B06901090 電機二 沈哲瑋

Q: If we initial R_0 with random numbers and keep SUM(R_0) = 1, will the ranking be different ? Try to explain it.

A: 是。以下是簡單證明及一些測試。

簡單推導：

$\mathrm{R_n} = dTR_{n-1} + (1-d)e$，其中 $\mathrm{e} = \frac{1}{\mathrm{N}}[\ 1\ \ 1\ \ 1 \ldots 1\ ]^T$，且 Sum(R0)=1。

展開R_n，$\mathrm{R_n} = dT(dTR_{n-2} + (1-d)e) + (1-d)e = \cdots$ 依序展開下去，
最終可得，$R_n = d^nT^nR_0 + (1-d)[\sum_{k=0}^{n-1}(d^kT^k)]e$
而因為det (dT-I_N) =0 的機率很低，不太可能出現在真實的情況，因此可寫成矩陣相乘的等比，也就是$R_n = d^nT^nR_0 + (1-d)(dT-I_N)^{-1}[(dT)^n - I_n]e$
當n趨近於無限大時，T^n會趨近於0，最終得到

$$\lim_{n\to\infty} R_n = (d-1)(dT-I_N)^{-1}e$$

此結果與初始條件R_0無關，因此不論任何初始條件都會收斂。

簡單實驗測試：

我用了我的graph，把初始條件設為e_i(也就是除了第i個為1，其餘皆為0的N*1矩陣)。從i=0測到i=N，可得每個結果都接近(因為alpha跟max_iterations 有些許誤差)，而初始條件R_0必定是e_i的線性組合，因此不論何種初始條件，都必定得同一結果。

初始條件	結果與2.txt的dist()
e_0	0.00016394470381951728
e_1	0.00018368391275543853
e_2	0.0002810007861624315
略	略
e_998	0.00017204215208123028
e_999	0.00020838022525550097

由實驗可知差距都極小。

註：測試結果有點龐大，因此沒在此貼上全部，只寫出部分結果的差距，我有寫成在hw4.py內的函式