§4.1.1

Def 4.1: $A \cdot B$ 为集合.

笛卡尔积 $A \times B := \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B \}$

· 笛卡尔积对"∪""∩"运算具有分配律.

§4.1.2

Def 4.4: 若一个集合中所有元素均为有序对或 ϕ.

则此集合被称为二元关系. R

n元关系: n元有序组

Def 4.5: $A \cdot B$ 为集合 $A \times B$ 的任何子集上所定义的二元关系称为 $A\ B$ 上二元关系. $A = B$ 时称为 A 上二元关系

Def 4.6:

① ϕ 为"空关系"

② $E_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \} = A \times A$ → 全域~

$I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$ ——→ 恒等~

Def 4.7:

① $L_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \land x \le y \}$. $A \subseteq R$. 小于等于~

② $D_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \land x \mid y \}$. $A \subseteq \mathbb{Z}^*$ 整除..

③ $R_{\subseteq} = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \land x \subseteq y \}$ A 为集合族

§4.1.3

Def 4.8: 关系 matrix $M_R = (r_{ij})_{n \times m}$. 若 $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ $B = \{y_1, \dots, y_m\}$ 上关系

$r_{ij} = 1 \iff \langle x_i, y_j \rangle \in R$

$i = 1, 2, \dots, n$

$j = 1, 2, \dots, m$.

Def 4.9: $A = \{x_1, \dots, x_n\}$. R 关系图为 $G_R = \langle A, R \rangle$.

其中 A 为 G 点集. R 为边集. $\forall x_i, x_j$. if $\langle x_i, x_j \rangle \in R$.

则 $x_i \to x_j$ 有边.

§4.2.1

Def 4.10: $R: \{ \langle x, y \rangle \}$

定义域 $\mathrm{dom}\, R = \{ x \mid \exists y.\ \langle x, y \rangle \in R \}$

值域 $\mathrm{ran}\, R = \{ y \mid \exists x\ \langle x, y \rangle \in R \}$.

域 $\mathrm{fld}\, R = \mathrm{dom}\, R \cup \mathrm{ran}\, R$

Def 4.11: $R^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \}$ 称为 R 的逆.

Def 4.12: $R: \{ \langle x, y \rangle \}$. $S: \{ \langle y, z \rangle \}$

$R \circ S = \{ \langle x, z \rangle \mid \exists y\, (\langle x, y \rangle \in R \land \langle y, z \rangle \in S) \}$

· 如何求关系的合成?

① 画关系图

② 关系矩阵乘法

Thm 4.1 & 4.2 F $G \cdot H$ 为关系

① $(F^{-1})^{-1} = F$

② $\mathrm{dom}\, F^{-1} = \mathrm{ran}\, F$

$\mathrm{ran}\, F^{-1} = \mathrm{dom}\, F$

③ $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$

④ $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

Thm 4.3: $R \circ I_A = I_A \circ R = R$

Def 4.13: 设 R 为 A 上的关系.

定义 $R^0 = I_A$

$R^{n+1} = R^n \circ R$

· 可用关系矩阵来刻画. $(M_{ij})^n$ 即为 R^n

· 也可在关系图中理解为"走 步可达"

Thm 4.4：A为一个n元集. R是A上的关系

则 $\exists s,t \in N^*$ s.t. $R^s = R^t$

事实上，$|A|=n$. 则所有2元关系至多有 2^{n^2} 个

(n^2对 $\langle x,y\rangle$. 每对可选可不选)

Thm 4.5：① $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
② $(R^m)^n = R^{mn}$

Thm 4.6：若 $\exists s,t$ $(s<t)$ st

$R^s = R^t$

则令 $S = \{R^0, R', \cdots, R^{t-1}\}$ 则必有

$\forall q \in N$, $R^q \in S$

Note：$t-s$ 可视为一个周期

§4.3.1

Def 4.14：自反性：$\forall x(x\in A \to \langle x,x\rangle \in R)$ 关系矩阵对角线全为1

反～：$\forall x(x\in A \to \langle x,x\rangle \notin R)$
… 全为0

Def 4.15：

对称性：$\forall x \forall y(x,y\in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \to \langle y,x\rangle \in R)$ $(M_{ij}) = (M_{ij})^T$

反对称性：$\forall x \forall y(x,y\in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R$
$\to x=y)$ → $\forall i,j$. r_{ij} 与 r_{ji} 不可同时为1

也可写成：$\forall x \forall y(x,y\in A \wedge \langle x,y\rangle \in A \wedge x=y$
$\to \langle y,x\rangle \notin A)$

·注：不可能既自反又反自反
但可以既对称又反对称

Def 4.16：传递性：$\Leftrightarrow R\circ R \subseteq R$. 即 $(M_{ij})^2$ 中为"1"处在 M_{ij} 也必为1

$\forall x,y,z(x,y,z\in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R$
$\to \langle x,z\rangle \in R)$

·注：反自反与反对称不是仅仅对于某个 x. 此性质缺失.而是所有的 x 均不具有此性质

§4.3.2

·闭包：对某集合进行"最小"的扩充，使其有某性质

Def 4.17：R为A上关系. R的传递/自反/对称闭包为R'. s.t.

(1). R'为传/自/对… 有性质

(2) $R \subseteq R'$ 扩充

(3) $\forall$ A上具有传../自../对.. 关系的R''. 有 $R' \subseteq R''$ 最小

Thm 4.7：

(1) 自反闭包 $r(R) = R\cup R^0$ $=I_A$

(2) 对称— $s(R) = R\cup R^{-1}$

(3) 传递.. $t(R) = R\cup R^2 \cup R^3 \cdots \cup R^s \cup \cdots$
(一般 s 不超过A元素个数)

图像解释：对于关系图.

(1) 要求对每个点有自环

(2) 即 每条有向边必有反向边

(3) 即若 x 可经过一些点到 y. 则
必有 $\langle x,y\rangle$.

§4.4.1

Def 4.18 自反. 对称、传递的关系称为等价关系

§4.4.2

Def 4.19 R为A上等价关系
A中与x所有等价元素构成的集合称为

x的等价类 记为 $[x]_R$ or $[x]$

Def 4.20：A上所有等价类构成的集合称为"商集" A/R

即 $A/R = \{[x]_R \mid x\in A\}$

§4.4.3

Def 4.21：A为非空集合. 若A子集族 π $(\pi \subseteq P(A))$ 满足：

(1) $\phi \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y(x,y\in \pi \wedge x\neq y \to x\cap y = \phi)$

(3) $\bigcup_{\pi} x = A$

· 划分与A上等价关系 —— 对应（构造商集）

§4.4.4

Def 4.22：A上自反、反对称、传递的关系称为 A上偏序关系 "$\preccurlyeq$"

Def 4.23：$\forall x.y\in A$. 若 $x\preccurlyeq y$ or $y\preccurlyeq x$. 则称 x.y 可比

Def 4.24：A上 反自反、传递的关系称为 A上拟序关系 "$\prec$"，而拟序里遂是反对称的

Note：偏序与拟序存在"一一对应"，即差一个 I_A

Def 4.25：若 $\forall x,y\in A$ 均有 x y 可比. 则称 R 为全序/线序

Def 4.26：若 $x\prec y$ 且不存在 z s.t. $x\prec z\prec y$. 则称 y 覆盖 x.（即在序上 y 紧跟 x）

覆盖关系 $T=\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y\rangle\in R$ 且 y 覆盖 $x\}$

则 T 的自反传递闭包即为 R

§4.4.5

Def 4.27：集合A与A上偏序关系 $\preccurlyeq$ 一起构成偏序集 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$

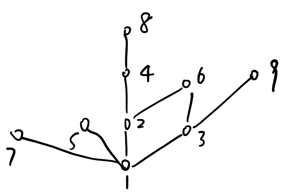
eg：整数集 $\mathbb{Z}$ 与 "$\leq$" 构成 $\langle \mathbb{Z},\leq\rangle$

· 哈斯图：对于 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 中 x.y. 若 x 被 y 覆盖，则在 x.y 间连一条线.

x.y 先后顺序体现了"大小"

如对于 $\langle\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ |\ \rangle$.

其哈斯图形如：



Def 4.28：若 $\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立. 则称 y 为B的最小元

$\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 偏序集 若 $\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立 . . . . 最大元

$B\subseteq A$

$\boxed{y\in B}$

若 $\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$ 成立 . . . y为极小元

若 $\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$ 成立 . . y为极大元

注意：最小/大元要求"只要 $x\in B$，则 x.y 必可比且 $x\leq y$"

但极大/小元则不一定有"x.y 可比"，

而是额外要求. 其含义变为"若二者可比且 $x\leq y$. 则有 $x=y$"

以上Def 例. 为例. 无最大元（找不到一个可以和所有数比且大于它的数）. 但 5. 6. 7. 8. 9 均为极大元.

Def 4.29 设 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 为偏序集，$B\subseteq A$，$y\in A$

若 $\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立. 则称 y 为 B 上界

$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立 . . . 下界

$C=\{y\mid y$ 是 B 上界$\}$ y 最小元为 上确界

$D=\{y\mid y$ 是 B 下界$\}$ y 最大元为 下确界

Def 4.30 设 $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ 为偏序集. $B\subseteq A$

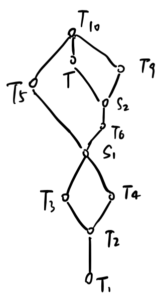
如果 $\forall x,y\in B$ 有 x.y 可比. 则称 B 是A中一条链. |B| 称为链长

- - —— — 均不可比. B为一条反链. |B| 为反链长.

· 对于一个偏序集. 可以认为一条链为"先后执行的任务".

反链最长的值为"可同时进行的任务数".

eg：



Thm 4.9：若偏序集 A 中最长链长为 n. 则 A 必可分为 n 条不相交反链.

证明 反证即可

Algorithm 2: 分解 A 为反链:

1. 每次取 A 极大元集合为 B_i,
2. $i{+}{+}$, $A = A \setminus B_i$
3. 重复 2 至 $A = \emptyset$

Algorithm 2: 拓扑排序:

1. 每次取 A 极小元 a_i
2. $A = A \setminus \{a_i\}$, $++i$
3. 重复 2 至 $A = \emptyset$