] : (y, \lambda) + \alpha(\Delta y^{aff}, \Delta\lambda^{aff}) \geq 0\}$;

计算$\mu_{aff} = (y + \hat{\alpha}^{aff}\Delta y^{aff})^T(\lambda + \hat{\alpha}^{aff}\Delta\lambda^{aff})/m$;

Set $\sigma = (\mu_{aff}/\mu)^3$;

求解上述的校正系统(12.2)得到$(\Delta x, \Delta y, \Delta\lambda)$;

选择$\tau_k \in (0, 1)$，set $\hat{\alpha} = \min(\alpha_{\tau_k}^{pri}, \alpha_{\tau_k}^{dual})$;

Set $(x_{k+1}, y_{k+1}, \lambda_{k+1}) = (x_k, y_k, \lambda_k) + \hat{\alpha}(\Delta x, \Delta y, \Delta\lambda)$;

end (for)

内点法:实用的主-对偶算法

- 可以让$\tau_k \to 1$，加速算法的收敛性。

内点法:实用的主-对偶算法

- 可以让$\tau_k \to 1$，加速算法的收敛性。
- 如何选取初值?

内点法:实用的主-对偶算法

- 可以让$\tau_k \to 1$，加速算法的收敛性。
- 如何选取初值?
  - 对于任意给定的初值$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})$，首先计算仿射伸缩步$(\Delta x^{aff}, \Delta y^{aff}, \Delta \lambda^{aff})$

内点法:实用的主-对偶算法

- 可以让$\tau_k \to 1$，加速算法的收敛性。
- 如何选取初值?
  - 对于任意给定的初值$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda})$，首先计算仿射伸缩步$(\Delta x^{aff}, \Delta y^{aff}, \Delta\lambda^{aff})$
  - Set

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \max(1, |\bar{y} + \Delta y^{aff}|), \\
\lambda_0 &= \max(1, |\bar{\lambda} + \Delta\lambda^{aff}|), \\
x_0 &= \bar{x}.
\end{aligned}
$$

活跃集方法与内点法的比较

活跃集方法与内点法的比较

- 活跃集方法每一步计算量比较小，但需要很多步。

活跃集方法与内点法的比较

- 活跃集方法每一步计算量比较小，但需要很多步。
  内点法每一步需要比较多的计算量，但总的迭代步数较少。

活跃集方法与内点法的比较

- 活跃集方法每一步计算量比较小，但需要很多步。
  内点法每一步需要比较多的计算量，但总的迭代步数较少。
- 活跃集方法通常比较难实现，特别是求解过程中会更新矩阵分解，而且要利用A和G的稀疏性。

活跃集方法与内点法的比较

- 活跃集方法每一步计算量比较小，但需要很多步。
  内点法每一步需要比较多的计算量，但总的迭代步数较少。
- 活跃集方法通常比较难实现，特别是求解过程中会更新矩阵分解，而且要利用A和G的稀疏性。
  在内点法中，不会更新矩阵分解，如果G和A有特殊的稀疏结构，那么可以使用高效的线性系统求解器。

活跃集方法与内点法的比较

- 活跃集方法每一步计算量比较小，但需要很多步。
  内点法每一步需要比较多的计算量，但总的迭代步数较少。
- 活跃集方法通常比较难实现，特别是求解过程中会更新矩阵分解，而且要利用A和G的稀疏性。
  在内点法中，不会更新矩阵分解，如果G和A有特殊的稀疏结构，那么可以使用高效的线性系统求解器。
- 对于大规模系统，内点法的效率要更高。

活跃集方法与内点法的比较

- 活跃集方法每一步计算量比较小，但需要很多步。
  内点法每一步需要比较多的计算量，但总的迭代步数较少。
- 活跃集方法通常比较难实现，特别是求解过程中会更新矩阵分解，而且要利用A和G的稀疏性。
  在内点法中，不会更新矩阵分解，如果G和A有特殊的稀疏结构，那么可以使用高效的线性系统求解器。
- 对于大规模系统，内点法的效率要更高。
- 如果初值选取的很好，那么活跃集方法的收敛要更快。

梯度投影法

- 活跃集方法每次只能更新一个约束条件，当约束条件规模较大的时候，收敛较慢。

梯度投影法

- 活跃集方法每次只能更新一个约束条件，当约束条件规模较大的时候，收敛较慢。
- 梯度投影法可以快速更新活跃集。特别是对一些简单的不等式约束条件。

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & q(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + x^T c \\ s.t. \quad & l \leq x \leq u. \end{aligned}$$

梯度投影法

- 活跃集方法每次只能更新一个约束条件，当约束条件规模较大的时候，收敛较慢。
- 梯度投影法可以快速更新活跃集。特别是对一些简单的不等式约束条件。

$$\begin{aligned} \min_x \quad & q(x) = \frac{1}{2}x^TGx + x^Tc \\ s.t. \quad & l \le x \le u. \end{aligned}$$

- 不需要假设G的半正定性，梯度投影法适用于不定情形。

梯度投影法

- 活跃集方法每次只能更新一个约束条件，当约束条件规模较大的时候，收敛较慢。
- 梯度投影法可以快速更新活跃集。特别是对一些简单的不等式约束条件。

$$\begin{aligned} \min_x \quad & q(x) = \frac{1}{2}x^T G x + x^T c \\ s.t. \quad & l \le x \le u. \end{aligned}$$

- 不需要假设G的半正定性，梯度投影法适用于不定情形。
- 可行区域是矩形区域。如果有些分量没有下界或上界，默认为∞.

梯度投影法

- 活跃集方法每次只能更新一个约束条件，当约束条件规模较大的时候，收敛较慢。
- 梯度投影法可以快速更新活跃集。特别是对一些简单的不等式约束条件。

$$\begin{aligned} \min_x \quad & q(x) = \frac{1}{2}x^TGx + x^Tc \\ s.t. \quad & l \le x \le u. \end{aligned}$$

- 不需要假设G的半正定性，梯度投影法适用于不定情形。
- 可行区域是矩形区域。如果有些分量没有下界或上界，默认为∞.
- 在梯度投影法中，每一步迭代包含两步

梯度投影法

- 活跃集方法每次只能更新一个约束条件，当约束条件规模较大的时候，收敛较慢。
- 梯度投影法可以快速更新活跃集。特别是对一些简单的不等式约束条件。

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & q(x) = \frac{1}{2}x^T G x + x^T c \\ s.t. \quad & l \le x \le u. \end{aligned}$$

- 不需要假设G的半正定性，梯度投影法适用于不定情形。
- 可行区域是矩形区域。如果有些分量没有下界或上界，默认为∞.
- 在梯度投影法中，每一步迭代包含两步
  - 从当前点x出发，沿着最速下降方向$-g = -(Gx + c)$搜索，当遇到边界，为了留在可行区域内，搜索方向会"弯曲"。继续沿着得到的分片线性路径，找到第一个 局部极小值点，记为Cauchy点 x^c. 此时x^c处的活跃的约束集记为工作集$\mathcal{A}(x^c)$。

梯度投影法

- 活跃集方法每次只能更新一个约束条件，当约束条件规模较大的时候，收敛较慢。
- 梯度投影法可以快速更新活跃集。特别是对一些简单的不等式约束条件。

$$\min_x \quad q(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + x^T c$$
$$s.t. \quad l \le x \le u.$$

- 不需要假设G的半正定性，梯度投影法适用于不定情形。
- 可行区域是矩形区域。如果有些分量没有下界或上界，默认为∞.
- 在梯度投影法中，每一步迭代包含两步
  - 从当前点x出发，沿着最速下降方向$-g = -(Gx + c)$搜索，当遇到边界，为了留在可行区域内，搜索方向会"弯曲"。继续沿着得到的分片线性路径，找到第一个 局部极小值点，记为Cauchy点 x^c. 此时x^c处的活跃的约束集记为工作集$\mathcal{A}(x^c)$。
  - 通过求解活跃的分量$x_i,\ i \in \mathcal{A}(x^c)$，确定Cauchy点落在哪个面上。

梯度投影法：计算Cauchy点

- 我们可以显式地计算出分片线性路径

梯度投影法：计算Cauchy点

- 我们可以显式地计算出分片线性路径
- 定义如下的投影算子

$$P(x,l,u)_i = \begin{cases} l_i & \text{if } x_i < l_i, \\ x_i & \text{if } x_i \in [l_i, u_i], \\ u_i & \text{if } x_i > u_i, \end{cases}$$

梯度投影法：计算Cauchy点

- 我们可以显式地计算出分片线性路径
- 定义如下的投影算子

$$P(x,l,u)_i = \begin{cases} l_i & \text{if } x_i < l_i, \\ x_i & \text{if } x_i \in [l_i, u_i], \\ u_i & \text{if } x_i > u_i, \end{cases}$$

- 定义分片线性路径

$$x(t) = P(x - tg, l, u)$$

梯度投影法：计算Cauchy点

- 我们可以显式地计算出分片线性路径
- 定义如下的投影算子

$$P(x,l,u)_i = \begin{cases} l_i & \text{if } x_i < l_i, \\ x_i & \text{if } x_i \in [l_i, u_i], \\ u_i & \text{if } x_i > u_i, \end{cases}$$

- 定义分片线性路径

$$x(t) = P(x - tg, l, u)$$

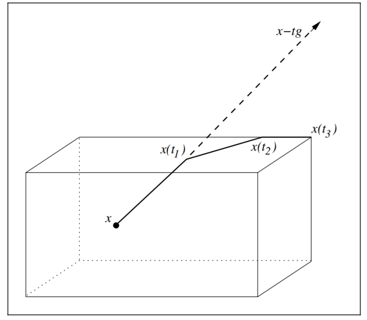
梯度投影法：计算Cauchy点

- 我们可以显式地计算出分片线性路径
- 定义如下的投影算子

$$P(x,l,u)_i = \begin{cases} l_i & \text{if } x_i < l_i, \\ x_i & \text{if } x_i \in [l_i, u_i], \\ u_i & \text{if } x_i > u_i, \end{cases}$$

- 定义分片线性路径

$$x(t) = P(x - tg, l, u)$$



定义：Cauchy点

分片二次函数$q(x(t)), t > 0$的第一个局部极小值点

梯度投影法：计算Cauchy点

- 通过检查每一段$x(t)$来得到极小值点。

梯度投影法：计算Cauchy点

- 通过检查每一段$x(t)$来得到极小值点。
- 首先确定间断点(breakpoints)，可以显式地得到

$$\bar{t}_i = \begin{cases} (x_i - u_i)/g_i & \text{if } g_i < 0 \text{ and } u_i < +\infty, \\ (x_i - l_i)/g_i & \text{if } g_i > 0 \text{ and } l_i > -\infty, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

梯度投影法：计算Cauchy点

- 通过检查每一段$x(t)$来得到极小值点。
- 首先确定间断点(breakpoints)，可以显式地得到

$$\bar{t}_i = \begin{cases} (x_i - u_i)/g_i & \text{if } g_i < 0 \text{ and } u_i < +\infty, \\ (x_i - l_i)/g_i & \text{if } g_i > 0 \text{ and } l_i > -\infty, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- 因此对任意的t，可以得到

$$x_i(t) = \begin{cases} x_i - t g_i & \text{if } t \le \bar{t}_i, \\ x_i - \bar{t}_i g_i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

梯度投影法：计算Cauchy点

梯度投影法：计算Cauchy点

- 把$\{\bar{t}_1, \cdots, \bar{t}_n\}$中重复的$\bar{t}_i$以及0去除掉，得到缩减的间断点集合$\{t_1, \cdots, t_l\}$满足$0 < t_1 < t_2 < \cdots$.

梯度投影法：计算Cauchy点

- 把$\{\bar{t}_1, \cdots, \bar{t}_n\}$中重复的$\bar{t}_i$以及0去除掉，得到缩减的间断点集合$\{t_1, \cdots, t_l\}$满足$0 < t_1 < t_2 < \cdots$.
- 逐个$[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\cdots$检验。假定我们已经检查到t_{j-1}，并且还没招到局部极小值，那么针对$[t_{j-1}, t_j]$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&x(t) = x(t_{j-1}) + \Delta t p^{j-1} \\
&\Delta t = t - t_{j-1} \in [0, t_j - t_{j-1}] \\
&p_i^{j-1} = \begin{cases} -g_i & \text{if } t_{j-1} < \bar{t}_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

梯度投影法：计算Cauchy点

- 把$\{\bar{t}_1, \cdots, \bar{t}_n\}$中重复的$\bar{t}_i$以及0去除掉，得到缩减的间断点集合$\{t_1, \cdots, t_l\}$满足$0 < t_1 < t_2 < \cdots$.
- 逐个$[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\cdots$检验。假定我们已经检查到t_{j-1}，并且还没招到局部极小值，那么针对$[t_{j-1}, t_j]$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&x(t) = x(t_{j-1}) + \Delta t p^{j-1} \\
&\Delta t = t - t_{j-1} \in [0, t_j - t_{j-1}] \\
&p_i^{j-1} = \begin{cases} -g_i & \text{if } t_{j-1} < \bar{t}_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

- 在每个线段上$[x(t_{j-1}), x(t_j)]$上，我们有

$$
q(x(t)) = c^T(x(t)) + \frac{1}{2}(x(t))^T G(x(t)), \text{ with } (x(t)) = x(t_{j-1}) + (\Delta t)p^{j-1}
$$

梯度投影法：计算Cauchy点

- 展开后根据Δt的幂次合并同类项得到

梯度投影法：计算Cauchy点

- 展开后根据Δt的幂次合并同类项得到

$$
\begin{aligned}
q(x(t)) &= f_{j-1} + f'_{j-1}\Delta + \frac{1}{2} f''_{j-1}(\Delta t)^2,\ \Delta t \in [0, t_j - t_{j-1}] \\
f_{j-1} &= c^T x(t_{j-1}) + \frac{1}{2} x(t_{j-1})^T G x(t_{j-1}), \\
f'_{j-1} &= c^T p^{j-1} + x(t_{j-1})^T G p^{j-1}, \\
f''_{j-1} &= (p^{j-1})^T G p^{j-1}.
\end{aligned}
$$

梯度投影法：计算Cauchy点

- 展开后根据Δt的幂次合并同类项得到

$$q(x(t)) = f_{j-1} + f'_{j-1}\Delta + \frac{1}{2}f''_{j-1}(\Delta t)^2,\ \Delta t \in [0, t_j - t_{j-1}]$$

$$f_{j-1} = c^T x(t_{j-1}) + \frac{1}{2}x(t_{j-1})^T G x(t_{j-1}),$$

$$f'_{j-1} = c^T p^{j-1} + x(t_{j-1})^T G p^{j-1},$$

$$f''_{j-1} = (p^{j-1})^T G p^{j-1}.$$

- 对Δt求导并设为0，可以得到

$$\Delta t^* = -\frac{f'_{j-1}}{f''_{j-1}}.$$

梯度投影法：计算Cauchy点

- 展开后根据Δt的幂次合并同类项得到

$$
\begin{aligned}
q(x(t)) &= f_{j-1} + f'_{j-1}\Delta + \frac{1}{2}f''_{j-1}(\Delta t)^2,\ \Delta t \in [0, t_j - t_{j-1}] \\
f_{j-1} &= c^T x(t_{j-1}) + \frac{1}{2}x(t_{j-1})^T G x(t_{j-1}), \\
f'_{j-1} &= c^T p^{j-1} + x(t_{j-1})^T G p^{j-1}, \\
f''_{j-1} &= (p^{j-1})^T G p^{j-1}.
\end{aligned}
$$

- 对Δt求导并设为0，可以得到

$$
\Delta t^* = -\frac{f'_{j-1}}{f''_{j-1}}.
$$

  - (1) 如果$f'_{j-1} > 0$，在$t = t_{j-1}$处取到极小值点，

梯度投影法：计算Cauchy点

- 展开后根据Δt的幂次合并同类项得到

$$
\begin{aligned}
q(x(t)) &= f_{j-1} + f'_{j-1}\Delta + \frac{1}{2} f''_{j-1}(\Delta t)^2,\ \Delta t \in [0, t_j - t_{j-1}] \\
f_{j-1} &= c^T x(t_{j-1}) + \frac{1}{2} x(t_{j-1})^T G x(t_{j-1}), \\
f'_{j-1} &= c^T p^{j-1} + x(t_{j-1})^T G p^{j-1}, \\
f''_{j-1} &= (p^{j-1})^T G p^{j-1}.
\end{aligned}
$$

- 对Δt求导并设为0，可以得到

$$
\Delta t^* = -\frac{f'_{j-1}}{f''_{j-1}}.
$$

  - (1) 如果$f'_{j-1} > 0$，在$t = t_{j-1}$处取到极小值点，
  - (2) $\Delta t^* \in [0, t_j - t_{j-1})$，在$t = t_{j-1} + \Delta t^*$处取到极小值，

梯度投影法：计算Cauchy点

- 展开后根据Δt的幂次合并同类项得到

$$
\begin{aligned}
q(x(t)) &= f_{j-1} + f'_{j-1}\Delta + \frac{1}{2} f''_{j-1}(\Delta t)^2,\ \Delta t \in [0, t_j - t_{j-1}] \\
f_{j-1} &= c^T x(t_{j-1}) + \frac{1}{2} x(t_{j-1})^T G x(t_{j-1}), \\
f'_{j-1} &= c^T p^{j-1} + x(t_{j-1})^T G p^{j-1}, \\
f''_{j-1} &= (p^{j-1})^T G p^{j-1}.
\end{aligned}
$$

- 对Δt求导并设为0，可以得到

$$
\Delta t^* = -\frac{f'_{j-1}}{f''_{j-1}}.
$$

  - (1) 如果$f'_{j-1} > 0$，在$t = t_{j-1}$处取到极小值点，
  - (2) $\Delta t^* \in [0, t_j - t_{j-1})$，在$t = t_{j-1} + \Delta t^*$处取到极小值，
  - (3) 其他情况不存在极小值，继续搜索$[t_j, t_{j+1}]$.

梯度投影法：计算Cauchy点

- 展开后根据Δt的幂次合并同类项得到

$$
\begin{aligned}
q(x(t)) &= f_{j-1} + f'_{j-1}\Delta + \frac{1}{2} f''_{j-1}(\Delta t)^2,\ \Delta t \in [0, t_j - t_{j-1}] \\
f_{j-1} &= c^T x(t_{j-1}) + \frac{1}{2} x(t_{j-1})^T G x(t_{j-1}), \\
f'_{j-1} &= c^T p^{j-1} + x(t_{j-1})^T G p^{j-1}, \\
f''_{j-1} &= (p^{j-1})^T G p^{j-1}.
\end{aligned}
$$

- 对Δt求导并设为0，可以得到

$$
\Delta t^* = -\frac{f'_{j-1}}{f''_{j-1}}.
$$

  - (1) 如果$f'_{j-1} > 0$，在$t = t_{j-1}$处取到极小值点，
  - (2) $\Delta t^* \in [0, t_j - t_{j-1})$，在$t = t_{j-1} + \Delta t^*$处取到极小值，
  - (3) 其他情况不存在极小值，继续搜索$[t_j, t_{j+1}]$.
- 在下一段中，重新计算新的方向得到p^j，并计算f_j, f'_j, f''_j。计算量不大。

梯度投影法：子空间中优化

- 第一步计算得到了Cauchy点后，记为x^c，可以得到相应的活跃集

$$\mathcal{A}(x^c) = \{i | x_i^c = l_i \text{ or } x_i^c = u_i\}.$$

梯度投影法：子空间中优化

- 第一步计算得到了Cauchy点后，记为x^c，可以得到相应的活跃集

$$\mathcal{A}(x^c) = \{i | x_i^c = l_i \text{ or } x_i^c = u_i\}.$$

- 剩下的分量可以通过求解如下子问题系统

梯度投影法：子空间中优化

- 第一步计算得到了Cauchy点后，记为x^c，可以得到相应的活跃集

$$\mathcal{A}(x^c) = \{i | x_i^c = l_i \text{ or } x_i^c = u_i\}.$$

- 剩下的分量可以通过求解如下子问题系统

$$\begin{aligned} \min_x \quad & q(x) = \frac{1}{2} x^T G x + x^T c \\ s.t. \quad & x_i = x_i^c, \quad i \in \mathcal{A}(x^c), \\ & l_i \le x \le u_i, \quad i \notin \mathcal{A}(x^c). \end{aligned}$$

梯度投影法：子空间中优化

- 第一步计算得到了Cauchy点后，记为x^c，可以得到相应的活跃集

$$\mathcal{A}(x^c) = \{i | x_i^c = l_i \text{ or } x_i^c = u_i\}.$$

- 剩下的分量可以通过求解如下子问题系统

$$\begin{aligned} \min_x \quad & q(x) = \frac{1}{2} x^T G x + x^T c \\ s.t. \quad & x_i = x_i^c, \quad i \in \mathcal{A}(x^c), \\ & l_i \le x \le u_i, \quad i \notin \mathcal{A}(x^c). \end{aligned}$$

- 我们并不精确求解上述子问题。因为针对不等式约束问题的难度，几乎与原问题一样。

梯度投影法：子空间中优化

- 第一步计算得到了Cauchy点后，记为x^c，可以得到相应的活跃集

$$\mathcal{A}(x^c) = \{i | x_i^c = l_i \text{ or } x_i^c = u_i\}.$$

- 剩下的分量可以通过求解如下子问题系统

$$\begin{aligned} \min_x \quad & q(x) = \frac{1}{2} x^T G x + x^T c \\ s.t. \quad & x_i = x_i^c, \quad i \in \mathcal{A}(x^c), \\ & l_i \leq x \leq u_i, \quad i \notin \mathcal{A}(x^c). \end{aligned}$$

- 我们并不精确求解上述子问题。因为针对不等式约束问题的难度，几乎与原问题一样。
- 事实上，我们只需要寻找一个可行的x^+,满足 $q(x^+) \leq q(x^c)$即可。

梯度投影法：子空间中优化

- 第一步计算得到了Cauchy点后，记为x^c，可以得到相应的活跃集
$$\mathcal{A}(x^c)=\{i|x_i^c=l_i \text{ or } x_i^c=u_i\}.$$
- 剩下的分量可以通过求解如下子问题系统
$$\begin{aligned}\min_x \quad & q(x)=\frac{1}{2}x^TGx+x^Tc\\ s.t. \quad & x_i=x_i^c, \quad i\in\mathcal{A}(x^c),\\ & l_i\le x\le u_i, \quad i\notin\mathcal{A}(x^c).\end{aligned}$$
- 我们并不精确求解上述子问题。因为针对不等式约束问题的难度，几乎与原问题一样。
- 事实上，我们只需要寻找一个可行的x^+,满足 $q(x^+)\le q(x^c)$即可。
- 一个策略是介于取最简单$x^+=x^c$ 和 精确求解子问题系统中间的方法。可以用CG法求解 上述等式约束优化问题，只要满足不等式就停止。

梯度投影法：子空间中优化

- 第一步计算得到了Cauchy点后，记为x^c，可以得到相应的活跃集
$$\mathcal{A}(x^c) = \{i | x_i^c = l_i \text{ or } x_i^c = u_i\}.$$
- 剩下的分量可以通过求解如下子问题系统
$$\begin{aligned} \min_x \quad & q(x) = \frac{1}{2} x^T G x + x^T c \\ s.t. \quad & x_i = x_i^c, \quad i \in \mathcal{A}(x^c), \\ & l_i \le x \le u_i, \quad i \notin \mathcal{A}(x^c). \end{aligned}$$
- 我们并不精确求解上述子问题。因为针对不等式约束问题的难度，几乎与原问题一样。
- 事实上，我们只需要寻找一个可行的x^+,满足 $q(x^+) \le q(x^c)$即可。
- 一个策略是介于取最简单$x^+ = x^c$ 和 精确求解子问题系统中间的方法。可以用CG法求解 上述等式约束优化问题，只要满足不等式就停止。
- 或者是不用考虑不等式约束，求解后直接投影到可行区域内。

梯度投影法算法实现

Algorithm 3: Gradient Projection Method for QP

计算一个可行的初始点x_0;
for $k = 0, 1, 2, \cdots$
  if x_k 满足KKT条件
    stop with solution $x^* = x_k$;
  Set $x = x_k$ and find the Cauchy point x^c;
  Find an approximate solution x^+, such that $q(x^+) \le q(x^c)$;
    and x^+ is feasible;
  $x_{k+1} \leftarrow x^+$;
end (for)

梯度投影法

- 梯度投影法原则上也可应用于一般线性约束，但需要的计算量更大。

梯度投影法

- 梯度投影法原则上也可应用于一般线性约束，但需要的计算量更大。
- 例如，当线性约束变成$a_i^T x \geq b_i$，对于给定的$\bar{x}$需要求解如下的子问题

$$\max_x \|x - \bar{x}\| \quad \text{subject to } a_i^T x \geq b_i, \text{ for all } i \in \mathcal{I}.$$

梯度投影法

- 梯度投影法原则上也可应用于一般线性约束，但需要的计算量更大。
- 例如，当线性约束变成$a_i^T x \geq b_i$，对于给定的$\bar{x}$需要求解如下的子问题

$$\max_x \|x - \bar{x}\| \quad \text{subject to } a_i^T x \geq b_i, \text{ for all } i \in \mathcal{I}.$$

- 求解这个子问题的难度几乎与原问题相当，所以在这种情况下很少使用梯度投影法。

THANKS FOR YOUR ATTENTION