BESIII 上三体衰变的 Dalitz 分析

孟 璐 沈 磊 曹端云

（山东大学泰山学堂，山东 济南 250100）

摘要:本文利用 Dalitz 图确定了三体衰变$D^+ \to K^+K^-\pi^+$的衰变模式，并计算出分支比；利用自适应分 bin 的 chi-2 检验方法进行了拟合优度检验；提出了一种确定 Dalitz 图边界的方法，并利用蒙特卡洛方法及拟合结果反向产生了事例。

关键词:Dalitz 分析；三体衰变；分支比； 最大似然法

中图分类号：O572.21 文献标志码:A

Dalitz analysis of three bodies decays $D^+ \to K^+K^-\pi^+$at BESIII

MENG Lu SHEN Lei CAO Duanyun

(Taishan College, Shandong University, Jinan 250100, Shandong China)

Abstract: We perform an analysis of the $D^+ \to K^+K^-\pi^+$Dalitz plot, in which chi-2 test have been used to determine the fitting goodness. By the Dalitz analysis, we got the decay modes and their fit fraction. Besides, we introduced a way originally to calculated the boundary of Dalitz plot, regenerating the events with Monte Carlo method.

Key words: Dalitz analysis; three bodies decay; fitting goodness; the maximum likelihood method

0 引言

Dalitz 图(DP)[1]是以两体不变质量为坐标的散点图，被广泛应用于分析 D 介子或者 B 介子的三体衰变。BESIII 上具有丰富的 D 介子事例，其三体衰变的研究对于检验量子色动力学以及寻找 CP 破坏具有重要的意义。Dalitz 图分析对于分析三体衰败具有无可比拟的优势：

- 三体衰变末态粒子具有两个自由度，Dalitz 图选取了最少的变量数目，Dalitz 的坐标都是洛伦兹不变量；
- 二维 *DP* 的面积元正比于相空间的体积元，点的疏密直接显示动力学过程，便于粗略观察共振，自旋等信息；
- Dalitz 分析可以考虑不同衰变模式之间的干涉，是研究粒子三体衰变中间共振态、衰变道相对分支比的有效工具。

而 Dalitz 分析的一般步骤为：事例筛选，本底和效率的参数化，构造概率密度函数，构造似然函数，寻找中间共振态，最大似然拟合，拟合优度检验，衰变分支比计算，估计系统误差。图 1 为 Dalitz 分析的一般思路。

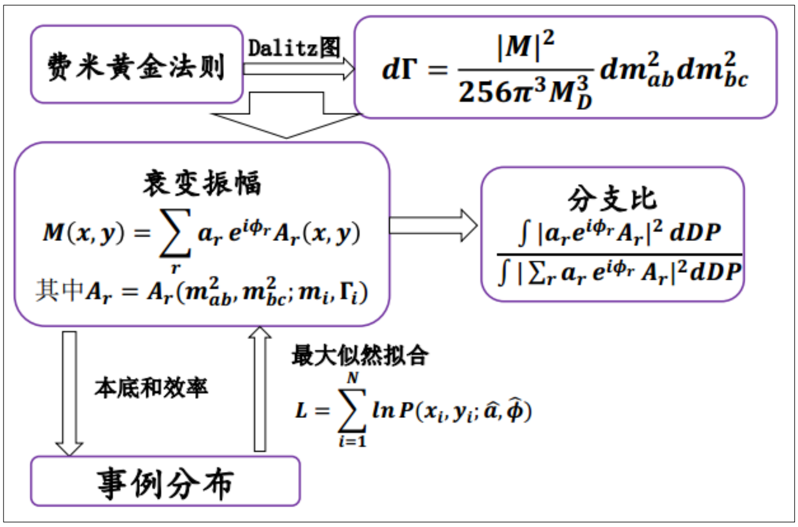


图 1　Dalitz 分析的原理图

Fig. 1　Principles of Dalitz analysis

本文的主要工作是是基于 BESIII 的实际情况，对于 Dalitz 分析的一些技术细节作进一步的优化研究，研究过程总我们以三体衰变$D^+ \to K^+K^-\pi^+$为例子。

1 理论模型

利用 Dalitz 图三体衰变几率可表示为[2]：

$$d\Gamma = \frac{|M|^2}{256\pi^3 M_D^3} dm_{ab}^2 dm_{bc}^2 \tag{1}$$

其中m_{ij}为粒子 i 和 j 的两体不变质量，Dalitz 图的面积元即$dm_{ab}^2 dm_{bc}^2$表征了三体衰变的运动学信息，而$|M|^2$ 则包含了动力学信息。如果$|M|^2$ 是常数，Dalitz 图上的散点将在运动学允许的范围内均匀分布。Dalitz 图上的点的疏密变化反应的是动力学过程，为了利用 Dalitz 上点的疏密获取动力学信息，必须给出M的具体表达形式，M 可以看做是多个不同衰变道的叠加：

$$M(x,y) = \sum_r a_r\, e^{i\phi_r} A_r(x,y) \tag{2}$$

其中a_r和ϕ_r是模长和相位。

每一衰变振幅$A_i(x,y)$可以表示成复数 BW 和与角Ω相关的项 T 的乘积[3]：

$$A(x,y) = BW(m) \times T(\Omega) \tag{3}$$

对于中间共振态为 r 的粲偶素D_S三体衰变，$D_S \to rC, r \to AB$，$BW(M_{AB})$为：

$$BW(M_{AB}) = \frac{F_r F_D}{M_r^2 - M_{AB}^2 - i\Gamma_{AB} M_r} \tag{4}$$

其中Γ_{AB}是关于 AB 的不变质量M_{AB}、在 AB 静止系中的动量p_{AB}，中间共振态的自旋 J、质量M_J、宽度Γ_r的函数，表达式为：

$$\Gamma_{AB} = \Gamma_r \left(\frac{p_{AB}}{p_r}\right)^{2J+1} \left(\frac{M_r}{M_{AB}}\right) F_r^2 \tag{5}$$

其中

$$p_{AB} = \frac{\sqrt{(M_{AB}^2 - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}}{2M_{AB}} \tag{6}$$

F_r、F_D的形式与母粒子和中间共振态的夸克结构有关。本文采用 Blatt-Weisskopf 穿透因子[4]。该因子仅依赖于代表偶素"半径"的参数 R。我们这里假定$\mathrm{R_{D_s^+}} = 3\mathrm{GeV}^{-1}, \mathrm{R_r} = 1.5\mathrm{GeV}^{-1}$.

$$F_r = \frac{\sqrt{1 + (R_r p_r)^2}}{\sqrt{1 + (R_r p_{AB})^2}} \tag{7}$$

$$F_D = \frac{\sqrt{1 + \left(R_{D_s} + q_r\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(R_{D_s} + q_{AB}\right)^2}} \tag{8}$$

其中q_{AB}是在 AB 静止系中 C 的动量，p_r和q_r是当$m_{AB} = m_r$时p_{AB}、q_{AB}的值，q_{AB}的表达式为：

$$q_{AB} = \frac{\sqrt{\left(M_{D_S}^2 - M_C^2 - M_{AB}^2\right)^2 - 4M_{D_S}^2 M_C^2}}{2M_{AB}} \tag{9}$$

当中间共振态自旋为 1 时，

$$T(\Omega) = M_{BC}^2 - M_{AC}^2 - \frac{\left(M_{D_S}^2 - M_C^2\right)\left(M_B^2 - M_A^2\right)}{M_{AB}^2} \tag{10}$$

2 Dalitz 分析过程

2.1 确定衰变道

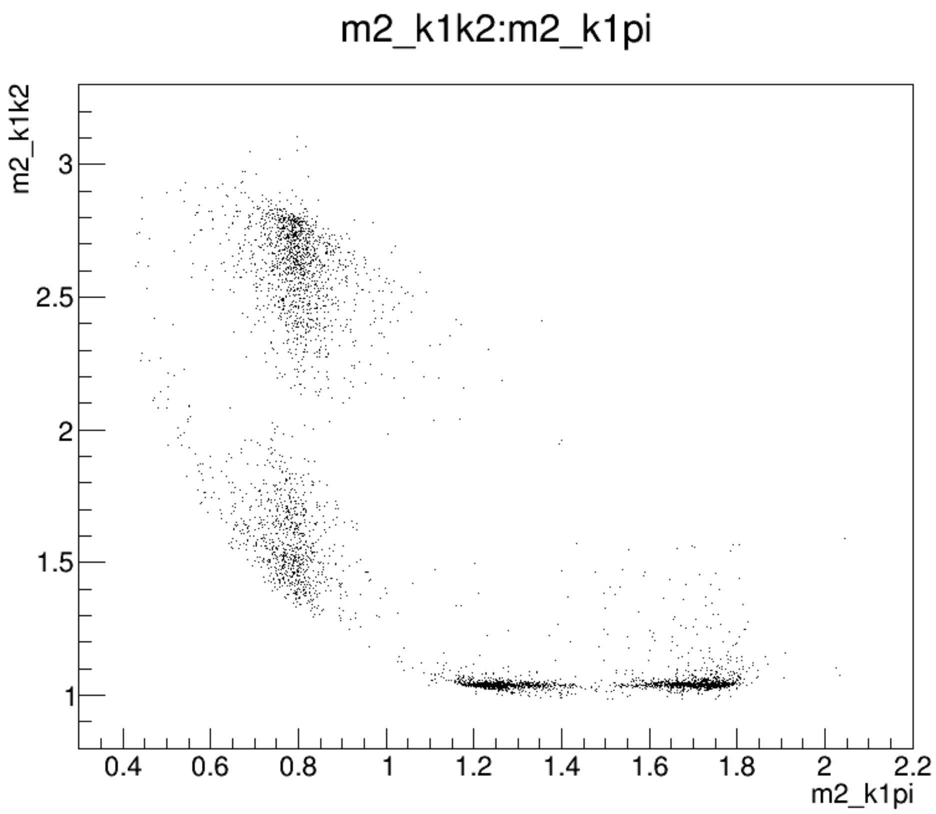


图 2 三体衰变 $D^+ \to K^+K^-\pi^+$数据点的 Dalitz 图

Fig. 2 Dalitz plot of data of three bodies decay $D^+ \to K^+K^-\pi^+$

为了确定所分析数据的中间共振态，通过观察 Dalitz 图上的条纹，图 2 所示，以及一维的预拟合并结合粒子信息[5]，可以确定三个疑似的中间共振$\phi(1020) \to K^+K^-$，$\bar{K}^*(892)^0 \to K^-\pi^+$，$\overline{K_0^*}(800) \to K^-\pi^+$。三个中间共振态的质量和宽度的参数见表 1。

2.2 拟合过程

拟合过程采用最大似然方法进行拟合，因为相空间的边界在 Dalitz 图上是不规则的，因此拟合过程中的积分采用蒙特卡洛方法，积分区间的边界由相空间均匀分布的点来确定。因为整个过程中效率为常数，且没有本底，最大似然函数的构造公式如下：

$$L = \sum_{i=1}^{N} ln\, P(x_i, y_i; \hat{a}, \hat{\phi}) \tag{11}$$

$$P\left(x_i, y_i; \hat{a}, \hat{\phi}\right) = \frac{|a_r e^{i\phi_r} A_r|^2}{\int |\sum_r a_r\, e^{i\phi_r}\, A_r|^2 dDP} \tag{12}$$

拟合过程只需最小化-L 即可。

拟合过程中，为了降低难度，先利用实数化的振幅构造概率密度函数进行拟合，调试成熟之后再进行复数振幅的拟合，两者的公式分别为：

$$|M|^2 = \sum_r p_r\, |A_r|^2 \tag{13}$$

$$|M|^2 = \left|\sum_r a_r\, e^{i\phi_r} A_r(x, y)\right|^2 \tag{14}$$

拟合过程中先将$\phi(1020)$和$\bar{K}^*(892)^0$作为备选中间共振态，然后将$\phi(1020)$和$\overline{K_0^*}(800)$作为备选中间共振态，比较两次的结果。

表 1　备选中间粒子的参数[5]

Table 1　Parameters of resonance alternative particles

参数	$\phi(1020)$	$\bar{K}^*(892)^0$	$\overline{K_0^*}(800)$
质量/MeV	1019.455	895.94	841
宽度/MeV	4.26	48.7	618

对于利用实数振幅拟合总共有两个参数，固定一个参数，通过变化另一个参数最小化-L，利用复数振幅拟合总共有 4 个参数，两个衰变道各自的幅值和相位，只有幅值的相对大小和相位差具有实际的物理意义，只需固定两个参数，变化另外两个参数。拟合时初始参数的选择如表 2 所示：

表 2　拟合的初始参数

Table 2　The initial values of Parameters

		无干涉第一组		无干涉第二组		无干涉第三组		无干涉	
初值	衰变道	$(K^-\pi^+$	(K^+K^-)	$(K^-\pi^+)$	(K^+K^-)	$(K^-\pi^+)$	(K^+K^-)	$(K^-\pi^+)$	$(K^-\pi^+)$
	模长	1.0	0.94	1.0	1.15	1.0	1.15	1.0	1.0
	相位/deg	0.0	-140	0.0	-10	8.98	-10	—	—

当衰变道的模长和相位的出来以后就可以计算分支比，利用实数化振幅拟合的分支比计算公式[6]：

$$\text{fit fraction} = \frac{\int p_r|A_r|^2\, dDP}{\int \sum_r p_r|\, A_r\,|^2 dDP} \tag{15}$$

利用复数话振幅拟合的分支比计算公式为[7]：

$$\text{fit fraction} = \frac{\int |a_r e^{i\phi_r} A_r|^2\, dDP}{\int |\sum_r a_r\, e^{i\phi_r}\, A_r|^2 dDP} \tag{16}$$

2.3 拟合优度

当计算出拟合结果之后，为了定性的衡量拟合优度，可以画出概率密度函数的直方图同事例的直方图进行对比。为了比较方便，通常常将二维的分布投影到一维。为了进一步的定量的判断拟合优度，可以构造χ^2量进行χ^2检验。构造公式[8]：

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(n_i - np_{0i})^2}{np_{0i}} \tag{17}$$

其中n_i为第 i 个 bin 中的事例数，p_{0i}为根据概率密度函数（PDF）分布计算出的第 i 个 bin 中的概率，n 为总事例数。利用用χ^2/ndf可以衡量拟合优度，ndf 为自由度数，在这里 ndf=bin 数-参数个数-1。此外，利用χ^2还可以确定拟合的置信度[8]。

通常χ^2检验要求每个 bin 的事例数适中，不能太多或者太少。皮尔逊定理[8]要求每个 bin 中的事例数不能少于 4 个，而为了尽可能的利用事例中的信息，一定范围内，bin 的数目越多越好。通常的分 bin 的方法是等距分 bin[8]，但是由于 Dalitz 图上事例分布不均会导致落在不同 bin 中的事例数目差距很大，因此本文采用了自适应的分 bin 方法[9]，每个 bin 中大约有 10-30 个事例。通过分析χ^2/ndf可以衡量拟合的优度，同时在备选的两个衰变模式中排除了一个。

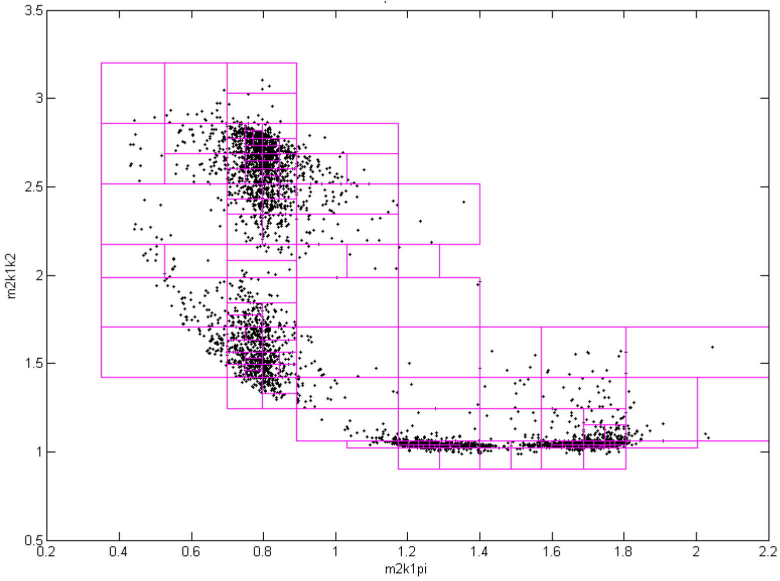


图 3　自适应分 BIN 示意图

Fig.3　Adaptive binned Dalitz plot

2.4 边界及反向产生事例

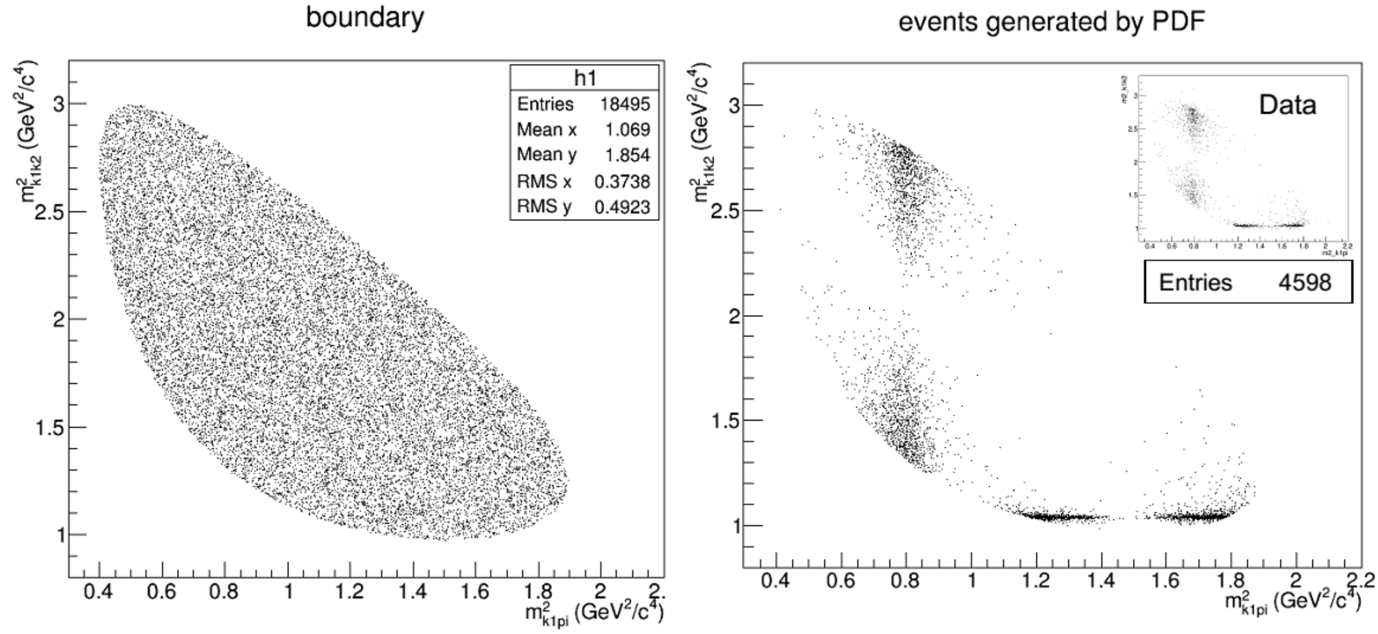
利用 Dalitz 分析所得衰变模式，以及蒙特卡洛方法可以反向生成事例样本。然而，因为 Dalitz 图上的相空间的边界是不规则的，必须寻找一种方法对全空间的蒙特卡洛方法做一种限制。Adrian Wiithrich[10]尝试给出了相空间边界的解析表达式，通过我们的实验验证和理论推导，该解析表达式是一个过于松弛的条件，并不能准确给出 Dalitz 图的边界。

本文从 Dalitz 图边界的物理意义出发，即四动量守恒的限制，避开了解析推导，提出了一种生成 Dalitz 边界的方法。利用 Dalitz 图上事例的坐标可以确定末态三粒子的能量：

$$\begin{cases} m_{12}^2 = m_B^2 + m_3^2 - 2m_B E_3 \\ m_{13}^2 = m_B^2 + m_2^2 - 2m_B E_2 \\ m_B = E_1 + E_2 + E_3 \end{cases} \tag{18}$$

而利用能量及质壳关系可以求出末态粒子的动量模长。动量守恒要求末态粒子的模长可以构成三角形即两边之和大于等于第三边，因此下面不等式组的限制可以给出 Dalitz 图的边界。

$$\begin{cases} \mathrm{E}_1 > m_1 \\ \mathrm{E}_2 > m_2 \\ \mathrm{E}_3 > m_3 \\ |p_1| + |p_2| > |p_3| \\ |p_1| + |p_3| > |p_2| \\ |p_3| + |p_2| > |p_1| \end{cases} \tag{19}$$



图四　Dalitz 图边界和蒙特卡洛方法产生的事例

Fig. 4　Boundary of Dalitz plot and events generated by Monte Carlo method

3 结果分析

3.1 拟合结果

表 3 考虑干涉的拟合结果

Table 3　The fitting results considering the interference

有干涉		第一组		第二组		第三组	
	衰变道	$(K^-\pi^+)$	(K^+K^-)	$(K^-\pi^+)$	(K^+K^-)	$(K^-\pi^+)$	(K^+K^-)
初值	模长	1.0	0.94	1.0	1.15	1.0	1.15
	相位/deg	0.0	-140	0.0	-10	8.98	-10
	模长	1 +/- 0	1.10055 +/- 0.0237238	1 +/- 0	1.10054 +/- 0.0237236	1.04492 +/- 0.0225235	1.15 +/- 0

拟合值	相位/deg	0 +/- 0	-155.606 +/- 6.26394	0 +/-0	-155.606 +/- 6.26395	145.594 +/- 6.26452	-10 +/- 0
分支比		0.522692	0.498239	0.522696	0.498236	0.522679	0.498241
似然结果		-9611.05		-9611.05		-9611.05	

表 3 是利用复数振幅拟合的结果，经过分析可以得到以下结论：

- 这四个参量只有两个是相互独立的；
- 从第一、二组数据可以看出，在拟合过程中，在一定范围内设置变量的初始值，其拟合结果是稳定的；
- 在拟合过程中数值的绝对大小是没有意义的，两个衰变道的相位差，两模长的比值是有物理意义的；
- 有干涉的衰变道相对分支比值之和不等于一。

关于干涉的衰变道相对分支比值之和不等于一，可以从下面简单的衰变振幅平方可以分析，在我们的工作中两个衰变道的振幅：

$$M = a_1 e^{i\phi_1} A_1 + a_2 e^{i\phi_2} A_2 \tag{20}$$

在 Dalitz 图区域中的概率密度是：

$$P = |M|^2 = a_1^2 A_1^2 + a_2^2 A_2^2 + a_1 a_2 e^{i(\phi_2 - \phi_1)} A_1^* A_2 + a_1 a_2 e^{i(\phi_1 - \phi_2)} A_1 A_2^* \tag{21}$$

从$P\left(x_i, y_i; \hat{a}, \hat{\phi}\right)$式可以很清楚的看出，由于 A 中复数项和$e^{i\phi_r}$的存在使得不同衰变道山生了干涉，导致分支比之和并不等于 1。如果我们构造概率密度函数采用式(13)，此时分支比之和必然为一，见表 4 所示。

表 4 忽略干涉的拟合结果

Table 4 fitting results without interference

无干涉		数据	
初值	衰变道	$(K^-\pi^+)$	(K^+K^-)
	模长	1.0	0.7
拟合结果	模长	1 +/- 0	1.14624 +/- 0.0494789
	分支比	0.527759	0.472241
	分支比和	1	
	似然结果	-9485.65	

3.2 拟合优度

图 5 是在我们选择的两个衰变道$\phi(1020)$、$\bar{K}^*(892)^0$得到的拟合结果检验，数据点是实验值而曲线是我们拟合得到的概率分布，可以看出拟合的曲线与实验数据符合的非常好。反观图 6 是在我们选择$\phi(1020)$、$\overline{K_0^*}(800)$得到的结果后的检验，可以发现数据和拟合结果的差距比较大。同时说明我们选择的衰变道是合理的。

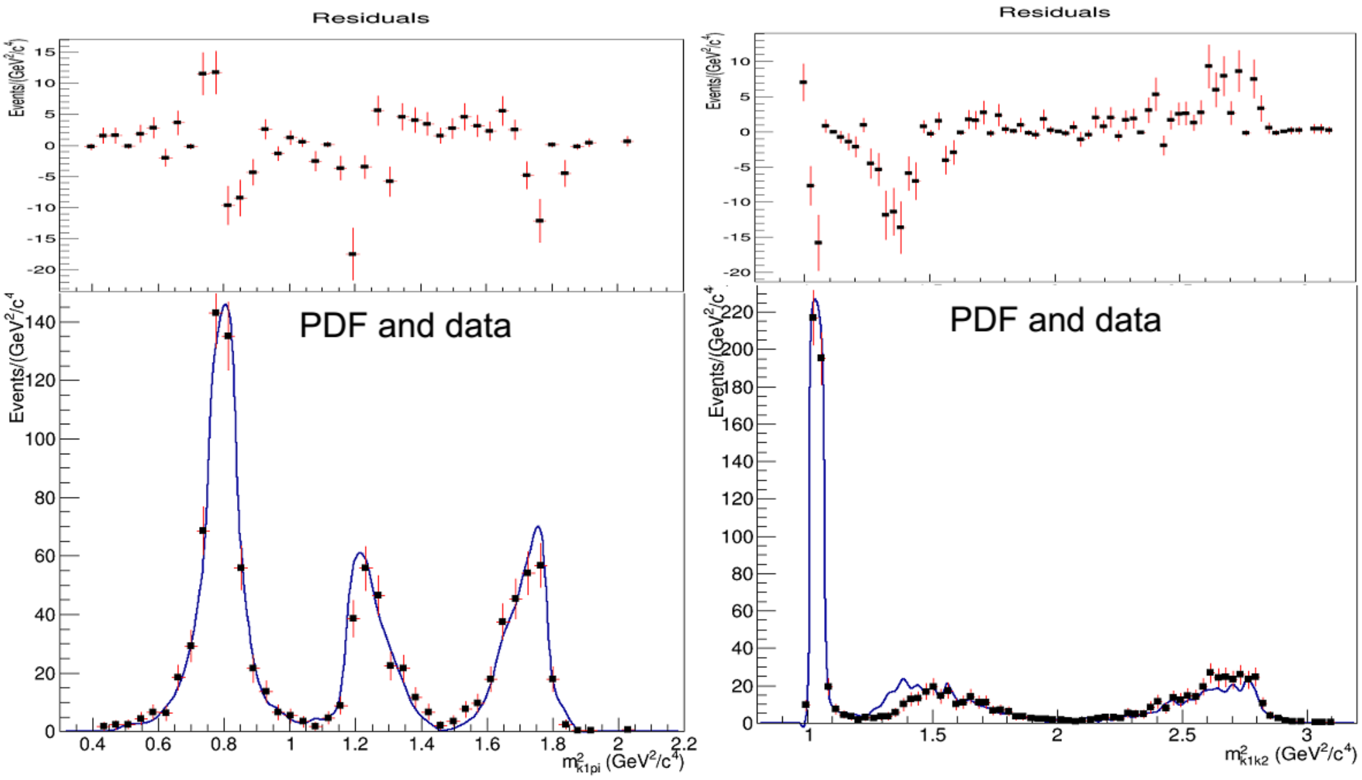


图 5　$\overline{K}^{*}(892)^{0}$衰变道拟合结果与数据对比

Fig. 5　the fitting results with decay mode with $\overline{K}^{*}(892)^{0}$ and the data

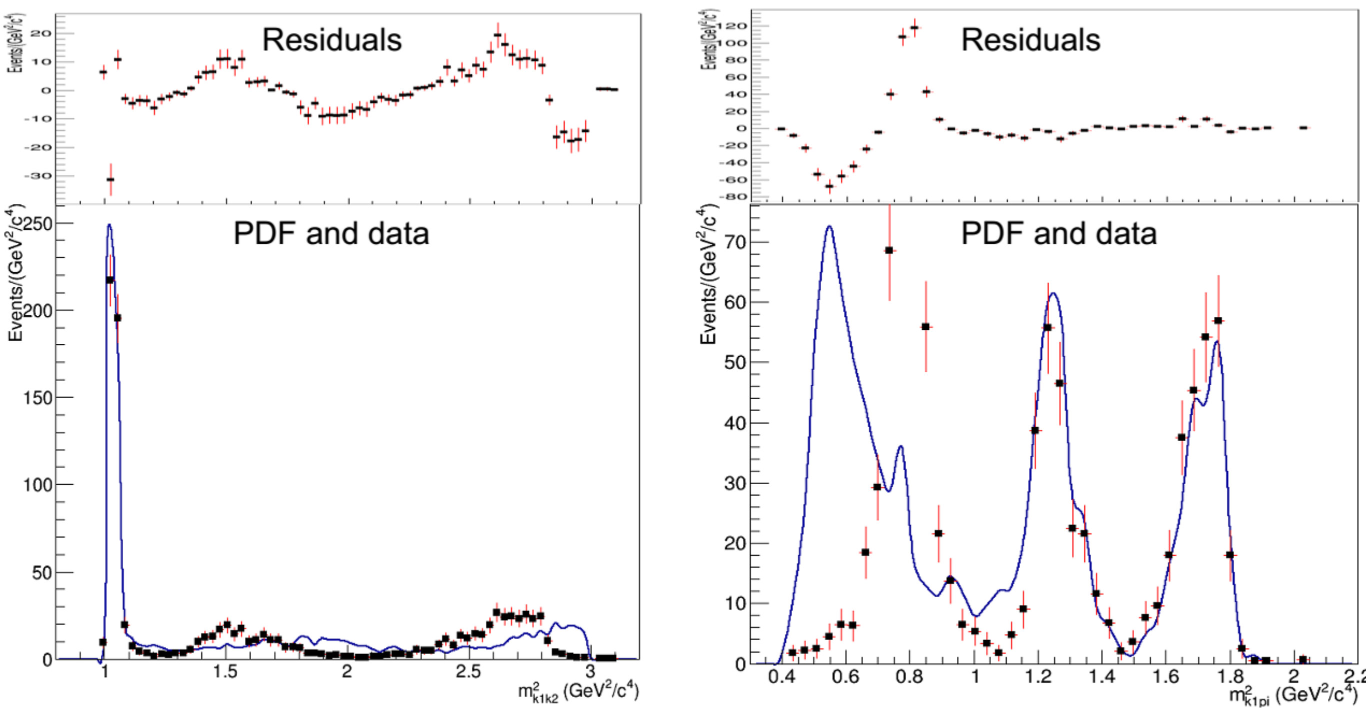


图 6 $\overline{K_0^*}(800)$衰变道拟合结果与数据对比

Fig. 6　The fitting results with decay mode with $\overline{K_0^*}(800)$and the data

皮尔斯χ^2检验可以为我们提供更加定量的结果。我们采用自适应的分 bin 法则，得到足够多的 bin，以及 bin 中包含合理的点数，得到了表 5 所示的检验结果。一般认为皮尔斯皮尔斯χ^2检验的

χ^2/ndf值在 3 到 5 之间都认为是可靠的，而且考虑到我们的数据量比较小，所以$\bar{K}^*(892)^0$方案的检验结果 4.7943 已经很有说服力了，而$\overline{K_0^*}(800)$的χ^2/ndf很大，明显是错误的衰变道选择方案。

表 5 拟合优度

Table 5 Goodness of fitting

拟合优度	$\bar{K}^*(892)^0$	$\overline{K_0^*}(800)$
χ^2	1198.575	23634.0
Bin数	253	253
自由度ndf	250	250
χ^2/ndf	4.7943	94.5360
事例数/bin	10~30	

4 总结

本文的主要成果有：

- 本文完成了$D^+ \to K^+K^-\pi^+$的 Dalitz 分析，包括有干涉的和无干涉的，计算了分支比，并尝试排除了一个疑似的衰变道；
- 进行了自适应分 bin 的拟合优度检验，实现了自适应分 bin 的算法，对于χ^2拟合优度检验和分 bin 拟合具有重要的意义；
- 原创性的提出了一种实现了 Dalitz 图边界的方法，该方法避免了解析公式的推导。利用边界及蒙特卡洛方法反向产生了数据，并与原数据比较，结果非常好；
- Dalitz 分析的过程中利用了 ROOT 框架，主要编程语言为 C++，注意了程序的可移植性，所写程序可以处理其他三体衰变的 Dalitz 分析。

虽然取得了一些有意义的成果，但是仍然有很多问题尚未解决：

- Dalitz 分析的物理模型比较简单，主要用了 Isobar 模型，为了得到更加精确的结果，还需要进一步去其他模型；
- 整个分析过程中，为了简化为题，并没有考虑本底和效率，本底和效率的参数化，将会提高 Dalitz 分析的精度；
- 因为没有事例筛选，并没办法进行系统误差分析。

参考文献：

[1] R. H. Dalitz, Phil. Mag. 44, 1068 (1953).

[2] J. Beringer et al. (Particle Data Group), PR D86, 010001 (2012) (URL: http://pdg.lbl.gov)

[3] Asner D. Charm Dalitz Analysis Formalism[J]. arXiv preprint hep-ex/0410014, 2003.

[4] J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics (John Wiley and Sons, New York, 1952).

[5] Nakamura K, Particle Data Group. Review of particle physics[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2010, 37(7A): 075021.

[6] Ablikim M, Achasov M N, Ai X C, et al. Amplitude analysis of the D+→ K S 0 π+ π 0 Dalitz plot[J]. Physical Review D, 2014, 89(5): 052001.

[7] Kopp S, Kostin M, Mahmood A H, et al. Dalitz analysis of the decay D 0→ K-π+ π 0[J]. Physical Review D, 2001, 63(9): 092001.

[8] 朱永生. 实验数据分析（下册）. [M]. 北京：科学出版社，2012,429-449.

[9] Marco Pappagallo. DALITZPLOTTECHNIQUES.

[10] Adrian W ̈uthrich. Dalitz Plots and Hadron. SpectroscopyMaster Thesis. :hep-ph/0507058v1 5 Jul 2005.