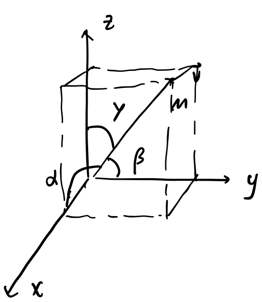
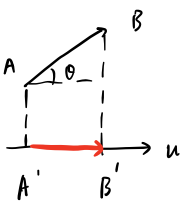
一、向量代数

1. 向量的方向角



2. 投影



A'B' 称为 AB 在 u 上投影，记作 $Prj_u \vec{AB}$

$|A_1B_1| = Prj_u \vec{AB} = |\vec{AB}|\cos\theta$

3. $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$.

$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$. 方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{a_1}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta=\dfrac{a_2}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma=\dfrac{a_3}{|\vec{a}|}$

且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

单位化：$\vec{a}^\circ = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\dfrac{a_1}{|\vec{a}|}, \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}, \dfrac{a_3}{|\vec{a}|}\right)$

$= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

4. 外积 $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 几何意义：

此 ▱ 面积

5.

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

6. 设

$$\begin{cases}\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k} \\ \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}\end{cases}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

7. 混合积：记 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

即为 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 三者张成平行六面体大小

设 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ $\vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

8. 对"顺序"同号"异序反号"

(a,b,c) $= -(b,a,c)$

$=(b,c,a)$ $= -(c,b,a)$

$=(c,a,b)$ $= -(a,c,b)$

二、平面与直线

1. 平面方程：面 Π 过 (x_0, y_0, z_0)，法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

则 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. (点法式)

$\forall M_1(x,y,z)\in\Pi \iff \vec{n}\cdot\vec{MM_1}=0$ ✓

$\iff Ax+By+Cz+D=0$ (一般式)

设空间中三点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1,2,3)$ 共面

此面方程为
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{三点式})$$

平面过 $(a,0,0)$ $(0,b,0)$ $(0,0,c)$ 的方程：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad (\text{截距式})$$

2. 特殊平面方程

①过原点：$Ax+By+Cz=0$

②平行于坐标轴：
$$\begin{cases} x: & A=0 & Bx+Cy+D=0 \\ y: & \vdots & \vdots \\ z: & \vdots & \vdots \end{cases}$$

③ 过坐标轴 $\Longleftrightarrow$ 过原点 + 平行于轴.

$$\begin{cases} x:\ Bx+Cy=0 \\ y:\ --- \\ z:\ --- \end{cases}$$

④ 平行于坐标平面的平面

$$\begin{cases} xoy:\ Cx+D=0 \\ yoz:\ Ax+D=0 \\ zox:\ Bx+D=0 \end{cases}$$

3. 点到平面距离:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

4. 平面与平面夹角 → 但应在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内

5. 直线的方程

L 过 $M(x_0, y_0, z_0)$ 方向向量 $\vec{s}=(l,m,n)$

则 $L:\ \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$

↓ 可能为0

(点向式. 标准式. 对称式).

若 L 过 (x_1,y_1,z_1) (x_2,y_2,z_2) 则

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$ (两点式方程)

L 也可认为是 两个平面交线

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

若要化为一般式

取 $\vec{s}=(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)$

再取 $x=x_0 \to y_0.\ z_0$

即✓

6. 点到直线距离公式

$M(x_1,y_1,z_1)\notin L:\ \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ $\quad \vec{s}=(l,m,n)$

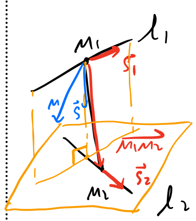
$d=\dfrac{|\overrightarrow{MM_0}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$, M_0 为 L 上任一点

7. 线线关系 $L_i:\ \dfrac{x-x_i}{l_i}=\dfrac{y-y_i}{m_i}=\dfrac{z-z_i}{n_i}$ $(i=1,2)$

① 定义夹角为 $\langle\vec{s_1},\vec{s_2}\rangle\in[0,\frac{\pi}{2}]$ $\quad \vec{s_i}=(l_i,m_i,n_i)$, $M_i=(x_i,y_i,z_i)$

② 共面 $\Longleftrightarrow$ $s_1, s_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 共面

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$



8. 异面两线距离 $\quad$ 设 $s=\vec{s_1}\times\vec{s_2}$ → 公垂线方向向量

$$d=|Prj_s\overrightarrow{M_1M_2}|=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

Sol1: 在 L_1 与公垂线 L 所张平面上任取 $M(x,y,z)$

由 $\overrightarrow{MM_1}$. $\vec{s}$. $\vec{s_1}$ 共面 ⇒ 混合积 = 0 ⇒ 确定此平面

在 L_2 与 L ---- $M'(x',y',z')$

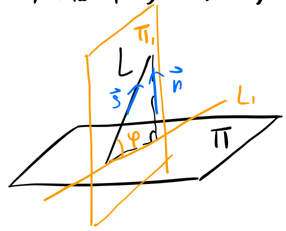
→ 则 公垂线为两平面交线

Sol 2: 用参数方程设出 公垂线 与 L_1 L_2 交点 $M_3.\ M_4$

↓ $u\cdots$ ↓ $t\cdots$

则 $\overrightarrow{M_3M_4}\ //\ \vec{s}$ ⇒ 得出 $M_3.\ M_4$ → 写方程✓

9. 线面相交: 用参方!



φ → L 与面 Π 夹角

L_1 → L 在 Π 上投影 (Π 与 Π_1 交线. 联立即可)

Π_1 → 投影平面 (法向量即为 $\vec{n}\times\vec{s}$)

10. 平面束：通过一条定直线所有平面的集合称为平面束

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 & ① \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 & ② \end{cases} \rightarrow \text{平面束：} ① + \lambda ② = 0$$