

# Part1

## 解题思路：

如文档所说，这是一个完全背包问题，动态规划中的中间变量是从 1 开始直到总金额中每一个金额被硬币组合出的组合数。为此，构建一个  $M \times |N|$  的矩阵，用来存放中间结果。根据下面写的递归方程填满表格，最后取出  $dp[\text{coins.size()}][\text{amount}]$  就是答案了

## 代码实现思路：

首先对 dp 数组进行初始化， $dp[0][i] = 0$ ;  $dp[i][0] = 1$

之后根据递归方程填表

最后取  $dp[\text{coins.size()}][\text{amount}]$  就是答案

## 问题回答

1.

硬币/金额	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	3	3	4	4
5	1	1	2	2	3	4	5	6
10	1	1	2	2	3	4	5	6

硬币/金额	8	9	10	11	12	13
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	5	5	6	6	7	7
5	7	8	10	11	13	14
10	7	8	11	12	15	16

2.时间复杂度：O (MN);

3.观察发现，

$$dp[i][j] = \begin{cases} dp[i][j - \text{coins}[i - 1]] + dp[i - 1][j]; & \text{if } (j - \text{coins}[i - 1] \geq 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$dp[i][j] = dp[i-1][j]; \text{ if } (j - \text{coins}[i-1] < 0)$

当填  $dp[i][j]$  时，只需要第  $i-1$  行和第  $i$  行的值。故只需要保存两行即可。将空间复杂度优化到  $O(M)$ ;

## Part2

参考文档: <https://www.cnblogs.com/shenben/p/5776665.html>

### 解题思路:

构建一个  $\text{amount} \times \text{amount}$  的数组，其中  $\text{meet}[i][j]$  表示第  $i$  个人是否可以与第  $j$  个人存在 pk 机会，如果一个人可以与自己 pk，那么他就能吃鸡

### 代码实现思路:

首先申请  $\text{meet}$  数组，并赋初始值， $\text{meet}[i][(i+1)\% \text{amount}] = 1$ ，即每个人能和旁边的人决斗。接着利用三层循环。第一层循环是两名决斗者之间的偏移量，第二层循环遍历每一个决斗者，有了这两层循环就能找到被决斗者，第三层循环寻找两名决斗者 AB 之间的其他人，判断 AB 是否能通过干掉中间人的方式来遇到，然后根据是否相遇填好  $\text{meet}$  表。最后遍历  $\text{meet}$  表，找到能遇到自己的人数，即为能吃鸡的人数。

### 问题回答:

(1) 不能吃鸡的人: 第二个人，即下标序号为 1 的人

0 号吃鸡: ① 4-5 4 胜  
② 1-2 2 胜  
③ 2-3 3 胜  
④ 3-4 4 胜  
⑤ 0-4 0 胜, 吃鸡

2 号吃鸡: ① 4-5 4 胜  
② 3-4 4 胜  
③ 0-4 0 胜  
④ 0-1 0 胜  
⑤ 0-2 2 胜, 吃鸡

3 号吃鸡: ① 4-5 4 胜  
② 4-0 0 胜  
③ 0-1 0 胜  
④ 0-2 2 胜  
⑤ 2-3 3 胜

4 号吃鸡: ① 0-5 0 胜  
② 0-1 0 胜  
③ 0-2 2 胜  
④ 2-3 3 胜  
⑤ 3-4 4 胜, 吃鸡

5 号吃鸡: ① 2-3 2 胜  
② 3-4 3 胜  
③ 0-1 0 胜  
④ 0-2 2 胜  
⑤ 2-5 5 胜, 吃鸡

(2) 时间复杂度:  $O(n^3)$

空间复杂度:  $O(n^2)$

在当前算法下, 时间复杂度和空间复杂度都已经达到最佳了。在这个算法下, 一个循环算决斗两人偏移量, 一个循环选当前决斗的发起角色, 一个循环找决斗的两个人之间的路径, 缺一不可, 故时间复杂度最优也是  $O(n^3)$  了。

空间复杂度: 由于填当前 meet 表的时候不确定当前还剩下谁, 只能保留全部的 meet 表, 不能覆盖, 所以空间复杂度不能小于  $O(n^2)$

## Part3

### 参考资料:

<https://www.luogu.com.cn/problem/P3232>

<http://leungyukshing.cn/archives/%E9%AB%98%E6%96%AF%E6%B6%88%E5%85%83%E6%B3%95%E4%B9%8B%E8%AE%B2%E8%A7%A3%E4%B8%8E%E4%BB%A3%E7%A0%81%E5%AE%9E%E7%8E%B0.html>

### 解题思路:

以  $hp \times n$  建立动态规划的矩阵是一个不错的想法, 把  $f(i,j)$  设置为剩下  $i$  点血时到达  $j$  点的期望次数。然后写出非特殊点位的转移方程。根据转移方程, 在一层中可以求出有伤害点的  $f$ , 无伤害点的  $f$  可以列方程组用高斯消元解决。求出所有  $f$  后, 把  $n$  号点的所有  $f$  相加就是最后结果。

### 代码实现思路:

首先把 edges 的关系转化成二维数组 relation 的关系矩阵表示。同时初始化各个点的度 degree, 以及把有伤害的点和无伤害的点分开。

使用 for 循环, 对每一层  $f$  进行遍历 (即有相同血量的点)

先对有伤害的点进行处理, 直接用状态方程解出来  $f$

再处理没伤害的点, 根据状态转移方程, 找出系数矩阵  $A$ , 常数向量  $b$ , 高斯消元。

最后把  $n$  号点对应所有血量的  $f$  相加, 即最后概率

(1) 非特殊点位转移方程:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f[i + \text{damage}[j]][k] * \text{relation}[j][k] / \text{degree}[k]$$

特殊点：f[hp][1] = 1，当 i+damage[j]>hp 时，f[i+damage[j]][k] = 0;

- (2) 方程组的未知数是 f[i][j], i 为当前的血量，j 为伤害为 0 的节点的标号

系数其他的与当前节点相连的、伤害为 0 的点的度的负倒数

常数项是所有已知伤害点的 f/degree

增广矩阵即方程组系数矩阵和常数列向量矩阵合成的矩阵

- (3) 高斯消元的时间复杂度是  $O(n^3)$ ，针对每一层 hp，都要进行一次高斯消元，所以总体时间复杂度是  $O(\text{hp} * n^3)$

空间复杂度：需要申请 (hp) + 1 \* n 大小的 f 数组，故空间复杂度是  $O(n * \text{hp})$

时间复杂度方面，我个人认为如果继续使用高斯消元法，时间复杂度应该已经达到最大值。查阅资料，发现如果使用牛顿迭代法解方程，解方程的时间复杂度可以达到  $O(n^2)$ ，这应该是一个新的优化思路。