目　录

第一章 矩阵

一、选择题： A 类题

1．设n阶方阵A,B,C满足$ABC=E$，则必有（ ）．

（A） $ACB=E$ （B） $CBA=E$

（C） $BAC=E$ （D） $BCA=E$

2．若A,B均为n阶方阵，且满足$AB=0$，则必有（ ）．

（A） $A=0$ 或 $B=0$ （B） $A+B=0$

（C） $A(A+B)B=0$ （D） $(A+B)^2=A^2+B^2$

3．下述命题中正确的是（ ）．

(A) 若$A^2=A$，则$A=0$ 或 $A=E$；

(B) 若$A^2=0$，则$A=0$；

(C) 若A为对称阵，则A^2也为对称阵；

(D) 对任意的n阶方阵A,B，均有$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$．

4．设$A=\begin{pmatrix} a_1+ib_1 & a_2+ib_2 \\ a_3+ib_3 & a_4+ib_4 \end{pmatrix}$是复矩阵，$a_i,b_i$ $(i=1,2,3,4)$是实数，则A是Hermite矩阵，当且仅当

(A) $a_1=a_4=b_2=b_3=0$， (B) $b_1=b_4=0,a_2=a_3,b_2=b_3$

（C） $a_1=a_4=0,b_2=-b_3$； （D） $b_1=b_4=0,a_2=a_3,b_2=-b_3$

5. 下列矩阵中为初等矩阵的是（ ）．

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. 设A为可逆矩阵，则（ ）．

（A）若$AB=CB$，则$A=C$，

（B） A总可经过初等行变换化为E，

（C）对矩阵$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}$施行若干次初等变换，当$A$变为$E$时，$E$相应地变为$A^{-1}$，

(D)对矩阵$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$施行若干次初等变换，当$A$变为$E$时，$E$相应地变为$A^{-1}$．

7．若 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{21} & a_{32}+a_{22} & a_{33}+a_{23} \end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则有（ ）.

（A）$AP_1P_2=B$，（B）$AP_2P_1=B$，（C）$P_1P_2A=B$，（D）$P_2P_1A=B$

B类题

1．若 A，B，$A+B$，$A^{-1}\pm B^{-1}$ 均为 n 阶可逆方阵，则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=$（ ），$(A^{-1}-B^{-1})^{-1}=$（ ）.

（A）$A^{-1}+B^{-1}$ （B）$A+B$ （C）$B(A+B)^{-1}A$ （D）$B(B-A)^{-1}A$

2．下列命题中正确的是（ ）.

（A）若 A,B 均为 n 阶可逆方阵，则 $A+B$ 必可逆；

（B）若 A,B 均为 n 阶可逆方阵，则 $B^{-1}A^T$ 必可逆；

（C）若 A,B 均为 n 阶不可逆方阵，则 $A+B$ 必不可逆；

（D）若 $AB=E$，则 A 可逆，且 $A^{-1}=B$.

3．若 A 是反对称阵，则 A^n（ ）.

（A）不是反对称阵就是对称阵，二者必居其一；

（B）必为反对称阵；

（C）必为对称阵；

（D）既不是反对称阵，也不是对称阵.

二、填空题： A类题

1．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 则 $AB=$___，$BA=$____，

$AC=$________，$2AB-3A^2=$________.

2．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$f(x)=x^n-2x^{n-1}+1$，而 $n\geq 2$ 为整数，则

$A^n-2A^{n-1}=$________，$f(A)=$________.

3．已知 $AP=PB$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，则 $A=$_____，

$A^5=$________.

4．设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A^n=$________.

5．已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 且 $A^2-AB=E$，则 $B=$________.

6．已知 $AB-B=A$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $A=$______，$(A-E)^{-1}=$_______.

7．设矩阵 A 和 B 满足关系式 $AB=A+2B$，其中 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，则 $B=$______.

8．设 A 为 n 阶方阵，$A^2=A$，则 $(A+E)^{-1}=$_______________.

9．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&&&\\-1&\frac{2}{3}&&&\\&&4&&\\&&&5&-2\\&&&-7&3\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$____________.

10．若 A,B 均为可逆方阵，则 $\begin{pmatrix}A&0\\C&B\end{pmatrix}^{-1}=$________；

$\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}^{-1}=$_______；$\begin{pmatrix}0&A\\B&C\end{pmatrix}^{-1}=$________.

11．若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&a&0\\0&0&b+c\end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 a,b,c 应满足的条件

为_____________，A 的相抵标准形为_____________.

B 类题

1．设 $(2E-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，

E 是 4 阶单位阵，则 $A=$______________.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$，且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则 $(E+B)^{-1}=$____.

3. 若 A，B 为 n 阶方阵，且 $A+B$，$A-B$ 均可逆，则 $\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}^{-1}=$________.

三. 计算题

1. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&a&7&-1\\1&-1&-6&-1&b\end{pmatrix}$ 的秩.

四、证明题：

1. 已知A是n阶对称阵，B是n阶反对称阵，证明：$A-B^2$是对称阵.

2. 若A,B均为n阶方阵，$AB+BA=E$，证明：$A^3B+BA^3=A^2$.

第一章 参考答案

一．选择题：

A 类题 1. D 2. C, 3. C, 4. D, 5. A， 6. B, 7. D

B 类题 1 C；D；提示：$A^{-1}\pm B^{-1}=A^{-1}(B\pm A)B^{-1}$，

2. B；提示：$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

3. A；提示：$(A^n)^T=(A^T)^n=(-A)^n=(-1)^nA^n$.

二、填空题：

A 类题

1. $\begin{pmatrix}4&-1\\0&0\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}4&-1\\0&0\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}5&4\\0&0\end{pmatrix}$； 2. 0；提示：$A^2=2A$.

3. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$；$A$. 4. $\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$；提示：用数学归纳法.

5. $B=A-A^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；提示：$(A-E)(B-E)=E$.

7. $\begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$　　8. $\frac{1}{2}(2E-A)$.　　9. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

11. $a \neq 0, b+c=0; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

B类题

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$；提示：$(2C-B)A^T = E$，$A(2C-B)^T = E$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$；提示：$E+B=(E+A)^{-1}(E+A)+(E+A)^{-1}(E-A)$

$=2(E+A)^{-1}$.

3. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (A+B)^{-1}+(A-B)^{-1} & (A+B)^{-1}-(A-B)^{-1} \\ (A+B)^{-1}-(A-B)^{-1} & (A+B)^{-1}+(A-B)^{-1} \end{pmatrix}$；

提示：设$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$，可求得$x_1 = x_4 = \frac{1}{2}[(A+B)^{-1}+(A-B)^{-1}]$，

及$x_2 = x_3 = \frac{1}{2}[(A+B)^{-1}-(A-B)^{-1}]$.

三. 计算题：

1．当$a=-8$，$b=-2$时，$r(A)=2$；当$a=-8$，$b\neq -2$时，$r(A)=3$；

当$a\neq -8$，$b=-2$时，$r(A)=3$；当$a\neq -8$，$b\neq -2$时，$r(A)=4$.

四、证明题

1．提示：$A-B^2=A+B^TB$.

2．提示：由题设可得$A^2B+ABA=A$及$ABA+BA^2=A$，两式相减，有 $A^2B=BA^2$.

第二章 行列式

一、选择题： **A 类题**

1．下列n阶行列式中，取值必为-1的是（ ）.

(A) $\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}$，(B) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}$，

(C) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$，(D) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2．$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$中$x^4$的系数为（ ），$x^3$的系数为（ ）.

(A) 1　(B) 2　(C) -1　(D) -2

3．若A,B均为n阶方阵，则必有（ ）.

(A) $|A+B|=|A|+|B|$　(B) $AB=BA$

(C) $|AB|=|BA|$　(D) $|\lambda A|=\lambda|A|$

4．若A,B均为n阶方阵，且满足$AB=0$，则（ ）.

（A）$A=0$或$B=0$　（B）与$|AB|=0$等价

（C）$|A|=0$或$|B|=0$　（D）$|A|+|B|=0$

5．若A为n阶可逆方阵，下列各式中正确的是（ ）.

(A) $(2A)^{-1}=2A^{-1}$　(B) $AA^*\neq 0$

（C）$(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{-1}$　(D) $[(A^{-1})^T]^{-1}=[(A^T)^{-1}]^T$

6．设$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|=$（ ）.

（A）$m+n$　（B）$-(m+n)$　（C）$n-m$　（D）$m-n$

7．若n阶方阵A与B相抵，则（　　　　）．

（A）$|A|=|B|$　　　　(B) $|A|\neq|B|$

（C）若$|A|\neq 0$，则必有$|B|\neq 0$　　　　（D）$|A|=-|B|$

B 类题

1. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} a_1+x & a_2+x & a_3+x & a_4+x \\ b_1+x & b_2+x & b_3+x & b_4+x \\ c_1+x & c_2+x & c_3+x & c_4+x \\ d_1+x & d_2+x & d_3+x & d_4+x \end{vmatrix}$ 的最高次数有可能是（　　　　）．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

2. 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为（　　　　）．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

3．设A是任一n $(n\geq 3)$阶可逆方阵，常数$k\neq 0,\pm 1$，则$(kA)^*=$（　　　　）．

（A）kA^*　　（B）$k^{n-1}A^*$　　（C）k^nA^*　　（D）$k^{-1}A^*$

4．设A是n阶非奇异方阵，则$(A^*)^*=$（　　　　）．

（A）$|A|^{n-1}A$　　　　（B）$|A|^{n+1}A$

（C）$|A|^{n-2}A$　　　　（D）$|A|^{n+2}A$

5．若A，B为n阶方阵，$AB=0$且$B\neq 0$，则必有（　　　　）．

（A）$(A+B)^2=A^2+B^2$，　　（B）$|B|\neq 0$，

（C）$|B^*|=0$，　　（D）$|A^*|=0$

6. 两条直线 $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$，$\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ 共面的充要条件是(　).

（A）$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$　　　　（B）$\dfrac{x_2-x_1}{m_1}=\dfrac{y_2-y_1}{n_1}=\dfrac{z_2-z_1}{p_1}$

（C）$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$　　（D）$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq 0$

7．对于非齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$下列结论中不正确的是（　　　）.

(A)若方程组无解，则系数行列式$D=0$；
(B)若方程组有解，则系数行列式$D\neq 0$；
(C)若方程组有解，则或者有唯一解，或者有无穷多解；
(D)系数行列式$D\neq 0$是方程组有唯一解的充分必要条件.

二、填空题：

A类题

1．$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$

2．设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}$，则 $A_{12}-A_{22}+A_{32}=$

$A_{11}-A_{21}+A_{31}=$

3．$D_n=\begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix}=$

4．$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$

5．$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}=$

6. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

7. $\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix} =$

8. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} =$

9. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 & x \\ d & c & b & a \end{vmatrix} =$

10. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} =$

11. $D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} =$

12. $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} =$

13． $D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}=$

14*． $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\x_1^3&x_2^3&x_3^3\end{vmatrix}=$

15．设矩阵 $A_{10}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\10^{10}&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$，则 $|A-\lambda E|=$________.

16．若 A 为 n 阶方阵且满足 $AA^T=E$，若 $|A|<0$，则 $|A+E|=$________.

17．设 $A=(\alpha\quad\gamma_2\quad\gamma_3\quad\gamma_4)$，$B=(\beta\quad\gamma_2\quad\gamma_3\quad\gamma_4)$是 4 阶方阵且 $|A|=4$，$|B|=1$，则 $|A+B|=$________.

18．若齐次方程组 $\begin{cases}ax_1+x_2+2x_3=0\\x_1+2x_2+4x_3=0\\x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 $a=$_________.

19．若齐次方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 只有零解，则 λ 应满足的条件是______.

B类题

1．设 A,B 均为 n 阶方阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，则 $\left|2A^*B^{-1}\right|=$________.

2．若 A 为3阶方阵，$|A|=2$，则 $\left|(3A)^{-1}-A^*\right|=$________.

3．设矩阵 $A_{m\times m}$，$B_{n\times n}$ 且 $|A|=a$，$|B|=b$，$C=\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$，则 $|C|=$__________；又若 $ab\neq 0$，则 $C^{-1}=$______________.

4．若 A，B 均为 3 阶方阵，且 $|A|=-1$，$|B-A|=-4$，$A^{-1}=A^T$，则 $\left|E-AB^T\right|=$_____.

5．设实矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ 满足（1）$a_{ij}=A_{ij}\ (i,j=1,2,3)$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式；（2）$a_{11}\neq 0$，则 $|A|=$______________.

6. 设矩阵 A，B 满足 $A^*BA=2BA-8E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $B=$_____.

7. 设矩阵 A 的伴随阵 $A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 8\end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，则 $B=$____.

8. 设 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$，则 A 中所有元素的代数余子式之和

$\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}=$_____.

三、计算题：

1. 设 $x_i \neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$，求 $D_n = \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$

2. $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_1+x+1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_1 & a_2+x+2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+x+n-1 \end{vmatrix}$.

3. $D_n = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}$,

4. 设 $F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$，求 $F'(x)$.

5. 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0 \end{cases}$

四、证明题：

1. 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2-x \\ 1 & x & x+3 & x+6 \end{vmatrix}$，证明： $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.

2. 证明：（1） $\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-x \end{vmatrix}=x^2-(a_{11}+a_{22})x+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$；

（2） $\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-(M_{11}+M_{22}+M_{33})x$

$+(a_{11}+a_{22}+a_{33})x^2-x^3$，其中 $M_{ii}(i=1,2,3)$ 为 a_{ii} 的余子式.

3. 若一个 n 阶行列式 $D_n=\left|a_{ij}\right|$ 的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}$， $i,j=1,2,\cdots,n$，则称 D_n 为反对称行列式. 证明：奇数阶反对称行列式为零.

4. 若 A,B 均为 n 阶可逆方阵，

证明：（1） $(AB)^*=B^*A^*$；（2） $(A^*)^T=(A^T)^*$；（3） $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

5. 设 n 阶可逆方阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 中每行元素之和等于常数 a，

证明：（1） $a\neq 0$；（2） A^{-1} 中每行元素之和等于常数 a^{-1}.

6. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^m=E$，$(m\in N)$，又 $B=\left(A_{ij}\right)$，其中 A_{ij} 是 $|A|$ 中元素的代数余子式，证明： $B^m=E$.

7. 若 A,B 均为 n 阶方阵，且 $AB=0$. 若 $A\neq 0$，则 $|B|=0$.

第二章 参考答案

一．选择题：

A 类题 1．D,　2.　B ，C, 3.　C,　4．C,　5．B,　6．C，7.　C .

B 类题 1. A,　2. B,　3. B,　4. C,　5.D；提示:须证 $|A|=0$（反证），6.C，7. B.

二．填空题： **A 类题**

1．0. 提示：用行列式定义

2．0，−23. 提示：(1) $A_{12}-A_{22}+A_{32}=a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}$

(2) $A_{11}-A_{21}+A_{31}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=D$.

3．$D_n=\begin{cases}0, & n\geq 3\\ x_1-x_2, & n=2\end{cases}$. 提示：当 $n\geq 3$ 时，c_3-c_2，c_2-c_1.

4．−3. 5．$(-1)^{n-1}(n-1)$. 6．x^4. 7．$x^3(x+\sum_{j=1}^{4}a_j)$.

8．$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ b_4 & a_4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}$. 提示：按 r_1 展开. 9．$(b^2-c^2)(x^2-y^2)$.

10．x^2y^2. 提示：先用 c_2-c_1，c_4-c_3；再用 r_1-r_2，r_3-r_4.

11．$a^n-(-b)^n$. 提示：按 c_1 展开.

12．$(1-a+a^2)(1-a^3)$. 提示：$D_5=(1-a)D_4+aD_3$.

13．$n+1$. 提示：$D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$，即 $D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=\cdots=1$.

14．$(x_1+x_2+x_3)\prod_{1\leq j<i\leq 3}(x_i-x_j)$. 提示：构造 $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & y\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & y^2\\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & y^3\end{vmatrix}$，并按 c_4 展开，则 y^2 前的系数为 $-D$；又 $\Delta=(y-x_1)(y-x_2)(y-x_3)\prod_{1\leq j<i\leq 3}(x_i-x_j)$，注意 y^2 前的系数.

15．$\lambda^{10}-10^{10}$.

16、0；提示：$|A+E|=|A(E+A^T)|=|A||E+A|$.

17． 40. 18． $\frac{1}{2}$. 19． $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$.

B 类题

1． $-\frac{2^{2n-1}}{3}$；提示：$\left|2|A|A^{-1}B^{-1}\right|=(2|A|)^n\left|(BA)^{-1}\right|=4^n\cdot\frac{1}{|BA|}=\frac{4^n}{-6}$.

2． $-\frac{125}{54}$；提示：$\left|\frac{1}{3}A^{-1}-2A^{-1}\right|=\left|-\frac{5}{3}A^{-1}\right|=(-\frac{5}{3})^3\frac{1}{|A|}$，

3． $(-1)^{mn}ab$；$\begin{pmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$.

4． -4；提示：$|E-AB^T|=|A(A^T-B^T)|=|A||A-B|=(-1)(-1)^3|B-A|=|B-A|$

5．1；提示：由（1）知 $A^*=A^T$，从而 $AA^T=|A|E$，$|A|^2=|A|^3$，故 $|A|=1$ 或 0.

由（2）知 $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2>0$

6．$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；提示：等式两边同除$|A|$，则有 $A^{-1}BA = 4E - BA$，$(A^{-1}+E)BA = 4E$.

故 $B = 4(A^{-1}+E)^{-1}A^{-1} = 4[A(A^{-1}+E)]^{-1} = 4(E+A)^{-1}$.

7．$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$；提示：等式两边左乘 A^{-1}，右乘 A，则有 $B = A^{-1}B + 3E$；而

$|A|^3 = |A^*| = 8$.

8．1；提示：$A^* = |A|A^{-1} = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$，或行列式按行展开定理.

三、计算题

1．$x_1x_2\cdots x_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i})$，

2．$(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$，

3．$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})(x+\sum_{i=1}^{n-1}a_i)$ ，

4．$6x^2$

5．当 $a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$ 时，只有零解；

当 $a=b\neq c$ 时，$x = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$；当 $a=c\neq b$ 时，$x = k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$；

当 $b=c\neq a$ 时，$x = k_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$；当 $a=b=c$ 时，$x = k_4\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_5\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

四、证明题：

1. 提示：对 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上应用罗尔定理.
2. （2）把行列式的每一项都看成是两个数的和，则此行列式可拆成 8 个行列式的和. 这里 M_{ij} 是元素 a_{ij} 的余子式.
3. 注意 $a_{ii}=0$，$i=1,2,\cdots,n$；应用行列式性质 1，3，须证 $D_n = (-1)^n D_n$.

5．提示：$|A| = a(A_{1j}+A_{2j}+\cdots+A_{nj})$

6．提示：$|A|^m = 1$，$B = (A^*)^T = (|A|A^{-1})^T$.

7．提示：反证法. 若 $|B|\neq 0$，则 $A = AE = A(BB^{-1}) = (AB)B^{-1} = 0B^{-1} = 0$

第三章 向量空间

一 选择题： A 类题

1. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是 3 维向量，则(　　　　).

(A) 若α_1,α_2线性相关，α_3,α_4线性相关，则$\alpha_1+\alpha_3$，$\alpha_2+\alpha_4$线性相关.

(B) 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\alpha_1+\alpha_4$，$\alpha_2+\alpha_4$，$\alpha_3+\alpha_4$线性无关.

(C) 若α_4不能用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$一定线性相关.

(D) 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$中任意三个向量均线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关.

2. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组中线性无关的是(　　　).

(A) $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$.

(B) $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$.

(C) $\alpha_1+2\alpha_2$，$2\alpha_2+3\alpha_3$，$3\alpha_3+\alpha_1$.

(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3$，$3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$.

3. 若向量组α，β，γ线性无关，α，β，δ线性相关，则(　　　).

(A) α必可由β，γ，δ线性表示.　　(B) β必不可由α，γ，δ线性表示.

(C) δ必可由α，β，γ线性表示.　　(D) δ必不可由α，β，γ线性表示.

4. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是(　　).

(A) $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$.

(B) α_1，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

(C) $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$.

(D) $\alpha_1+\alpha_2$，$2\alpha_1+\alpha_3$，$3\alpha_3+\alpha_1$.

5. 设向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，但不能由向量组(I)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示，记向量组(II)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$，则(　　　).

(A) α_m不能由(I)线性表示，也不能由(II)线性表示.

(B) α_m不能由(I)线性表示，但可由(II)线性表示.

(C) α_m可由(I)线性表示，也可由(II)线性表示.

(D) α_m可由(I)线性表示，但不可由(II)线性表示.

6. 设n维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$($m<n$)线性无关，则$n$维列向量组$\beta_1$，$\beta_2,\cdots$，$\beta_m$线性无关的充要条件是(　　　).

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可由$\beta_1$，$\beta_2,\cdots$，$\beta_m$线性表示.

(B) β_1，$\beta_2,\cdots$，β_m可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示.

(C) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\beta_1$，$\beta_2,\cdots$，$\beta_m$等价.

(D) 矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$与$B=(\beta_1，\beta_2,\cdots，\beta_m)$等价.

7. 设有两个 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 β_1，$\beta_2,\cdots$，β_m. 若存在两组不 λ_1，$\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$(\lambda_1+k_1)\alpha_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m+(\lambda_1-k_1)\beta_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\beta_m=\vec{0},$$

则(　　).

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 β_1，$\beta_2,\cdots$，β_m 都线性相关.

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 β_1，$\beta_2,\cdots$，β_m 都线性无关.

(C) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m$，$\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性无关.

(D) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m$，$\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关.

8．设 A 是 4×3 矩阵且 $r(A)=2$，$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则 $r(AB)=$（　　　）.

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

B 类题

1. n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(3\le s\le n)$ 线性无关的充要条件是(　　　).

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关.

(B) 存在不全为零的 s 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，使得 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s=0$.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任何一个向量都不能用其余向量线性表示.

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中存在一个向量不能用其余向量线性表示.

2. 设向量组

(1) $\alpha_1=(a_1,a_2,a_3),\alpha_2=(b_1,b_2,b_3),\alpha_3=(c_1,c_2,c_3)$；

(2) $\beta_1=(a_1,a_2,a_3,a_4),\beta_2=(b_1,b_2,b_3,b_4),\beta_3=(c_1,c_2,c_3,c_4)$；则(　　　).

(A) 若向量组(1)线性相关，则向量组(2)线性相关；

(B) 若向量组(1)线性无关，则向量组(2)线性无关；

(C) 若向量组(2)线性无关，则向量组(1)线性无关；

(D) 向量组(1)线性无关的充要条件是向量组(2)线性无关.

3．设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是两个 n 维向量组，且两个向量组的秩都是 r，则(　　).

(A) 两个向量组等价；

(B) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩也是 r；

(C) 当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示；

(D) 当 $s=t$ 时，两个向量组等价.

4．设 A 为 n 阶矩阵， $R(A)=r<n$ ，则在 A 的 n 个行向量中(　　　).

(A)　必有 r 个行向量线性无关；

(B)　任意 r 个行向量线性无关；

(C)　任意 r 个行向量都构成极大线性无关组；

(D)　任意一个行向量都可由其余行向量线性表示.

5．设 A 为 n 阶方阵，则 $|A|=0$ 的充要条件是(　　　).

(A)　矩阵 A 中有两行成比例；

(B)　矩阵 A 中至少有一行为其余行的线性组合；

(C)　矩阵 A 中有一行的元素全为零；

(D)　矩阵 A 中任一行为其余行的线性组合.

6．设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 都是 n 维向量，则下列结论正确的是(　　).

(A)　若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ ，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关；

(B)　若对任意一组不全为零的数 $k_i(1\le i\le m)$ ，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\ne 0$ ，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关；

(C)　若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 $k_i(1\le i\le m)$ ，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ ；

(D)　若 $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=0$ ，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

7．若 $n\ (n\ge 3)$ 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 $n-1$，则 a 必为（　　　）.

（A）1　　　（B）$\dfrac{1}{1-n}$　　　（C）-1　　　（D）$\dfrac{1}{n-1}$

二　填空题

1．　已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1)$ ， $\alpha_2=(2,0,t,0)$ ， $\alpha_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2，则 $t=$______.

2．设 $A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$，其中 $a_i\ne 0,b_i\ne 0(i=1,2,\cdots,n)$ ，则 $r(A)=$____.

3. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 的秩为 3，则 a,b,c 应满足的关系为______________.

三 判断题 判断下列命题是否正确？若正确，给出证明；若不正确，请举出反例或说明理由.

1．如果有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

2．如果有一组全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

3. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$（$m$>2)线性无关的充要条件是任意两个向量线性无关.

4．若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$ 线性无关.

5．若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4+\alpha_1$ 线性无关.

6．若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3,\cdots$，$\alpha_{s-1}+\alpha_s$，$\alpha_s+\alpha_1$ 线性无关.

7．设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$（$m\geq 3$）线性相关，向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则 α_1 能由 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示.

8. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充要条件是其任一向量都不能由其余向量线性表示.

9．如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意 r 个向量都线性无关.

10．如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则其中任一向量都可以由其余向量线性表示.

四、证明题

1． 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明：$3\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$，$4\alpha_3-5\alpha_1$ 也线性无关.

2．设有向量组 A: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$， B: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$， α_4， C: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$，若它们的秩分别为 $r(A)=r(B)=3, r(C)=4$，证明： $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$(\alpha_5-\alpha_4)$ 线性无关.

3．如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，但其中任意三个向量都线性无关，证明必存在一组全不为零的数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$.

4．设 α 可以被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，证明表示法唯一的充要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

5. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，证明 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关的充要条件是 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出.

6. 设 A 是 $n\times m$ 矩阵， B 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，若 $AB=E$，证明： B 的列向量组线性无关.

7. 设 A 为 n 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 个线性无关的 n 维向量，证明：秩（A）$=n$ 的充要条件是 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 线性无关.

8. 设 A 为 $m\times k$ 矩阵，B 为 $k\times m$ 矩阵，
证明：(1)若 $r(A)=k$，则 $r(AB)=r(B)$；　(2)若 $r(B)=k$，则 $r(AB)=r(A)$.

第三章 参考答案

一 选择题

A类 1. C； 2. C； 3. C； 4. C； 5. B； 6. D； 7. D； 8.B

B类 1. C； 2. B； 3. C； 4. A； 5. B； 6. B；

7. B, 提示: $|A|=(1-a)^{n-1}[1+(n-1)a]=0$. $a=\dfrac{1}{1-n}$ 时， $D_{n-1}=\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-2}\neq 0$.

二 填空题

1. 3； 2. 1. 3. $a\neq 2bc$

三 判断题

1~6, 9~10 错. 7~8 正确.

四 证明题

1. 考虑 $x_1(3\alpha_1+2\alpha_2)+x_2(\alpha_2-\alpha_3)+x_3(4\alpha_3-5\alpha_1)=\vec{0}$.
2. 记：$\alpha_4=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$，考虑 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\alpha_5-\alpha_4)=\vec{0}$.
3. 反证法.
5. 反证法.
6. $AB=E$.
7. 令 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则 $|B|\neq 0$. $\Rightarrow$ 利用 $|AB|=|A||B|$. $\Leftarrow$ 利用 $|AB|\neq 0$.
8. 利用关系式 $r(AB)\le r(B), r(AB)\ge r(A)+r(B)-k$.

第四章 线性方程组

一、选择题

1. 已知$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$是$A\vec{x}=\vec{0}$的基础解系，则此方程组的基础解系还可以选用(　　).

(A) $\eta_1+\eta_2$， $\eta_2+\eta_3$， $\eta_3+\eta_4$， $\eta_4+\eta_1$.

(B) $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$的一个等价向量组.

(C) $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$的一个等秩向量组.

(D) η_1， $\eta_1,+\eta_2$， $\eta_1+\eta_2+\eta_3$， $\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4$.

2. 齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2 x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$的系数矩阵记为$A$，若存在三阶矩阵$B\neq 0$，使得$AB=0$，则(　　).

(A) $\lambda=-2$ 且 $|B|\neq 0$，　　(B) $\lambda=-2$ 且 $|B|=0$，

(C) $\lambda=1$ 且$|B|=0$，　　(D) $\lambda=1$ 且$|B|\neq 0$.

3. 设向量$\alpha_1=(a_1,a_2,a_3)^T,\alpha_2=(b_1,b_2,b_3)^T,\alpha_3=(c_1,c_2,c_3)^T$，则三条直线
$a_1x+b_1y+c_1=0,a_2x+b_2y+c_2=0,a_3x+b_3y+c_3=0(a_i^2+b_i^2\neq 0,i=1,2,3)$
交于一点的充要条件是(　　).

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，

(C) $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2)$，　　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关而$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关.

4. 对于n元方程组，下列命题正确的是（　　）.

（A）若$AX=0$只有零解，则$AX=b$有唯一解;

（B） $AX=0$有非零解的充分必要条件是$|A|=0$；

(C) $AX=b$有唯一解的充分必要条件是$r(A)=n$；

(D)若$AX=b$有两个不同的解，则$AX=0$有无穷多解.

5. 非齐次线性方程组$AX=b$中未知量的个数为n，方程个数为m，系数矩阵A的秩为r，则（　　）.

（A） $r=m$时， $AX=b$有解　　（B） $r=n$时， $AX=b$有唯一解

（C） $m=n$时， $AX=b$有唯一解　　（D） $r<n$时， $AX=b$有无穷多解.

二、填空题

1．任何n维向量X都是方程$AX=0$的解，则$A=$_________.

2．设n阶矩阵A的各行元素之和为0，且A的秩为$n-1$，则$AX=0$ 的通解为______.

三、计算证明题

1．求解下列线性方程组：

（1）$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$，

（2）$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-x_4=1 \\ 2x_1-x_2-x_3+4x_4=2 \\ 3x_1-2x_2+2x_3+3x_4=3 \\ x_1-4x_3+5x_4=-1 \end{cases}$，

（3）$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+x_2+12x_3=0 \end{cases}$．

2．求解方程组：

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=a \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$，

（2）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=c \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=d \end{cases}$

3．求非齐次线性方程组 $AX=b$，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & a+2 & -b-2\\ 0 & -3a & a+2b\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -3\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

4．已知 $\alpha_1=(1,2,-3,1)^T,\alpha_2=(5,-5,a,11)^T,\alpha_3=(1,-3,6,3)^T,\beta=(2,-1,3,b)^T$，讨论 a,b 取何值时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？并给出其表达式.

5．已知向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}a\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}b\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\ 6\\ -7\end{pmatrix}$ 具有相同的秩，且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，求 a,b 的值.

6. 设n阶矩阵A满足$A^2=E$，证明：$r(E+A)+r(E-A)=n$.

7. 设A为$m\times n$矩阵，$m\ge n$，b为某一给定的m维向量，若实系数线性方程组$Ax=b$有唯一解，证明：$r(A^TA)=n$，且唯一解为$x=(A^TA)^{-1}A^Tb$.

第四章 参考答案

一 选择题

1.D; 2. C; 3.D; 4. D; 5.A

二 填空题

1． 0； 2. $k(1,1,\cdots,1)^T,k\in R$；

三 计算题

1．（1）只有零解, （2）无解, （3） 有唯一解：$x_1=9$，$x_2=6$，$x_3=-2$

2．（1）若$a\ne3$，无解；若$a=3$， $x=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，

$c_1,c_2,c_3\in R$.

(2)若$c\ne0$或$d\ne2$，无解；若$c=0$，$d=2$，有无穷多解，解同（1）.

3．当$a\ne b$且$a\ne0$时，方程组有唯一解$\left(1-\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a},\ 0\right)^T$；当$a=0$时，方程组无解；

当$a=b\ne0$时，方程组有解为$\left(1-\dfrac{1}{a},\ k+\dfrac{1}{a},\ k\right)^T$，$k\in R$.

4．若$b\ne4$， β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；若$b=4,a\ne12$，有唯一表示，$\beta=\alpha_1+\alpha_3$；$b=4,a=12$， β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，表示法不唯一.

5． $a=15,b=5$；

6． 利用$AB=0,r(A)+r(B)\le n$.

7． $r(A)=r(A^TA)$.

第五章 矩阵的对角化

一、选择题：

1. 设$\lambda=2$是非奇异矩阵A的一个特征值，则矩阵$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$有一个特征值为（　　）.

（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{4}$

2. 设A为n阶可逆阵，λ为A的一个特征值，则A的伴随阵A^*的一个特征值为（ ）

（A）$\lambda^{-1}|A|^n$　（B）$\lambda^{-1}|A|$　（C）$\lambda|A|$　（D）$\lambda^{n-1}|A|^{n-1}$

3. 设A为n阶方阵，且$A^k=0$，（k为正整数），则（　　）.

（A）$A=0$　（B）A有一个不为零的特征值

（C）A的特征值全为零　（D）A有n个线性无关的特征向量

4. 设λ_0是n阶矩阵A的特征值，且齐次线性方程组$(\lambda_0E-A)x=0$的基础解系为η_1与η_2，则A的属于λ_0的全部特征向量是（　　）.

（A）η_1和η_2　（B）η_1或η_2

（C）$c_1\eta_1+c_2\eta_2$（c_1,c_2全不为零）　（D）$c_1\eta_1+c_2\eta_2$（c_1,c_2不全为零）

5. 下列二阶矩阵可对角化的是（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}1&1\\-4&5\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&-4\\1&5\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$

6. 下列结论正确的是（　　）.

（A）若ξ_1,ξ_2是方程$(\lambda E-A)X=0$的一个基础解系，则$k_1\xi_1+k_2\xi_2$是A的属于λ的全部特征向量，其中k_1,k_2是全不为零的常数

（B）A、B有相同的特征值，则A与B相似

（C）如果$|A|$=0，则A至少有一个特征值为零

（D）若λ同是方阵A、B的特征值，则λ也是$A+B$的特征值

7. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则$A$的特征值为（　　）.

（A）1，1，0　（B）-1，1，1　（C）1，1，1　（D）1，-1，-1

8. 若A与B相似，则（　　）.

（A）$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$　（B）$\lambda E-A=\lambda E-B$

（C）与同一对角矩阵相似　（D）A与B有相同的伴随矩阵

9. 若 $A^2 = E, E$ 为单位矩阵，则有（ ）

（A） $A+E$ 可逆　　（B） $A-E$ 可逆

（C） $A \neq E$ 时， $A+E$ 可逆　　（D） $A \neq E$ 时， $A+E$ 不可逆

二、填空题：

1. 设 A 为 3 阶方阵，其特征值为 3，-1，2，则 $|A|=$ _______，A^{-1} 的特征值为 _______，$2A^2-3A+E$ 的特征值为_______.

2．若 A 与 E 相似，则 $A=$ ________.

3．已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且 A 与 B 相似，则 $\lambda=$_______.

4. 已知 A_1, A_2, A_3 是三个非零的三阶矩阵，且 $A_i^2 = A_i\left(i=1,2,3\right), A_iA_j = 0\left(i \neq j\right)$ ，则 $A_i\left(i=1,2,3\right)$ 的特征值为 _______.

5. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3, \lambda_3=12$，则 $x=$ _______，特征向量为 _________.

6. 设 0 是矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ 的特征值，则 $a=$ ____， A 的另一特征值为 ______.

7. 若 n 阶可逆阵 A 的每行元素之和均为 a $\left(a \neq 0\right)$，则数 _____ 一定是矩阵 $2A^{-1}+3E$ 的特征值.

三、计算题：

1. 设 6，3，3 为实对称矩阵 A 的特征值，属于 3 的特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

（1）求属于 6 的特征向量；（2）并求矩阵 A.

2. 某实验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其它生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工. 设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n，记成向量 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式：$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$；

(2) 验证 $\eta_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量，并求出相应特征值；

(3) 当 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 时，求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$.

3. 若 $A=\begin{pmatrix}0&\alpha&1\\0&2&0\\4&\beta&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 α 与 β 应满足的条件.

4. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，（1）将 A 对角化；（2）计算 $A^k = ?\left(k>0\right)$.

5. 设 A 为 n 阶方阵，其 n 个特征值为 3，5，$\cdots, 2n+1$，求行列式 $|A-2E|$ 的值，其中 E 为 n 阶单位阵.

6. 设 4 阶方阵 A 满足条件 $|3E+A|=0, AA^T=2E, |A|<0$，其中 E 是 4 阶单位阵，求方阵 A 的伴随矩阵 A^* 的一个特征值.

7. 设 A 是三阶方阵，且 $|A-E|=|A+2E|=|2A+3E|=0$，求 $\left|2A^*-3E\right|$.

四、证明题

1. 若 A 可逆，证明：（1）A 的特征值不是零；（2）若 λ 是 A 的一个特征值，则 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

2. 设λ_1,λ_2是矩阵A的两个不同特征值，而ξ_1,ξ_2是分别属于λ_1,λ_2的特征向量，证明$\xi_1+\xi_2$不是A的特征向量.

3. 设方阵A满足条件$A^T A=E$，试证A的实特征向量所对应的特征值绝对值等于 1.

4. 设A满足$A^2-3A+2E=0$，证明其特征值只能取值 1 或 2.

5. 设A为正交矩阵，若$|A|=-1$，求证A一定有特征值-1.

6. 设 A 为 n 阶非零方阵， $A^*=A^T$ ，证明： $|A|\neq 0$. 提示：反证法，应用 $AA^*=|A|E$.

第五章 参考答案

一、1、（B）2、（B）3、（C）4、（D）5、（C）6、（C）7、（B）8、（A）9、（D）

二、1、−6； $\frac{1}{3}$ ，−1， $\frac{1}{2}$ ；10，6，3　　2、E　　3、6　　4、$\lambda_i=0$ 和 $\lambda_i=1$

5、4； $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$　　6、1；2　　7、$\frac{2}{a}+3$

三、1、（1） $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ；（2） $A=\begin{pmatrix}4&-1&1\\-1&4&-1\\1&-1&4\end{pmatrix}$ ，　　2、(1)　$A=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$,

(2)　$\lambda_1=1,\lambda_2=\frac{1}{2}$,　　(3) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix}8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\\2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$,　　3、$2\alpha+\beta=0$

4、（1） A 与 $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ 相似；（2） $A^k=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^k2+5^k&(-1)^{k+1}+5^k&(-1)^{k+1}+5^k\\(-1)^{k+1}+5^k&(-1)^k2+5^k&(-1)^{k+1}+5^k\\(-1)^{k+1}+5^k&(-1)^{k+1}+5^k&(-1)^k2+5^k\end{pmatrix}$

5、$(2n-1)!!$ ，　6、$\frac{4}{3}$ ，　7、126

第六章 二次型

一、选择题

1. A为n阶方阵，下列结论正确的是（　　）.

（A） 若A的所有主子式全为正，则A是正定矩阵

（B） A必与一个对角阵合同

（C） 若A与一对角矩阵相似，也必与一个对角阵合同

（D） 若A与正定矩阵合同，则A为正定矩阵

二．填空题

1. 二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-6x_2x_3$ 的矩阵形式是 ______.

2. 若二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，则t为___.

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & k & 0\\ 0 & 0 & k^2\end{pmatrix}$是正定矩阵，则$k$为 ______.

三．计算题

1. 设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2kx_1x_2+2mx_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $X=TY$ 化为标准形 $f\left(y_1,y_2,y_3\right)=y_2^2+2y_3^2$，其中 $X=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T$， $Y=\left(y_1,y_2,y_3\right)^T$,$T$ 为三阶正交矩阵，求常数k和m.

2. 已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，求（1）参数c及此二次型对应的矩阵的特征值;（2）指出 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=1$表示何种曲面？

3. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为实数，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$，求该二次型正定条件.

四．**证明题**

1．设 A 为可逆实矩阵，试证 A^TA 是正定矩阵.

2．设 A、B 为两个 n 阶实对称阵，且 A 正定. 试证明存在一个 n 阶实可逆矩阵 T，使得 T^TAT 与 T^TBT 都是对角阵.

3. 设 A 是 n 阶正定阵，E 是 n 阶单位阵，证明 $A+E$ 的行列式大于 1.

4. 试证：n阶方阵 $A=a^2\begin{pmatrix}1&\rho&\rho&\cdots&\rho\\\rho&1&\rho&\cdots&\rho\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\rho&\rho&\rho&\cdots&1\end{pmatrix}$的最大特征值是 $\lambda=a^2\left[1+(n-1)\rho\right]$，

其中 $0<\rho<1$.

5. 试证 $f\left(x_1,x_2,\cdots x_n\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\le i<j\le n}x_ix_j$ 为正定二次型.

第六章 参考答案

一．1、(D)

二．

1、$\left(x_1\quad x_2\quad x_3\right)\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&-3\\0&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$， 2、$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$， 3、$k>1$

三．

1、$k=m=0$， 2、（1）$c=3$, 特征值为 0，4，9；

（2）表示椭圆柱面，3、$a_1a_2\cdots a_n\ne(-1)^n$

2006 年全国硕士研究生入学考试（数学一）

一、填空题

（5）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$， E 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，则 $|B|=$________.

二、选择题

（11）设 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 均为 n 维列向量，A 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是（　　）.

（A）若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性相关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性相关.

（B）若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性相关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性无关.

（C）若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性无关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性相关.

（D）若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性无关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性无关.

（12） 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得 C，

记 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则（　　）.

（A）$C=P^{-1}AP$. （B）$C=PAP^{-1}$.

（C）$C=P^TAP$. （D）$C=PAP^T$.

三、解答题

(20) 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3-bx_4=1 \end{cases}$ 有3个线性无关的解

（Ⅰ）证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$

（Ⅱ）求 a,b 的值及方程组的通解

(21) 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T, \alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 Ax=0 的两个解,

(Ⅰ)求 A 的特征值与特征向量

(Ⅱ)求正交矩阵 Q 和对角矩阵 A,使得 $Q^TAQ=\Lambda$.

2007 年全国硕士研究生入学考试（数学一）

一、选择题

(7) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列线性相关的是（　　　）.

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$　　(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$

(8) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则矩阵 A 与 B（　　　）.

(A)合同且相似　　(B)合同但不相似

(C)不合同但相似　　(D)不合同不相似

二、填空题

(15) 矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $rank(A^3)=$ ________.

三、解答题

(21) 设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解.

(22) 设 3 阶对称矩阵 A 的特征向量值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量，记 $B=A^5-4A^3+E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵

（I）验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量

（II）求矩阵 B

2008年全国硕士研究生入学考试（数学一）

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（5）设A为n阶非零矩阵E为n阶单位矩阵若$A^3=0$，则（　　）.

(A) $E-A$不可逆，$E+A$不可逆.　　(B) $E-A$不可逆，$E+A$可逆.

(C) $E-A$可逆，$E+A$可逆.　　(D) $E-A$可逆，$E+A$不可逆.

（6）设A为3阶非零矩阵，如果二次曲面方程$(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$在正交变换下的标准方程的图形如图，则$A$的正特征值个数（　　）.

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

二、填空题：9-14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（13）设A为2阶矩阵，α_1,α_2为线性无关的2维列向量，$A\alpha_1=0,A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则$A$的非零特征值为________.

三、解答题：15－23小题，共94分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(20)（本题满分9分）设α,β为3维列向量，矩阵$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，$\alpha^T$为$\alpha$的转置，$\beta^T$为$\beta$的转置，证明：

（1）秩$r(A)\le 2$；　　（2）若α,β线性相关，则$r(A)<2$.

（21）（本题满分9分）

设有n元线性方程组$AX=b$，其中$A=\begin{pmatrix}2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a\end{pmatrix}_{n\times n}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$.，

（I）求证$|A|=(n+1)a^n$；

（II）a为何值，方程组有唯一解，求x_1；

（III）a为何值，方程组有无穷多解，求通解.

2009 年全国硕士研究生入学考试（数学一）

一、选择题

（5）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维向量空间 R^3 的一组基，则由基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵为（　　）.

$(A)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$ $(B)\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$ $(C)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$. $(D)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

（6）设 A, B 均为 2 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵，若 $|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为（　　）.

$(A)\begin{pmatrix}O&3B^*\\2A^*&O\end{pmatrix}$ $(B)\begin{pmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{pmatrix}$ $(C)\begin{pmatrix}O&3A^*\\2B^*&O\end{pmatrix}$ $(D)\begin{pmatrix}O&2A^*\\3B^*&O\end{pmatrix}$

二、填空题

（13）若 3 维列向量 α,β 满足 $\alpha^T\beta=2$，其中 α^T 为 α 的转置，则矩阵 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为__________.

三、解答题（

（20）（本题满分 11 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$　　$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求满足 $A\xi_2=\xi_1$ 的 ξ_2. $A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2，ξ_3.

（Ⅱ）对①中的任意向量 ξ_2，ξ_3 证明 ξ_1，ξ_2，ξ_3 无关.

（21）（本题满分 11 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

（Ⅱ）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

2010 年全国硕士研究生入学考试（数学一、二）

数学一

（5）设 A 为 $m\times n$ 型矩阵，B 为 $n\times m$ 型矩阵，E 为 m 阶单位矩阵，若 $AB=E$，则（　　）

(A) 秩 $r(A)=m$, 秩 $r(B)=m$　　(B) 秩 $r(A)=m$, 秩 $r(B)=n$

(C) 秩 $r(A)=n$, 秩 $r(B)=m$　　(D) 秩 $r(A)=n$, 秩 $r(B)=n$

（6）设 A 为 4 阶对称矩阵，且 $A^2+A=0$，若 A 的秩为 3，则 A 相似于（　　）

$$(A)\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}\quad(B)\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}\quad(C)\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}\quad(D)\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$$

（13）若 $\alpha_1 = (\ldots, -\ldots)^T$, $\alpha_2 = \ldots^T$, $\alpha_3 = \ldots\alpha\ldots^T$ 若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 形成的向量空间维数是 2，则 $\alpha=$____________.

（20）（本题满分 11 分）设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解，（Ⅰ）求 λ, a;　（Ⅱ）求方程组 $Ax=b$ 的通解.

（21）（本题满分 11 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $y_1^2+y_2^2$，且 Q 的第三列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.（Ⅰ）求矩阵 A;（Ⅱ）证明 $A+E$ 为正定矩阵，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

数学二

（7）设向量组 $I:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 $II:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，下列命题正确的是（　　）

(A) 若向量组 I 线性无关，则 $r\le s$　　(B) 若向量组 I 线性相关，则 $r>s$

(C) 若向量组 II 线性无关，则 $r\le s$　　(D) 若向量组 I 线性相关，则 $r>s$

（14）设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3,|B|=2,\left|A^{-1}+B\right|=2$, 则 $\left|A+B^{-1}\right|=$ __________.

（23）（本题满分 11 分）设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$, 正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵，若 Q 的第一列为 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 a,Q .

2011 年全国硕士研究生入学考试（数学一、二、三）

数学一

（5）设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换矩阵 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$（　　　　）.

(A) P_1P_2　　(B) $P_1^{-1}P_2$　　(C) P_2P_1　　(D) $P_2P_1^{-1}$

(6) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，基 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为（　　　　）.

(A) α_1,α_3　　(B) α_1,α_2　　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

（13）若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ 经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$____________.

（20）设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$, $\alpha_2=(0,1,1)^T$, $\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由 $\beta_1=(1,1,1)^T$, $\beta_2=(1,2,3)^T$, $\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.

①求 a;　　②将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

（21）A 为三阶实对称矩阵，$R(A)=2$, 且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

①求 A 的特征值与特征向量；　　②求矩阵 A.

数学二

（14）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则 f 的正惯性指数为____________.

数学三

（6）设 A 为 4×3 阶矩阵，η_1,η_2,η_3 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的三个线性无关的解，k_1,k_2 为任意常数，则 $Ax=\beta$ 的通解为（　　　）.

(A) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$　　(B) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_2(\eta_2-\eta_1)$

(C) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)$　　(D) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)$

（13）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的秩为 1，A 中行元素之和为 3，那么 f 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为____________.