

科学计算

第九次作业

2021 年 5 月 16 日

1. 运用Gauss列主元消去法，用准确算术运算写出下列方程组的求解过程

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases} \quad (1)$$

2. 如果 A 是一个对称正定矩阵，且带宽为 $2m + 1$ ，证明：在 A 的Cholesky分解 $A = LL^T$ 中出现的矩阵 L 是带宽为 $m + 1$ 的矩阵。

3. 证明 n 阶矩阵 A 的Frobenius范数

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

满足范数的定义。

4. 对于 n 阶矩阵 A ，证明以下矩阵范数的等价性

(a)

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$$

(b)

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$$

(c)

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$$

5. **编程计算：** n 阶希尔伯特矩阵 H 的矩阵元素为 $H_{ij} = 1/(i + j - 1), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$ 。令 $b = Hx$ ，其中 x 是元素全部为1的向量。编程利用列主元高斯消去法求解线性方程 $Hx = b$ ，得到近似解 \tilde{x} 。计算残差（也称后向误差） $r = b - H\tilde{x}$ 的无穷范数，以及解的误差（也称前向误差） $x - \tilde{x}$ 的无穷范数。找出最小的 n 使得相对前向误差

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \geq 1$$

即误差为100%，并估计此时的条件数

$$\text{cond}(A) \approx \left(\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \right) / \left(\frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty} \right).$$