求两点之间所有路径的算法

作者：finallyly 出处：博客园（如若转载请注明作者和出处）

最近在实现一个算法，算法之内有一个子算法是求有向图内两个定点（原点和目的点）之间的全部路径。在网上翻阅了大部分资料，发现给出的算法和代码要么只能解决 DAG（有向无环图）的两定点之间所有路径问题，要么就是算法本身存在若干漏洞，连 DAG 图也无法解决。花费了一天的时间，自己写了个求简单有向图中（包括 dag 和非 dag）两定点之间所有路径的算法，特共享出来。

文章将按如下组织，首先给出 path 的定义，其次给出 dag 的定义，然后给出算法的伪代码，之后是算法的 C++实现以及实验结果。

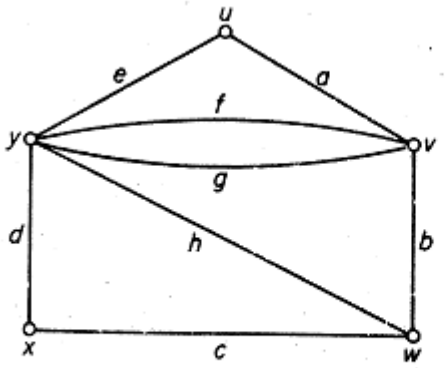
1 Path 的定义

Path 的定义是建立在 walk,基础上的。参见 Bondy 的《Graph Theory With Applications》

A *walk* in G is a finite non-null sequence $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots e_kv_k$, whose terms are alternately vertices and edges, such that, for $1 \le i \le k$, the ends of e_i are v_{i-1} and v_i. We say that W is a walk *from* v_0 *to* v_k, or a (v_0, v_k)-*walk*.

If the edges $e_1, e_2, \ldots, e_k$ of a walk W are distinct, W is called a *trail*;

If the edges $e_1, e_2, \ldots, e_k$ of a walk W are distinct, W is called a *trail*; in this case the length of W is just $\varepsilon(W)$. If, in addition, the vertices $v_0, v_1, \ldots, v_k$ are distinct, W is called a *path*. Figure 1.8 illustrates a walk, a trail and a path in a graph. We shall also use the word 'path' to denote a graph or subgraph whose vertices and edges are the terms of a path.



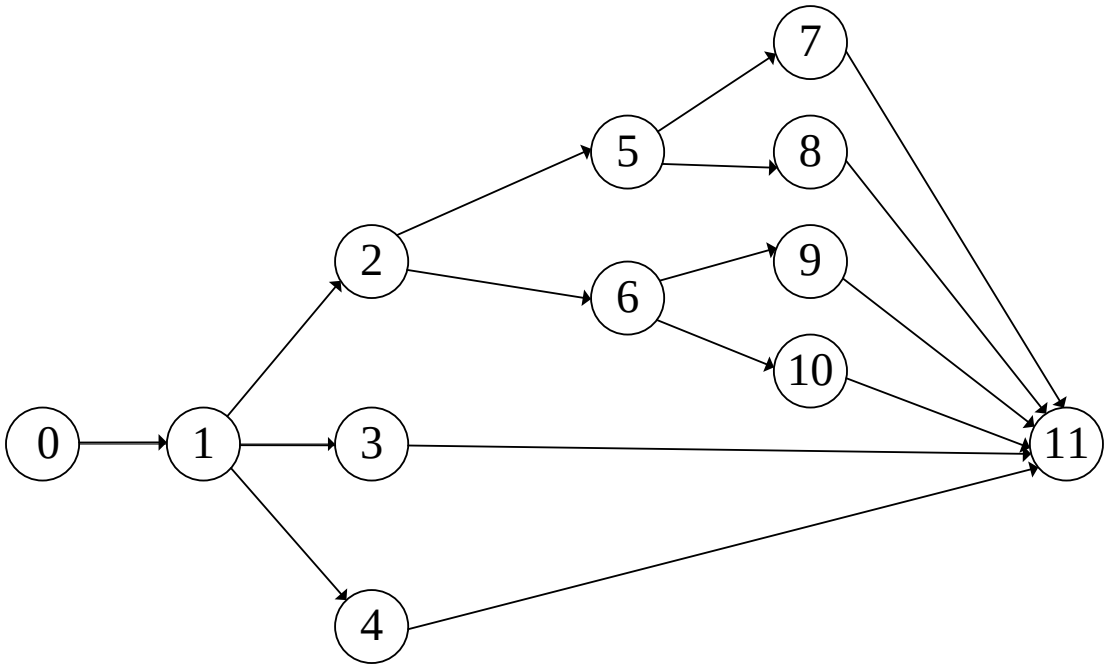
Walk: *uavfyfvgyhwbv*
Trail: *wcxdyhwbvgy*
Path: *xcwhyeuav*

Figure 1.8

由上面的定义，我问可以得出 path 是一个结点和边交叠出现的序列，并且在这个序列中结点不能重复，边也不能重复。

2 DAG 的定义

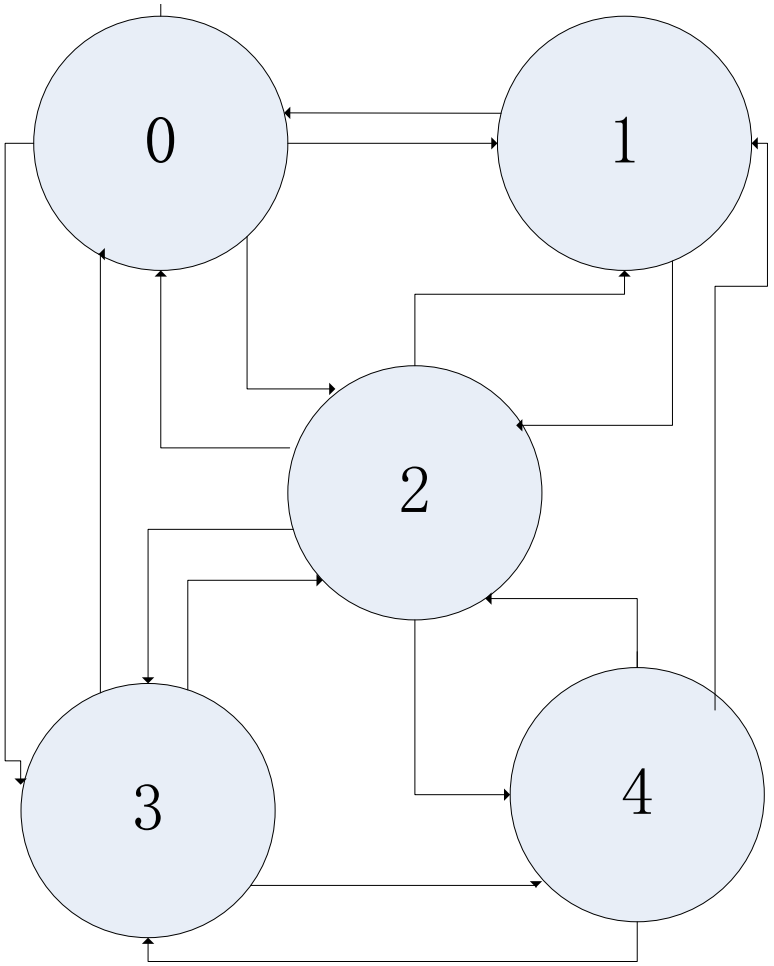
DAG（Directed Acyclic Graph）:即不存在环路的有向图。或者说是 DFS 过程中不出现回边(backc edge)的图。如图 2-1 就是一个 DAG。更一般的有向图见图 2-2



2-1 DAG

++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

第 1 条路径是：0-->1-->4-->11
第 2 条路径是：0-->1-->3-->11
第 3 条路径是：0-->1-->2-->6-->10-->11
第 4 条路径是：0-->1-->2-->6-->9-->11
第 5 条路径是：0-->1-->2-->5-->8-->11
第 6 条路径是：0-->1-->2-->5-->7-->11
++++++++++++++++++++++++++++++++++++



2-2 Digraph

该图对应的矩阵型存储格式为：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

它的路径有：

++

第一条路径：0->1->2->3->4
第二条路径：0->1->2->4
第三条路径：0->1->3->2->4

第四条路径：0->1->3->4
第五条路径：0->1->4
第六条路径：0->2->1->3->4
第七条路径：0->2->1->4
第八条路径：0->2->3->1->4
第九条路径：0->2->3->4
第十条路径：0->2->4
第十一条路径：0->3->1->2->4
第十二条路径：0->3->1->4
第十三条路径：0->3->2->1->4
第十四条路径：0->3->2->4
第十五条路径：0->3->4
++

3 算法设计

待求解问题是“求原点和目的点之间的全部路径”，求解问题的第一步，我们需要确定这是一个 P 问题还是 NP 问题。对于 P 问题，可以直接设计算法；对于 NP 问题，则需要一些近似手段。值得庆幸的是这是一个 P 问题。算法最大复杂度为$\mathrm{O}\left((n-2)!\right)$

证明如下：

假定有向图为 N 个节点的简单完全图，即每个节点都与其他 N-1 个节点有边相连。起始结点和结束节点确定，那么我们需要排列中间的 N-2 个节点，对于第一个非固定的节点，它有 N-2 种可能取值。。。以此类推得到上述答案。

求两定点之间的全部路径，其根本是一个涉及到搜索和回溯的问题。我们设计算法时所关心的首要问题是：按照何种顺序搜索和回溯才能保证路径可以不重不漏地被全部找到。

如下是算法设计部分

图的存储结构：邻接矩阵。Arcs
工作结构：结点栈 mystack;
状态保存结构：

（1） VertexStatus[]={0,0,0,1,1,…}。当结点未进栈或者已经出栈，则其对应的状态为 0，否则状态为 1；
（2） ArcStatus[][]={0,0,1,0,1…..}当且仅当边的两个结点都在栈外时，边的状态才为 0，否则为 1。

注意我们只所以设计如上结点、边两个状态存储结构，就是依据于 path 的定义，结点不重复，边不重复。具有边状态存储结构，也是我的算法与其他算法根本上的不同。
不失一般性，我们假设原点的编号最小为 0,目标点的编号最大 N。我们的问题转换成了，求

最小编号的节点与最大编号的节点之间的所有路径。

```
Intial :
Paths={}//路径集合
VertexStatus[]={0};//全部置 0
ArcStatus[][]={0};////全部置 0
mystack.push(0);
VertexStatus[0]=1;
While(!mystack.empty())
{
    Int elem= mystack.top();//获得栈顶元素
    if(elem==N)//找到了一条路径
    {
        path=Traverse(mystack);
        Paths.add(path);
        VertexStatus[elem]=0;
        UpdateArcStatus();//更新 ArcStatus[][]，使得所有两个端点都不在栈内的边的状态为
0
        mystack.pop();//移除栈顶元素
    }
    else
    {
        i=0;
        For(;i<N;i++)
        {   if(VertexStatus[i]=0&&ArcStatus[elem][i]=0&&Arcs.contain(elem,i))
            {
                VertexStatus[i]=1;
                ArcStatus[elem][i]=1;
                Mystack.push(i);//入栈
                break;
            }

        }
        if(i=N)//该节点没有符合要求的后续节点
        {
        VertexStatus[elem]=0;
        UpdateArcStaus();////更新 ArcStatus[][]，使得所有两个端点都不在栈内的边的状为 0
        Mystack.pop();//出栈

        }


    }
    }
```

4 算法的 C++实现

```
Editdistance.h
#pragma once
#include "common.h"
#include<map>
#include <cmath>
#include <stack>
class EditDistance
{
public:
    EditDistance(wstring s, wstring t);
   map<pair<int,int>,char>graphR;//int,int 代表首尾节点编号，char,表示边
map<pair<int,int>,int>Vertex;//状态节点号对应表
void GetPaths(vector<vector<int>>&paths);//求两结点之间的所有边
}
Editdistance.cpp
/*************************************************************************/
/* 求原点到终点的所有路径，即所有最优结
果                                                                       */
/*************************************************************************/

void EditDistance:: GetPaths(vector<vector<int>>&paths)
{
    stack<int>mystack;
    vector<int> singlepath;
    int *vertexsStatus=new int[Vertex.size()];//0，未在栈内，已经在栈内。
    map<pair<int,int>,int>arcstatus;
    for (int i=0;i<Vertex.size();i++)
    {
        vertexsStatus[i]=0;
    }
    for (map<pair<int,int>,char>::iterator it=graphR.begin();it!=graphR.end(
);it++)
    {
        arcstatus[it->first]=0;
    }


    mystack.push(0);
    vertexsStatus[0]=1;
    int justpopup=-1;//保存刚刚出栈的元素
    while(!mystack.empty())
```

```
    {
        int elem=mystack.top();
        if (elem==Vertex.size()-1)//出栈的第一个条件找到了目的节点
        {  //以下代码完成栈的遍历
            while(!mystack.empty())
            {
                int tmp=mystack.top();
                mystack.pop();
                singlepath.push_back(tmp);
            }
            for (vector<int>::reverse_iterator rit=singlepath.rbegin();rit!=singlepath.rend();rit++)
            {
                mystack.push(*rit);

            }
            paths.push_back(singlepath);
            singlepath.clear();

            vertexsStatus[elem]=0;
            for (int k=0;k<Vertex.size();k++)
            {
                if (vertexsStatus[k]==0)
                {
                    if (arcstatus.count(make_pair(elem,k)))
                    {
                        arcstatus[make_pair(elem,k)]=0;
                    }

                }
            }


            mystack.pop();

        }
        else
        {   int i=0;
            for (;i<Vertex.size();i++)
            {
                if (graphR.count(make_pair(elem,i))&&vertexsStatus[i]==0&&arcstatus[make_pair(elem,i)]==0)
                {
                    mystack.push(i);
```

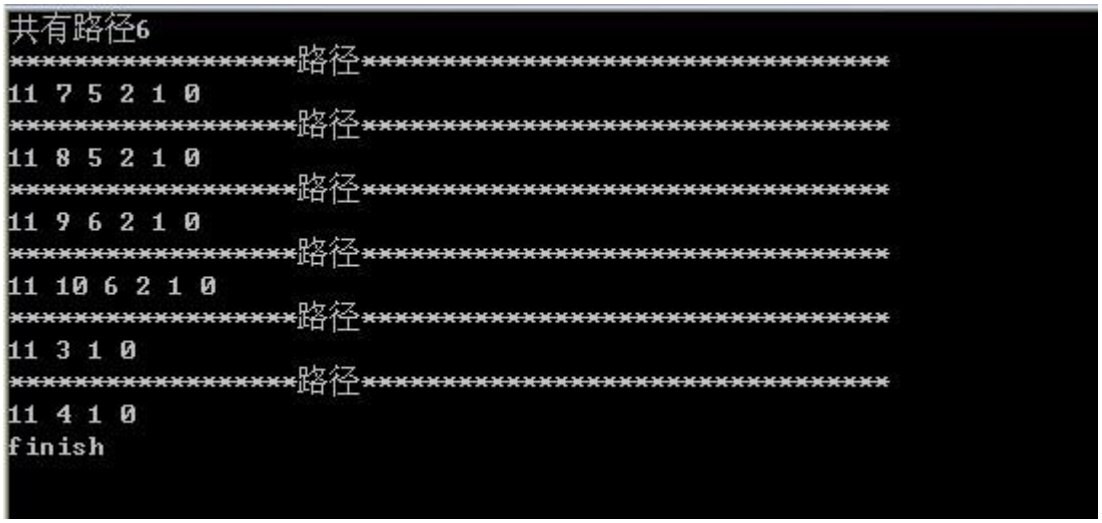
```
                    vertexsStatus[i]=1;
                    arcstatus[make_pair(elem,i)]=1;


                    //graphR.erase(make_pair(elem,i));

                    break;
                }
            }
            if (i==Vertex.size())//出栈的第二个条件，没有可以往栈内添加的后续节点了。
            {
                int elemtmp=mystack.top();
                vertexsStatus[elemtmp]=0;
                for (int k=0;k<Vertex.size();k++)
                {
                    if (vertexsStatus[k]==0)
                    {
                        if (arcstatus.count(make_pair(elemtmp,k)))
                         {
                             arcstatus[make_pair(elemtmp,k)]=0;
                         }
                     }
                 }

                 mystack.pop();


             }

        }


    }


    delete vertexsStatus;

}
Main.cpp
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
```

```
{

wstring g=L"ace";
    wstring s=L"aec";
    EditDistance editdistance(s,g);


/*
   editdistance.Vertex[make_pair(0,0)]=0;
   editdistance.Vertex[make_pair(0,1)]=1;
   editdistance.Vertex[make_pair(1,0)]=2;
   editdistance.Vertex[make_pair(1,1)]=3;
   editdistance.Vertex[make_pair(1,2)]=4;
   editdistance.Vertex[make_pair(2,1)]=5;
   editdistance.Vertex[make_pair(3,1)]=6;
   editdistance.Vertex[make_pair(4,1)]=7;
   editdistance.Vertex[make_pair(1,3)]=8;
   editdistance.Vertex[make_pair(1,4)]=9;
   editdistance.Vertex[make_pair(2,3)]=10;
   editdistance.Vertex[make_pair(4,5)]=11;
    editdistance.graphR[make_pair(0,1)]='e';;
    editdistance.graphR[make_pair(1,2)]='e';
    editdistance.graphR[make_pair(1,3)]='e';
    editdistance.graphR[make_pair(1,4)]='e';
    editdistance.graphR[make_pair(2,5)]='e';
    editdistance.graphR[make_pair(2,6)]='e';
    editdistance.graphR[make_pair(5,7)]='e';
    editdistance.graphR[make_pair(5,8)]='e';
    editdistance.graphR[make_pair(6,9)]='e';
    editdistance.graphR[make_pair(6,10)]='e';
    editdistance.graphR[make_pair(3,11)]='e';
    editdistance.graphR[make_pair(4,11)]='e';
    editdistance.graphR[make_pair(7,11)]='e';
    editdistance.graphR[make_pair(8,11)]='e';
    editdistance.graphR[make_pair(9,11)]='e';
    editdistance.graphR[make_pair(10,11)]='e';
*/

 editdistance.Vertex[make_pair(0,0)]=0;
 editdistance.Vertex[make_pair(0,1)]=1;
 editdistance.Vertex[make_pair(1,0)]=2;
 editdistance.Vertex[make_pair(1,1)]=3;
 editdistance.Vertex[make_pair(1,2)]=4;
 editdistance.graphR[make_pair(0,1)]='e';
```

```
169.  editdistance.graphR[make_pair(0,2)]='e';
170.  editdistance.graphR[make_pair(0,3)]='e';
171.  editdistance.graphR[make_pair(1,0)]='e';
172.  editdistance.graphR[make_pair(1,2)]='e';
173.  editdistance.graphR[make_pair(1,3)]='e';
174.  editdistance.graphR[make_pair(1,4)]='e';
175.  editdistance.graphR[make_pair(2,0)]='e';
176.  editdistance.graphR[make_pair(2,1)]='e';
177.  editdistance.graphR[make_pair(2,3)]='e';
178.  editdistance.graphR[make_pair(2,4)]='e';
179.  editdistance.graphR[make_pair(3,1)]='e';
180.  editdistance.graphR[make_pair(3,2)]='e';
181.  editdistance.graphR[make_pair(3,0)]='e';
182.  editdistance.graphR[make_pair(3,4)]='e';
183.  editdistance.graphR[make_pair(4,1)]='e';
184.  editdistance.graphR[make_pair(4,2)]='e';
185.  editdistance.graphR[make_pair(4,3)]='e';
186.
187.
188.   vector<vector<int>>paths;
189.   editdistance.GetPaths(paths);
190.   for (vector<vector<int>>::iterator it=paths.begin();it!=paths.end();it++)

191.   {   cout<<"******************路径
    ********************************"<<endl;
192.       for (vector<int>::iterator subit=it->begin();subit!=it->end();subit++
    )
193.       {
194.           cout<<*subit<<" ";
195.       }
196.       cout<<endl;
197.   }
198.
199.     cout<<"finish"<<endl;
200.     int f;
201.     cin>>f;
202.     }
```

5 实验结果

在 DAG（图 2-1）上运行算法的结果



在一般的 Digraph(图 2-2)上运行上述算法结果如下