# 粗时导航五状态方程

粗时导航是一种在全球导航卫星系统（GNSS）接收机初始时间信息存在较大偏差（数量级为秒或分钟）时，仍能实现有效定位的算法。它通过扩展状态参数，将传统的四参数模型（三维位置与接收机钟差）增强为五参数模型，新增参数为接收机粗时间误差。

## **核心问题**

在标准单点定位中，我们假设接收机钟差是一个小量（通常在毫秒级），可以通过伪距观测方程与三维坐标一起解算。然而，当接收机没有精确的初始时间信息时，其内部时钟可能与系统时间存在数秒、数分钟甚至更大的偏差。这个巨大的钟差（记为）如果被当作来处理，会引入巨大的误差，导致定位失败。这是因为良好的最小二乘估计依赖于对卫星视线方向（Line-Of-Sight, LOS）的良好的线性化近似，而粗时间误差可能引入较大的卫星位置误差，从而破坏线性化（使LOS投影矢量失真）。

设接收机内部记录的测量时刻为，其与真实GNSS系统时之间的关系：



其中， 即为待估计的。（后面会解释与符号相反的原因）。

该误差会导致卫星位置计算错误。卫星位置是信号发射时刻的函数，使用错误的接收时间来计算信号发射时刻和卫星位置，会引入显著误差，从而使传统模型失效。粗时导航通过将作为一个待估状态量，在迭代计算中同时修正接收机位置、钟差和用于计算卫星位置的时间基准。

参数辨析：

：接收机钟差。表示接收机时钟相对于GNSS系统时的精密偏差，是一个小量（微秒级到毫秒级），直接影响伪距观测值。

：粗时间误差。表示接收机初始时间与系统时之间的巨大偏差（秒级到分钟级），它不直接体现在伪距观测值中，而是通过影响卫星位置的计算间接影响定位。

五状态模型即同时估计三维位置坐标、精密接收机钟差和粗时间误差。

## **观测模型**

对于第颗卫星，其伪距观测方程可表述为：

其中：

* 为接收机测得的伪距观测值。
* 为接收机与卫星之间的几何距离。为接收机位置矢量，为卫星位置矢量，为信号传播时间。
* 为光速。
* 为待估的接收机钟差。
* 为卫星钟差（由广播星历修正）。
* 分别为电离层和对流层延迟（可通过模型修正或忽略）。
* 为包含多路径效应、测量噪声等未建模误差。

关键点在于几何距离的计算。卫星位置必须在正确的信号发射时刻计算。因此，观测模型隐式地依赖于待估参数。

## **线性化方程**

基于泰勒级数展开，在近似点处对观测方程进行线性化。

### 状态向量

定义状态向量及其改正数向量：

接收机钟差参数的单位是米，粗时间误差参数的单位是秒。

### 线性化观测方程

对于每颗卫星，伪距残差为：（假设大气延迟已经用模型修正，同时忽略多路径效应的影响）

线性化后的方程为：

其中：

* 为接收机至卫星的视线方向（LOS）单位矢量。
* 为接收机与卫星之间的几何距离变化率（即径向速度），其计算涉及卫星速度矢量:

（通常忽略接收机速度，认为其静止）。

### 设计矩阵与参数估计

将所有颗卫星的方程组成法方程系统：

其中，设计矩阵的每一行对应一颗卫星：

或等价于：

参数改正数的最小二乘解为：

通过迭代计算，直至收敛，即可求解出所有五个状态参数。

## **工程实践**

### AGNSS技术

粗时导航在实际工程中主要的一个场景，是在AGNSS场景下的快速冷启动定位。独立GNSS冷启动在首次定位前通常要经过捕获、跟踪、位同步、帧同步、收集星历等过程，以至于首次定位时间（Time-To-First-Fix, TTFF）通常会消耗30秒以上。AGNSS技术通过从网络下发辅助时间、位置和星历，能够大大缩短TTFF。仅就粗时导航而言，在AGNSS场景下，能够帮助接收机跳过位同步、帧同步、收集星历的过程，在理想的卫星环境下实现1~3秒TTFF的冷启动定位。

举个例子，接收机在跟踪到某颗卫星的信号后以及位同步之前，通常能够从跟踪环路中拿到亚毫秒信息（即1毫秒以下部分的精确发射时刻）。此时毫秒以上部分的信息未知，无法进行经典四参数单点定位。然而，在辅助时间和辅助位置的帮助下，通过五参数粗时导航定位解算，能够快速拿到准确的接收机时间。此时的接收机时间精度一般在微秒级（或更优），足够用来反推观测数据的整数毫秒部分，因而相当于跳过了位同步、帧同步的过程，直接获取完整的伪距观测。

需要注意，线性化方程中，所有观测对应同一个粗时间误差。类似于接收机钟差是公共量，这意味着所有观测中整数毫秒的误差（不是本身）也是公共量。因此，假如初始位置或者初始时间引入的误差太大破坏了这个假设，那么五状态方程也无法正确收敛。

幸运的是，AGNSS服务引入的先验误差一般不会太大，大多数情况下不会出现这个问题。如果一定要考虑这种情况下的粗时导航，可以用格网搜索的方式尝试去找到合理的先验位置和时间，或者可以尝试使用RTK技术中常用的LAMBDA最小二乘降相关整数搜索算法。

### 几何不变性约束

由此延伸，五状态方程本身默认了所有观测中的整数毫秒误差是相同的，那么如果我们主动为这些整数之间的关系添加一个强约束，理论上是否能够增强模型的鲁棒性？

事实正是如此，这个约束来自卫星星座的几何构型本身，可以称之为几何不变性约束。我们假设某颗卫星的整数毫秒是准确的，将其作为参考星，固定其他卫星相对于参考星整数毫秒基准的相对值，从而实现对整数毫秒的约束。即使参考星的初始整数毫秒设置错误也没有关系，因为这个误差会传播到每个观测上，在最小二乘解算时被粗时间误差参数吸收。

由初始位置计算的先验LOS几何距离：

卫星跟踪后拿到的亚毫秒时间：

伪距观测的计算：

分别将前两个公式带入最后一个公式：

将已知量移至等式左侧：

不难发现，等式右侧中仅与接收机时间有关，在与参考星做差后被完全消除，仅剩下该观测的整数毫秒参数。因此，通过计算（所有观测的）等式左侧的数值，可以固定其他卫星相对于参考星整数毫秒的相对值。

至于选择参考星的方法有很多，比如根据卫星观测质量（CN0、高度角等），或者通过“几何残差中位数法”。无论哪种方法，参考星一定不能包含较大的误差（比如以多路径效应为首的非模型化误差），否则同样会导致最小二乘无法正确收敛。

所谓的“整数毫秒误差是相同的”，指的是当接收机粗时间误差是1毫秒的整数倍（） 时，由这个误差引起的各卫星伪距误差（）之间的差值，不足以使任何一颗卫星的伪距测量值跨越1毫秒的整数边界。更准确的表述是，**对所有卫星对，由时间引入的伪距误差之差，必须小于1毫秒**。

当然，这也同样是该约束的失效条件，考虑到卫星LOS速度一般在 ±1000 m/s以内，满足几何不变性约束的初始接收机时间误差范围通常在150秒~600秒（分别对应卫星对相对速度2000m/s和500m/s）。当然，不能孤立的考虑初始时间的误差，太大的初始位置误差也会破坏该约束。当初始位置误差过大时，甚至会破坏模型的线性化假设，导致整个最小二乘失效。为了保证约束可靠性，一般会对初始位置的不确定度做一个比较保守的限制，比如100Km以内（近似1/3个ms）。

## Q&A

**Q1：同样是表征接收机时间的误差，为什么粗时间参数和钟差参数的线性化系数不同？**

如果两者系数完全相同的话，线性化矩阵对应的两列完全相关，法方程会有秩亏问题，导致最小二乘不可解（参数不可估计）。

虽然两者都表示的是接收机时间的误差，但在实际解算中，进行了不同的参数化处理。因为数值上非常小，直接将其反映在伪距误差中。数值较大，能够对站星间的几何距离产生影响，因此对其进行了重新参数化，建模为粗时导致的卫星轨道误差。如此以来，就能保证两者的线性化系数独立不相关（对各卫星的影响相同，则由于LOS单位矢量的原因，对各卫星影响不同）：

换句话说，正是因为足够小，以至于无法对卫星位置产生明显影响，才保证了其与能够同时被有效估计。

这也是为什么，有两类观测不受粗时导航的欢迎：极高仰角的卫星（与的系数相关）和近地同步轨道GEO卫星（的系数接近0）的观测。

**Q2：同样是LOS单位矢量，为什么粗时间参数和几何位置的线性化参数符号相反？**

这与两者表征的物理含义有关。反映的是伪距观测量对接收机几何位置的影响，而则主要反映的是卫星发射时刻的误差（Q1提到了虽然是接收机时间误差，但是对其重新参数化为卫星位置的误差，卫星位置的计算只与发射时刻有关）。

因为发射时刻与伪距的符号相反：

因此和的参数符号相反。