

科学计算

第十三次作业：实验作业

2021 年 6 月 14 日

注意事项：实验报告必须包含：1.问题；2.数学理论和算法；3.程序；4.结果；5.结论或讨论。

考虑方程

$$x = e^{-x} \quad (1)$$

1. 证明该方程在实轴上有且仅有一个根 α ，且该根在区间 $[0, 1]$ 上。
2. 利用二分法求解该方程，要求计算的精度到达机器精度（MATLAB中常数 eps 代表机器精度）。
3. 利用迭代法 $x_{n+1} = e^{-x_n}$ 求解该方程，初始值 $x_0 = 1$ ，要求计算的精度到达机器精度。
4. 考虑方程的等价形式

$$x = \frac{\omega e^{-x} + x}{1 + \omega} \quad (2)$$

其中 ω 是不为0和-1的任意实数。请给出 ω 的取值范围，使得在这个范围内，由(2)构造的迭代法比(1)的迭代法局部收敛更快（这里需要用到方程(1)的解 α ）。并在 ω 的范围中任取一值，令 $x_0 = 1$ ，验证算法是否比前一个迭代法更快到达机器精度，即迭代次数是否更少。

5. 承接上题，找到一个最优的 ω ，使得迭代次数达到最快，并用程序验证（ $x_0 = 1$ ）。这里需要用到方程的解 α ，可以用上面计算的 α 的近似值代替。

综合以上结果，讨论各迭代法优劣。