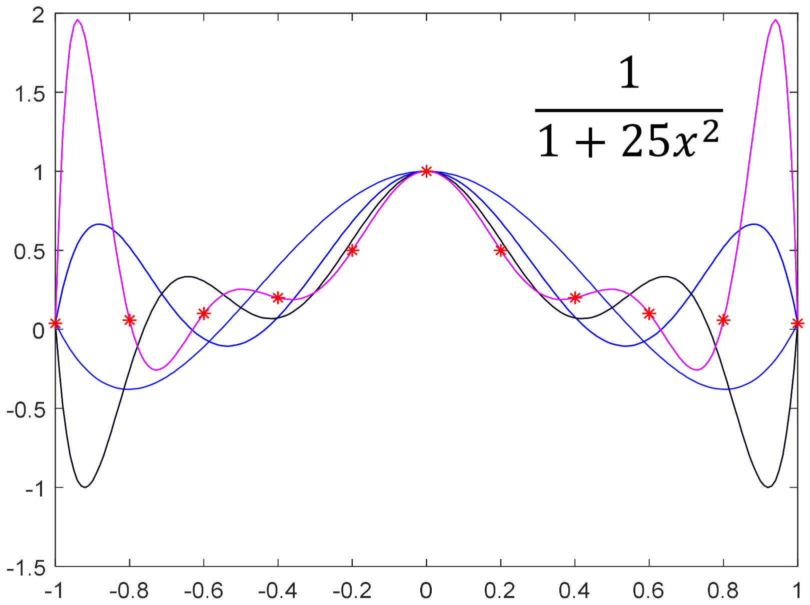
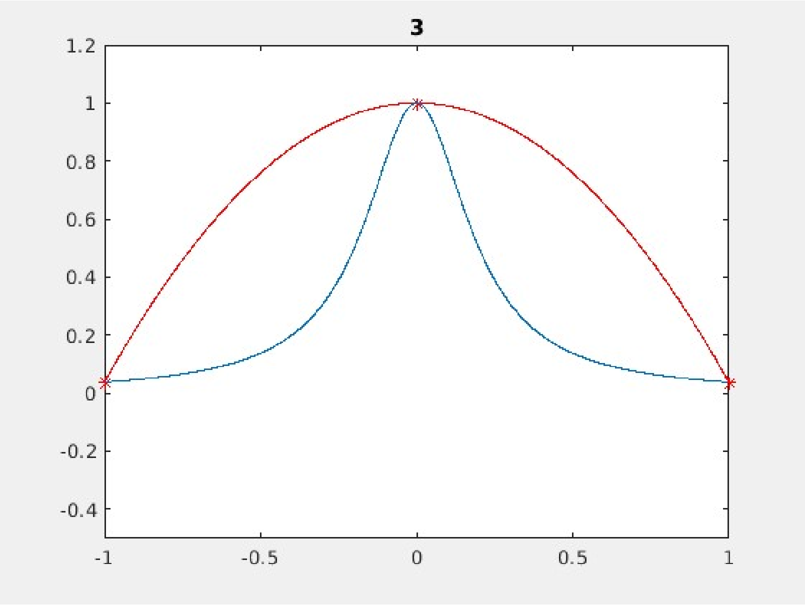
分段线性插值

- 多项式插值的缺点在于n较小时，拟合不够精确，n较大时，容易引起函数震荡，也称过拟合现象

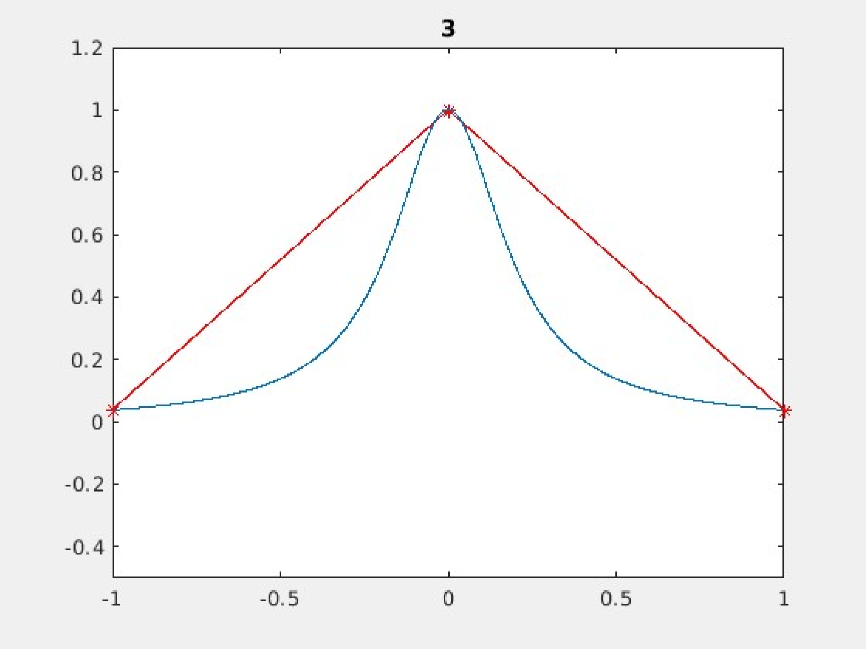


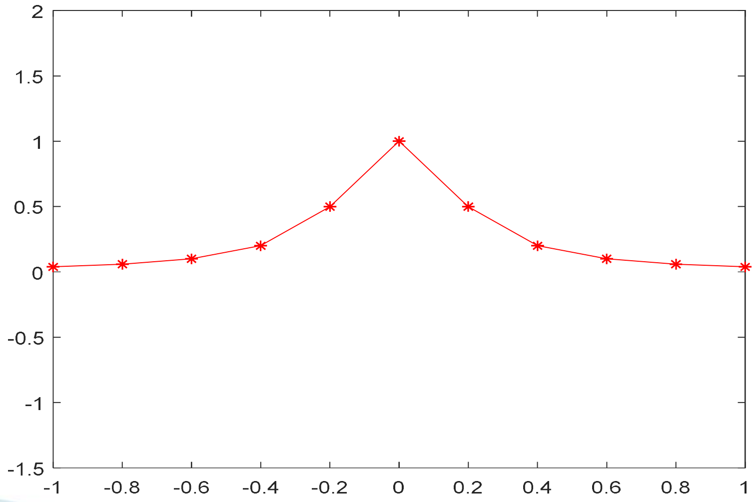


龙格振荡

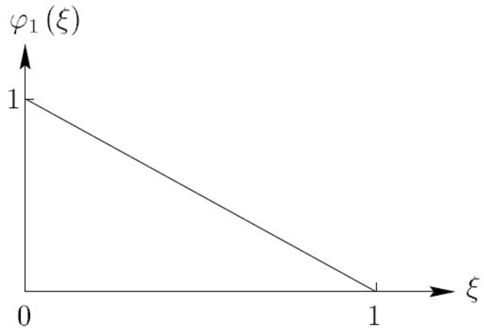
分段线性插值

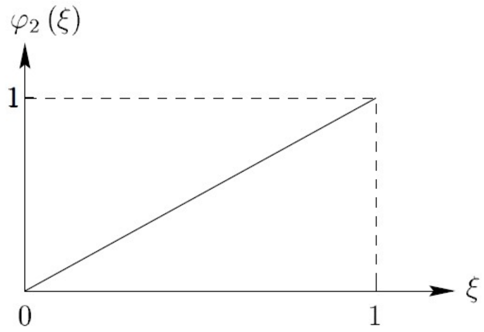
- 分段线性插值
  - 每个小区间上线性插值
  - 整个区间上是连续函数
  - 分段线性插值基函数
  - 用基函数表示插值函数





分段线性插值





- 线性基函数
- 定义

$$\varphi_1(\xi) = 1 - \xi,$$
$$\varphi_2(\xi) = \xi,$$

为[0,1]区间上的线性基函数。

- 任意一个定义在[0,1]区间上且$f(0) = f_1, f(1) = f_2$的线性函数f都可以表示为

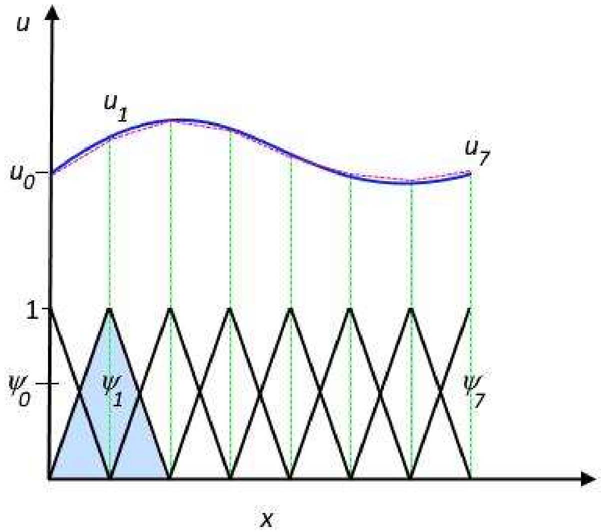
$$f(\xi) = \varphi_1(\xi) f_1 + \varphi_2(\xi) f_2$$

分段线性插值

- 对于区间$[a,b]$上的线性函数$f(x)$，可以利用仿射变换将其变换到$[0,1]$上，
$$\xi = \frac{x-a}{b-a}$$
- 利用这个变换，所有的$[a,b]$上的线性函数$f(x)$且满足$f(a)=f_1, f(b)=f_2$都可以写成
$$f(x) = \varphi_1(\xi(x))f_1 + \varphi_2(\xi(x))f_2$$

分段线性插值

- 类似的，如果$f(x)$是定义在$[a,b]$上的分段线性函数，则可以将每段的函数利用线性基函数$\psi_0,\psi_1,\cdots,\psi_n$表示



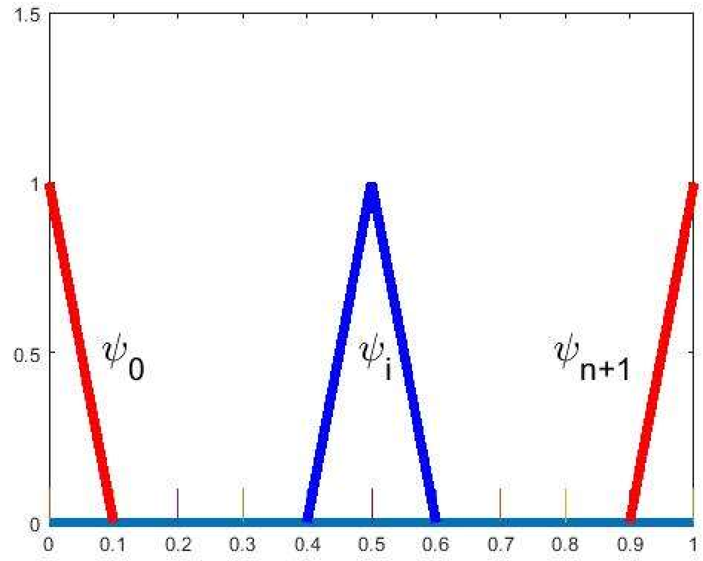
➢ 设区间[0,1]被剖分为

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_N<x_{N+1}=b$$

➢ 构造分段线性基函数$\psi_i(x)$，使得

$$\psi_i(x)=\begin{cases}1, \text{当} x=x_i \text{时} \\ 0, \text{当} x=x_j, j\neq i \text{时}\end{cases}$$

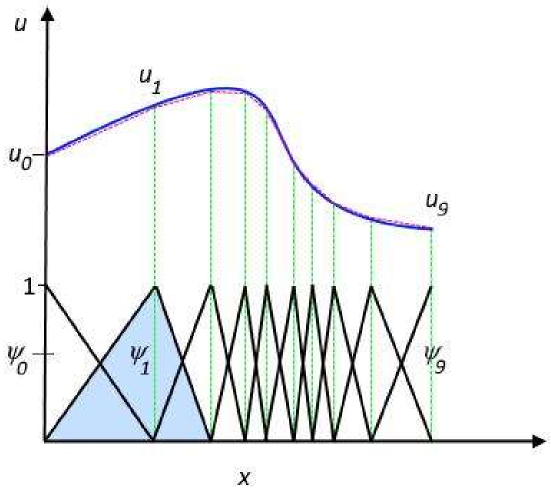
分段线性插值



- 基函数ψ_i的表达式
- $\psi_0(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_0-x_1}, 若 x_0 \le x \le x_1 \\ 0, \quad\quad 其它 \end{cases}$
- $1 \le i \le n$时，$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, 若 x_{i-1} \le x \le x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, 若 x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0, \quad\quad 其它 \end{cases}$
- $\psi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_n}{x_{n+1}-x_n}, 若 x_n \le x \le x_{n+1} \\ 0, \quad\quad 其它 \end{cases}$

分段线性插值

- 注意，对区间$[a,b]$的剖分不一定要是均匀的



分段线性插值

- 误差估计：设$f(x) \in C^2[a,b]$，若$I_h(x)$是$f(x)$在$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b$上的分段线性插值，且$\max\limits_{0 \le i \le N} |x_{i+1} - x_i| = h$，$M = \max\limits_{x} |f''(x)|$，则

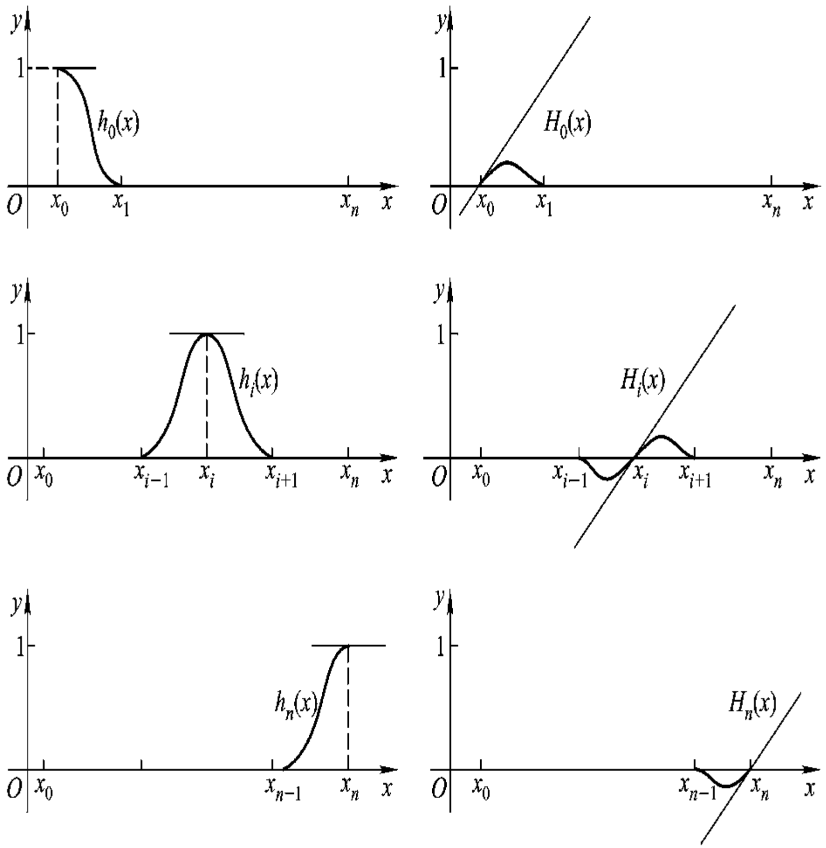
$$\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x) - I_h(x)| \le \frac{M}{2!} \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |(x - x_{i+1})(x - x_i)|$$

或

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - I_h(x)| = \frac{M}{8} h^2$$

分段三次Hermite插值

- 分段三次Hermite插值
  - 每个小区间上两点三次Hermite插值
  - 分段表达式
  - 余项表达式分段表示
  - 分段三次Hermite插值基函数
  - 用基函数表示插值函数
- 分段三次Hermite插值函数一阶导数连续



分段三次Hermite插值

(1) $I_h(x) \in C^1[a,b]$,

(2) $I_h(x_k) = f_k, I_h'(x_k) = f_k', k = 0,1,\cdots,n$,

(3) $I_h(x)$在每个小区间$[x_k, x_{k+1}]$上是一个三次多项式.

$$
\begin{aligned}
I_h(x) = &\left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 f_k \\
&+ \left(1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 f_{k+1} \\
&+ (x - x_k)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 f_k' + (x - x_{k+1})\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 f_{k+1}'.
\end{aligned}
$$

三次样条函数插值

- 三次样条函数插值，即求三次样条函数$s(x)$
  - 满足函数值条件$s(x_i) = y_i, i = 1,2,\cdots,n-1$
  - 每个小区间上三次多项式
  - 整个区间上二阶导数连续

- 三次样条边界条件
  - $\mathrm{s}'(\mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0', \mathrm{s}'(\mathrm{x}_\mathrm{n}) = \mathrm{y}_\mathrm{n}'$
  - $s''(x_0) = y_0'', s''(x_n) = y_n''$ （若 $y_0'' = y_n'' = 0$，自然边界条件）
  - $s'(x_0) = s'(x_n), s''(x_0) = s''(x_n)$ 当$f(x_0) = f(x_n)$（周期边界条件）

三次样条插值函数

- 三次样条插值函数的确定
  - 以一阶导数为参数$s'(x_i)=m_i$
  - 借助分段三次Hermite插值函数表示

$$
\begin{aligned}
s(x)=&\left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 y_i\\
&+\left(1+2\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 y_{i+1}\\
&+(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 m_i\\
&+(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 m_{i+1}
\end{aligned}
$$

$x_i\le x\le x_{i+1}, i=0,1,\cdots,n-1$记$h_i=x_{i+1}-x_i$

三次样条插值函数

- 由二阶导数连续$s''(x_i-0)=s''(x_i+0), i=1,2,\cdots,n-1$ 得三对角方程

- $$s'(x)=\frac{6}{h_i^2}\left(\frac{1}{h_i}(x-x_{i+1})^2+(x-x_{i+1})\right)y_i+\frac{6}{h_i^2}\left((x-x_i)-\frac{1}{h_i}(x-x_i)^2\right)y_{i+1}$$
  $$+\frac{1}{h_i}\left(\frac{3}{h_i}(x-x_{i+1})^2+2(x-x_{i+1})\right)m_i-\frac{1}{h_i}\left(2(x-x_i)-\frac{3}{h_i}(x-x_i)^2\right)m_{i+1}$$

- $$s''(x)=\frac{6}{h_i^2}\left(1+\frac{2}{h_i}(x-x_{i+1})\right)y_i+\frac{6}{h_i^2}\left(1-\frac{2}{h_i}(x-x_i)\right)y_{i+1}+$$
  $$\frac{2}{h_i}\left(\frac{3}{h_i}(x-x_{i+1})+1\right)m_i-\frac{2}{h_i}\left(1-\frac{3}{h_i}(x-x_i)\right)m_{i+1}\qquad x_i\le x\le x_{i+1}$$

- $$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=d_i, i=1,2,\cdots,n-1$$
  $$\lambda_i=\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i},\mu_i=\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i},d_i=3\left(\lambda_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}+\mu_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right)$$

三次样条插值函数

- 强加边条件
  - Ⅰ类 $m_0 = y_0', m_n = y_n'$
  - Ⅱ类 $2m_0 + m_1 = 3(y_1 - y_0)h_0 - \frac{h_0}{2}s''(x_0)$（记为$d_0$）

    $m_{n-1} + 2m_n = 3(y_n - y_{n-1})h_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{2}s''(x_n)$（记为$d_n$）
  - Ⅲ类 $m_0 = m_n, \lambda_n m_{n-1} + 2m_n + \mu_n m_{n+1} = d_n$
- 解所得三对角方程组确定m_i（以Ⅱ类边条件为例） *追赶法*
  - $$A_0 = -\frac{\mu_0}{2}(\mu_0 = 1), B_0 = \frac{d_0}{2}$$

    对于$i = 1,2,\cdots,n$计算

    $$A_i = -\frac{\mu_i}{2+\lambda_i A_{i-1}}, B_i = \frac{d_i - \lambda_i B_{i-1}}{2+\lambda_i A_{i-1}}, m_n = B_n = \frac{d_n - \lambda_n B_{n-1}}{2+\lambda_n A_{n-1}}$$

  - 对于$i = n-1,\cdots,2,1,0$ 计算

    $$m_i = m_{i+1}A_i + B_i$$

三次样条插值函数

- 算法
  1. 计算 λ_i, μ_i, d_i
  2. 解三对角方程组得m_i
  3. 将m_i 代入$s(x)$表达式，需要时可求值

- 三次样条插值函数的误差
  - 设 $f(x) \in C^4[a,b]$，$S_\Delta(x)$ 是给定划分$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 下 $f(x)$ 的三次样条插值函数．则 $\max\limits_{0 \le i \le N} |x_{i+1} - x_i| = h \to 0$时，对任一$x \in [a,b]$，有

$$\left| f^{(i)}(x) - S_\Delta^{(i)}(x) \right| \le C_i(\xi) h^{4-i}, i = 0,1,2$$

其中$C_i (i = 0,1,2)$

三次样条插值函数

例： 设$f(x)$在[27.7,30]上有定义,在节点上的函数值：

$$x_0=27.7，x_1=28，x_2=29，x_3=30，$$

$$f_0=4.1，f_1=4.3，f_2=4.1，f_3=3.0,$$

试求满足边界条件$s'(x_0)=3.0, s'(x_n)=-4.0$的三次样条插值函数.

解： $$\mu_1=\frac{h_0}{h_0+h_1}=\frac{0.3}{0.3+1}=\frac{3}{13},\lambda_1=\frac{10}{13},$$

$$\mu_2=\frac{h_1}{h_1+h_2}=\frac{1}{2},\lambda_2=\frac{1}{2},$$

$$d_1=3\left(\frac{\lambda_1}{h_0}(f_1-f_0)+\frac{\mu_1}{h_1}(f_2-f_1)\right)=3\left(\frac{10}{13}\frac{0.2}{0.3}-\frac{3}{13}\frac{0.2}{1}\right)=1.4,$$

$$d_2=3\left(\frac{\lambda_2}{h_1}(f_2-f_1)+\frac{\mu_2}{h_2}(f_3-f_2)\right)=3\left(-\frac{1}{2}\frac{0.2}{1}-\frac{1}{2}\frac{1.1}{1}\right)=-1.95.$$

三次样条插值函数

- 方程为

$$\begin{cases} \dfrac{10}{13}\times 3+2m_1+\dfrac{3}{13}m_2=1.4 \\ \dfrac{1}{2}m_1+2m_2+\dfrac{1}{2}\times(-4)=-1.95 \end{cases}$$

- 推出：

$$m_1=-0.470297029702970,$$
$$m_2=0.142574257425743.$$

数值微分

- 数值微分就是用函数值的线性组合近似函数在某点的导数值，由导数的定义，差商近似导数，得到数值微分公式

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \quad \text{(中点公式)}$$

插值型求导公式

已知函数$y=f(x)$的节点上的函数值$y_i=f(x_i)\ (i=0,1,\cdots,n)$，

建立插值多项式$P(x)$.

取 $$f'(x)\approx P'(x),$$

统称为插值型求导公式

余项

$$f'(x)-P_n'(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x)+\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{(n+1)}(\xi),$$

其中$\xi\in(a,b),\omega_{n+1}(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$.

$$\Rightarrow\qquad f'(x_k)-P_n'(x_k)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x_k).$$

插值型求导公式

下面考虑在等距节点时节点上的导数值.

1. 两点公式

$$P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1),$$

$$P_1'(x)=\frac{1}{h}[-f(x_0)+f(x_1)],$$

$$P_1'(x_0)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)],\ P_1'(x_1)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)].$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]-\frac{h}{2}f''(\xi),\quad f'(x_1)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]+\frac{h}{2}f''(\xi).$$

插值型求导公式

- 三点公式
- $P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$
- $P_2(x_0+th)=\frac{1}{2}(t-1)(t-2)f(x_0)-t(t-2)f(x_1)+\frac{1}{2}t(t-1)f(x_2).$
- $P_2'(x_0+th)=\frac{1}{2h}[(2t-3)f(x_0)-(4t-4)f(x_1)+(2t-1)f(x_2)].$
- $P_2'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)],$
- $P_2'(x_1)=\frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)],$
- $P_2'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)].$

插值型求导公式

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi),$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]-\frac{h^2}{6}f'''(\xi),$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi).$$

高阶导数公式

$$f^{(k)}(x)\approx P_n^{(k)}(x),\quad k=1,2,\cdots.$$

如： $$P_2''(x_0+th)=\frac{1}{h^2}[f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)],$$

当$x_0\neq x_1$时，误差为$O(h)$，当$x_0=x_1$时，误差为$O(h^2)$

数值微分

- 插值函数的微商作为函数微商的近似
- 常用的等距节点的数值微分公式
  - 一阶导数
    - 一阶精度：$f'(x_0) \approx \frac{y_1-y_0}{h}$， $f'(x_1) \approx \frac{y_1-y_0}{h}$
    - 二阶精度：$f'(x_0) \approx \frac{-y_2+4y_1-3y_0}{2h}$， $f'(x_1) \approx \frac{y_2-y_0}{2h}$
  - 二阶导数：
  - $f'(x_2) = \frac{3y_2-4y_1+y_0}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi)$
  - $f''(x_1) = \frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$
- 步长越小截断误差越小，但舍入误差越大