§ 2.1.1

1. 简单陈述句被称作原子命题 / 简单命题. 即其中无连结词

2. $\wedge$: 与 / 合取
   $\vee$: 或 / 析取

异或: $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

3. $p \to q$: 蕴涵式. p 为前件. q 为后件. "$\to$" 为蕴涵连接词
当且仅当 p 真 q 假时 "$p \to q$" 假

自然语言中可表达为
①若 p 则 q
②只要 p 就 q
③因为 p 所以 q

④ p 仅当 q
⑤只有 q 才 p
⑥ 除非 q 才 p
⑦ 除非 q, 否则 $\neg p$

关键在于 p 是 q 的充分条件. 把握好谁是"小的".

4. 以上被称作复合命题.

§ 2.1.2

1. 常称简单命题为命题常项. 或命题常元
称真值可变化的语句为命题变元 / 命题变项 (如 $p, q, r \dots$)

2. 将命题变项用 "( )" / "$\wedge$" / "$\vee$" / "$\to$" 连接起来的符号串称作合式公式 / 命题公式

递归定义如下:

(1) 单个命题变项和命题常项是合式公式. 并称为原子命题公式
(2) 若 A 为合式公式, $\neg A$ 也为合式公式
(3) 若 A. B 为合式公式. 则 $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \to B)$. $(A \leftrightarrow B)$ 也为合式公式
(4). 只有有限次地应用 (1) ~ (3) 形成的公式才是合式公式

此处 A. B 称为元语言符号. p q 称为对象语言符号.
元语言符号被用以描述对象语言符号

3. Def: 命题层数:
称 A 为 $n+1$ 层公式 当
① $A = \neg B$
② $A = B \wedge C$. $n = \max(B, C)$.
③ $A = B \vee C$. ..
④ $A = (B \to C)$ ..
⑤ $A = (B \leftrightarrow C)$ ..

4. Def: $p_1, \dots, p_n$ 是命题 A 中所有命题变项
给 $p_1, \dots, p_n$ 各赋一个真值, 则称此组 $\{p_1 \dots p_n\}$ 为对 A 的一个赋值 / 解释.
若此 $\{p_1, \dots, p_n\}$ 使 A 真值为 1. 称之为成真赋值

5. Def: 若 A 在其任意赋值下为真 $\to$ 永真式 / 重言式
A 在 - - - - 为假 $\to$ 永假式 / 矛盾式
A 不是矛盾式 $\to$ 可满足式

6. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

§ 2.2.1

1. 若 $A \leftrightarrow B$ 为重言式. 则称 $A \Leftrightarrow B$ (A. B 等值)

2. n 个有趣的等值演算

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$\neg (A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$

$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) = A$

$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

3. 用元语言书写的等值式称为等值式模式
代入具体命题. 所得称为代入实例

4. 置换规则: $\Phi(A)$ 为含 A 的命题公式, $\Phi(B)$ 为用公式 B 替换 $\Phi(A)$ 中所有 A 的命题公式. 若 $B \Leftrightarrow A$, 则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

§2.2.2

1. $F: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 称为n元真值函数.

n元真值函数有 2^{2^n} 个 (定义域 2^n, 每个对应 0/1 为独立的)

eg. 1元真值函数:

n元

编号

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

2. 联结词完备集: 若任何一个n元真值函数都可用仅含S中的联结词构成的公式表示. 则称S为 - - - -

- $\{\vee, \wedge\}$ 不为完备集.
- $\{\neg, \wedge\}$.
- $\{\neg, \vee\}$
- $\{\neg, \to\}$

均可构成完备集, 用数归即得 $G^{n+1} = (G^n \wedge p_{n+1}) \vee (G^n \wedge \neg p_{n+1})$

☆ · $\{\uparrow$ (与非)$\}$, $\{\downarrow$ (或非)$\}$ 构成完备集

证明思路: 可考虑证明上述与 $\{\neg, \wedge\}$ 等价.

即 "$\neg$", "$\wedge$" 可用 "$\uparrow$" 表出

3. 真值集: 使p为真的元素构成的集合

§2.3.1

1. Def 2.15: 命题变项及其否定被称为文字

仅有有限个文字构成的析取式被称为简单析取式

- - - - - - - - - - - 合取式 - - - - - 合取式.

2. Thm 2.3: (1) 一个简单析取式为重言式 ⟺ 其同时含有某命题变项及其否定

(1) - - - 合取 - 矛盾 - ⟺ - - -

- - -

3. Def 2.16: (1) 有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式

(2) - - - - 析取式 - - - 合取式 - - 合取范式

二者统称为范式

4. Thm 2.4: (1) 一个析取范式为矛盾式 ⟺ 其每个合取式为矛盾

(2) - - 合取 - - 重言式 ⟺ - - 析取式 - - 重言

5. Thm 2.5 (范式存在定理) 任一命题公式都存在与之等价的析取、合取范式

Step: ① 消去 "$\to$", "$\leftrightarrow$"

② 消去 "$\neg$" (双重情况) or 内移 (德摩根)

③ 利用分配律

§2.3.2.

1. Def 2.17: 极小项: 每个简单合(析)取式中某命题变项及其否定, 二者其只出现一次. 且第 i 个命题变项排在第 i 位上.

则: 称此简单合(析)取式被称为极小(大)项

将成真(假)赋值用作二进制数 i. 作为 m_i (M_i) 下标

2. Thm 2.6: $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$. $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

3. Def 2.18: 主析取范式 (合取范式): 某范式中每项均为极小/大项.

方法: 主析取范式: 若某项A不含 p. 则用 $A \wedge (p \vee \neg p)$
$= (A \wedge p) \vee (A \wedge \neg p)$

- - 合: - - - $A \vee (p \wedge \neg p)$

$= (A \vee p) \wedge (A \vee \neg p)$

4. 析取范式可用 $\sum m_i = \sum(i, j, k \cdots) = (i, j, k \cdots)$

如 $m_1 \vee m_3 \vee m_5 = \sum(1,3,5) = (1, 3, 5)$

合取 - - - $\prod M_i = \prod(i, j, k \cdots) = (i, j, k \cdots)$

5. 用途: (1) 若A有n个命题变项 (n个 - -), 共 2^n 种可能

若A的主析取范式有 s 个极小项. 则有 s个成真赋值

(2) A重言 ⟺ A有所有极小项

A矛盾 ⟺ A不含极小项

(3). $A \leftrightarrow B$ 等值. 可化为极小项对比.

§ 2.4.1.

1. Def 2.18 (推理) 对 $A_1,\dots,A_k,B$ 任一组赋值.

或 $A_1\wedge\cdots\wedge A_k$ 为假

或 $\underbrace{A_1\wedge\cdots\wedge A_k}_{\text{前提}}$ 为真 且 $\underbrace{B}_{\text{结论}}$ 真.

§ 2.4.2

1. 推理定律:

(1) $A \Rightarrow (A\vee B)$

(2) $(A\wedge B) \Rightarrow A$

(3) $(A\to B)\wedge A \Rightarrow B$

(4) $(A\to B)\wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ 结果为假 前提必假

(5) $(A\vee B)\wedge \neg B \Rightarrow A$

(6) $(A\to B)\wedge(B\to C) \Rightarrow (A\to C)$

(7). $(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(A\vee C) \Rightarrow (B\vee D)$ A·C有一个成立 → B·D有一个成立

special form $(A\to B)\wedge(\neg A\to B) \Rightarrow B$ 无论前提,均成立 ⇒ B恒成立

(8) $(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(\neg B\vee\neg D) \Rightarrow (\neg A\vee\neg C)$

2个推理均成立,但结果至少有一个假 ⇒ 前提中有至少一个为假

Def 2.21: 推理规则

(1) 在证明的每一步都可以引入前提

(2) 在 — — — — — — — 前面公式得到的有效结论

(3) 附加:
$$\frac{A}{A\vee B}$$

(10).
$$\frac{A\to B \quad C\to D \quad A\vee C}{B\vee D}$$

(4) 化简
$$\frac{A\wedge B}{A}$$

(12)
$$\frac{A \quad B}{A\wedge B}$$

技巧: ① 可以将公式替换为等值式!

eg. "$p\to q$" 换为 "$\neg q\to\neg p$"

即转化为逆否命题

② 附加前提, 当证明形如

$(A_1\wedge A_2\cdots\wedge A_n)\to(A\to B)$ 时

可转化为 $(A_1\wedge\cdots\wedge A_n\wedge A)\to B$ 进行运算

③ 反证: $(A_1\wedge\cdots\wedge A_n)\to B$

转为 $(A_1\wedge\cdots\wedge A_n\wedge\neg B)\to 0$

§ 2.4.3.

1. 归结证明法:

原理: $(L\wedge C_1)\vee(\neg L\wedge C_2) \Rightarrow C_1\vee C_2$

证明步骤: (至推出"0"为止)

前提: $A_1,\dots,A_k$

结论: B

取 $A_1,\dots,A_k,\neg B$ 合取范式

$A_1 \Leftrightarrow C_{11}\wedge C_{12}\wedge\cdots\wedge C_{1n_1}$ C_{ij} 为简单析取式

$A_2 \Leftrightarrow C_{21}\wedge C_{22}\wedge\cdots\wedge C_{2n_2}$

$\vdots$

$A_k \Leftrightarrow C_{k1}\wedge C_{k2}\wedge\cdots\wedge C_{kn_k}$

$\neg B \Leftrightarrow D_1\wedge D_2\wedge\cdots\wedge D_m$

之后反复运用原理即可

如 $(q\leftrightarrow s) \Leftrightarrow (\neg q\vee s)\wedge(\neg s\vee q)$,

可看成 2个简单析取式