

科学计算

第六次作业

2021 年 4 月 19 日

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 证明对复合梯形和Simpson公式有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

2. 若 $n \geq 1$, 证明复合梯形公式 T_n 和Simpson公式 S_n 满足

$$S_n(f) = \frac{4}{3}T_{2n}(f) - \frac{1}{3}T_n(f)$$

3. 令 T_n 代表 n 阶Chebyshev多项式, 证明 T_n 满足

(a) $T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}[T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)]$

(b) $T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$

(c) T_n 的最高项系数为 2^{n-1}

4. 设 $P_n(x)$ 为不高于 n 次的多项式。令

$$M = \max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n(x)|.$$

试证明对任意大于1的实数 y , 恒有

$$|P_n(y)| \leq M|T_n(y)|.$$

5. **编程计算:** 利用复合梯形公式计算积分 $I(f) = \int_1^2 e^x \sin x dx$, 要求误差不超过 10^{-6} , 先利用误差公式确定所需的基点个数, 然后编程计算并把计算的结果与准确值比较。

6. **编程计算:** 试用逐次半分抛物线法计算积分

$$I = \int_1^3 e^x \sin x dx.$$

要求 $|S_{2m} - S_m| \leq 10^{-8}$.