复化梯形公式

- 复化梯形公式
  - 积分区间分成若干小区间在每个小区间上用梯形公式即得复化梯形公式.
  - 公式:令$x_k = a + kh, k = 0,1,2,\cdots,n, h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

  - 误差

$$R(f) = -\frac{h^3}{12}(f''(\eta_1) + f''(\eta_2) + \cdots + f''(\eta_n)\ \ )$$
$$= -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$$

复化抛物线公式

- 复化抛物线公式
  - 积分区间分成$2n$ 个小区间在每两个小区间上用抛物线公式即得复化抛物线公式.
  - 公式: 令$x_k = a + kh, k = 0,1,2,\cdots,2n, h = \frac{b-a}{2n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots$$

$$+2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))$$

  - 误差

$$R(f) = -\frac{h^5}{90}\left(f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2) + \cdots + f^{(4)}(\eta_n)\right) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\eta)$$

例 根据数据表利用复合求积公式求 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ 的值.

x_i	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
$f(x_i)$	1	0.9973978	⋯ ⋯	⋯ ⋯	⋯	⋯ ⋯	⋯	⋯	0.8414709

$$T_8=\frac{1}{8}\left[\frac{f(0)}{2}+f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)+\frac{f(1)}{2}\right]$$

$$\approx 0.9456909.$$

精确值：0. 946083070367183

$$S_4=\frac{1}{4\times 6}\left\{f(0)+4\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]\right.$$

$$\left.+2\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]+f(1)\right\}\approx 0.9460832$$

$$C_2=\frac{1}{2\times 90}\left\{7f(0)+32\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]\right.$$

$$\left.+12\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]+14f\left(\frac{1}{2}\right)+7f(1)\right\}\approx 0.9460829$$

误差估计

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}=\int_0^1\cos(xt)\mathrm{d}t,$$

$$f^{(k)}(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(\cos xt)\mathrm{d}t=\int_0^1 t^k\cos(xt+\frac{k\pi}{2})\mathrm{d}t,$$

$$\max_{0\le x\le 1}\left|f^{(k)}(x)\right|\le\int_0^1 t^k\left|\cos(xt+\frac{k\pi}{2})\right|\mathrm{d}t\le\frac{1}{k+1}.$$

$$R_T=\left|I-T_8\right|\le\frac{1}{12}h^2\max_{0\le x\le 1}\left|f''(\eta)\right|\le\frac{1}{12}\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{1}{3}=0.000434.$$

$$R_S=\left|I-S_4\right|\le\frac{1}{2880}\left(\frac{1}{4}\right)^4\frac{1}{5}=0.271\times 10^{-6}.$$

逐次半分法

- 在实际计算中，运用复化梯形法（及抛物线法）求数值积分无法预知需要离散点个数n

- 逐次半分法
  - 取初始离散点个数n_0,以后每次将区间分半，等价于离散点数加倍
  - 充分利用前一次的结果计算下一次结果
  - 利用前后两次结果之差决定是否收敛到给定误差

逐次分半梯形法

- 复化梯形公式T_n与T_{2n}的关系

令$x_k = a + kh, k = 0,1,2,\cdots,2n, h = \frac{b-a}{2n}$可得

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + h(f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1}))$$

- 推导：

$$T_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_{2i}) + 2f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})]$$

$$= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{2i}) + f(x_{2i+2})] + h\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{2i+1})$$

$$= \frac{1}{2}T_n + h\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{2i+1}).$$

逐次分半梯形法

- 据此依次计算$T_1, T_2, T_4 \cdots$
  - T_1, 梯形公式
  - 重复进行: 区间分半, 积分值之半加上新点上函数值之和与h之积.
- 计算可用误差控制并限定分半次数

逐次分半梯形法

- **算法：** 给定误差容许值ϵ

$$n=1, h=\frac{b-a}{2}; T_0=h(f(a)+f(b))$$

for $\quad k=1:k_{max}$

$\quad n=n+n, s=0;$

$\quad$ for $\quad i=1:2:n$

$\quad\quad s=s+f(a+i*h);$

$\quad$ end

$\quad T=\frac{T_0}{2}+h*s$

$\quad$ if $\quad |\mathrm{T}-\mathrm{T}_0|<3\epsilon$, break, end

$\quad h=\frac{h}{2}; T_0=T;$

end

逐次分半梯形法

- 例：用逐次分半梯形法计算

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 0.946083070 \cdots$$

  - 结果

n	T	n	T
1	0.92073549240395	128	0.94608153854315
2	0.93979328480618	256	0.94608268741135
4	0.94451352166539	512	0.94608297462823
8	0.94569086358270	1024	0.94608304643245
16	0.94598502993439	2048	0.94608306438350
32	0.94605856096277	4096	0.94608306887126
64	0.94607694306006		

后验误差估计

- 判据 $\left|T_{h/2}-T_h\right| < 3\epsilon$
  - 由$I-T_h\approx Ch^2$及$I-T_{\frac{h}{2}}\approx\ C\left(\frac{\text{h}}{2}\right)^2$相减得

$$T_{h/2}-T_h\approx(4-1)C\left(\frac{\text{h}}{2}\right)^2$$

  - 估计误差 $I-T_{h/2}\approx\frac{T_{h/2}-T_h}{4-1}$，即$|I-T_{h/2}|=\epsilon$，

故后验误差应为预定误差容许值ϵ的三倍

  - 改进结果 $I\approx\frac{4T_{h/2}-T_h}{4-1}=\frac{4}{3}T_{h/2}-\frac{1}{3}T_h$

改进公式

- 梯形法改进公式：$\frac{4}{3}T_{h/2}-\frac{1}{3}T_h$

如, 当$n=1$时，

$$\widetilde{T}=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1$$

$$=\frac{4}{3}\frac{b-a}{4}[f(a)+2f(\frac{a+b}{2})+f(b)]-\frac{1}{3}\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

$$=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)].$$

一般地 $S_n=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$.

- 即梯形法改进公式恰好是抛物线公式！

逐次分半抛物线公式

- 复化公式S_n

令$x_k = a + kh, k = 0,1,2,\cdots,2n, h = \frac{b-a}{2n}$可得

$$S_n = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 2S_n^1 + 4S_n^2\right)$$

- 其中：

$$S_n^1 = (f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{2n-2}))$$
$$S_n^2 = (f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1}))$$

- 据此依次计算$S_2, S_4 \cdots$

逐次分半抛物线公式

- 判据 $\left|S_{h/2}-S_h\right| < 15\epsilon$
  - 由$I-S_h \approx Ch^4$及$I-S_{h/2} \approx\ C\left(\frac{\mathrm{h}}{2}\right)^4$相减得

$$S_{h/2}-S_h \approx (16-1)C\left(\frac{\mathrm{h}}{2}\right)^4$$

  - 估计误差 $I-S_{h/2} \approx \frac{S_{h/2}-S_h}{16-1},\quad |I-T_h| \approx \epsilon,$

故后验误差应为预定误差容许值ϵ的15倍

  - 改进结果 $I \approx \frac{16S_{h/2}-S_h}{16-1}=\frac{16}{15}S_{h/2}-\frac{1}{15}S_h$
  - 这恰好是复化的Cotes公式(n=4)

后验误差估计

- 进一步的结果
  - 逐次分半梯形法序列改进所得是逐次分半抛物线法序列
  - 逐次分半抛物线法序列又可改进得另一个序列
  - 这一过程可继续下去，得到Romberg积分方法
  - 改进也称外推,其依据是Euler-Maclaurin公式

- Euler-Maclaurin公式是对复化的梯形法误差进行更精确分析得到的:

$$T_h - I = \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \alpha_3 h^6 + \cdots$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \text{与} h \text{无关,与} f \text{有关}$$

- 事实上：$\alpha_1 = q_1\big(f'(b) - f'(a)\big), \alpha_2 = q_2(f'''(b) - f'''(a))$，$\alpha_3 = q_3(f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)), \ldots$

梯形公式特殊情形*

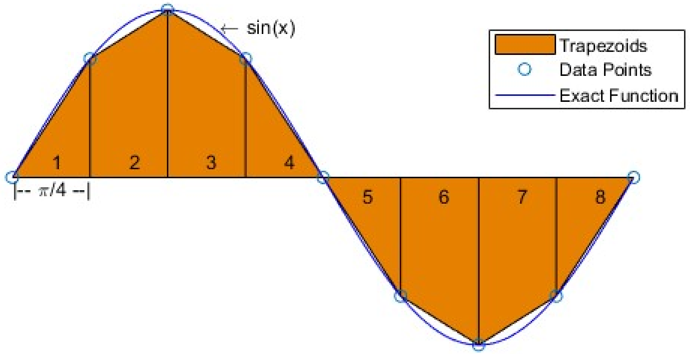
- 定理：若函数$f(x)$是$\mathbb{R}$上以T为周期的解析函数。则利用复化梯形公式对

$$\int_0^T f(x)dx$$

的积分误差为

$$R = Ce^{-2ns}$$

其中n是积分离散点个数， C和s是不依赖于n的常数(但依赖于f)。



例:计算椭圆积分

- $\int_0^{2\pi} \sqrt{2-\cos x}\, dx$

```
n=14;
h = 2*pi/(n+1);
x = 0:h:2*pi-h;
y = sqrt(2-cos(x));
sum(y)*h
```

精确值：8. 73775257098481

n	I
3	8.734378311304589
4	8.737121666143285
5	8.737625997686575
6	8.737725952859437
7	8.737746780722293
8	8.737751278900888
9	8.737752276857501
10	8.737752502950181
11	8.737752555039576
12	8.737752567206465
13	8.737752570081120
14	8.737752570766931

Gauss型求积公式

- 问题
  - n次插值构造的插值求积公式至少有n次代数精确度. 那么，最高能达多少次，又如何达到.
  - 考虑

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

  - 代入$1, x, x^2, \cdots, x^m$看左右相等最高的m是多少. 这里x_k, A_k待定. 乃有：

$$\begin{gathered} A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \mu_0 \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n = \mu_1 \\ A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \cdots + A_n x_n^2 = \mu_2, \\ \cdots \\ A_1 x_1^m + A_2 x_2^m + \cdots + A_n x_n^m = \mu_m \\ \mu_k = \int_a^b x^k \, dx, k = 0,1, \cdots m \end{gathered}$$

Gauss型求积公式

- 最高代数精确度的插值求积公式
  - 当$m = 2n - 1$时方程数等于未知数个数. 可望有解(此前节点指定, 系数待定时, $m = n - 1$有解). 求得n个节点$2n - 1$次代数精确度的插值求积公式.

练习 试构造高斯求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$.

$$\begin{cases} w_0 + w_1 = 2, \\ w_0 x_0 + w_1 x_1 = 0, \\ w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = \dfrac{2}{3}, \\ w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) .$$

Gauss型求积公式

- 最高代数精确度的插值求积公式
  - 一般地

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

(其中权函数$w(x) \geq 0$, 与各次多项式乘积的积分存在, a, b皆可取∞) 也能得到n个节点$2n-1$次代数精确度的插值求积公式 .

  - 定义：若一组节点$a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$, 使插值型求积公式具有$2n-1$次代数精度，则称此组节点为高斯点，并称此求积公式为高斯求积公式。
  - 利用正交多项式可方便地给出结果

Gauss型求积公式节点

- **定理**
  - 设有插值求积公式

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

则它有$2n-1$次代数精确度的充分必要条件是对一切次数不超过$n-1$多项式$q(x)$有

$$\int_a^b w(x)\omega(x)q(x)dx = 0, \omega(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$$

  - n次正交多项式在$[a,b]$恰有n个互异零点. 取其零点作插值求积公式.

Gauss型求积公式

定理：高斯求积公式的求积系数全是正的

且 $$w_i = \sum_{k=0}^{n} w_k l_i^2(x_k) = \int_a^b \rho(x) l_i^2(x)\mathrm{d}x,\quad (i = 0,1,\cdots,n)$$

推论：高斯求积公式是稳定的。

$\because \int_a^b \rho_n(x)\omega_{n+1}^2(x)\mathrm{d}x > 0$

而 $\sum_{k=0} w_k \omega_{n+1}^2(x_k) = 0$

高斯求积公式的特点：

(1) 代数精度达到最高$2n+1$次；

（2）节点是区间$[a,b]$上的$n+1$次正交多项式的$n+1$个零点.

Gauss型求积公式

- 定理：设$f(x) \in C_{[a,b]}^{2n}$，则Gauss型求积公式的截断误差为

$$R(f) = \int_a^b w(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

$$= \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\int_a^b w(x)\omega_n^2(x)dx$$

Gauss-Legendre求积公式

- Gauss-Legendre求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

$$R(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]} f^{(2n)}(\xi), |\xi| < 1$$

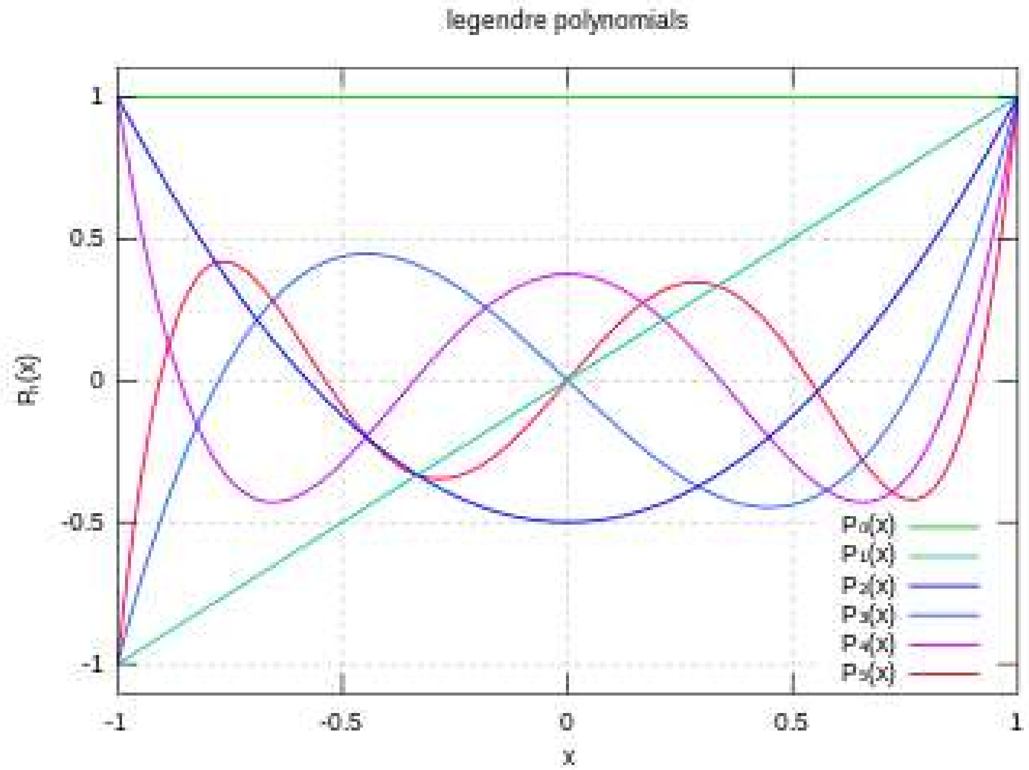
x_k(Legendre多项式的零点)，A_k皆可查表.

- 一般区间$[a,b]$可由变换$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$将其化成$[-1,1]$

- Legendre多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Gauss-Legendre求积公式



	$P_n(x)$
	1
	x
	$\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$
	$\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$
	$\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$
	$\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)$
	$\frac{1}{16}\left(231x^6-315x^4+105x^2-5\right)$
7	$\frac{1}{16}\left(429x^7-693x^5+315x^3-35x\right)$
8	$\frac{1}{128}\left(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35\right)$
9	$\frac{1}{128}\left(12155x^9-25740x^7+18018x^5-4620x^3+315x\right)$
10	$\frac{1}{256}\left(46189x^{10}-109395x^8+90090x^6-30030x^4+3465x^2-63\right)$

Gauss-Legendre求积公式

gauss点个数 n	gauss 点 x_i	权重 A_i	精度
1	x_1=0	A_1=2	1
2	$x_{1,2}=\pm1/\sqrt{3}$	$A_1=A_2=1$	3
3	$x_1=-\sqrt{3/5}$ $x_2=0$ $x_3=\sqrt{3/5}$	$A_1=5/9$ $A_2=8/9$ $A_3=5/9$	5
4	$x_1=-\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}$ $x_2=-\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}$ $x_3=\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}$ $x_4=\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}$	$A_1=\frac{90-5\sqrt{30}}{180}$ $A_2=\frac{90+5\sqrt{30}}{180}$ $A_3=\frac{90+5\sqrt{30}}{180}$ $A_4=\frac{90-5\sqrt{30}}{180}$	7

Gauss-Legendre求积公式

- 数值求积 $\int_0^1 \cos(x)\, dx = 0.841470984807897$

积分数值点	结果
1	0.877582561890373
2	0.841269847638218
3	0.841471416802676
4	0.841470984317385
5	0.841470984808241
6	0.841470984807896

- 积分精度要和计算量之间取得平衡

Gauss-Chebyshev求积公式

- Gauss- Chebyshev求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

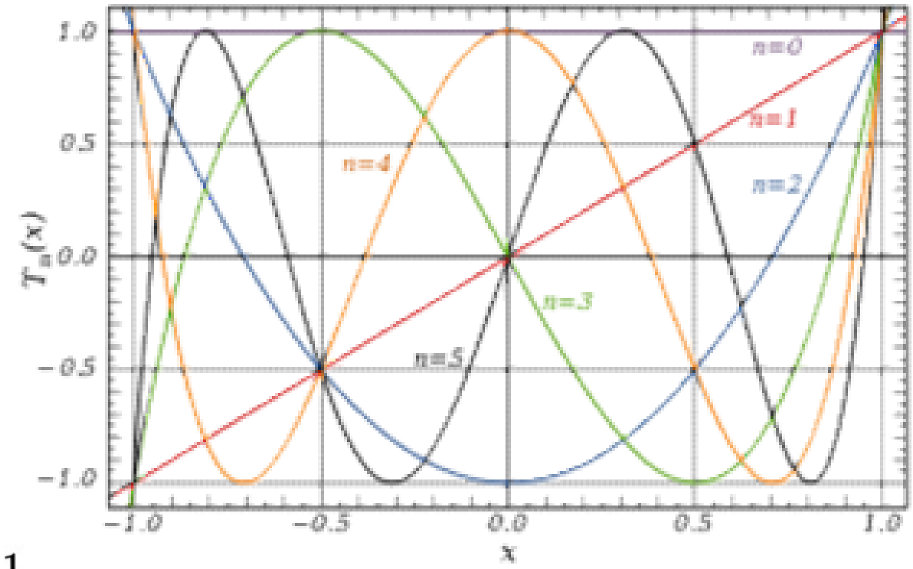
$$R(f)=\frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!}f^{(2n)}(\xi), |\xi|<1$$

x_k(Chebyshev多项式的零点).

- Chebyshev多项式

$$T_n(x)=\cos\big(n\,arccos(x)\big), -1\le x\le 1$$

Gauss-Chebyshev求积公式



$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\
T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \\
T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 \\
T_9(x) &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x \\
T_{10}(x) &= 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1 \\
T_{11}(x) &= 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x
\end{aligned}
$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Chebyshev多项式

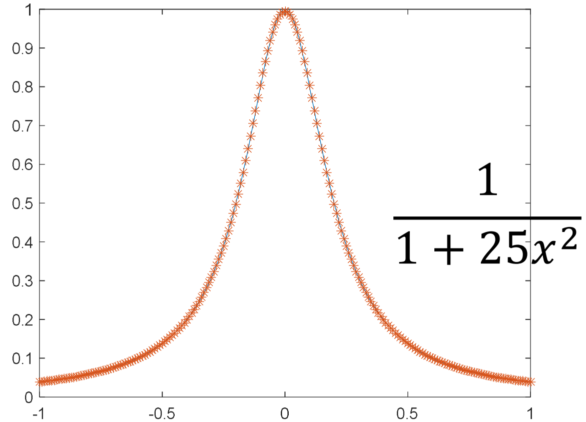
- 利用Chebyshev多项式的零点作多项式插值可以最大限度的降低插值误差！
- n 阶Chebyshev多项式的在区间[-1,1]上零点是

$$t_{\mathrm{k}} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right),\ k = 1,2,\cdots,n$$

- 定理：给定多项式$\mathrm{p}(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$，其中$-1 \le x_1,\cdots,x_n \le 1$，则必有

$$\max_{-1\le x\le 1} |\tilde{T}_n(x)| \le \max_{-1\le x\le 1} |p(x)|$$

其中$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$
$= (x - t_1)(x - t_2)\cdots(x - t_n)$



http://www.chebfun.org/

常用正交多项式

$w(t)$	$[a,b]$	Orth. Pol.	Notation	α_k	β_k
1	$[-1,1]$	Legendre	P_n	0	$2\ (k=0)$ $(4-k^{-2})^{-1}(k>0)$
$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$	$[-1,1]$	Chebyshev #1	T_n	0	$\pi\ (k=0)$ $\frac{1}{2}\ (k=1)$ $\frac{1}{4}\ (k>1)$
$(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$	$[-1,1]$	Chebyshev #2	U_n	0	$\frac{1}{2}\pi\ (k=0)$ $\frac{1}{4}\ (k>0)$
$(1-t)^\alpha\ (1+t)^\beta$ $\alpha>-1,\ \beta>-1$	$[-1,1]$	Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}$	known	known
$t^\alpha e^{-t},\ \alpha>-1$	$[0,\infty]$	Laguerre	$L_n^{(\alpha)}$	$2k+\alpha+1$	$\Gamma(1+\alpha)\ (k=0)$ $k(k+\alpha)\ (k>0)$
e^{-t^2}	$[-\infty,\infty]$	Hermite	H_n	0	$\sqrt{\pi}\ (k=0)$ $\frac{1}{2}k\ (k>0)$