

病态现象

▶ 例6: 病态方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

▶ 例7: 病态矩阵

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}, \quad H_4^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix}$$

H_4 取五位有效数字, 其逆误差在前面第二、三位上:

$$\begin{array}{cccc} 16.248 & -122.72 & 246.49 & 144.20 \\ -122.72 & 1229.9 & -2771.3 & 1726.1 \\ 246.49 & -2771.3 & 6650.1 & -4310.0 \\ -144.20 & 1726.1 & -4310.0 & 2871.1 \end{array}$$

向量和矩阵的范数

▶ 向量范数

设 $\|\cdot\|: x \in C^n \rightarrow \|x\| \in R$, 满足

- 正定性: $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \text{ iff } x = 0$
- 齐次性: $\|cx\| = |c|\|x\|$
- 三角不等式: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

则称 C^n 中定义了向量范数, $\|x\|$ 为向量 x 的范数.

▶ 矩阵范数

设 $\|\cdot\|: X \in C^{n \times n} \rightarrow \|X\| \in R$, 满足

- 正定性: $\|X\| \geq 0, \|X\| = 0 \text{ iff } X = 0$
- 齐次性: $\|cX\| = |c|\|X\|$,
- 三角不等式: $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$
- 相容性: $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$

则称 $C^{n \times n}$ 中定义了矩阵范数, $\|X\|$ 为矩阵 X 的范数.



常用向量范数

▶ 常用向量范数: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

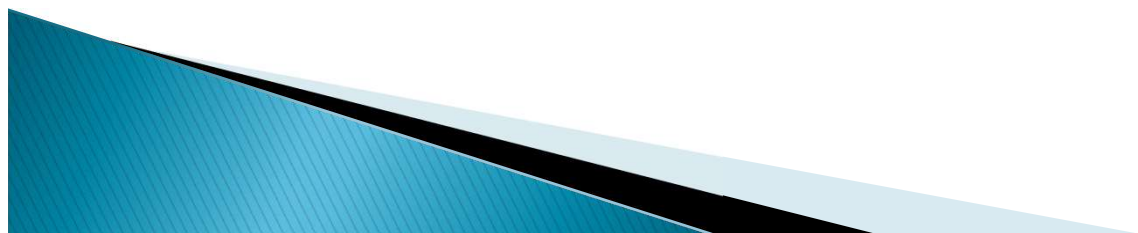
- 1-范数 $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

- 2-范数 $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$

- ∞ -范数 $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$

▶ 性质

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty$$



向量序列收敛性

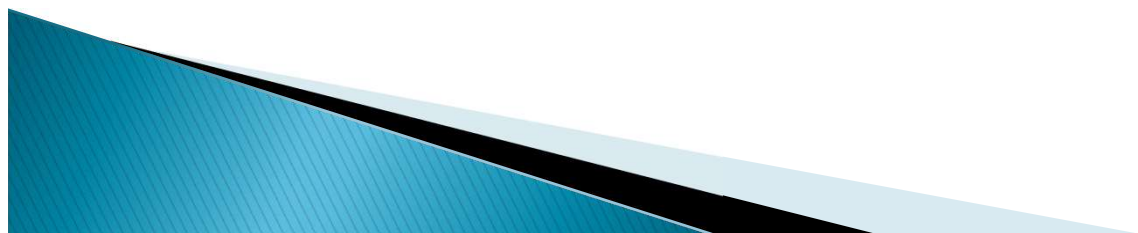
▶ 向量范数等价性

- C^n 中任意两种向量范数 $\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta$ 是等价的, 即有
 $m, M > 0$ 使 $m\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq M\|x\|_\alpha$

▶ 向量序列收敛性等价表达

- $\{x^{(k)}\}$ 收敛于 $x(k \rightarrow \infty)$
- $x^{(k)} \rightarrow x(k \rightarrow \infty)$
- $x_j^{(k)} - x_j \rightarrow 0, j = 1, 2, \dots, n(k \rightarrow \infty)$
- $\|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0(k \rightarrow \infty)$

其中 $x_j^{(k)}$ 是 $x^{(k)}$ 的第 j 个分量, x_j 是 x 的第 j 个分量



算子范数

▶ 范数相容性定义

- 矩阵范数向量范数相容, 若 $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$

▶ 定理

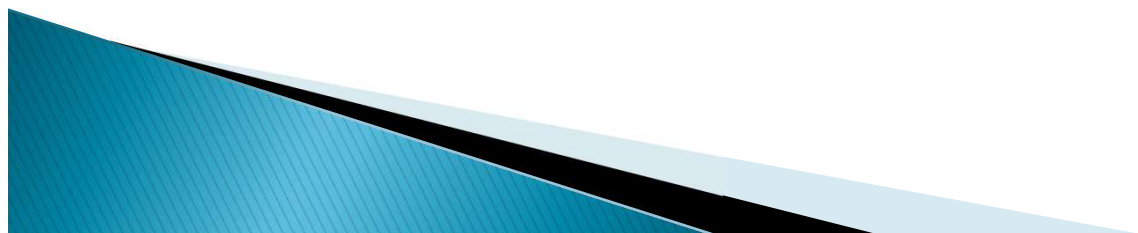
- 设 A 是 $n \times n$ 矩阵, $\|\cdot\|$ 是 n 维向量范数, 则

$$\|A\| = \max\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$$

$$= \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}$$

是一种矩阵范数, 称为由该向量范数诱导出的矩阵范数或算子范数

- 它们具有相容性或者说是相容的



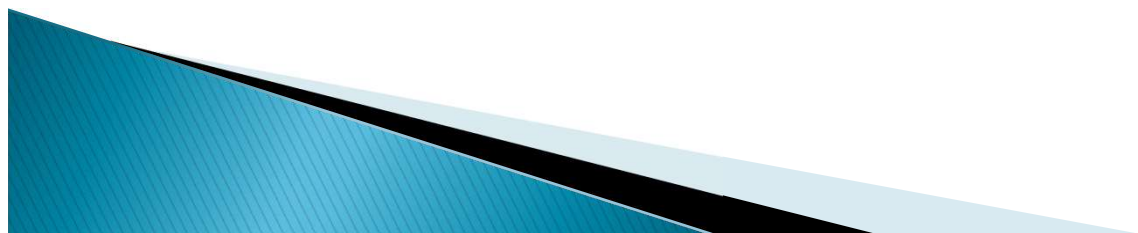
常用矩阵范数

▶ 注

- 任一矩阵范数都有与之相容的向量范数
- 单位矩阵算子范数为1

▶ 常用矩阵范数

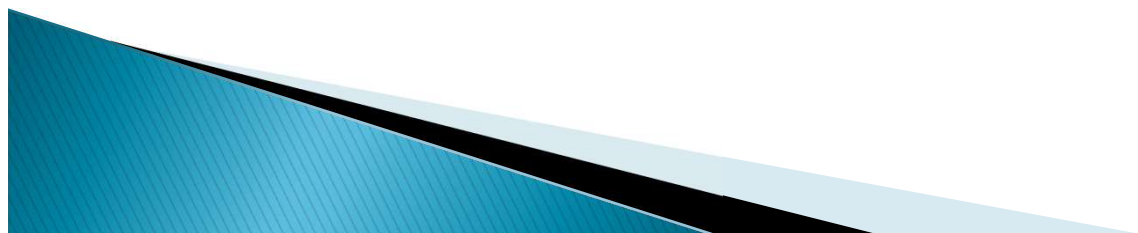
- 1-范数: $\|A\|_1 = \max\{\|Ax\|_1: \|x\|_1 = 1\} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
- 2-范数: $\|A\|_2 = \max\{\|Ax\|_2: \|x\|_2 = 1\} = \sqrt{\lambda_1}$
 λ_1 是 $A^H A$ 的最大特征值
- ∞ -范数: $\|A\|_\infty = \max\{\|Ax\|_\infty: \|x\|_\infty = 1\} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$
- Frobenius 范数: $\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
它与向量2-范数相容. 但非算子范数



矩阵谱半径

▶ 谱半径

- 称 $\rho(A) = \max |\lambda_i|$
为 A 的谱半径, λ_i 是其特征值, $i = 1, 2, \dots, n$.
- 谱半径非矩阵范数 (例如, 无正定性)
- $\rho(A) \leq \|A\|$
- $\|A\|_2 = (\rho(A^H A))^{\frac{1}{2}}$
- 若 $A^H = A$, 则 $\|A\|_2 = \rho(A)$
- 矩阵序列 $I, A, A^2, \dots, A^k, \dots$ 收敛于零的充分必要条件是 $\rho(A) < 1$



扰动分析

- ▶ 方程 $Ax = b (b \neq 0)$ 一般扰动方程

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

- ▶ 解的扰动 (当 $\|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1$)


- 一般情况

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

- 特例: 只右端项有扰动

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq (\|A^{-1}\| \|A\|) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

- 特例: 只系数有扰动

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$


敏感性与条件数

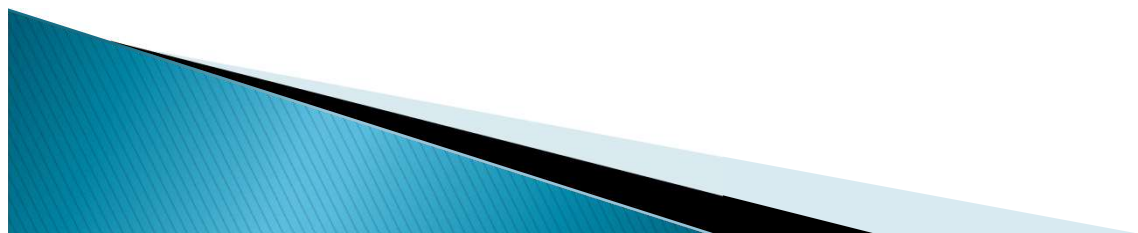
▶ 条件数

$$\text{Cond}(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$$

- $\text{Cond}(A) \geq 1$
- $\text{Cond}(cA) = \text{Cond}(A), c \neq 0$
- $\text{Cond}(A)_2 = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{2}}$ 称为谱条件数, λ_1, λ_n 分别是 $A^H A$ 的最大和最小特征值.
- 正交矩阵, 酉矩阵的谱条件数为1.

▶ 扰动分析表明: 条件数不大, 扰动对解的影响不大; 条件数越大, 扰动对解的影响也越大. 这就是说条件数是方程组**敏感性**以及**病态**或**良态**的度量.

▶ 系数矩阵的谱条件数: 例6中 $2.0001^2 \times 10^4$, 例7中28000.



病态的发现与处理

- ▶ 下述情况会出现病态
 - 行或列近似线性相关
 - 行列式接近零
 - 主元素法出现小主元
 - 条件数估算很大
- ▶ 病态方程组的计算
 - 用双精度或更高精度计算
 - 用迭代改善法

