

# 科学计算

## 第七次作业：实验作业

2021 年 4 月 26 日

注意事项：实验报告必须包含：1.问题；2.数学理论和算法；3.程序；4.结果；5.结论或讨论。

利用以下方法，分别计算积分

$$I_c = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = 1.809048475800\dots, \quad (1)$$

$$I_s = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = 0.620536603446\dots \quad (2)$$

根据和真实值的对比，探讨各种方法的优劣。

1. 利用 $n$ 个等分区间的复化梯形公式计算(1)，区间长度为 $h = 1/n$ ，第一个区间 $[0, h]$ 的左端点 $x = 0$ 的函数值用0代替，其中 $n = 100 : 100 : 1000$ (即从 $n=100$ 开始，每次增加100个点，直到1000个点)。
2. 首先推导下列带权的Newton-Cotes公式，

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx \approx Af(0) + Bf(1) \quad (3)$$

找出 $A, B$ 使得公式(3)的代数精度为1。然后利用 $n$ 个等分区间的复化梯形公式计算(1)，区间长度为 $h = 1/n$ ，但第一个区间 $[0, h]$ 使用带权的Newton-Cotes公式(3)计算，其中 $n = 100 : 100 : 1000$ 。

3. 对积分(1)先利用变量代换 $x = t^2$ ，然后再利用 $n$ 个等分区间的复化梯形公式计算变换后的积分，其中 $n = 20 : 20 : 200$ 。
4. 承接上题，利用Gauss-Legendre积分计算变换后的积分，其中 $n = 1 : 1 : 5$ 。
5. 首先推导正交多项式 $\{p_k(x), k = 0, 1, 2, \dots, n\}$ ，其中 $p_k(x)$ 是首项系数为1的 $k$ 次多项式，使得

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} p_k(x) p_j(x) dx = 0, j \neq k \quad (4)$$

利用多项式 $\{p_k(x)\}$ ，推导出相应的Gauss型求积公式（称为Gauss-Joacbi积分），然后计算积分(1)，其中 $n = 1 : 1 : 5$ 。

**提示：**Gauss-Legendre积分的积分点可以通过课堂PPT里面Legendre多项式，并调用MATLAB里面“roots”命令求多项式的根获得积分点。在获得积分点后，积分系数可以通过求解线性方程获得，这里线性方程求解可直接调用MATLAB的“\”命令。Gauss-Joacbi积分的积分点和积分系数可以先利用正交关系求出多项式，后同理获得。