

科学计算

第二次作业

2021 年 3 月 15 日

1. 已知函数 $y = f(x)$ 的观测数据为 $f(1) = 1, f(2) = 1, f(4) = 2$, 试以 1, 2, 4 为基点的 Lagrange 插值公式, 求 $f(1.5)$ 的近似值。
 2. 设 x_0, x_1, \dots, x_n 为 $n+1$ 个相异的插值点, $l_i(x), i = 0, 1, 2, \dots, n$ 为 Lagrange 基本多项式, 证明
 - (a) $\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1$;
 - (b) $\sum_{i=0}^n x_i^j l_i(x) = x^j, j = 1, 2, \dots, n$
 - (c) $\sum_{i=0}^n (x_i - x)^j l_i(x) = 0, j = 1, 2, \dots, n$
 - (d) $\sum_{i=0}^n l_i(0) x_i^j = \begin{cases} 1, j = 0 \\ 0, j = 1, 2, \dots, n \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n, j = n+1 \end{cases}$
 3. 假定要造计算零阶 Bessel 函数 $I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$ 在 $x \in [0, \pi]$ 上的等距数值表, 问如何选取表距 h , 使得利用这个数值表作线性插值时, 误差不超过 10^{-6} ?
 4. 设 $f(x)$ 为 x 的 n 次多项式。证明, 当 $k > n$ 时, 有 $f[x_0, x_1, \dots, x_k] = 0$ 。
 5. **编程计算:** 使用插值公式找出 $f(x) = e^{x^2}$ 的 10 阶插值多项式 $P_{10}(x)$, 其中插值点为 $x_i = 0.2i - 1, i = 0, 1, \dots, 10$, 利用插值公式, (1) 计算 $P_{10}(-0.56), P_{10}(0.15)$ 和 $P_{10}(0.98)$ 。(2) 使用插值误差公式找出当 $x = -0.56, x = 0.15, x = 0.98$ 时的误差上界, 相对误差界和实际误差。(3) 分别画出在区间 $[-1, 1]$ 和 $[-2, 2]$ 上实际的插值误差 $P_{10}(x) - e^{x^2}$ (取 100 个等距区间)。
- 要求:** 插值部分的代码需要提供, $f(x) = e^{x^2}$ 的高阶导数也可以编程算出, 但无需提供代码。