非线性方程解法

- 局部收敛的阶
- 对分区间套法
- 迭代法
- Newton法
- 弦位法
- 非线性方程组Newton法和拟Newton法
- 最速下降法

非线性方程求解

- 求非线性函数方程$f(x)=0$根(求非线性函数$f(x)$零点)ξ
- 解法
  - 迭代法:给出一个近似解序列
  - 收敛判据可用误差,相对误差或函数值接近零否
- 局部收敛
  - 在准确解附近给出一个收敛的近似解序列$\{x_n\}$
  - p阶收敛:若$x_n \to \xi$并且存在$p \geq 1, c > 0$,使

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\xi|}{|x_n-\xi|^p} = c$$

    - 线性收敛$p=1(c<1)$
    - 超线性收敛$p>1$

对分区间套法

- 根据
  - 函数$f(x)$在$[a,b]$连续，$f(a)f(b)<0$则在$[a,b]$内有根
- 解法
  - 迭代:取其中点为近似根,记为x_0，其误差限$\frac{b-a}{2}$.若误差符合要求或其函数值接近零x_0便可接受.
  - 否则取a,b中函数值与x_0的函数值异号者跟x_0构成新的求根区间,记为$[a_1,b_1]$.
  - 重复以上做法得新近似根x_1,...这样不断将区间分半,得到一系列区间$[a_n,b_n]$,和近似根(区间中点)$x_n, n=1,2,3,\ldots$
  - x_n误差为$\frac{b-a}{2^{n+1}}$,区间$[a_n,b_n]$长的一半，$x_n\to\xi$.
  - 有根区间以$\frac{1}{2}$的比率缩小，我们也称它是线性收敛的.

对分区间套法算例

- 例1.求$f(x)=x^3-x-1$在[1,1.5]的零点.$f(1)<0, f(1.5)>0$.

n	x_n	$f(x_n)$	有根区间	误差限
0	1.25	-	[1.25,1.5]	0.5/2
1	1.375	+	[1.25,1.375]	$0.5/2^2$
2	1.3125	-	[1.3125,1.375]	$0.5/2^3$
3	1.34375	+	[1.3125,1.34375]	$0.5/2^4$
4	1.3281	+	[1.3125,1.3281]	$0.5/2^5$
5	1.3203	-	[1.3203,1.3281]	$0.5/2^6$
6	1.3242			$0.5/2^7$

  - $x_6=1.3242$,误差限0.00390625(真值$\xi=1.3247\ldots$,误差$e^*=-0.0005\ldots$).有四位有效数字.实际上x_5就有四位有效数字了.

迭代法

- 尝试迭代计算： $n = 0,1,2,\ldots$
  - $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$， $x_0 = 1$
  - $x_{n+1} = 3x_n - 21x_n^2 + 49x_n^3$ ， $x_0 = 0.1$
- 求非线性连续函数$f(x)$零点ξ
  - 化成$\xi = \phi(\xi), x = \phi(x)$
  - 迭代
    - 取初始近似x_0
    - 计算

$$x_{n+1} = \phi(x_n), n = 0,1,2,\ldots$$

直到$|x_{n+1} - x_n| \le \epsilon$ 或 $\left(\frac{|x_{n+1} - x_n|}{x_{n+1}} \le \epsilon\right)$

  - 若$x_n \to \xi$,则$\xi = \phi(\xi)$, $\phi(x)$的不动点.故亦称不动点迭代法

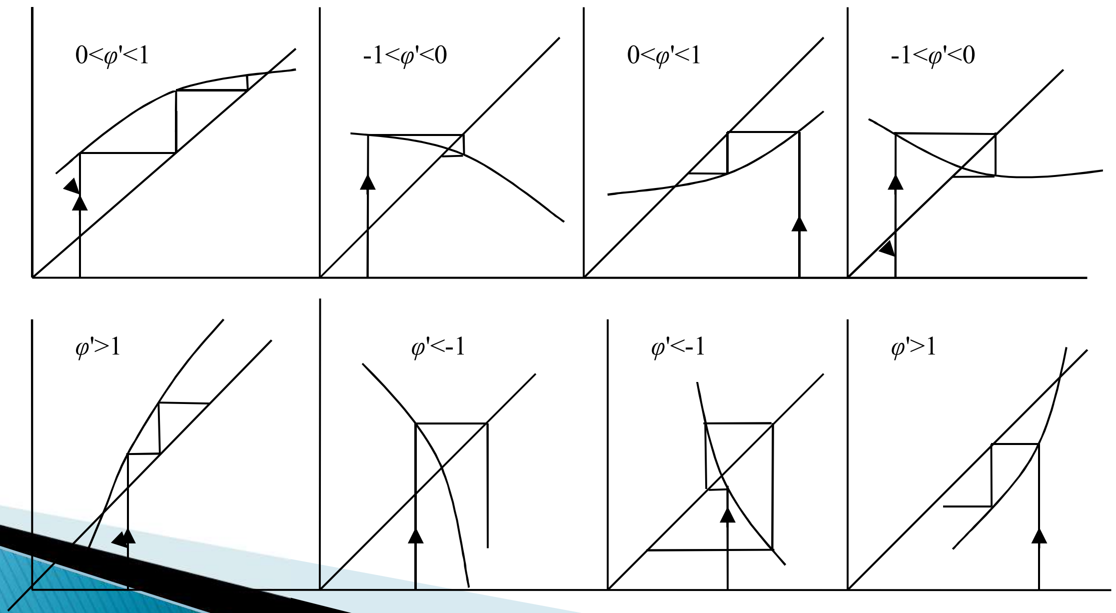
迭代法算例

- 例2 求$f(x)=x^3+2x^2+10x+20$在[1,1.5]的零点.
  - 取$x_0=1$,迭代公式为$x_{n+1}=2-\frac{x_n^3+2x_n^2}{10}$,则算得1.7,0.9307,1.74614,0.857796, ...发散.
  - 取$x_0=1$, 迭代公式为$x_{n+1}=\frac{20}{x_n^2+2x_n+10}$,计算结果如表,收敛于根$\xi=1.368\,808\,107\,821\,\cdots$

n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	1.538 461 538	8	1.368 241 023	15	1.368 810 032	22	1.368 808 101
2	1.295 019 157	9	1.369 059 812	16	1.368 807 254	23	1.368 808 111
3	1.401 825 309	10	1.368 696 397	17	1.368 808 487	24	1.368 808 107
4	1.354 209 390	11	1.368 857 689	18	1.368 807 940	25	1.368 808 108
5	1.375 298 092	12	1.368 786 103	19	1.368 808 182		
6	1.365 929 788	13	1.368 817 874	20	1.368 808 075		
7	1.370 086 003	14	1.368 803 773	21	1.368 808 123		

迭代法几何解释

- 几何解释
  - $x=\phi(x)$的不动点ξ是$y=x$和$y=\phi(x)$两条曲线的交点.迭代从x_0出发向上到达$y=\phi(x)$上点$\left(x_0,\phi(x_0)\right)$,由此点再沿水平线到达$y=x$上点$\left(\phi(x_0),\phi(x_0)\right)$,其横坐标即$x_1$.如此做下去得一条阶梯形或环形折线， 或向交点接近(收敛),或远离交点而去(不收敛).



迭代法收敛性

- 不动点原理

若对任何x, y都有$|\phi(x)-\phi(y)| \leq L|x-y|, L<1$则迭代$x_{n+1}=\phi(x_n)$收敛, 极限$\xi$惟一，是$\phi(x)$的不动点, 并且有估计:

$$|x_n-\xi| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$$

  - 加于$\phi(x)$的条件称Lipshitz条件(L称Lipshitz常数)它强于连续性.实践中常用$|\phi'(x)| \leq L<1$,从画图看出的规律.
  - 这儿$\phi(x)$定义在$(-\infty, \infty)$. 换成$\phi:[a, b] \rightarrow [a, b]$,定理亦成立.
  - 得到误差估计照例偏于保守.可在计算时用估计式:

$$|x_{n+1}-\xi| \leq \frac{L}{1-L}|x_{n+1}-x_n|$$

迭代法收敛性

- 局部收敛性
- 定理：若$\phi(\alpha)=\alpha$，$\phi'(x)$在α附近连续，$|\phi'(x)|<1$,则迭代法$x_{n+1}=\phi(x_n)$局部收敛。即存在$r>0$，在区间$(\alpha-r,\alpha+r)$中任取x_0，迭代法收敛到α。

- 定理：若$\phi(\alpha)=\alpha$，$\phi'(x)$在α附近p阶连续可导，且$\phi'(\alpha)=\phi''(\alpha)=\cdots=\phi^{(p-1)}(\alpha)=0$, $\phi^{(p)}(\alpha)\neq 0$，则迭代法$x_{n+1}=\phi(x_n)$ p阶局部收敛。

收敛性判定

- 讨论例2中迭代的收敛性
  - $\phi(x) = 2 - \frac{x^3+2x^2}{10}, \phi'(1.5) = -1.275, \phi'(1.3) = -1.027$在$[1.3,1.5]$有$|\phi'(x)| > 1$,不收敛.
  - $\phi(x) = \frac{20}{x^2+2x+10}$在$[1,2]$有$0 < |\phi'(x)| < 1$,局部收敛. 实际上$\phi: [1,2] \to [1,2]$.

收敛性改进

- 可以改进迭代法收敛性乃至变发散为收敛
- 松弛法
  - $\lambda_n = \phi'(x_n)(\neq -1)$
  - $\omega_n = (1+\lambda_n)^{-1}$
  - $x_{n+1} = (1-\omega)x_n + \omega_n \phi(x_n),$
- Aitken法
  - $u_{n+1} = \phi(x_n)$
  - $v_{n+1} = \phi(u_{n+1})$
  - $x_{n+1} = x_n - \frac{(u_{n+1}-x_n)^2}{v_{n+1}-2u_{n+1}+x_n} = v_{n+1} - \frac{(v_{n+1}-u_{n+1})^2}{v_{n+1}-2u_{n+1}+x_n}$

松弛法算例

- 例3.同例2，取$x_0=1, \varphi(x)=\frac{20}{x^2+2x+10}, \varphi'(x)=\frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}, \lambda_n=\frac{40(x_n+1)}{\left(x_n^2+2x_n+10\right)^2}, \omega_n=\frac{1}{1+\lambda_n}, x_{n+1}=(1-\omega_n)x_n+\omega_n\varphi(x_n)$

n	x_n	$\varphi(x_n)$	λ_n	ω_n
0	1	1.538 461 538 461 539	0.473 372 781 065 088 7	0.678 714 859 437 751 0
1	1.365 461 847 389 558	1.370 293 834 882 256	0.444 163 999 685 426 5	0.692 442 132 761 808 2
2	1.368 807 719 114 480	1.368 808 280 340 511	0.443 828 367 622 074 7	0.692 603 097 726 192 0
3	1.368 808 107 821 367	1.368 808 107 821 375	0.443 828 328 574 875 3	0.692 603 116 457 097 1
4	1.368 808 107 821 373	1.368 808 107 821 373		

Aitken方法算例

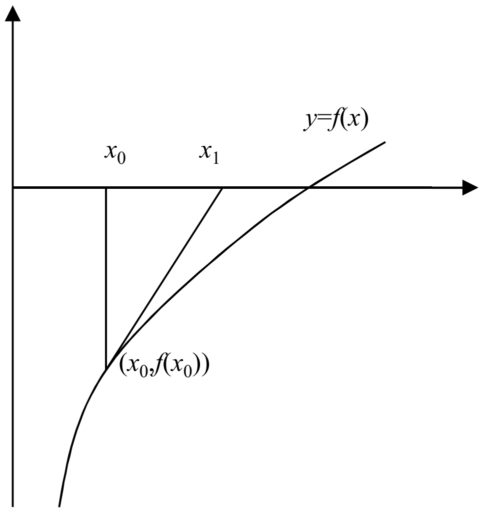
- 例3 (续). 同例2,取$x_0 = 1, \phi(x) = 2 - \frac{(x^3+2x^2)}{10}$.

n	x_n	$x_{n+1}^{(1)}$	$x_{n+1}^{(2)}$
0	1	1.700 000 000 000 000	9.307 000 000 000 003
1	1.333 492 139 113 864	1.407 237 999 442 876	1.325 258 257 766 407
2	1.368 415 439 108 393	1.369 243 724 348 597	1.368 324 625 768 061
3	1.368 808 058 309 165	1.368 808 162 760 807	1.368 808 046 859 809
4	1.368 808 107 821 372	1.368 808 107 821 373	1.368 808 107 821 372

取$x_0 = 1, \phi(x) = \frac{20}{x^2+2x+10}$

n	x_n	$x_{n+1}^{(1)}$	$x_{n+1}^{(2)}$
0	1	1.538 461 538 461 539	1.295 019 157 088 122
1	1.370 813 882 687 234	1.367 918 090 298 850	1.369 203 162 587 276
2	1.368 808 169 944 811	1.368 808 080 249 231	1.368 808 120 058 670
3	1.368 808 107 821 373	1.368 808 107 821 373	1.368 808 107 821 373

Newton法



- 方法
  - 取初始近似x_0
  - 迭代 $n = 0,1,2,\ldots$
    - $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

  直到$|x_{n+1} - x_n| \le \epsilon$和(或) $\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}\right| \le \epsilon_1, |f(x_{n+1})| \le \epsilon_2$
- 导出
  - ‘以线性函数代非线性函数’
    - 在初始近似x_n作Taylor展开

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\eta)(x - x_n)^2}{2}$$

    - 线性部分零点x_{n+1}
  - ‘以直代曲’
    - 由$(x_n, f(x_n))$作$f(x)$的切线
    - 交x轴于x_{n+1}.因此Newton法也叫切线法

Newton法算例

- 例4. 例2,取$x_0 = 1$用Newton法.结果见下表左栏.

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20)/(3x_n^2 + 4x_n + 10)$$

n	Newton 法	弦位法	抛物线法
0	1	1	1
1	1.411 764 705 882 353	1.500 000 000 000 000	1.500 000 000 000 000
2	1.369 336 470 588 235	1.354 430 379 746 836	1.250 000 000 000 000
3	1.368 808 188 617 532	1.368 270 259 654 687	1.368 535 857 721 367
4	1.368 808 107 821 375	1.368 810 350 393 887	1.368 807 906 820 780
5	1.368 808 107 821 373	1.368 808 107 472 217	1.368 808 107 821 681
6	1.368 808 107 821 373	1.368 808 107 821 372	1.368 808 107 821 373
7		1.368 808 107 821 373	1.368 808 107 821 373

Newton法收敛性

- 定理

  Newton迭代法在$f(x) = 0$单根ξ附近是二阶收敛的，并且有

  $|x_{n+1} - \xi| \approx \left|\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\right| |x_n - \xi|^2$

- 注
  - Newton迭代法也可视为不动点迭代法$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
  - 单根的假设是必要的.例如,求$(x-1)^2 = 0$的二重根1.Newton迭代是线性收敛的:

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_n - 1}{2}$$

  - 由$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(\eta)(\xi - x_n)^2}{2}$得$x_{n+1} - \xi = \frac{f''(\eta)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2$据此可推出在$\xi$附近取$x_0$，误差越来越小，是二阶收敛的。由$\varphi(\xi) = \xi, \varphi'(\xi) = 0, \varphi''(\xi) \neq 0$亦可得二阶收敛性.

Newton法变形

- 几个方法
  - 简化Newton法.
    - 为减少计算导数的化费,可只求$f'(x_0)$以后所有导数不另求.这相当于第一次作切线,以后作其平行线.当然,这样收敛要慢些.还可以取折衷方案,隔几步计算一下导数
  - 用差商代导数（弦位法）
    - $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$
      它免除了计算导数

综合除法

- 多项式的情况计算可应用综合除法

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = q(x)(x-c) + r$$

其中 $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ $\quad r = b_n = f(c)$

计算:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ c & & b_0c & b_1c & \cdots & b_{n-2}c & b_{n-1}c \\ \hline & b_0=a_0 & b_1=a_1+b_0c & b_2=a_2+b_1c & \cdots & b_{n-1}=a_{n-1}+b_{n-2}c & b_n=a_n+b_{n-1}c \end{array}$$

又因 $f'(x) = q(x) + q'(x)(x-c)$ $\quad f'(c) = q(c)$

故再对 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ 进行上述过程即得$f'(c)$

例如，设 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$，求 $f(2), f'(2)$

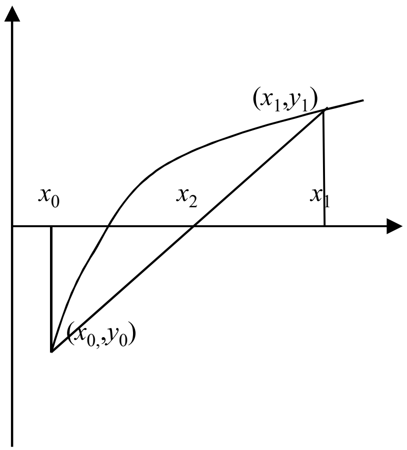
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 10 & -20 \\ 2 & & 2 & 8 & 36 \\ \hline & 1 & 4 & 18 & \underline{16} = f(2) \\ 2 & & 2 & 12 & \\ \hline & 1 & 6 & \underline{30} = q(2) = f'(2) & \end{array}$$

弦位法

- 方法(也叫割线法)
  - 取初始近似x_0, x_1
  - 迭代　　$n = 1,2, \dots$
    - $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

    直到$|x_{n+1} - x_n| \le \epsilon$和(或)

    $\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right| \le \epsilon_1|_1$,　　$|f(x_{n+1})| \le \epsilon_2|$



- 导出
  - ‘以线性函数代非线性函数’

$$f(x) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + \frac{f''(\eta)(x - x_n)(x - x_{n-1})}{2}$$

- 取线性插值函数零点x_{n+1}　‘以直代曲’
- 作弦交x轴于x_{n+1}.

弦位法收敛性

- 定理

弦位法在$f(x)=0$单根ξ附近是$p=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$阶收敛的，并且有

$$|x_{n+1}-\xi| \approx \left|\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\right|^{p-1} |x_n-\xi|^p$$

- 例5. 同例2,弦位法 .$x_0=1, x_1=1.5$, 计算结果见Newton法算例.
- 注:
  - 弦位法较Newton法收敛慢,但每步不必计算导数,总计算量也有可能低于Newton法.因此,弦位法颇具竞争力.
  - 变形:试位法.保证收敛.取二初始值,其上函数值变号.算出新值后,取代与之函数值同号的旧值再算新值.与对分区间套法一样每次迭代所用二值都分居于根的两侧. 是线性收敛的

非线性方程组Newton法

- 二元情况方程

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

- 方法
  - 取初值x_0, y_0
  - 迭代 $n = 0,1,2,\ldots$
    - 解方程组求$\Delta x, \Delta y$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right|_n \Delta x + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right|_n \Delta y = -f_1\Big|_n \\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right|_n \Delta x + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}_n \Delta y = -f_2\Big|_n \end{cases}$$

    - 计算

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x, y_{n+1} = y_n + \Delta y$$

  直至改变量合乎要求
- 导出:Taylor公式线性化

算例

用Newton法解方程组，取初始近似$(1,1)^T$，

$$\begin{cases} f_1(x,y)=x^2+y^2-5=0 \\ f_2(x,y)=(x+1)y-(3x+1)=0 \end{cases} \qquad J=\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y-3 & x+1 \end{bmatrix}$$

准确解$(1,2)^T$

n	x y	$f_1(x,y)$ $f_2(x,y)$	J	
0	1.000 000 000 1.000 000 000	–3.000 000 000 –2.000 000 000	2.000 000 000 –2.000 000 000	2.000 000 000 2.000 000 000
1	1.250 000 000 2.250 000 000	1.625 000 000 0.312 500 000	2.500 000 000 –0.750 000 000	4.500 000 000 2.250 000 000
2	1.000 000 000 2.027 777 778	0.111 882 716 0 0.055 555 555 56	2.000 000 000 –0.972 222 222 2	4.055 555 556 2.000 000 000
3	1.000 194 288 2.000 094 446	$7.664\,046\,324\,8\times10^{-4}$ $-5.378\,537\,450\times10^{-6}$	2.000 388 576 –0.999 905 554 5	4.000 188 891 2.000 194 288
4	1.000 000 002 2.000 000 010	$4.666\,482\,223\times10^{-8}$ $1.834\,736\,629\times10^{-8}$		

非线性方程组Newton法

- 一般情况方程

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ \cdots\cdots \\ f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

- 方法
- **给出**初始近似$x^{(0)} \underset{T}{=} \left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)$
- 对$k=0,1,\dots$
- 计算$J^{(k)},f^{(k)}$
- 解$J^{(k)}\Delta x=-f^{(k)}$求Δx
- 计算新近似$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\Delta x$
- 直到$\|\Delta x\|\le\varepsilon$

$$J^{(k)}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ & \cdots & \cdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_k,$$

$$\Delta x=\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \cdots\\ \Delta x_n\end{bmatrix}, f^{(k)}=\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\\ \cdots\\ f_n\end{bmatrix}_k$$