第五章 数值积分与数值微分

- 插值求积公式
- Newton-Cotes公式
- 求积公式代数精确度
- 复合公式
- 逐次分半梯形法
- Richardson外推与 Romberg求积公式
- Gauss型求积公式

数值积分公式

- 数值积分公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

- 需求
  - 原函数不一定能用初等函数表示 ： $\int_0^1 e^{-x^2}dx$
  - 原函数虽能用初等函数表示，但表达式太复杂不便计算： $\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx$
  - 函数由表格给出
- 构造
  - 可利用近似函数的积分作积分的近似，例如由Lagrange插值多项式、Newton插值多项式代入.

插值求积公式

- 将Lagrange插值公式代入积分:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x) + R_n(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$$

其中$A_k, R(f)$分别是$l_k(x), R_n(f)$的积分. 这样得到的数值积分公式称插值求积公式.

插值求积公式

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \frac{w_n(x)}{(x - x_k)w_n'(x_k)}dx$$

$$R(f) = \int_a^b \frac{f^{n+1}(\xi)w_n(x)}{(n+1)!}dx$$

其中$w_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$

- 称A_k为求积公式系数，$R(f)$为其截断断误差
- 易见对次数不超过n的多项式$R(f) = 0$

Newton-Cotes公式

- 梯形公式
  - 用一次插值构造的插值求积公式称梯形公式. 几何上就是用梯形面积逼近曲边梯形的面积
  - 公式:　令　$h = b - a$

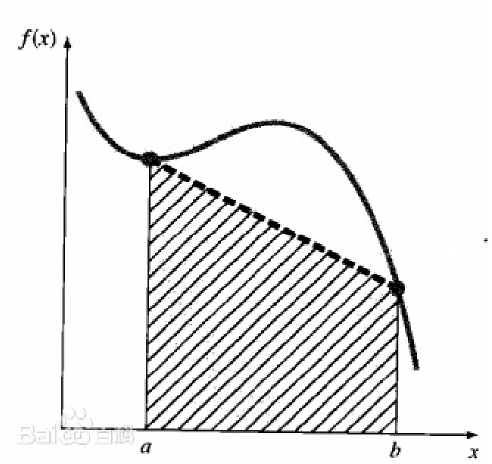
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1))$$

  - 误差

$$R(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)dx = -\frac{h^3}{12}f''(\eta),$$

$$a < \eta < b$$

  - 对次数不超过一的多项式梯形公式是准确的，也称代数精度为1。



Newton-Cotes公式

- 例：$\int_0^1 \sin x dx$
- 精确值

$$\int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1 = 0.459697694131860$$

- 数值积分值：

$$I \approx \frac{\sin 0}{2} + \frac{\sin 1}{2} = 0.420735492403948$$

- 误差：

$$Err = 0.038962201727912$$

- 利用误差公式计算得

$$R = \frac{1}{12} \sin 1 = 0.070122582067325$$

Newton-Cotes公式

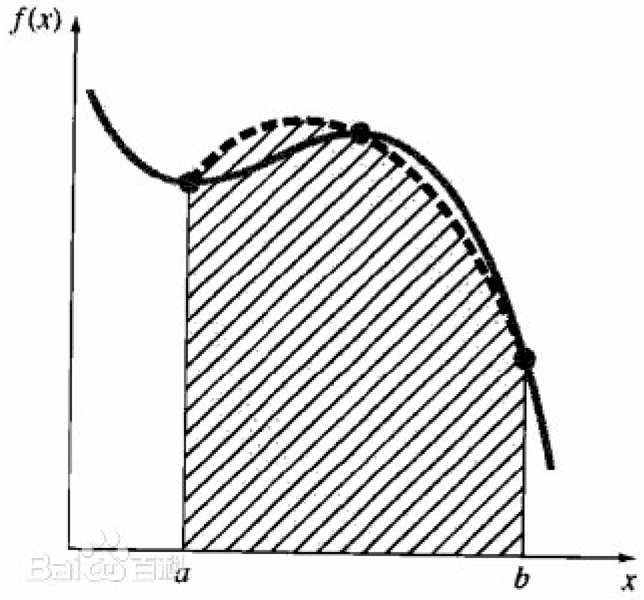
- 抛物线公式（也称辛普森公式）
  - $x_k = a + kh, k = 0,1,2, h = \frac{b-a}{2}$,作二次插值构造的插值求积公式称抛物线公式.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

  - 误差

$$R(f) = \frac{-h^5}{2880} f^{(4)}(\eta), a < \eta < b$$

  - 对次数不超过三的多项式抛物线公式是准确的，也称代数精度为3



Newton-Cotes公式

- 例：$\int_0^1 \sin x dx$
- 精确值

$$\int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1 = 0.459697694131860$$

- 数值积分值：

$$I \approx \frac{1}{6}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{1}{2} + \sin 1\right) = 0.459862189870785$$

- 误差：

$$err = 0.0001644957389245$$

- 利用误差公式计算得

$$R = \frac{1}{2880}\sin 1 = 0.0002921774252805$$

Newton-Cotes公式

- 一般的Newton-Cotes公式
  - 取$x_k = a + kh, k = 0,1,2,\cdots,n, h = \frac{b-a}{n}$, 作$n$次插值, 构造的插值求积公式通称Newton-Cotes公式, 亦称等距基点插值求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

  - $A_k = \frac{(-1)^{n-k}h}{k!(n-k)!}\int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k}dt$
  - 定义： $C_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k}dt$， $C_k^{(n)}$称为Cotes系数，则$A_k = (b-a)C_k^{(n)}$
  - 系数$C_k^{(n)}$有表可查.

Newton-Cotes公式

n	$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

Newton-Cotes公式

- 从误差考虑应当采用系数A_k皆正的那些公式，即取$n = 1,2,\cdots,7$
- 稳定性：
- 定义：若$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$，只要$\left|f(x_k) - \tilde{f}_k\right| \le \delta(k = 0,\cdots,n)$，就有

$$\left|I_n(f) - I_n(\tilde{f})\right| = \left|\sum_{k=0,\cdots,n} A_k[f(x_k) - \tilde{f}(x_k)]\right| \le \varepsilon$$

则称求积公式是稳定的

定理 若求积公式中系数$A_k > 0(0,1,\cdots,n)$,则求积公式是稳定的.

Newton-Cotes公式

当$n = 4$时，得到**柯特斯(cotes)公式**

$$C = \frac{b-a}{90}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)],$$

其中$x_k = a + kh, h = \dfrac{b-a}{4}$.

若$f^{(6)}(x)$在$[a, b]$上连续，则柯特斯公式的余项为

$$R_4[f] = I - C = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta),\quad \eta \in [a, b].$$

求积公式代数精确度

- 定义
  - 一个求积公式对一切次数不超过m的多项式是准确的，而有大于m的多项式不准确，则称该求积公式具有m次代数精确度，或该求积公式的代数精确度是m.
- 例
  - 梯形公式具有1次代数精确度
  - 抛物线公式具有3次代数精确度
  - 一般的Newton-Cotes公式的代数精确度
    - $m = n$, 当$n = 2k + 1$
    - $m = n + 1$, 当 $n = 2k$

代数精确度的确定

- 一个求积公式的代数精确度m可以从它们的截断误差推出，也可按定义依次将$1, x, x^2, x^3, \cdots$代入求积公式从而检查出准确成立的最高次数.
  - 梯形公式具有1次代数精确度
  - 抛物线公式具有3次代数精确度
  - 一般的Newton-Cotes公式的代数精确度
    - $m = n$, 当$n = 2k + 1$
    - $m = n + 1$, 当 $n = 2k$

复化梯形公式

- 复化梯形公式
  - 积分区间分成若干小区间在每个小区间上用梯形公式即得复化梯形公式.
  - 公式:令$x_k = a + kh, k = 0,1,2,\cdots,n, h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

  - 误差

$$R(f) = -\frac{h^3}{12}(f''(\eta_1) + f''(\eta_2) + \cdots + f''(\eta_n)\ \ ) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$$

复化抛物线公式

- 复化抛物线公式
  - 积分区间分成$2n$ 个小区间在每两个小区间上用抛物线公式即得复化抛物线公式.
  - 公式:令$x_k = a + kh, k = 0,1,2,\cdots,2n, h = \frac{b-a}{2n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots$$

$$+2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))$$

  - 误差

$$R(f) = -\frac{h^5}{90}\left(f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2) + \cdots + f^{(4)}(\eta_n)\right) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\eta)$$

例 根据数据表利用复合求积公式求 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ 的值.

x_i	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
$f(x_i)$	1	0.9973978	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	0.8414709

$$T_8=\frac{1}{8}\left[\frac{f(0)}{2}+f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)+\frac{f(1)}{2}\right]$$

$$\approx 0.9456909.$$

精确值：0. 946083070367183

$$S_4=\frac{1}{4\times 6}\left\{f(0)+4\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]\right.$$

$$\left.+2\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]+f(1)\right\}\approx 0.9460832$$

$$C_2=\frac{1}{2\times 90}\left\{7f(0)+32\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]\right.$$

$$\left.+12\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]+14f\left(\frac{1}{2}\right)+7f(1)\right\}\approx 0.9460829$$

误差估计

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}=\int_0^1\cos(xt)\mathrm{d}t,$$

$$f^{(k)}(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(\cos xt)\mathrm{d}t=\int_0^1 t^k\cos(xt+\frac{k\pi}{2})\mathrm{d}t,$$

$$\max_{0\le x\le 1}\left|f^{(k)}(x)\right|\le\int_0^1 t^k\left|\cos(xt+\frac{k\pi}{2})\right|\mathrm{d}t\le\frac{1}{k+1}.$$

$$R_T=\left|I-T_8\right|\le\frac{1}{12}h^2\max_{0\le x\le 1}\left|f''(\eta)\right|\le\frac{1}{12}\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{1}{3}=0.000434.$$

$$R_S=\left|I-S_4\right|\le\frac{1}{2880}\left(\frac{1}{4}\right)^4\frac{1}{5}=0.271\times10^{-6}.$$