病态现象

- 例6：病态方程组

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 2\\ 1 & 1.0001 & 2\end{array}\right]\to\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},\quad \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 2\\ 1 & 1.0001 & 2.0001\end{array}\right]\to\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

- 例7：病态矩阵

$$H_4=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5\\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6\\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7\end{bmatrix},\quad H_4^{-1}=\begin{bmatrix}16 & -120 & 240 & -140\\ -120 & 1200 & -2700 & 1680\\ 240 & -2700 & 6480 & -4200\\ -140 & 1680 & -4200 & 2800\end{bmatrix}$$

H_4取五位有效数字，其逆误差在前面第二、三位上：

$$\begin{matrix}16.248 & -122.72 & 246.49 & 144.20\\ -122.72 & 1229.9 & -2771.3 & 1726.1\\ 246.49 & -2771.3 & 6650.1 & -4310.0\\ -144.20 & 1726.1 & -4310.0 & 2871.1\end{matrix}$$

向量和矩阵的范数

- 向量范数

  设 $\|\cdot\|: x \in C^n \to \|x\| \in R$, 满足
  - 正定性：$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \ iff \ x = 0$
  - 齐次性：$\|cx\| = |c|\|x\|$
  - 三角不等式：$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

  则称C^n中定义了向量范数，$\|x\|$为向量x的范数.

- 矩阵范数

  设$\|\cdot\|: X \in C^{n\times n} \to \|X\| \in R$，满足
  - 正定性：$\|X\| \geq 0, \|X\| = 0 \ iff \ X = 0$
  - 齐次性：$\|cX\| = |c|\|X\|$,
  - 三角不等式：$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$
  - 相容性：$\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$

  则称$C^{n\times n}$中定义了矩阵范数，$\|X\|$为矩阵X的范数.

常用向量范数

- 常用向量范数：$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$
  - 1−范数$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$
  - 2−范数$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
  - ∞−范数$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)$
- 性质

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n^{\frac{1}{2}}\|x\|_2 \le n\|x\|_\infty$$

向量序列收敛性

- 向量范数等价性
  - C^n中任意两种向量范数$\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta$是等价的，即有 $m, M > 0$使 $m\|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le M\|x\|_\alpha$
- 向量序列收敛性等价表达
  - $\{x^{(k)}\}$收敛于$x(k \to \infty)$
  - $x^{(k)} \to x(k \to \infty)$
  - $x_j^{(k)} - x_j \to 0, j = 1,2,\cdots,n(k \to \infty)$
  - $\|x^{(k)} - x\| \to 0(k \to \infty)$

其中$x_j^{(k)}$是$x^{(k)}$的第j个分量，x_j是x的第j个分量

算子范数

- 范数相容性定义
  - 矩阵范数向量范数相容，若$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$
- 定理
  - 设A是$n \times n$矩阵，$\|\cdot\|$是n维向量范数，则

$$\|A\| = \max\{\|Ax\|: \|x\| = 1\}$$
$$= \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}: x \neq 0\right\}$$

    是一种矩阵范数，称为由该向量范数诱导出的矩阵范数或算子范数
  - 它们具有相容性或者说是相容的

常用矩阵范数

- 注
  - 任一矩阵范数都有与之相容的向量范数
  - 单位矩阵算子范数为1
- 常用矩阵范数
  - 1-范数：$\|A\|_1 = \max\{\|Ax\|_1 : \|x\|_1 = 1\} = \max\limits_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
  - 2-范数：$\|A\|_2 = \max\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 = 1\} = \sqrt{\lambda_1}$

    λ_1是$A^H A$的最大特征值
  - ∞-范数：$\|A\|_\infty = \max\{\|Ax\|_\infty : \|x\|_\infty = 1\} = \max\limits_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
  - Frobenius范数：$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

    它与向量2-范数相容. 但非算子范数

矩阵谱半径

- 谱半径
  - 称$\rho(A) = max|\lambda_i|$
    为A的谱半径 ， λ_i是其特征值, $i = 1,2,\cdots n.$
  - 谱半径非矩阵范数（例如, 无正定性）
  - $\rho(A) \le \|A\|$
  - $\|A\|_2 = \left(\rho(A^H A)\right)^{\frac{1}{2}}$
  - 若$A^H = A$, 则$\|A\|_2 = \rho(A)$
  - 矩阵序列$I, A, A^2, \cdots, A^k, \cdots$收敛于零的充分必要条件是
    $\rho(A) < 1$

扰动分析

- 方程$Ax = b(b \neq 0)$ 一般扰动方程
  $$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$$
- 解的扰动(当$\|A^{-1}\|\|\Delta A\| < 1$)
  - 一般情况
    $$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)$$
  - 特例:只右端项有扰动
    $$\frac{\|\Delta x\|}{\|\mathrm{x}\|} \leq (\|A^{-1}\|\|A\|)\ \frac{\|\Delta b\|}{\|\mathrm{b}\|}$$
  - 特例:只系数有扰动
    $$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)$$

敏感性与条件数

- 条件数

$$Cond(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$$

  - $Cond(A) \geq 1$
  - $Cond(cA) = Cond(A), c \neq 0$
  - $Cond(A)_2 = \|A^{-1}\|_2\|A\|_2 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{2}}$称为谱条件数，$\lambda_1, \lambda_n$分别是$A^H A$的最大和最小特征值.
  - 正交矩阵，酉矩阵的谱条件数为1.

- 扰动分析表明：条件数不大，扰动对解的影响不大；条件数越大，扰动对解的影响也越大. 这就是说条件数是方程组敏感性以及病态或良态的度量.

- 系数矩阵的谱条件数：例6中$2.0001^2 \times 10^4$，例7中28000.

病态的发现与处理

- 下述情况会出现病态
  - 行或列近似线性相关
  - 行列式接近零
  - 主元素法出现小主元
  - 条件数估算很大
- 病态方程组的计算
  - 用双精度或更高精度计算
  - 用迭代改善法