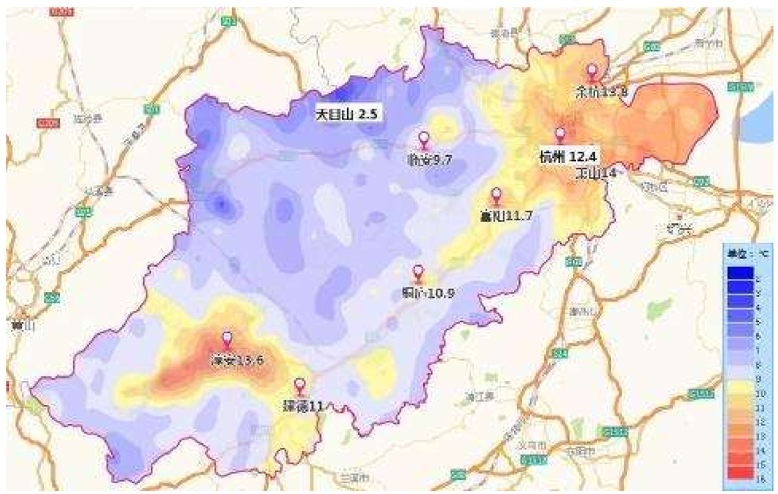
第二章　插值法

- 引言
- 线性插值
- 二次插值
- n次插值
- 分段线性插值
- Hermite插值
- 分段三次Hermite插值
- 三次样条函数
- 三次样条函数插值
- 数值微分



引言

- 问题
  - 已知函数表$y_i = f(x_i)$即n个点$(x_i, y_i), i = 0,1,2,\cdots,n$, 找近似函数$\phi(x)$满足$\phi(x_i) = y_i, i = 0,1,2,\cdots,n$
  - 插值节点（互异）： $x_i, i = 0,1,2,\cdots,n$
  - 插值函数:$\phi(x)$
- 背景
  - 函数表达式太繁不便使用
  - 函数由表给出
- 多项式插值、三角函数插值

线性插值

- 线性插值问题

  已知$y_i = f(x_i), i = 0,1,\cdots,n$

  求 $\phi(x) = a_0 + a_1 x$

  满足 $\phi(x_i) = y_i, i = 0,1$

  - 二元一次方程组 $a_0 + a_1 x_0 = y_0$

    $a_0 + a_1 x_1 = y_1$

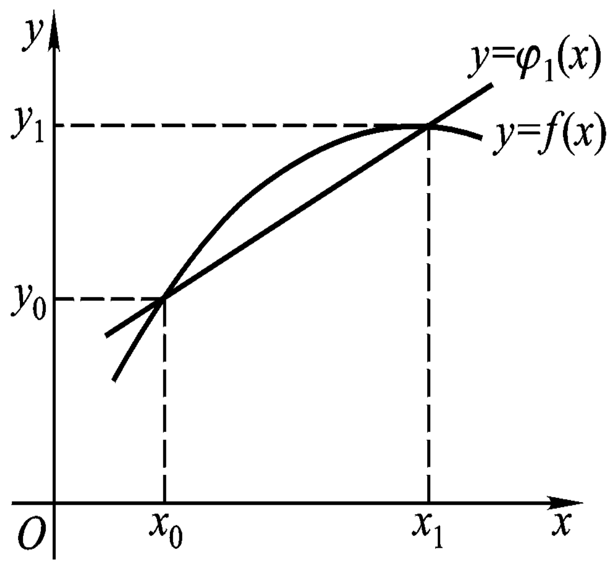
  - 过两点作一直线

线性插值惟一性

- 解的存在惟一性
  - 根据Cramer法则解存在而且惟一

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0 \neq 0$$

  - 几何上过两点有一条且仅有一条直线



线性插值：Newton公式

- 点斜式:Newton公式

$$\phi(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x - x_0\ ) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

  - 一阶均差(差商)

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

  - 均差是对称的：$f[x_1, x_0] = f[x_0, x_1]$
    - 定义可见
    - 都是线性插值函数首项系数(惟一)

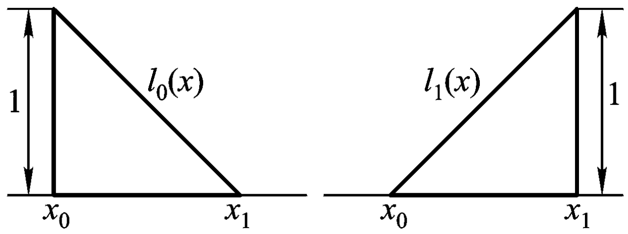
线性插值：Lagrange公式

- 两点式:Lagrange公式

$$\phi(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

  - 线性插值基函数

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$



  - 特解

x_i	x_0	x_1
$l_0(x)$	1	0
$l_1(x)$	0	1

线性插值：Aitken公式

- Aitken公式

$$\phi(x)=\frac{1}{x_0-x_1}\begin{vmatrix} y_0 & x-x_0 \\ y_1 & x-x_1 \end{vmatrix}$$

- 余项定理
  - 设$\phi(x)$是$f(x)$过x_0,x_1的线性插值函数，$f(x)\in C^2[a,b],x_0,x_1,x\in[a,b]$, 则有$\xi\in(a,b)$, 使

$$R(x)=f(x)-\phi(x)=\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)$$

  - 特别，若$x_0\le x\le x_1$, 则有

$$|R(x)|\le\frac{1}{8}(x_1-x_0)^2\max|f''(x)|$$

二次插值

- 二次插值问题
  - 求 $\phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
    满足 $\phi(x_i) = y_i, i = 0,1,2$
  - 三元一次方程组

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0$$
$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1$$
$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2$$

二次插值惟一性

- 解的惟一性
  - 根据Cramer法则解存在而且惟一

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \neq 0$$

  - 由代数基本定理：设$\psi(x)$也是插值函数，则差$h(x) = \phi(x) - \psi(x)$是二次多项式，并有三个零点x_0, x_1, x_2. 由代数基本定理可知$h(x) \equiv 0, \phi(x) \equiv \psi(x)$

二次插值:Newton公式

- Newton公式

$$\phi(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$
$$+f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

  - 二阶均差(差商)

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}$$

  - 对称性:二阶均差自变量任意排列时不变.
因为二阶均差都等于a_2,二次插值函数首项系数惟一.

Newton公式推导

- **推导**

二次插值函数可由一次插值函数加一个二次项:

$$\varphi(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+C(x-x_0)(x-x_1)$$

只要选择 C 使得 $\varphi(x_2)=y_2$,即

$$f(x_2)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x_2-x_0)+C(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

可得

$$C=(f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1])/(x_2-x_1)$$

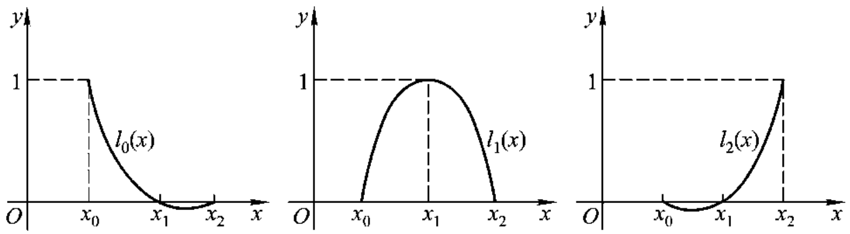
引入函数在 x_0,x_1,x_2 的二阶均差(差商)的定义:

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}$$

则有 $\varphi(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$

二次插值:Lagrange公式

- Lagrange公式
  - $\phi(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$
  - 二次插值基函数



$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

x_i	x_0	x_1	x_2
$l_0(x)$	1	0	0
$l_1(x)$	0	1	0
$l_2(x)$	0	0	1

二次插值:Aitken公式

- Aitken公式

$$\phi_{012}(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix}\phi_{01}(x) & x - x_1 \\ \phi_{02}(x) & x - x_2\end{vmatrix}$$

- 余项定理
  - 设$\phi(x)$是$f(x)$过x_0, x_1, x_2的二次插值函数 $f(x) \in C^3[a,b], x_0, x_1, x_2, x \in [a,b]$, 则有$\xi \in (a,b)$, 使

$$R(x) = f(x) - \phi(x)$$

$$= \frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

插值举例

- 例：取节点$x_0 = 0, x_1 = 1$, 对函数e^{-x}作一次插值.
  - Newton型

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = e^{-1} - 1$$

$$\varphi_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] = 1 + x(e^{-1} - 1)$$

  - Lagrange型

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = -(x - 1)$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = x$$

$$\varphi_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) = -(x - 1) + xe^{-1}$$

  - 逐次线性插值

$$\varphi_{01}(x) = \frac{1}{x_0 - x_1} \begin{vmatrix} f(x_0) & x - x_0 \\ f(x_1) & x - x_1 \end{vmatrix} = -(x - 1) + xe^{-1}$$

二次插值例

- 例：取节点$x_0 = 0, x_1 = 1$和$x_2 = \frac{1}{2}$,对e^{-x}作二次插值多项式
  - Newton型

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = e^{-1} - 1$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 2(e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}})$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = 2 + 2e^{-1} - 4e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_2(x) = 1 + x(e^{-1} - 1) + x(x - 1)(2 + 2e^{-1} - 4e^{-1/2})$$

二次插值例

- 例：取节点$x_0=0, x_1=1$和$x_2=\frac{1}{2}$,对e^{-x}作二次插值多项式
  - Lagrange型

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=2x\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=-4x(x-1)$$

$$\varphi_2(x)=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)+2x\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-1}-4x(x-1)e^{-1/2}$$

二次插值例

- 逐次线性插值

$$\varphi_{01}(x)=\frac{1}{x_0-x_1}\begin{vmatrix} f(x_0) & x-x_0 \\ f(x_1) & x-x_1 \end{vmatrix}=-(x-1)+x\mathrm{e}^{-1}$$

$$\varphi_{02}(x)=\frac{1}{x_0-x_2}\begin{vmatrix} f(x_0) & x-x_0 \\ f(x_2) & x-x_2 \end{vmatrix}=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)+2x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_{012}(x)=\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} \varphi_{01}(x) & x-x_1 \\ \varphi_{02}(x) & x-x_2 \end{vmatrix}=$$

$$=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)+2x\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-1}-4x(x-1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$