浙江大学实验报告

专业：混合班
姓名：徐圣泽
学号：3190102721
日期：2021.5.9

课程名称：科学计算　　指导老师：赖俊　　实验名称：数值积分实验

第七次作业

- 第七次作业
  - 问题
  - 数学原理
    - 1、复化梯形公式
    - 2、$Newton-Cotes$公式+复化梯形公式
    - 3、变量代换+复化梯形公式
    - 4、$Gauss-Legendre$积分
    - 5、$Gauss-Jacobi$积分
  - 程序及结果
    - 1、复化梯形公式
      - (i) 函数定义部分
      - (ii) 函数调用部分
      - (iii) 运行结果
    - 2、$Newton-Cotes$公式+复化梯形公式
      - (i) 函数定义部分
      - (ii) 函数调用部分
      - (iii) 运行结果
    - 3、变量代换+复化梯形公式
      - (i) 函数定义部分
      - (ii) 函数调用部分
      - (iii) 运行结果
    - 4、$Gauss-Legendre$积分
      - (i) 函数定义部分
      - (ii) 函数调用部分
      - (iii) 运行结果
    - 5、$Gauss-Jacobi$积分
      - (i) 函数定义部分
      - (ii) 函数调用部分
      - (iii) 运行结果
  - 思考讨论

问题

利用以下方法，分别计算积分

$$I_c=\int_0^1\frac{cosx}{\sqrt{x}}dx=1.809048475800...$$

$$I_s=\int_0^1\frac{sinx}{\sqrt{x}}dx=0.620536603446...$$

根据和真实值的对比，讨论各种方法的优劣。

1、利用n个等分区间的复化梯形公式计算，区间长度为$h=\frac{1}{n}$，第一个区间$[0,h]$的左端点$x=0$的函数值用0代替，其中$n=100:100:1000$。

2、首先推导下列带权的$Newton-Cotes$公式，

$$I_c=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)dx\approx Af(0)+Bf(1)$$

找出A，B使得上述公式的代数精度为1。然后利用n个等分区间的复化梯形公式计算，区间长度为$h=\frac{1}{n}$，但第一个区间$[0,h]$使用带权的$Newton-Cotes$公式计算，其中$n=100:100:1000$。

3、对积分先利用变量代换$x=t^2$，然后再利用n个等分区间的复化梯形公式计算变换后的积分，其中$n=20:20:200$。

4、承接上题，利用$Gauss-Legendre$积分计算变换后的积分，其中$n=1:1:5$。

5、首先推导正交多项式$\{p_k(x),k=0,1,2,...,n\}$，其中$p_k(x)$是首相系数为1的k次多项式，使得

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}p_k(x)p_j(x)dx=0,j\neq k$$

利用多项式$\{p_k(x)\}$，推导出相应的$Gauss$型求积公式（称为$Gauss-Jacobi$积分），然后计算积分，其中$n=1:1:5$。

数学原理

1、复化梯形公式

把$[a,b]$区间n等分，节点$x_k=a+kh(k=0,1,\cdots,n,h=\frac{b-a}{n})$.对每个小区间$[x_k,x_{k+1}]$用梯形求积公式，则得

$$I=\frac{h}{2}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(kh))$$

将上式记为T_n，称为复化梯形公式，下标n代表区间n等分.

在本题中，$a=0$，$b=1$，两函数均在0处无定义，因此将$f(0)$和$g(0)$用0代替。

2、$Newton-Cotes$公式+复化梯形公式

首先推导带权的$Newton-Cotes$公式，根据题意，要求$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)dx\approx Af(0)+Bf(1)$的代数精确度为$1$。

设$f(x)=kx+b$，代入公式，得到:

$$\int_0^1(k\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{x}})dx=\frac{2}{3}k+2b$$

又因为$f(0)=b$，$f(1)=k+b$，上式对任意k和b均成立，则易得:

$$\begin{cases}A=\frac{4}{3}\\B=\frac{2}{3}\end{cases}$$

对于积分$\int_0^1 \frac{cosx}{\sqrt{x}}dx$，首先根据题意对第一个区间$[0,h]$应用带权的$Newton-Cotes$公式，易推导得到：

$$\int_0^h \frac{cosx}{\sqrt{x}}dx \approx \sqrt{h}(\frac{4}{3}cos0+\frac{2}{3}cos1)$$

对于区间$[h,1]$应用复化梯形公式，联立上式，易得：

$$I=\sqrt{h}(\frac{4}{3}cos0+\frac{2}{3}cos1)+\frac{h}{2}(f(h)+f(1)+2\sum_{k=2}^{n-1}f(kh))$$

对于积分$\int_0^1 \frac{sinx}{\sqrt{x}}dx$也有类似公式成立。

3、变量代换+复化梯形公式

对积分作$x=t^2$的变量代换，得到：

$$I_c=\int_0^1 \frac{cosx}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 2cos(t^2)dt$$

$$I_s=\int_0^1 \frac{sinx}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 2sin(t^2)dt$$

应用复化梯形公式，将新函数$2cos(t^2)$和$2sin(t^2)$代入即可。

4、$Gauss-Legendre$积分

注：本部分的求解思路向同学进行了求助，对相关解法进行了讨论。因为下面的表达式化简方式不同，所以本题的解法可能并不唯一。

首先对两个积分作一个变换，

$$I_c=\int_0^1 2cos(t^2)dt=\int_{-1}^1 cos(t^2)dt$$

$$I_s=\int_0^1 2sin(t^2)dt=\int_{-1}^1 sin(t^2)dt$$

将两积分转化为$[-1,1]$上的积分，继而利用$Gauss-Legendre$公式求解。

由书本公式(5.27)知：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n}A_k f(x_k)$$

要利用上述公式进行求解，我们首先需要求出积分节点x_k和系数A_k。

首先求解积分节点x_k，已知$Legendre$多项式为：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n(n!)}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

利用$sym2poly$函数和$roots$函数求得多项式各项系数和各零点。

另一方面，将$f(x)=1,x,\cdots,x^{n-1}$代入公式左端，作积分可得：

$$\int_{-1}^{1} x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}|_{-1}^{1} = \frac{1+(-1)^k}{k+1}$$

因此有线性方程组：$AX = B$，其中$A = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$，$B = (2, 0, \cdots, \frac{1+(-1)^{n-1}}{n})$，$X$矩阵的第$i$行$j$列元素为$X_i^j = x_i^{j-1}$.

通过上述线性方程组解得向量A，得到各系数A_k，继而代入公式求解$Gauss - Legendre$积分。

5、$Gauss - Jacobi$积分

首先我们需要推导正交多项式$p_k(x)$，其中$p_k(x)$是首相系数为1的k次多项式。

对积分作变量代换$x = t^2$，可以化简得到：

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} p_k(x) p_j(x) dx = \int_{-1}^1 p_k(t^2) p_j(t^2) dt, j \neq k$$

根据正交多项式和$Legendre$多项式间的联系可以得到关系式$p_k(x^2) = \frac{P_{2k}}{a_{2k}}$，因此

$$\begin{aligned} p_k(x^2) &= \frac{1}{a_{2k} \cdot 2^n (n!)} \cdot \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} (x^2 - 1)^{2k} \\ &= \frac{1}{a_{2k} \cdot 2^n (n!)} \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j C_{2k}^j (x^2)^{2k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_{2k}^j \frac{(4k-2j)!(2k)!}{(2k-2j)!(4k)!} \end{aligned}$$

由此得到正交多项式$p_k(x)$的表达式。

此时$Gauss$积分公式满足：

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

另一方面，将$f(x) = 1, x, \cdots, x^{n-1}$代入公式左端，作积分可得：

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} x^k dx = \frac{1}{k + \frac{1}{2}}$$

与上题同理可知有线性方程组$AX = B$，其中$A = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$，
$B = (\frac{1}{0+\frac{1}{2}}, \frac{1}{1+\frac{1}{2}}, \cdots, \frac{1}{n-\frac{1}{2}})$，$X$矩阵的第$i$行$j$列元素为$X_i^j = x_i^{j-1}$。

通过上述线性方程组解得向量A，得到各系数A_k，继而代入公式求解$Gauss - Jacobi$积分。

程序及结果

1、复化梯形公式

在本次实验利用程序计算积分结果的过程中，由于个人习惯，我在编写代码时将程序分为函数定义与函数调用两个部分。

（i）函数定义部分

根据复化梯形公式，编写得到以函数表达式f、区间个数n和积分上下限a、b作为传入参数的复化梯形公式函数$func1(f,n,a,b)$。

```
function ans=func1(f,n,a,b)
    h=(b-a)/n;
    sum=0;
    for i=a+h:h:b-h
        sum=sum+2*f(i);
    end
    sum=sum+f(b);
    ans=sum*h/2;
end
```

（ii）函数调用部分

定义变量x，定义两积分表达式中的函数表达式$\frac{cosx}{\sqrt{x}}$和$\frac{sinx}{\sqrt{x}}$作为传入参数，同时求出两积分的真实值。

```
format long e;
syms x;
f=inline("cos(x)/sqrt(x)","x");
g=inline("sin(x)/sqrt(x)","x");
real1=double(int(cos(x)/sqrt(x),0,1));
real2=double(int(sin(x)/sqrt(x),0,1));
```

利用for循环，得到在不同n值情况下，根据复化梯形公式计算得到的积分值和误差。

```
fprintf('f积分真实值：%.10f\n',real1);
for n=100:100:1000
    ans=func1(f,n,0,1);
    fprintf('等分区间:%d 函数计算结果：%.10f 误差：%e\n',n,ans,ans-real1);
end
```

```
fprintf('g积分真实值：%.10f\n',real2);
for n=100:100:1000
    ans=func1(g,n,0,1);
    fprintf('等分区间:%d 函数计算结果：%.10f 误差：%e\n',n,ans,ans-real2);
end
```

（iii）运行结果

计算得到f积分的真实值为$\int_0^1 \frac{cosx}{\sqrt{x}}dx = 1.8090484758$。

n	计算值	误差
100	1.6630038888	-1.460446×10^{-1}
200	1.7057835248	-1.032650×10^{-1}
300	1.7247338478	-8.431463×10^{-2}
400	1.7360301754	-7.301830×10^{-2}
500	1.7437390685	-6.530941×10^{-2}
600	1.7494294968	-5.961898×10^{-2}
700	1.7538520755	-5.519640×10^{-2}
800	1.7574170030	-5.163147×10^{-2}
900	1.7603698783	-4.867860×10^{-2}
1000	1.7628679192	-4.618056×10^{-2}

计算得到g积分的真实值为$\int_0^1\frac{sinx}{\sqrt{x}}dx=0.6205366034$。

n	计算值	误差
100	0.6203297135	-2.068900×10^{-4}
200	0.6204633537	-7.324980×10^{-5}
300	0.6204967064	-3.989702×10^{-5}
400	0.6205106799	-2.592350×10^{-5}
500	0.6205180494	-1.855405×10^{-5}
600	0.6205224863	-1.411719×10^{-5}
700	0.6205253990	-1.120447×10^{-5}
800	0.6205274317	-9.171791×10^{-6}
900	0.6205289163	-7.687189×10^{-6}
1000	0.6205300395	-6.563976×10^{-6}

2、$Newton-Cotes$公式+复化梯形公式

（i）函数定义部分

根据推理部分的表达式定义函数`func21(f,n,a,b)`，此时传入参数均与上一小题相同。

```
function ans=func21(f,n,a,b)
    h=(b-a)/n;
    ans=4*sqrt(h)/3*cos(0)+2*sqrt(h)/3*cos(h)+f(1)*h/2;
    for i=2:1:n-1
        ans=ans+h*f(i*h);
    end
end
```

另一个函数`func22(f,n,a,b)`同理可以定义。

```
function ans=func22(f,n,a,b)
    h=(b-a)/n;
    ans=4*sqrt(h)/3*sin(0)+2*sqrt(h)/3*sin(h)+f(1)*h/2;
    for i=2:1:n-1
        ans=ans+h*f(i*h);
    end
end
```

（ii）函数调用部分

此时传入函数与第一题相同，无需重新定义，再次利用for循环根据复合公式求出积分值。

```
fprintf('f积分真实值：%.10f\n',real1);
for n=100:100:1000
    ans=func21(f,n,0,1);
    fprintf('等分区间:%d 函数计算结果：%.10f 误差：%e\n',n,ans,ans-real1);
end
```

```
fprintf('g积分真实值：%.10f\n',real2);
for n=100:100:1000
    ans=func22(g,n,0,1);
    fprintf('等分区间:%d 函数计算结果：%.10f 误差：%e\n',n,ans,ans-real2);
end
```

（iii）运行结果

计算得到f积分的真实值为$\int_0^1 \frac{cosx}{\sqrt{x}}dx = 1.8090484758$。

n	计算值	误差
100	1.7630055555	-4.604292×10^{-2}
200	1.7764944976	-3.255398×10^{-2}
300	1.7824689817	-2.657949×10^{-2}
400	1.7860302275	-2.301825×10^{-2}
500	1.7884604578	-2.058802×10^{-2}
600	1.7902543447	-1.879413×10^{-2}
700	1.7916485357	-1.739994×10^{-2}
800	1.7927723512	-1.627612×10^{-2}
900	1.7937032185	-1.534526×10^{-2}
1000	1.7944907010	-1.455777×10^{-2}

计算得到g积分的真实值为$\int_0^1 \frac{sinx}{\sqrt{x}}dx = 0.6205366034$。

n	计算值	误差
100	0.6199963857	-5.402178×10^{-4}
200	0.6203455030	-1.911004×10^{-4}
300	0.6204325565	-1.040469×10^{-4}
400	0.6204690133	-6.759013×10^{-5}
500	0.6204882352	-4.836827×10^{-5}
600	0.6204998058	-3.679764×10^{-5}
700	0.6205074007	-2.920277×10^{-5}
800	0.6205127003	-2.390318×10^{-5}
900	0.6205165706	-2.003287×10^{-5}
1000	0.6205194985	-1.710490×10^{-5}

3、变量代换+复化梯形公式

（i）函数定义部分

根据数学推理部分的公式定义函数`func(f,n,a,b)`，此时传入的函数参数`f`与前两题不同，其余参数均相同。

```
function ans=func31(f,n,a,b)
    h=(b-a)/n;
    sum=cos(0);
    for i=1:1:n-1
        sum=sum+f(i*h);
    end
    sum=sum+cos(1);
    ans=sum*h;
end
```

另一个函数`func32(f,n,a,b)`同理可以定义。

```
function ans=func32(f,n,a,b)
    h=(b-a)/n;
    sum=sin(0);
    for i=1:1:n-1
        sum=sum+f(i*h);
    end
    sum=sum+sin(1);
    ans=sum*h;
end
```

（ii）函数调用部分

根据$x = t^2$代换后的公式，重新定义函数作为传入参数。

```
syms x;
f=inline("2*cos(x*x)","x");
g=inline("2*sin(x*x)","x");
```

利用for循环，得到在不同n值情况下，根据复化梯形公式计算得到的积分值和误差。

```
for n=20:20:200
    ans=func31(f,n,0,1);
    fprintf('等分区间:%d 函数计算结果：%.10f 误差：%e\n',n,ans,ans-real1);
end
```

```
for n=20:20:200
    ans=func32(g,n,0,1);
    fprintf('等分区间:%d 函数计算结果：%.10f 误差：%e\n',n,ans,ans-real2);
end
```

（iii）运行结果

计算得到f积分的真实值为$\int_0^1 \frac{cosx}{\sqrt{x}} dx = 1.8090484758$。

n	计算值	误差
20	1.8083472458	-7.012300×10^{-4}
40	1.8088731691	-1.753067×10^{-4}
60	1.8089705618	-7.791403×10^{-5}
80	1.8090046492	-4.382663×10^{-5}
100	1.8090204268	-2.804904×10^{-5}
120	1.8090289973	-1.947850×10^{-5}
140	1.8090341651	-1.431073×10^{-5}
160	1.8090375191	-1.095665×10^{-5}
180	1.8090398187	-8.657110×10^{-6}
200	1.8090414635	-7.012259×10^{-6}

计算得到g积分的真实值为$\int_0^1 \frac{sinx}{\sqrt{x}}dx = 0.6205366034$。

n	计算值	误差
20	0.6209871058	4.505024×10^{-4}
40	0.6206491821	1.125786×10^{-4}
60	0.6205866345	5.003108×10^{-5}
80	0.6205647452	2.814172×10^{-5}
100	0.6205546139	1.801048×10^{-5}
120	0.6205491106	1.250719×10^{-5}
140	0.6205457924	9.188919×10^{-6}
160	0.6205436387	7.035247×10^{-6}
180	0.6205421622	5.558704×10^{-6}
200	0.6205411060	4.502544×10^{-6}

4、$Gauss-Legendre$积分

(i) 函数定义部分

根据上面推理的过程，我们定义函数`func4(f,n)`，其中`f`和`n`为传入参数。

```
function ans=func4(f,n)
    syms x;
    xk=zeros(n,1);
    xk=roots(sym2poly(1.0/(2^n*factorial(n))*diff((x*x-1)^n,n)));
    A=zeros(1,n);
    X=zeros(n,n);
    B=zeros(1,n);
```

```
    for k=1:n
        X(:,k)=xk.^(k-1);
        B(1,k)=(1+(-1)^(k-1))*1.0/k;
    end
    A=B/X;
    xk=xk';
    ans=dot(f(xk.^2),A);
end
```

(ii) 函数调用部分

这里传入的参数`f`和`g`与前面不同，需要重新定义。

```
format long e;
syms x;
real1=double(int(cos(x)/sqrt(x),0,1));
real2=double(int(sin(x)/sqrt(x),0,1));%计算真实值
f=inline("cos(x)","x");
g=inline("sin(x)","x");
```

利用for循环，得到在不同n值情况下，根据$Gauss-Legendre$积分公式计算得到的积分值和误差。

```
for n=1:1:5
    ans=func4(f,n);
    fprintf('等分区间:%d 函数计算结果: %.10f 误差: %e\n',n,ans,ans-real1);
end
```

```
for n=1:1:5
    ans=func4(g,n);
    fprintf('等分区间:%d 函数计算结果: %.10f 误差: %e\n',n,ans,ans-real2);
end
```

(iii) 运行结果

I_c的真实值为$\int_0^1 \frac{cosx}{\sqrt{x}}dx = 1.8090484758$。

n	计算值	误差
1	2.0000000000	1.909515×10^{-1}
2	1.8899138926	8.086542×10^{-2}
3	1.8059284610	-3.120015×10^{-3}
4	1.8086163954	-4.320804×10^{-4}
5	1.8090590990	1.062321×10^{-5}

I_s的真实值为$\int_0^1 \frac{sinx}{\sqrt{x}}dx = 0.6205366034$。

n	计算值	误差
1	0.0000000000	-6.205366×10^{-1}
2	0.6543893936	3.385279×10^{-2}
3	0.6273805260	6.843923×10^{-3}
4	0.6203310181	-2.055853×10^{-4}
5	0.6205148555	-2.174794×10^{-5}

5、$Gauss-Jacobi$积分

(i) 函数定义部分

根据上面推理的过程，我们定义函数`func5(f,n)`，其中`f`和`n`为传入参数。

```
function ans=func5(f,n)
    syms x;
    p=zeros(n+1,1);
    p1=sym2poly(1.0/(2^n*factorial(n))*diff((x*x-1)^(2*n),2*n));
    for i=1:n+1
        p(i)=p1(2*i-1);
    end
    xk=zeros(n,1);
    A=zeros(1,n);
    X=zeros(n,n);
    B=zeros(1,n);
    xk=roots(p);
    for k=1:n
        X(:,k)=xk.^(k-1);
        B(1,k)=1/(k-1/2);
    end
    A=B/X;
    xk=xk';
    ans=dot(f(xk),A);
end
```

(ii) 函数调用部分

此时传入参数无需重新定义，利用for循环，得到在不同n值情况下，根据公式$Gauss-Jacobi$积分计算得到的积分值和误差。

```
for n=1:1:5
    ans=func5(f,n);
    fprintf('等分区间:%d 函数计算结果：%.10f 误差：%e\n',n,ans,ans-real1);
end
```

```
for n=1:1:5
    ans=func5(g,n);
    fprintf('等分区间:%d 函数计算结果：%.10f 误差：%e\n',n,ans,ans-real2);
end
```

（iii）运行结果

I_c的真实值为$\int_0^1 \frac{cosx}{\sqrt{x}}dx = 1.8090484758$。

n	计算值	误差
1	1.8899138926	8.086542×10^{-2}
2	1.8086163954	-4.320804×10^{-4}
3	1.8090493862	9.104080×10^{-7}
4	1.8090484748	-1.022321×10^{-9}
5	1.8090484758	7.127632×10^{-13}

I_s的真实值为$\int_0^1 \frac{sinx}{\sqrt{x}}dx = 0.6205366034$。

n	计算值	误差
1	0.6543893936	3.385279×10^{-2}
2	0.6203310181	-2.055853×10^{-4}
3	0.6205370562	4.527039×10^{-7}
4	0.6205366029	$-5.200165 \times 10^{-10}$
5	0.6205366034	3.673728×10^{-13}

思考讨论

1、对于每一种确定的方法来说，非常显然，等分区间的数量越多，求得积分的结果越精确，误差越小。

2、前面三种方法主要都应用了复化梯形公式进行积分求解，后面两种主要是应用$Gauss$公式进行求解。从方法的难易程度来讲，前面三种的思路较为简单明了，步骤也较为简便，后面两种的思路较为复杂， 其求解步骤也较为繁杂。从结果的精确程度来讲，可以发现利用$Gauss$公式的两种方法解得的积分值比利用复化梯形公式解得的值更加精确。合理推测，如果我们进行误差的理论推导，后面两种方法的误差也肯定会比前三种小很多。

3、对于前面三种方法，可以看到从第一种到第三种，精确程度越来越高。第一种将$x = 0$处的函数值视为0，此处导致计算结果产生较大误差。第二种应用带权的$Newton - Cotes$公式和复化梯形公式，相对减小了第一种的误差。第三种应用变量代换$x = t^2$，去掉分母，使得计算结果更加精确，函数在$[0, 1]$每一点都有定义并且连续变化，有效减小了误差。

4、对于后面两种应用$Gauss$公式的方法，其误差远小于复化梯形公式的方法。第四种应用$Gauss - Legendre$积分公式，利用巧妙的变换，有效减小误差。第五种通过推导正交多项式并利用$Gauss - Jacobi$积分公式，相比第四种方法，虽然步骤复杂且较难理解，但结果更加精确，其误差比前面四种方法得到的结果都要小得多。

5、在求解积分的过程中，通过变量代换等小技巧可以尽可能多地减少误差，同时在不同的情景下，我们应该根据算法的复杂程度和结果的精确程度，综合考量来选用不同的方法。