第八章 解线性方程组的迭代法

- 大稀疏方程组适用迭代法
- 常用迭代法
- 迭代法收敛性
- 误差估计
- 收敛速率

大稀疏方程组

- 线性方程组$Ax = b$
  - 大稀疏矩阵:非零元素极少
  - 大稀疏方程组:非零系数极少
    - 微分方程离散化
    - 结构分析
    - 网络排名
- 大稀疏方程组更适用迭代法求解
  - 直接法:用有限步计算得到准确解
  - 迭代法:给出一个近似解序列

迭代法

- 线性方程组

$$Ax = b$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- 迭代法
  - 给出一个近似解序列：$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$，$k = 0,1,2,\cdots$
    （一阶线性定常迭代法）
  - 收敛性：$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$，其中$x^*$为方程的解
  - 误差估计：$||x^{(k)} - x^*||$
  - 收敛速率：$\left|\left|x^{(k+1)} - x^*\right|\right| = r||x^{(k)} - x^*||$

Jacobi迭代法算例

- 用Jacobi迭代法解线性方程组
- 例1.方程组

$$\begin{cases} 10\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} - 2\boldsymbol{x_3} = 7.2 \\ -\boldsymbol{x_1} + 10\boldsymbol{x_2} - 2\boldsymbol{x_3} = 8.3 \\ -\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} + 5\boldsymbol{x_3} = 4.2 \end{cases}$$

化成

$$\boldsymbol{x_1} = 0.1\boldsymbol{x_2} + 0.2\boldsymbol{x_3} + 0.72$$
$$\boldsymbol{x_2} = 0.1\boldsymbol{x_1} + 0.2\boldsymbol{x_3} + 0.83$$
$$\boldsymbol{x_3} = 0.2\boldsymbol{x_1} + 0.2\boldsymbol{x_2} + 0.84$$

任取初始近似$\boldsymbol{x}^{(0)}$,对$k = 0,1,2,\ldots$计算

$$x_1^{(k+1)} = 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.72$$
$$x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.83$$
$$x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)} + 0.84$$

直至$||x^{(k+1)} - x^k|| \leq \varepsilon$,预定的精度,例如$5 \times 10^{-5}$

Jacobi迭代法算例

- 计算结果

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0	0	0
1	0.720000000000	0.830000000000	0.840000000000
2	0.971000000000	1.070000000000	1.150000000000
3	1.057000000000	1.157100000000	1.248200000000
4	1.085350000000	1.185340000000	1.282820000000
5	1.095098000000	1.195099000000	1.294138000000
6	1.098337500000	1.198337400000	1.298039400000
7	1.099441620000	1.199441630000	1.299334980000
8	1.099811159000	1.199811158000	1.299776650000
9	1.099936445800	1.199936445900	1.299924463400
10	1.099978537270	1.199978537260	1.299974578340
11	1.099992769394	1.199992769395	1.299991414906

Jacobi迭代法

- 线性方程组(1) $Ax = b$
- 化成(2) $x = Bx + g$

从第一个方程解出x_1,第二个方程解出x_2,…,得

$$x_1 = b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \cdots + b_{1n}x_n + g_1$$
$$x_2 = b_{21}x_1 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n + g_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{n,n-1}x_{n-1} + g_n$$

- 迭代

任取初始近似$x^{(0)}$,对$k = 0,1,2,\ldots$ 计算

$$x_1^{(k+1)} = b_{12}x_2^{(k)} + b_{13}x_3^{(k)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k)} + g_1$$
$$x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k)} + b_{23}x_3^{(k)} + \cdots + b_{2n}x_n^{(k)} + g_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k)} + b_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + b_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} + g_n$$

直至$||x^{(k+1)} - x^k|| \le \varepsilon$,预定的精度.

Jacobi迭代法矩阵关系

- 线性方程组
  (1) $Ax = b$
- 化成
  (2) $x = Bx + g$
- 迭代
  $x^{k+1} = Bx^{(k)} + g$
- 迭代矩阵:$B = L + U$

$$B = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \frac{a_{31}}{a_{33}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & \frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ & & & \ddots & \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- $\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathrm{U} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{3n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

Gauss-Seidel迭代法算例

- 用G-S迭代法解线性方程组
- 例2方程组

$$
\begin{aligned}
10x_1 - x_2 - 2x_3 &= 7.2 \\
-x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 8.3 \\
-x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4.2
\end{aligned}
$$

化成

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.72 \\
x_2 &= 0.1x_1 + 0.2x_3 + 0.83 \\
x_3 &= 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.84
\end{aligned}
$$

任取初始近似$x^{(0)}$, 对$k = 0,1,2,\ldots$计算

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.72 \\
x_2^{(k+1)} &= 0.1x_1^{(k+1)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.83 \\
x_3^{(k+1)} &= 0.2x_1^{(k+1)} + 0.2x_2^{(k+1)} + 0.84
\end{aligned}
$$

直至$||x^{(k+1)} - x^k|| \le \varepsilon$, 预定的精度, 例如$5 \times 10^{-5}$.

Gauss-Seidel迭代法算例

- 计算结果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	0.72000000000000	0.90200000000000	1.16440000000000
2	1.04308000000000	1.16718800000000	1.28205360000000
3	1.09312952000000	1.19572367200000	1.29777063840000
4	1.09912649488000	1.19946677716800	1.29971865440960
5	1.09989040859872	1.19993277174179	1.29996463606810
6	1.09998620438780	1.19999154765240	1.29999555040804
7	1.09999826484685	1.19999893656629	1.29999944028263

Gauss-Seidel迭代法

- 线性方程组(1)　$Ax = b$

化成(2) $x = Bx + g$

从第一个方程解出x_1, 第二个方程解出x_2, ⋯, 得

$$x_1 = b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \cdots + b_{1n}x_n + g_1$$
$$x_2 = b_{21}x_1 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n + g_2$$
$$\dots\dots$$
$$x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{n,n-1}x_{n-1} + g_n$$

- 迭代

任取初始近似$x^{(0)}$, 对$k = 0,1,2,\dots$ 计算

$$x_1^{(k+1)} = b_{12}x_2^{(k)} + b_{13}x_3^{(k)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k)} + g_1$$
$$x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k+1)} + b_{23}x_3^{(k)} + \cdots + b_{2n}x_n^{(k)} + g_2$$
$$\dots\dots$$
$$x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k+1)} + b_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + b_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + g_n$$

直至$||x^{(k+1)} - x^k|| \le \varepsilon$, 预定的精度.

G-S迭代法矩阵关系

- 线性方程组

  (1) $Ax = b$

- 化成

  (2) $x = Bx + g, B = L + U$

- 迭代

$$x^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + g$$

$$x^{(k+1)} = (I - L)^{-1}Ux^{(k)} + (I - L)^{-1}g$$

- 迭代矩阵:$\mathrm{B}_1 = (I - L)^{-1}U$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ b_{21} & 0 & & & \\ b_{31} & b_{32} & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ & & 0 & \cdots & b_{3n} \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

SOR迭代法

- 线性方程组(1) $Ax = b$
- 化成(2) $x = Bx + g$ （同Jacobi法,G-S法）
- 迭代(这是G-S法改进与推广. $\omega = 1$即G-S法)

任取初始近似$x^{(0)}$, 对$k = 0,1,2,\ldots$计算

$$x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega\left(b_{12}x_2^{(k)} + b_{13}x_3^{(k)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k)} + g_1\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega\left(b_{21}x_1^{(k+1)} + b_{23}x_3^{(k)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k)} + g_2\right)$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n^{(k+1)} = (1-\omega)x_n^{(k)} + \omega\left(b_{n1}x_1^{(k+1)} + b_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + b_{n'n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + g_n\right)$$

直至$||x^{(k+1)} - x^k|| \le \varepsilon$,预定的精度.($\omega$, 参数,$0 < \omega < 2$)

矩阵表示 $x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + g)$

- 迭代矩阵:$B_\omega = (I-\omega L)^{-1}(1-\omega)I + \omega U$
- SOR（successive over-relaxation）

SOR迭代法算例

- 用G-S迭代法解线性方程组
- 例3方程组

$$10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7.2$$
$$-x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 8.3$$
$$-x_1 - x_2 + 5x_3 = 4.2$$

化成

$$x_1 = 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.72$$
$$x_2 = 0.1x_1 + 0.2x_3 + 0.83$$
$$x_3 = 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.84$$

任取初始近似$x^{(0)}$, 对$k = 0,1,2,\ldots$计算

$$x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega\left(0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.72\right)$$
$$x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega\left(0.1x_1^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.83\right)$$
$$x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \omega\left(0.2x_1^{(k+1)} + 0.2x_2^{(k+1)} + 0.84\right)$$

直至$||x^{(k+1)} - x^k|| \le \varepsilon$, 预定的精度, 例如$5 \times 10^{-5}$.

SOR迭代法算例

- 计算结果

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	0.756000000000000	0.950880000000000	1.240444800000000
2	1.078535808000000	1.197695667840000	1.297986369926400
3	1.100408392407744	1.199735235495357	1.300130843363331
4	1.099979257212925	1.200038537338889	1.299997194687714
5	1.100004494444357	1.199997955934133	1.300000654845097
6	1.099999698168336	1.200000208028439	1.299999947559068

迭代矩阵

- 一阶线性定常迭代
  - 两次近似有关系 $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + f$
  - 称M为迭代矩阵
  - Jacobi迭代法
    - $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$
    - 迭代矩阵$B = L + U$
  - Gauss-Seidel迭代法
    - $x^{(k+1)} = (I - L)^{-1}Ux^{(k)} + (I - L)^{-1}g$
    - 迭代矩阵$B_1 = (I - L)^{-1}U$
  - SOR迭代法
    - $x^{(k+1)} = (I - \omega L)^{-1}\Big(\big((1-\omega)I + \omega U\big)x^{(k)} + \omega g\Big)$
    - 迭代矩阵$B_\omega = (I - \omega L)^{-1}\big((1-\omega)I + \omega U\big)$

迭代收敛性

- 收敛充要条件
  - 对任何初值$x^{(0)}$, 迭代格式$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + f$确定的序列$\{x^{(k)}\}$收敛并且极限与初值无关的充分必要条件是迭代矩阵的谱半径小于1, 即$\rho(M) < 1$.

  - 三个算例皆收敛
    - $\rho(B) = 0.337\ldots$
    - $\rho(B_1) = 0.125\ldots$
    - $\rho(B_\omega) = 0.086\ldots$

收敛性判定

- 计算迭代矩阵特征值并确定谱半径
  - 例1.
    - −0. 1
    - 0. 33722813232690
    - −0. 23722813232690
  - 例2
    - 0
    - 0. 12579720807237
    - −0. 03179720807237
  - 例3
    - −0. 086⋯
    - 0. 020⋯± 0. 032⋯i

$$\det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda & -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & \lambda & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 0.09\lambda - 0.008$$

$$= (\lambda + 0.1)(\lambda^2 - 0.1\lambda - 0.08)$$

$$\det(\lambda I - B_1) = \det(\lambda I - (I - L)^{-1}U)$$

$$= \det(\lambda(I - L) - U)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -0.1 & -0.2 \\ -0.1\lambda & \lambda & -0.2 \\ -0.2\lambda & -0.2\lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 0.094\lambda - 0.004)$$

$$\det(\lambda I - B_\omega)$$

$$= \det\big((\lambda + 1 - \omega)I - \lambda\omega L + \omega U\big)$$

$$= \lambda^3 + 0.0461445\lambda^2 - 0.00281175\lambda + 0.000125$$

误差估计

- 定理
- 如果迭代格式$x_{k+1} = Mx_k + f$的迭代矩阵的范数$\|M\| = q < 1$，则迭代收敛，并且有误差估计：

$$\|x_k - x^*\| \le \frac{q}{1-q}\|x_k - x_{k-1}\| \le \frac{q^k}{1-q}\|x_1 - x_0\|$$

- 常用前一不等式估计当前近似的误差

对角占优阵

- 严格对角优势矩阵
  - 可逆
  - Jacobi法收敛
  - G-S法收敛

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1,2,\cdots,n$$

- 不可约对角优势阵
  - 可逆
  - Jacobi法收敛
  - SOR法$(0 < \omega \leq 1)$收敛

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1,2,\cdots,n$$

至少有一i严格大于.

并且不存在排列阵P，

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$$

SOR收敛性

- 松弛法收敛的必要条件是$0 < \omega < 2$
- 若A是实对称矩阵或Hermite矩阵，对角元为正，则当$0 < \omega < 2$时松弛法收敛的充分必要条件是A正定