《地震学导论》
习题解答

万永革编著

科学出版社出版

2016 年 3 月

《地震学导论》习题解答

第一章 1
第二章 8
第三章 19
第四章 47
第五章 74
第六章 101
第七章 121
第八章 151
第九章 165
第十章 175

第一章

1.1.1 选择：A

1.1.2　判断：（1）正确（2）正确（3）错误(4)正确（5）正确(6)错误(7)错误（8）错误（9）错误(10)错误（11）正确（12）正确（13）错误（14）正确（15）正确（16）错误（17）正确（18）正确

1.1.3 填空：（1）理查德.奥尔德姆（Richard　Oldham）（2）莫霍若维奇（Mohorovicic）（3）高频波列很长；衰减很慢（4）旧金山（5）双力偶震源理论（6）逆冲型；正断层型；、走滑型（7）地震矩

1.1.4 选择：（1）B (2) C (3) ABC (4) D

1.2.1 填空：（1）环太平洋地震带；欧亚地震带；中央海岭地震带　（2）大陆漂移；海底扩张(3) 亚欧板块；太平洋板块；美洲板块；非洲板块；印度洋板块和南极洲板块。

1.2.2 判断：（1）正确（2）错误

1.2.3 选择：（1）A（2）B（3）ABCD（4）ABC（5）ABCD

1.2.4 环太平洋地震带是地球上地震活动最强烈的地带，全世界约 80%的浅源地震，90%的中源地震和几乎所有的深源地震都集中在这里。释放的能量约占全球所有地震释放能量的 76%，但其面积仅占世界地震区总面积的一半。欧亚地震带的地震活动性仅次于环太平洋地震带，释放能量占全球地震释放能量的 22%，以浅源地震为主，由于它主要分布在大陆上，所以常造成很大的灾害。海岭地震带的特点是宽度很窄，一般只有数十公里，海岭地震带的次数虽然不少，但强度都不大，且皆为浅源地震。

1.2.5　解释概念：1）转换断层：是大洋中脊被许多横断层切成小段，它不是一种简单的平移断层，而是一面向两侧分裂，一面发生水平错动，是属于另一种性质的断层，Wilson(威尔逊)称之为转换断层(Transform　fault)。（2）大地缝合线：两大板块相撞，接触地带挤压变形，构成褶皱山脉，使原来分离的两块大陆缝合起来，叫大地缝合线。

1.2.6

```
c=’1.txt’;
fp=fopen(c,’r’);
worldmap([-90,90],[0,360]);
for ii=1:1:21
sr=fgets(fp);
end
NumEQ=0;
while 1
sr=fgets(fp);
file_end=feof(fp);
if (file_end==1)|(sr(1:4)==’STOP’),break,end
```

```
NumEQ=NumEQ+1;
        Elat=str2num(sr(44:51));Elon=str2num(sr(53:61));
plotm(Elat,Elon,'.','MarkerSize',5)
end

fclose(fp);
```

由于所选参数不同，图形会有所不同，这里仅给出了一个例子。

1.2.7

```
worldmap([-90,90],[0,360]);   %绘制世界范围地图

load topo;        %加载世界地形数据

[LAT,LON]=meshgrid([89.5:-1:-89.5],[0:360]);      %得到矩阵格式的经纬度

pcolorm(LAT,LON,fliplr(topo'));      %用颜色显示世界范围内的地形数据

colormap(topomap1);    %采用绘制地形的色标

colorbar('location','southoutside')     %在绘图的正下方绘制色标，其中 location 表示绘制的色标位置，southouttside 在图外边的下方绘制

load pb2002_boundaries.txt  %加载 peter bird 的板块边界数据

plotm(pb2002_boundaries(:,2),pb2002_boundaries(:,1),'g')  %用绿色绘制 Peter Bird 的板块边界数据

load pb2002_plates.txt  %加载 peter bird 的板块数据

plotm(pb2002_plates(:,2),pb2002_plates(:,1),'c')  %用绿色绘制 Peter Bird 的板块数据

load pb2002_orogens.txt  %加载 peter bird 的造山带数据

plotm(pb2002_orogens(:,2),pb2002_orogens(:,1),'m')  %用绿色绘制 Peter Bird 的造山带数据

fid=fopen('pb2002_poles.dat.txt','r');   %极点数据

while 1

 s=fgets(fid);

file_end=feof(fid);

if(file_end==1), break, end

textm(str2num(s(3:11)),str2num(s(12:22)),s(1:2));

end

fclose(fid);
```

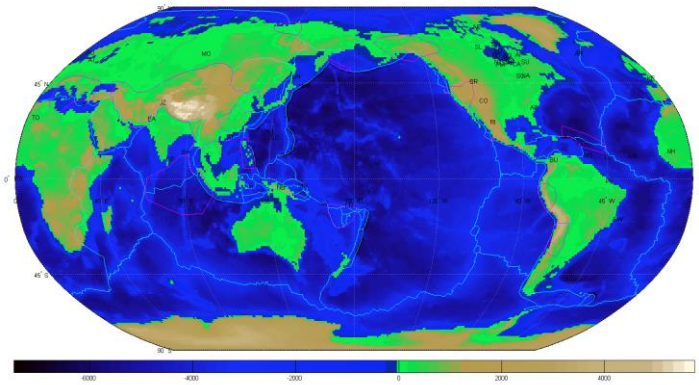


图 1e1　断裂带分布

能够看出：全球板块边界跟地震带的分布大体上是一致的。也就是说板块边界地区是地震活动最强烈的地区。

1.3.1 填空：亚欧、印度洋、亚欧、太平洋

1.3.2 填空：台湾省及其附近海域；西北地区；西南地区；华北地区；东南沿海地区

1.3.3 填空：郯城-营口地震带、华北平原地震带、汾渭地震带、银川-河套地震带。

1.3.4 填空：新华夏；长乐—诏安断裂带；政和—海丰断裂带；邵武—河源断裂带

1.3.5 判断：（1）错误（2）正确

1.3.6　B

1.3.7　D

1.3.8　A

1.3.9　C

1.3.10 填空：台湾东部沿海；西藏雅鲁藏布江以南的江孜、错那等地区；新疆西南部的塔什库尔干、马扎一带

1.3.11 填空：吉林省和黑龙江省东部交界处的安图、珲春、穆棱、东宁和牡丹江一带

1.4.1 选择：（1）C（2）C（3）B（4）A

1.4.2 填空：中国青藏高原；南美洲西边缘

1.4.3 判断：（1）错误（2）错误

1.4.4

```
close all;     %关闭当前的所有图形
load crsthk.xyz%加载Crust1.0的地壳厚度数据
C_thk=reshape(crsthk(:,3),360,180);      %将crust1.0的数据转换为能够绘制的矩阵格式
[LAT,LON]=meshgrid([89.5:-1:-89.5],[-180:1:180]);      %得到矩阵格式的经纬度
ax= worldmap([16,55],[70,140]);       %绘制中国范围地图
pcolorm(LAT,LON,C_thk);      %用颜色显示世界范围内的地壳厚度
load coast;     %加载全球海岸线数据，该数据在MATLAB数据库中，加载后的lat为海岸线的纬度数据、long为海岸线的精度数据
plotm(lat,long,'k')    %用黑色线绘制海岸线
colorbar('location','southoutside')     %在绘图的正下方绘制色标，其中location表示
```

```
绘制的色标位置，southouttside在图外边的下方绘制
lakes = shaperead('worldlakes', 'UseGeoCoords', true);      %读取世界湖泊的数据，该数据也存在MATLAB数据库中
geoshow(lakes, 'FaceColor', 'blue')       %用蓝色显示全世界的湖泊
rivers = shaperead('worldrivers', 'UseGeoCoords', true);   %读取世界河流数据，该数据也存在MATLAB数据库中
geoshow(rivers, 'Color', 'blue')    %采用蓝色显示全世界的河流
```

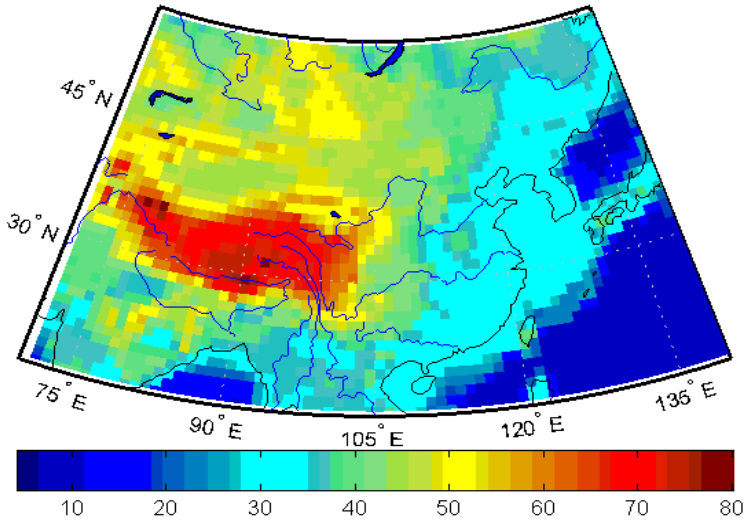


图 1e2 中国大陆区域的地壳厚度

从图中能看出，中国的东部地区，地壳厚度较薄，甚至华北地区有些地方，还不到 30 公里。而中国的西部地区较厚，尤其是青藏高原地区地壳厚度达到最大可达 60~80 公里。

1.5.1 填空：上地幔；过渡层；下地幔

1.5.2 填空：盖层；低速层；均匀层

1.5.3 填空：外核；过渡层；内核

1.5.4 判断：（1）正确（2）错误（3）正确（4）正确（5）正确（6）正确（7）错误

1.5.5 选择：（1）ABD (2) B

1.5.6

```
%比较不同模型的速度随深度的分布
load wanak135.txt%加载AK135模型
load waniasp91.txt%加载IASP91模型
load wanprem.txt%加载PREM模型
plot(wanak135(:,2),wanak135(:,1),'b',wanprem(:,2),wanprem(:,1),'y',waniasp91(:,2),waniasp91(:,1),'c')
%用不同颜色的实线绘制P波速度随深度的变化
legend('AK135','PREM','IASP91')    %加上图例，注意，必须与上面的曲线出现的顺序一致
hold on%图形保持，使得后面图形绘制基于原来所绘图形
plot(wanak135(:,3),wanak135(:,1),'b:',wanprem(:,3),wanprem(:,1),'y:',waniasp91(
```

```
:,3),waniasp91(:,1),'c:')
%用不同颜色的虚线绘制S波速度随深度的变化
ylabel('深度/km');xlabel('速度/km.s^-^1')    %给x轴和y轴加上标记,^表示后面的字符为上标，但值控制一个字符
set(gca,'YDir','reverse');
%gca为得到当前的坐标轴（Get Current Axis的缩写），YDir为Y轴的方向，本句使y轴的方向反向，默认的向上为正，现在改为向下为正
```

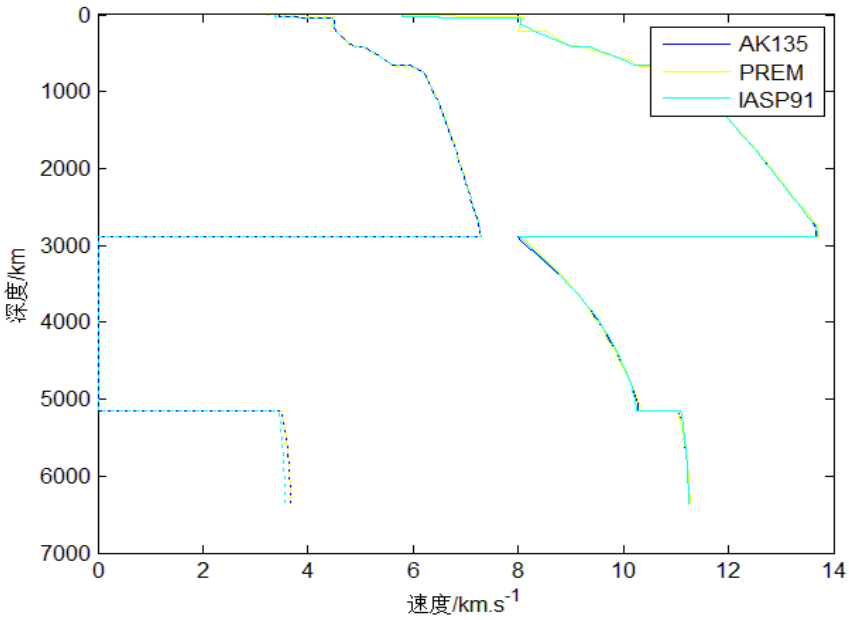


图 1e3 AK135、PREM、IASP91 的速度分布

从图中可以看出，三种模型所绘出的速度曲线差别很小。

1.5.7

```
%绘制PREM模型的密度、压力、重力加速度随深度的分布
load wanprem.txt%加载PREM模型
r=6371-wanprem(:,1);    %地球半径,6371为地球半径，减去层的深度得到每层的半径
rou=wanprem(:,4);
figure(1)
sph_vel_plot(r,rou);%密度随深度的分布
p=wanprem(:,5);
figure(2)
sph_vel_plot(r,p);%压力随深度的分布
a=wanprem(:,6);
figure(3)
sph_vel_plot(r,a);%重力加速度随深度的分布
```

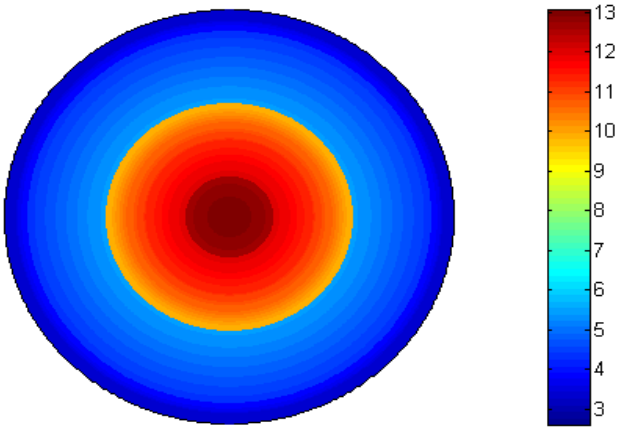


图 1e4 密度随深度的分布

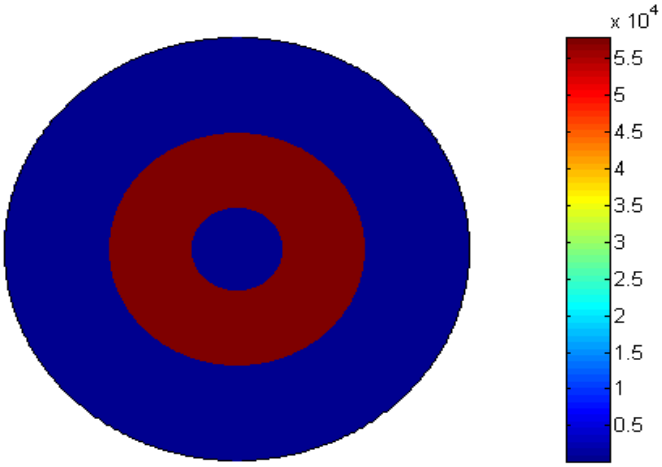


图 1e5 压力随深度的分布

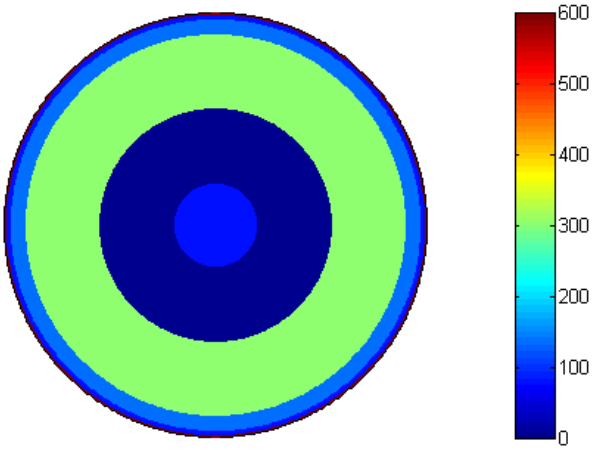


图 1e6 重力加速度随深度的分布

第二章

2.1.1 填空：（1）y 、剪应力。（2）帕斯卡（Pa）=牛顿米-2=千克-1 秒-2。（3）6（4）4，-2，-5、5，-1，-2。

2.1.2 解释概念：面力：通过作用面由物体的一部分作用于另一部分的力。

正应力：应力在切面法线方向上的投影。

剪应力：应力在平行于切面上的投影。

主平面：垂直于应力主轴的平面。

应力主轴：应力张量的本征矢量的方向为应力主轴。

2.1.3 判断正误：（1）（对）（2）（对）（3）（对）

2.1.4 应力张量中的第一个下角标表示面的外法线方向，第二个下角标表示该面上应力的作用方向。

2.1.5 对于正应力，规定拉应力为正，压应力为负。对于剪应力，如果截面的外法线方向与坐标轴一致，则沿着坐标轴的正方向为正，反之为负；如果截面外法线方向与坐标轴方向相反，则沿着坐标轴反方向为正。

2.1.6 取另外的三个面所得的张量表示与取原来的三个面结果一致。

2.1.7 绕 y 轴的顺时针转动力矩为 $2\sigma_{zx}S\dfrac{\Delta z}{2}=2\sigma_{zx}\left(\Delta x\Delta y\right)\dfrac{\Delta z}{2}=\sigma_{zx}\Delta z\Delta x\Delta y$，逆时针旋转的力矩为 $2\sigma_{xz}S\dfrac{\Delta x}{2}=2\sigma_{xz}\left(\Delta y\Delta z\right)\dfrac{\Delta x}{2}=\sigma_{xz}\Delta z\Delta x\Delta y$，由于弹性体内部的微元不可能发生转动，因此两者必须相等，因此有 $\sigma_{xz}=\sigma_{zx}$。类似地有：$\sigma_{xy}=\sigma_{yx},\sigma_{yz}=\sigma_{zy}$。故应力张量是对称的。

2.1.8 若已知应力张量为 $\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}$ 断层面的法向为 $\begin{bmatrix}n_x & n_y & n_z\end{bmatrix}$，则首先得到通过断层面向外施加的力 $\mathbf{t}$，即

$\mathbf{t}=\begin{bmatrix}t_x\\ t_y\\ t_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_x\\ n_y\\ n_z\end{bmatrix}$ 然后将通过断层面向外施加的力投影到断层面的法向上，即：

$\sigma\left(\mathbf{n}\right)=\begin{bmatrix}n_x & n_y & n_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_x\\ t_y\\ t_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n_x & n_y & n_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_x\\ n_y\\ n_z\end{bmatrix}$ 其中 $\sigma\left(\mathbf{n}\right)$ 就是法向上的力。

2.1.9 按照爱因斯坦求和约定，在同一项中，如果同一指标出现两次（这些标号称为哑指标），

就表示遍历其取值范围求和，求和符号可以省略，在上式中 j 为哑指标；而在每一项中只出现一次，一个公式中必须相同的指标成为自由指标，如上式的 i。通常标号的标值为 x, y, z 或 1, 2, 3（代表维度为 3 的欧几里德空间）。

2.1.10 $\sigma=\begin{pmatrix} -1000 & 0 & 0 \\ 0 & -1000 & 0 \\ 0 & 0 & -1000 \end{pmatrix}$

2.1.11 对角线上的元素表示以坐标轴为法向的正应力，此处的正应力为负，且绝对值较大，根据应力符号规定拉张为正，压缩为负，表明此种应力状态为较大的压缩应力状态，通常表示地壳中存在较大静岩压力的应力状态，剪应力相对较小。

2.1.12 （1）

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}=\frac{2\times1+3\times2+4\times3}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{20}{\sqrt{29}\sqrt{14}}$$

$$\alpha=6.98^o$$

（2）坐标系的旋转矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos30^o & \sin30^o \\ 0 & -\sin30^o & \cos30^o \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

矢量旋转变为

$$\mathbf{u}'=\mathbf{Pu}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4+3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3+4\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}'=\mathbf{Pv}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-2+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha'=\frac{\mathbf{u}'\mathbf{v}'}{|\mathbf{u}'||\mathbf{v}'|}=\frac{20}{\sqrt{29}\sqrt{14}}$$

$$\alpha'=6.98^o$$

$$\alpha'=\alpha$$

2.1.13 其主应力方程可以表示为$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}=0$，（注意这里为行列式），展开为$\lambda^2-3\lambda+1=0$，解这个方程可得到主应力为：

$$\lambda_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\lambda_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

对于$\lambda_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，代入行列式有：

$$\begin{bmatrix} 2+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 1+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}=0$$

并考虑到单位矢量$x_1^2+x_2^2=1$

求得本征向量为$\mathbf{v}=\left[-\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}},\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\right]$

同样，对于$\lambda_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，可以得到对应的本征向量为

$$\mathbf{v}=\left[\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\right]$$

2.1.14 其主应力方程可以表示为$\begin{bmatrix} 10-\lambda & -6 \\ -6 & 20-\lambda \end{bmatrix}=0$，（注意这里为行列式），展开为$\lambda^2-30\lambda+(300-36)=0$，解这个方程可得到主应力为：

$$\lambda_1=15+\sqrt{61},\lambda_2=15-\sqrt{61}$$

根据(2-1-23)可以求得旋转到主轴方向的旋转角

$$\theta=\frac{1}{2}\times\tan^{-1}\left(\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}\right)=\frac{1}{2}\times\tan^{-1}\left(\frac{-12}{10-20}\right)=25.1^o$$

主轴坐标系下的两个分量分别为$\mathbf{v}_1=(\cos\theta,\sin\theta,0)$和$\mathbf{v}_2=(-\sin\theta,\cos\theta,0)$，这就是本征方向。

2.1.15 其主应力方程可以表示为$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}-\lambda & \sigma_{yz} \\ 0 & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}-\lambda \end{bmatrix}=0$

$\left(\sigma_{xx}-\lambda\right)\left[\lambda^2-\left(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)\lambda+\left(\sigma_{yy}\sigma_{zz}-\sigma_{yz}^2\right)\right]=0$，解这个方程可得到三个主应力为：

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left[\sigma_{yy}+\sigma_{zz}+\sqrt{\left(\sigma_{yy}-\sigma_{zz}\right)^2+4\sigma_{yz}^2}\right]$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left[\sigma_{yy}+\sigma_{zz}-\sqrt{\left(\sigma_{yy}-\sigma_{zz}\right)^2+4\sigma_{yz}^2}\right]$$

及$\lambda_3=\sigma_{xx}$。

2.1.16（1）xy 面上的应力即以 z 轴为法向的应力，根据应力元素的定义可知，该面上的应力在 x, y, z 轴的投影分别为-1，0，1。

（2）主应力方程为 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$

化简得：$(1+\lambda)(2-\lambda)\lambda=0$

则 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=2$，这就是三个主应力。

当$\lambda_1=-1$时，代入方程得到为非零解为(0, 1, 0)，表示沿该方向(即 y 轴方向)压缩。

当$\lambda_2=0$时，代入方程得到为非零解为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，表示沿该方向（与 x 轴夹角 45º，与 y 轴夹角 90º，与 z 轴夹角 45º）所有剪切应力和正应力均为零。

当$\lambda_3=2$时代入方程得到为非零解为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，表示沿该方向（与 x 轴夹角 45º，与 y 轴夹角 90º，与 z 轴反向夹角 45º）的拉张力为 2。

2.1.17

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda)-1-1+\lambda-(2-\lambda)-(2-\lambda)=0$$

$$\lambda^3-4\lambda^2+\lambda+6=0$$

该方程的三个根为$\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$

对于$\lambda_1=-1$，代入方程

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=0$$ 得到

（-1，-2，1）为其方向，单位方向矢量为$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

对于$\lambda_2=2$，代入方程

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=0$$ 得到

（-1，1，1）为其方向，单位方向矢量为$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

对于$\lambda_3=3$，代入方程

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_3 & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda_3 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=0$$ 得到（1，0，1）为其方向，单位方向矢量为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。

2.1.18

由题意知地壳中的应力状态在主轴坐标系下表示为$\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix} 75 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix}$

已知斜截面与主轴的夹角相等，可知斜截面的外法线方向可以表示为

$\mathbf{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，这样代入正应力的计算公式有

$$\sigma=[1/\sqrt{3}\quad 1/\sqrt{3}\quad 1/\sqrt{3}]\begin{bmatrix} 75 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}=25\text{bar}$$

该面上的应力矢量 $t(\vec{n})=\begin{bmatrix}75 & 0 & 0\\ 0 & 50 & 0\\ 0 & 0 & -50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{75}{\sqrt{3}}\\ \frac{50}{\sqrt{3}}\\ -\frac{50}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$

由 $\tau^2=t^2(\vec{n})-\sigma^2$ 有 τ=54bar。

2.1.19 此处所述的应力方向为主应力，首先将北东下方向在主轴坐标系下表示，主轴坐标系方向为北 30 度东的压应力的方向、北 60 度西的张应力方向和垂直向下方向。为表示右手法则的坐标系，这里将北 30 度东的 20MPa 压应力方向为 x1,将南东 60 度的 10Mpa 的张应力方向为 x2，另一个轴为 x3,则北东下坐标系的三个轴在主轴坐标系下表示为

$$\mathbf{N}=\left(\cos 30^o,\cos 120^o,0\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right),$$

$\mathbf{E}=\left(\cos 60^o,\cos 30^o,0\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$, D=(0,0,1),所述应力张量在主应力坐标系下的应力张量为 $\begin{bmatrix}-20 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$，将其转换到北东下坐标系下，采用（2-1-14）式，得到

$$\sigma_{i'j'}=\begin{bmatrix}l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-20 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-12.5 & -12.9904 & 0\\ -12.9904 & 2.5 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

这就是所述应力在北东下坐标系中的应力张量表示，其单位为 MPa。

2.2.1 解释概念：

线应变：固体力学中将形变体内某一线段的变化量与原来的长度之比称为线应变

面应变：将变形面的面积变化量和原来的面积之比称为面应变

体应变：将体积增量和原来体积之比称为体应变

2.2.2 判断正误：（1）（对）（2）（对）（3）（对）（4）（对）（5）（错，旋转角度的 2 倍）（6）（对）

2.2.3 $\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$表示位移场绕 x 轴的旋转角度的 2 倍。$\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$表示位移场绕 y 轴的旋转角度的 2 倍，$\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$表示位移场绕 z 轴的旋转角度的 2 倍。

2.2.4

$$\frac{V-V_0}{V_0}=\frac{\left(dx+\frac{\partial u_x}{\partial x}dx\right)\left(dy+\frac{\partial u_y}{\partial y}dy\right)\left(dz+\frac{\partial u_z}{\partial z}dz\right)-dxdydz}{dxdydz}\approx\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=div\mathbf{u}$$

2.2.5

(1) 只要使得应变张量的对角线元素之和为正，且满足对称条件，均是正确的。

（2）只要使得应变张量的对角线元素之和为负，满足对称条件，均是正确的。

（3）只要使得应变张量的对角线元素之和为零，而使得非对角线元素不全为零，并且满足对称条件均是正确的。

2.2.6 由于求解应变张量成比例变化不改变本征向量，为方便，我们将应变张量写为

$\mathbf{e}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&6&0\\2&0&6\end{pmatrix}*1e-7$，直接求解整数部分的本征值。

由$\begin{pmatrix}4\text{-}\lambda&2&2\\2&6\text{-}\lambda&0\\2&0&6\text{-}\lambda\end{pmatrix}=0$得到$(2\text{-}\lambda)(4\text{-}\lambda)(6\text{-}\lambda)=0$，求解得到本征值为

$\lambda_1=2$，$\lambda_2=6$，$\lambda_3=8$，注意主应变是以 1.0E-7 为单位的。

当$\lambda_1=2$时，根据$(\mathbf{e}-\mathbf{I}\lambda_i)\mathbf{x}=0$得到

$$\begin{cases}\text{-3x+2y+2z=0}\\ 2\text{x+}y=0\\ 2x\text{+z}=0\end{cases}$$

其基础解系为 x=1,y=-0.5,z=-0.5，该解代表一个方向，解增加 k 倍仍为问题的解，通常将其归一化为单位向量$\mathbf{v_1}=(1,\text{-}0.5,\text{-}0.5)\Big/\sqrt{1+0.5^2+0.5^2}=(0.8165,\text{-}0.4082,\text{-}0.4082)$,这就

是本征值λ_1=-3的本征向量。

当λ_2=6时，根据$\left(\mathbf{e}-\mathbf{I}\lambda_i\right)\mathbf{x}=0$得到

$$\begin{cases}-2x+2y+2z=0\\2x=0\\2x=0\end{cases}$$

其基础解系为 x=0,y=-1,z=1。与上边一样，该解代表一个方向，解增加 k 倍仍为问题的解，将其归一化为单位向量$\mathbf{v}_2=\left(0,-1,1\right)\Big/\sqrt{2}=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,这就是本征值$\lambda_2$=6的本征向量。

当λ_2=8时，根据$\left(\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{I}\lambda_i\right)\mathbf{x}=0$得到

$$\begin{cases}-4x+2y+2z=0\\2x-2y=0\\2x-2z=0\end{cases}$$

其基础解系为 x=1,y=1,z=1。与上边一样，该解代表一个方向，解增加 k 倍仍为问题的解，将其归一化为单位向量$\mathbf{v}_3=\left(1,1,1\right)\Big/\sqrt{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,这就是本征值$\lambda_3$=8的本征向量。

2.3.1 解释概念：

拉梅常数：如果我们作了各向同性的假定，独立参数减至 2 个：λ和μ，在弹性力学中统称为介质的拉梅常数。

切变模量：μ叫做剪切模量，是介质抗剪切的度量。它的值是所作用的剪切应力与所导致的剪应变比率的一半，即$\mu=\sigma_{xy}/2e_{xy}$

杨氏模量：两端拉伸的柱体的张应力σ与线应变ε的比率。

Possion 比：单向拉伸时，在垂直于力作用线的方向上发生收缩，在弹性极限内，横向相对缩短ε_y和纵向相对伸长ε_x成正比，因缩短和伸长的线应变符号相反，$\varepsilon_y=-\gamma\varepsilon_x$，比例常数$\gamma$为 Possion 比

体变模量：体变模量 K 为流体静压力与由其所导致的体积变化的比率，是介质不可压缩性的度量。

2.3.2 填空：Pa(N/m^2)；Pa(N/m^2)。

2.3.3 判断正误：（1）(对)。（2）（错，小于钢铁）。（3）（对）。

2.3.4(1)由于这里计算比较复杂，我们采用 MATLAB 进行计算。

在命令窗口中键入[x,d]=eig([-0.26e-6,-0.69e-6;-0.69e-6,0.92e-6])，就得到 x =

```
    -0.9083    -0.4184
    -0.4184     0.9083
d = 1.0e-05 *
```

-0.0578　　0

0　　0.1238

这里表示主应变为-0.578e-6 和 1.238e-6，分别对应于（-0.9083，-0.4184）和（-0.4184，0.9083），很明显这两个矢量垂直。

（2）面积的相对变化量为应变张量的水平分量之和，即 $\Delta S1=e_{11}+e_{22}=0.66\times10^{-6}$，这只是相对变化量，该值与农民的总土地面积相乘即得到由于地震，该农民增加 0.0066 平方米的土地。

（3）胡克定律 $\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}e_{kk}+2\mu e_{ij}$ 得

$$\sigma_{xx}=\lambda e_{kk}+2\mu e_{xx}=\lambda\left(e_{xx}+e_{yy}\right)+2\mu e_{xx}=3.25\times10^{3}Pa$$

$$\sigma_{yy}=\lambda e_{kk}+2\mu e_{yy}=\lambda\left(e_{xx}+e_{yy}\right)+2\mu e_{yy}=8.14\times10^{4}Pa$$

$$\sigma_{xy}=2\mu e_{xy}=-4.57\times10^{4}Pa$$

（4）编写的程序为

```
miu=3.31E10;    %剪切模量
lam=3.1E10;    %拉梅常数
exx=-0.26E-6;eyy=0.92e-6;exy=-0.69e-6;    %应变张量的各分量
ekk=exx+eyy;    %面膨胀分量
sxx=lam*(ekk)+2*miu*exx;  %根据定律得到各应力分量
sxy=2*miu*exy;
syy=lam*(ekk)+2*miu*eyy;
s=[sxx,sxy;sxy,syy];    %应力各分量的表达
for theta=0:10:170    %走向从0~170进行循环
    N=[cos(deg2rad(theta)) -sin(deg2rad(theta));sin(deg2rad(theta))
cos((deg2rad(theta)))];    %旋转方向
theta    %显示走向角
    S=N*s*N'    %得到在此坐标系下的应力张量
end    %循环结束
```

2.3.5 证明：根据各向同性的弹性介质的广义胡克定律有 $\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}e_{kk}+2\mu e_{ij}$，即

$$\sigma=\begin{pmatrix}\lambda\mathrm{tr}[e]+2\mu e_{xx} & 2\mu e_{xy} & 2\mu e_{xz}\\ 2\mu e_{yx} & \lambda tr[e]+2\mu e_{yy} & 2\mu e_{yz}\\ 2\mu e_{zx} & 2\mu e_{zy} & \lambda tr[e]+2\mu e_{zz}\end{pmatrix}$$

求解应力本征值和本征向量需要求解下式：

$$(\sigma-I\Lambda)=\begin{pmatrix}\lambda\mathrm{tr}[e]+2\mu e_{xx}-\Lambda & 2\mu e_{xy} & 2\mu e_{xz}\\ 2\mu e_{yx} & \lambda tr[e]+2\mu e_{yy}-\Lambda & 2\mu e_{yz}\\ 2\mu e_{zx} & 2\mu e_{zy} & \lambda tr[e]+2\mu e_{zz}-\Lambda\end{pmatrix}$$

$$=2\mu\begin{pmatrix} e_{xx}-\dfrac{\Lambda-\lambda tr[e]}{2\mu} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy}-\dfrac{\Lambda-\lambda tr[e]}{2\mu} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz}-\dfrac{\Lambda-\lambda tr[e]}{2\mu} \end{pmatrix}=0$$

求解应变本征值需要求解下式：

$$(e-I\Lambda_1)=\begin{pmatrix} e_{xx}-\Lambda_1 & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy}-\Lambda_1 & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz}-\Lambda_1 \end{pmatrix}=0$$

将求解应力本征值和应变本征值的方程比较，$\Lambda_1=\dfrac{\Lambda-\lambda tr[e]}{2\mu}$。由于拉梅常数和应变张量的迹均为常数，应力本征值和应变本征值存在线性关系。考虑到这种关系，将得到的本征值代入（$\sigma-I\Lambda$）$\hat{\mathbf{n}}=0$ 和（$e-I\Lambda_1$）$\hat{\mathbf{n}}=0$ 中得到的本征向量（即主轴）完全相同。因此对各向同性介质，应力主轴总是恰与应变主轴重合。

2.3.6 由广义胡克定律 $\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}e_{kk}+2\mu e_{ij}$ 得：

当 i=j 时，$\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}e_{kk}+2\mu e_{ij}\Rightarrow e_{ij}=-\dfrac{\lambda}{2\mu}e_{kk}+\dfrac{1}{2\mu}\sigma_{ij}$

则 $\sigma_{xx}=\lambda e_{kk}+2\mu e_{xx}$

$\sigma_{yy}=\lambda e_{kk}+2\mu e_{yy}$

$\sigma_{zz}=\lambda e_{kk}+2\mu e_{zz}$

将以上三式相加得: $\sigma_{kk}=3\lambda e_{kk}+2\mu e_{kk}=(3\lambda+2\mu)e_{kk}$

$e_{kk}=\dfrac{\sigma_{kk}}{2\mu+3\lambda}$

当 $i\neq j$ 时 $\sigma_{ij}=2\mu e_{ij}\Rightarrow e_{ij}=\dfrac{\sigma_{ij}}{2\mu}$

综上得：$e_{ij}=-\dfrac{\lambda}{2\mu}\dfrac{1}{2\mu+3\lambda}\delta_{ij}\sigma_{kk}+\dfrac{1}{2\mu}\sigma_{ij}$

将弹性常数之间的关系即 $E=\dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ 和 $\gamma=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ 代入

$$e_{ij}=-\frac{\lambda}{2\mu}\frac{1}{2\mu+3\lambda}\delta_{ij}\sigma_{kk}+\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}$$

化简得：$e_{ij}=-\frac{\gamma}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}+\frac{1+\gamma}{E}\sigma_{ij}$

2.3.7（a）$e_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}=-kA\cos(\omega t-kx)$

$e_{yy}=e_{zz}=e_{xy}=e_{xz}=e_{yz}=0$

由胡克定律 $\tau_{ij}=\lambda\delta_{ij}e_{kk}+2\mu e_{ij}$ 得

$\sigma_{xx}=\lambda e_{kk}+2\mu e_{xx}=-kA(\lambda+2\mu)\cos(\omega t-kx)$

(b) $e_{xx}=e_{yy}=e_{zz}=e_{yz}=e_{xz}=0$

$e_{xy}=\frac{1}{2}\frac{\partial u_y}{\partial x}=-\frac{1}{2}kA\cos(\omega t-kx)$

由胡克定律 $\tau_{ij}=\lambda\delta_{ij}e_{kk}+2\mu e_{ij}$ 得

$\sigma_{xy}=2\mu e_{xy}=-kA\mu\cos(\omega t-kx)$

2.3.8 自 PREM 模型中地壳 25km 的压力为 6.034E8Pa,体变模量 K 为 1.315E11Pa,代入体变模量和压力表达式，注意地球内部处于受压状态，应力为负，这样得到

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{V_0-V_{25}}{V_0}=-\frac{P}{K}=\frac{6.034\times10^8 Pa}{1.315\times10^{11}Pa}=4.5886\times10^{-3}。$$

$$\frac{V_{25}}{V_0}=1-4.5886\times10^{-3}=0.9954$$

即在 25km 处，体积为地表岩石体积的 99.54%。

第三章

3.1.1 作用在一个立方体微元的力为微元两端面上的应力所致的合力。应力在微元端点面上的力为“应力”×“其所在的质元面积”。微元所受的力 F 为

$$\Delta A\left(\sigma_{xx}\left(x+\Delta x\right)-\sigma_{xx}\left(x\right)\right)=\Delta A\left(\sigma_{xx}\left(x\right)+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\Delta x-\sigma_{xx}\left(x\right)\right)=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\Delta x\Delta A$$

惯量（inertia）ma 为

$$\rho\Delta x\Delta A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

根据牛顿第二定律 F=ma，可以得到

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}$$

根据第二章的知识有 $\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\right)=E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 。则上式可写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

3.1.2 根据地震波动方程的推导 $c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 。我们按国际单位制考察一下该物理量的量纲。根据第二章，杨氏模量 E 的单位为帕斯卡,即牛顿/米 ^{2}=千克米/秒 ^{2}/米 ^{2}，密度的量纲为千克/米 ^{3}，将这些量纲代入 c 的表达式进行量纲运算可以得到 c 的量纲为米/秒，即速度的量纲.因此它代表波传播的速度。

3.1.3

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 可以解为 $X''T=\frac{1}{c^2}XT''$

设 $\frac{c^2X''}{X}=\frac{T''}{T}=-\omega^2$

求解 $T''+\omega^2T=0$，其特征方程为 $r^2+\omega^2=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm i\omega$，所以微分方程的解为：

$$T=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}$$

同理得到，$X''+\frac{\omega^2}{c^2}X=0$ 的解为

$$X=D_1e^{i\frac{\omega}{c}x}+D_2e^{-i\frac{\omega}{c}x}$$

所以该偏微分方程的解为：

$$u=X(x)T(t)=\left(D_1e^{i\frac{\omega}{c}x}+D_2e^{-i\frac{\omega}{c}x}\right)\left(C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}\right)$$

$$=D_1C_1e^{i\frac{\omega}{c}(x+ct)}+D_1C_2e^{i\frac{\omega}{c}(x-ct)}+D_2C_1e^{-i\frac{\omega}{c}(x-ct)}+D_2C_2e^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct)}$$

我们将其写为：

$$u=Ae^{i\frac{\omega}{c}(x+ct)}+Be^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct)}+Ce^{i\frac{\omega}{c}(x-ct)}+De^{-i\frac{\omega}{c}(x-ct)}$$

$$=Ae^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}+Be^{-i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}+Ce^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}+De^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$$

3.1.4　因为 $u=f(x-ct)+g(x+ct)$ 的初始形式为

$Ae^{i\omega(x+ct)}+Be^{-i\omega(x+ct)}+Ce^{-i\omega(x-ct)}+De^{i\omega(x-ct)}$。在前两项中，当 t=0 时的波形为 $Ae^{i\frac{\omega}{c}(x)}+Be^{-\frac{\omega}{c}(x)}$，当 t=t1 时，波形为 $Ae^{i\frac{\omega}{c}(x+ct_1)}+Be^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct_1)}$，相互对比可以发现，t=0 和 $t=t_1$ 时刻的波形不发生变化，但在空间上移动了 $-ct_1$，即向 x 的负方向移动了 ct_1，因此我们说前面两项为沿 x 负方向传播的波。同理后两项为沿 x 的正方向传播的波。

3.1.5 从课本中解方程的情况来看，我们假定的 ω 并没有考虑其量纲，从方程的解来看，它与后面的 $\left(t-\frac{x}{c}\right)$（具有时间的量纲秒）相乘必须为无量纲的量，因此 ω 的量纲为秒$^{-1}$，即具有频率的量纲，实际该量表示了角频率。

3.1.6 根据数字信号处理的知识知道，在频谱分析中，通常频率为负的分析与频率为正的分析是对称的，在通常的分析中，通常取频率为正值的项。因此通常取 $u=Ae^{i\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}+De^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$ 来代替方程的解。如果将沿 x 正向时为 $x=x$，沿 x 负向时为 $x=-x$，即可以写成一项：

$$u=Ae^{i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+iA\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

上面求解方程时假定的 ω 为一固定值，即求出的波是单频波，将这种波按频率积分即得到总波场。

3.1.7 通过改变 matlab 程序中这几行，就可以改变边界条件。

%左边为自由边界条件，右边为固定边界条件

```
%       u3(1)=u3(2);      %左边为自由边界条件
%       u3(101)=0.0;      %右边为固定边界条件
%左右两边为自由边界条件
%      u3(1)=u3(2);      %左边为自由边界条件
%      u3(101)=u3(100);      %右边为自由边界条件
%左右两边为固定边界条件
    u3(1)=0.0;      %左边为固定边界条件
    u3(101)=0.0;      %右边为固定边界条件
```

3.1.8　AC

3.1.9　AB

3.1.10　ABC

3.1.11 判断：（1）对（2）错（3）对（4）对

3.1.12　$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{T}=\frac{c}{\wedge}=\frac{740km/3600s}{300km}$=6.8519E-4Hz

波数 $k=\frac{2\pi}{\Lambda}=\frac{2\pi}{300km}=0.0209/km$ 即每 km 有 0.0209 个波。

3.1.13　由于 x=0.1m 处的质点振动方程可写为 y=0.05sin(4.0t-k*0.1)，可知 k=10，因此波动方程为 y=0.05sin(4.0t-10x)

由波动方程一般表达式，可知上面表示的波函数的角频率 ω=4.0，频率为 $f=\frac{\omega}{2\pi}=0.637$ H。

根据波数 k=10 和角频率及相速度的关系 $k=\frac{\omega}{c}$，得到 $c=\frac{\omega}{k}$=4/10=0.4km/s。

3.1.14　(1) 由波函数的表达式 $y=2\times10^{-2}\sin 2\pi\left(200t-2.0x\right)$ 可知，此波的角频率 ω=400π /s，波数 $k=4\pi$，波传播的速度为 $c=\frac{\omega}{k}$=10 km/s，波长 $\Lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{4\pi}=0.5\left(km\right)$ 根据本章所讲的一维波动方程解的意义，该波沿 x 正向传播。

（2）振动的波函数对时间求导，得到该波的振动速度。即

$$\dot{y}=\frac{dy}{dt}=8\pi\sin\left(400\pi t-4\pi x\right)$$

所以，波振动的最大速度为 8π km/s, 大于波传播的速度。

3.1.15　根据波长与速度和频率的关系有：$\wedge=\frac{c}{f}=\frac{3\text{km/s}}{1Hz}=3km$，因此该波的波长为

3km。振幅为第一次抛起的最大高度 2m。

3.1.16　(1)根据波长与波速和频率的关系∧=c/f=6/5=1.2km。相差 60 度的两点间距 x 的关系为 60:360=x:∧,由此可以得到 x 为 0.2km.

(2)该波的周期 T=1/f=0.2s，而时间间隔为 5s 恰为 t/T=5/0.2=25 个周期，是整数个周期，因此时间间隔为 5s 的两个振动状态，其相差为 0.

3.1.17（a）∧=2π/k　(b) ∧=c/f　(c) ∧=cT

3.1.18 根据 $\Lambda=\frac{c}{f}$ 可得 $\Lambda_1=\frac{c_1}{f}=\frac{3}{30}=0.1,\Lambda_2=\frac{c_2}{f}=\frac{7}{30}\approx 0.23$。因此在砂岩中探测精度为 0.1km，在辉长岩中为 0.23km。

3.1.19　设在 x 轴上 P 点处的坐标为 x，则它的振动要比 $x_0=\frac{\Lambda}{4}$ 处质点的振动晚 $\frac{x-x_0}{v}=\frac{x-\Lambda/4}{v}$ 这样一段时间，因此 P 点的振动表达式为

$$y=A\cos\omega\left(t\text{-}\frac{x-\Lambda/4}{v}\right)=A\cos\left(\omega t\text{-}\frac{2\pi}{\Lambda}x+\frac{\pi}{2}\right)$$

这就是所求的波函数（注意，$\frac{\Lambda}{4}$ 对应的相位差为 $\frac{\pi}{2}$）。

当 t=0 时刻波形表达为

$$y=A\cos\left(\text{-}\frac{2\pi}{\Lambda}x+\frac{\pi}{2}\right)=A\sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x\right)$$

由于波在时间上的周期性，在 t=T 时的波形图应与此式给出的相同。在 t=T/4 时，代入波函数表达式为

$$y=A\cos\left(\omega t\text{-}\frac{2\pi}{\Lambda}x+\frac{\pi}{2}\right)=A\cos\left(\omega\frac{\mathrm{T}}{4}\text{-}\frac{2\pi}{\Lambda}x+\frac{\pi}{2}\right)=A\cos\left(\text{-}\frac{2\pi}{\Lambda}x+\pi\right)$$

3.1.20 根据海浪每隔 24m 有一波峰得到海波波长为 24m,再结合海浪的振荡周期 4.0s,根据波动速度、波长和周期的关系公式，有

$$c=\frac{\Lambda}{T}=\frac{24m}{4s}=6\mathrm{m}/s$$

所以此海波的传播速度为 6m/s。

3.1.21　根据 3.1.20 的解可知，海浪的波动方程可写为

$$y=A\cos(\omega t-kx)=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)=60\cos\frac{2\pi}{4}\left(t-\frac{x}{6}\right)$$

水质点的运动速度为

$$v=\frac{dy}{dt}=-A\omega\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)=-60\times\frac{2\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{4}\left(t-\frac{x}{6}\right)$$

水质点运动速度最大值为 94cm/s，远小于海浪的传播速度。由此可知波传播能量的速度可以比介质质元本身运动的速度大得多。

3.2.1 $\sigma_{xx}=\lambda e_{kk}+2\mu e_{xx}=\lambda(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z})+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}$

$$\sigma_{yx}=2\mu e_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{zx}=2\mu e_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)$$

3.2.2 在 y-z 面上的作用力差为：

$$\left[\sigma_{xx}(x+dx)-\sigma_{xx}(x)\right]dydz=\left[\sigma_{xx}(x)+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx-\sigma_{xx}(x)\right]dydz=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dxdydz$$

在 x-z 面上的作用力差为：

$$\left[\sigma_{yx}(y+dy)-\sigma_{yx}(y)\right]dxdz=\left[\sigma_{yx}(y)+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}dy-\sigma_{yx}(y)\right]dxdz=\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}dxdydz$$

在 x-y 面上的作用力差为：

$$\left[\sigma_{zx}(z+dz)-\sigma_{zx}(z)\right]dxdy=\left[\sigma_{zx}(z)+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}dz-\sigma_{zx}(z)\right]dxdy=\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}dxdydz$$

惯量 ma 表示为：

$$\rho dxdydz\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

根据牛顿第二定律 F=ma，考虑到沿 x 方向的外力 f_x 作用，可以得到

$$\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}+f_x$$

3.2.3 将 σ_{xx}、σ_{yx} 及 σ_{zx} 看做为以 x 轴为法向的三个应力分量，即：

$$\sigma_{xx}=\lambda e_{kk}+2\mu e_{xx}=\lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\ ,\quad \sigma_{yx}=2\mu e_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right),$$

$\sigma_{zx}=2\mu e_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)$，代入上题答案最后一式的右边部分得：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\right]\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\right]\\
&=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\lambda\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}\right)+\lambda\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}\right)+\mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}+\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\\
&=(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}$$

根据场论的知识，$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}$ 可写为：$\nabla^2 u_x$。我们令 $\Theta=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$，其实这是体应变。可写为：

$$\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u_x+f_x$$

其中 λ 及 μ 为常数。

以相同的方法，可以得出在 y 及 z 方向的振动方程式，若其位移量分别为 u_y 与 u_z，则其相对应之振动方程式可分别表示如下：

$$\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\mu\nabla^2 u_y+f_y$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\mu\nabla^2 u_z+f_z$$

若以向量形式来统一表示，并表示成∇算符的形式为：

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})+\mu\nabla^2\mathbf{u}+\mathbf{f}$$

3.2.4 $\mathbf{a}=\nabla^2\mathbf{U}+\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{V}\right)+\nabla\times\nabla\times\mathbf{W}=\nabla^2\mathbf{U}+\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{V}\right)+\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{W}\right)-\nabla^2\mathbf{W}$

X 分量 $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial V_X}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z})+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial W_X}{\partial x}+\frac{\partial W_y}{\partial y}+\frac{\partial W_z}{\partial z})-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$

Y 分量 $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial V_X}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial W_X}{\partial x}+\frac{\partial W_y}{\partial y}+\frac{\partial W_z}{\partial z})-\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$

Z 分量 $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial V_X}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial W_X}{\partial x}+\frac{\partial W_y}{\partial y}+\frac{\partial W_z}{\partial z})-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$

3.3.1 根据场论的知识：$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}$ 可写为：$\nabla^2 u_x$。我们令 $\Theta=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$，这是体应变，因此三维空间振动方程：$\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}+f_x$ 可写成另外一种形式：

$$\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u_x+f_x \quad (1)$$

同理：

$$\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\mu\nabla^2 u_y+f_y \quad (2)$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\mu\nabla^2 u_z+f_z \quad (3)$$

首先将（1）对 x 求导得到：

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\mu\nabla^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)$$

将（2）对 y 求导得到：

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}+\mu\nabla^2\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)$$

将（3）式对 z 求导得到：

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}+\mu\nabla^2\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$

以上三式相加，可得到：

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}\right)+\mu\nabla^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$

考虑到 $\Theta=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$，考虑到 $\nabla^2\Theta$ 的 Laplace 算符的展开表达式，可以得到：

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla^2\Theta$$

这就是体积变化（膨胀或压缩）相关的波传播的振动方程，我们暂且称之为体变波。

3.3.2 根据三维空间振动方程：

$$\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u_x+f_x \quad (1)$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\mu\nabla^2 u_y+f_y \quad (2)$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\mu\nabla^2 u_z+f_z \quad (3)$$

我们知道：$\omega_x=\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}$ 项就是质点运动绕 x 轴的扭转角度，我们设法得到这种形式的微分方程形式。

首先将（2）式对 z 微分得到：

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}+\mu\nabla^2\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

再将（3）式对 y 微分得到：

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z}+\mu\nabla^2\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)$$

两式相减得到：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

其中括弧内的 $\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}$ 项就是质点运动绕 x 轴的扭转角度。

所以质点扭转的运动方程式可写为：

$$\frac{\partial^2\omega_x}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\omega_x \quad (4)$$

同理可以得到：

$$\frac{\partial^2\omega_y}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\omega_y \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2\omega_z}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\omega_z \quad (6)$$

方程（4）（5）（6）就是剪切变形的振动方程，通常称之为剪切波（Shear Wave）。

3.3.3 体应变的波动方程为:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla^2\Theta \quad (1)$$

可用通式描述如下：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=c^2\nabla^2\phi$$

对(1)式而言，$\phi=\Theta$，可得出

$$c=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}=\alpha$$

3.3.4 剪应变的波动方程为:

$$\frac{\partial^2\omega_y}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\omega_y$$

$$\frac{\partial^2\omega_x}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\omega_x$$

$$\frac{\partial^2\omega_z}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\omega_z$$

可用通式描述如下：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=c^2\nabla^2\phi \quad (2)$$

对(2)式而言，$\phi=\omega_i$，可得出

$$c=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}=\beta$$

3.3.5 根据 $\beta=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ 得到 $\mu=\rho\beta^2$

根据 $\alpha=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$

$$\lambda=\rho\alpha^2-2\rho\beta^2$$

得到：$\gamma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}=\frac{\rho\left(\alpha^2-2\beta^2\right)}{2\rho\left(\alpha^2-2\beta^2+\beta^2\right)}=\frac{\left(\alpha^2-2\beta^2\right)}{2\left(\alpha^2-\beta^2\right)}$

得到杨氏模量 E 可以表示为：

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}=\frac{\rho\beta^2\left[3\left(\alpha^2-2\beta^2\right)+2\beta^2\right]}{2\left(\alpha^2-\beta^2\right)}=\frac{\rho\beta^2\left[3\alpha^2-4\beta^2\right]}{2\left(\alpha^2-\beta^2\right)} \quad (1)$$

得到体变模量 K 可以表示为：

$$K=\lambda+\frac{2}{3}\mu=\rho\left(\alpha^2-2\beta^2\right)+\frac{2}{3}\rho\beta^2=\rho\left(\alpha^2-\frac{4}{3}\beta^2\right) \quad (2)$$

（2）地球内部大部分为 Possion 介质，即泊松比 γ 为 1/4。对于这种情况有

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=3, \qquad \alpha=1.732\,\beta$$

代入（1）（2）得到：

$$\mu=\rho\beta^2=\frac{\rho\alpha^2}{3}$$

$$E=\frac{5\rho\alpha^2}{6}=\frac{5\rho\beta^2}{2}$$

$$K=\frac{5\rho\alpha^2}{9}=\frac{5\rho\beta^2}{3}$$

地球外核为液体，γ=1/2，对于这种情况，剪切波速度为零

根据（1）（2）式得到的μ、E皆为零。

所以得到：

$\lambda = K = \rho\alpha^2$

地震所产生的弹性波，穿过地球内部，根据观测到的介质速度变化，参考第二章第三节所叙述的弹性系数关系，我们可以探索地球内部弹性参数分布的情况。

3.3.6P 波和 S 波波速比为 $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}}{\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}}=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}$，可以得到：

$$\frac{\lambda}{\mu}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-2$$

在根据 Possion 比与弹性常数的关系

$$\gamma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{\mu}{\lambda}}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{1}{(\dfrac{\alpha}{\beta})^2-2}}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(\dfrac{\alpha}{\beta})^2-1}\right]$$

则在 Possion 比的容许范围内，当$\dfrac{\alpha}{\beta}$增大时，$\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{(\dfrac{\alpha}{\beta})^2-1}\right]$增大，即 Possion 比增大。

3.3.7 由题意知： γ=0.3

$$\because \gamma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}=0.3$$

$$\therefore \lambda=\frac{3}{2}\mu$$

则 $\dfrac{\alpha}{\beta}=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}}=\sqrt{\dfrac{\dfrac{3}{2}\mu+2\mu}{\mu}}=\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

3.3.8 对于 Possion 固体，$\lambda=\mu$

$$\because \alpha=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}=5.5\times10^3\,\mathrm{m/s}\quad \rho=2.6\times10^3\,\mathrm{kg/m^3}$$

$$\therefore \lambda=\mu=2.62\times10^{10}\ \mathrm{Pa}$$

则 E= $\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}=\frac{5}{2}\mu$ =6.55×10^{10} Pa

K= $\lambda+\frac{2}{3}\mu=\frac{5}{3}\mu$ =4.37×10^{10} Pa

根据第一章 PREM 模型给出的 24km 深处的压力为 2.5E8Pa，代入体变模量的定义式可以得到：

$$\frac{\Delta V}{V}=-\frac{P}{K}=-\frac{0.25\times10^{9}}{4.37\times10^{10}}\times100\%=-0.57\% = -0.57\%$$

则如果样品以地球 24 公里深度所存在的压力压缩，那么这样品体积的相对变化 -0.57%，符号表示收缩

3.3.9

剪切模量：$\mu=\rho\beta^2$

杨氏模量：$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}=\frac{\rho\beta^2\left[3\left(\alpha^2-2\beta^2\right)+2\beta^2\right]}{\left(\alpha^2-\beta^2\right)}=\frac{\rho\beta^2\left[3\alpha^2-4\beta^2\right]}{\left(\alpha^2-\beta^2\right)}$

体变模量：$K=\lambda+\frac{2}{3}\mu=\rho\left(\alpha^2-2\beta^2\right)+\frac{2}{3}\rho\beta^2=\rho\left(\alpha^2-\frac{4}{3}\beta^2\right)$

泊松比：$\gamma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}=\frac{\rho\alpha^2-2\rho\beta^2}{2\left(\rho\alpha^2-2\rho\beta^2+\rho\beta^2\right)}=\frac{\alpha^2-2\beta^2}{2\left(\alpha^2-\beta^2\right)}$；

（1）E=1.1×10^{11}Pa K=6.3×10^{10}Pa μ=4.4×10^{10}Pa γ=0.22

（2）E=1.9×10^{11}Pa K=1.5×10^{11}Pa μ=7.2×10^{10}Pa γ=0.30

（3）E=6.7×10^{11}Pa K=5.5×10^{11} Pa μ=2.6×10^{11}Pa γ=0.30

3.3.10 $\beta=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$=2.8km/s $\alpha=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}=\sqrt{\frac{K+\frac{4}{3}\mu}{\rho}}$ = 4.3km/s

$$\gamma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}=\frac{K-\frac{2}{3}\mu}{2(K-\frac{2}{3}\mu+\mu)}=\frac{K-\frac{2}{3}\mu}{2(K+\frac{1}{3}\mu)}=\frac{1}{8}=0.125$$

3.3.11 $\beta=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$=1km/s $\alpha=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}=\sqrt{\frac{3\mu}{\rho}}=1.7km/s$

```
3.3.12 load premmodel.dat    %加载 PREM 模型数据
rou=premmodel(:,4);
alpha2=premmodel(:,2).^2;
beta2=premmodel(:,3).^2;
```

```
miu=rou.*beta2;
lamada=rou.*(alpha2-2*beta2);
gama=(alpha2-2*beta2)/2./(alpha2-beta2);
E=rou.*beta2.*(3*alpha2-4*beta2)./(alpha2-beta2);
K=rou.*(alpha2-4/3*beta2);
figure(1)
plot(miu,6371-premmodel(:,1),'b',lamada,6371-premmodel(:,1),'r:',E,6371-premmodel(:,1),'m--',K,6371-premmodel(:,1),'g-.')
legend('剪切模量\miu','拉梅常数\lamada','杨氏模量 E','体变模量 K')%加上图例
set(gca,'YDir','reverse')
ylabel('深度/km');   %加上 Y 轴的标记
xlabel('弹性常数/Pa') %加上 X 轴的标记,注意，^表示后面的字符为上标
figure(2)
plot(gama,6371-premmodel(:,1))
set(gca,'YDir','reverse')
ylabel('深度/km');   %加上 Y 轴的标记
xlabel('Possion 比') %加上 X 轴的标记,注意，^表示后面的字符为上标
```

绘图结果在 MATLAB 命令窗口中运行该程序。注意需要将第一章的 premmodel.dat 拷贝到运行所在的目录。

3.4.1 标量势；矢量势

3.4.2 $\mathbf{u}=\nabla\varphi+\nabla\times\boldsymbol{\psi}$

3.4.3 $\Theta=\nabla^2\varphi$

3.4.4 根据上一节求出的体应变波动方程

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla^2\Theta \quad (1)$$

又根据地震波位移场和势函数的关系式：

$$\Theta=\nabla\cdot\mathbf{u}=\nabla^2\varphi \quad (2)$$

将（2）式带入（1）式可得：

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}-\alpha^2\nabla^2\Theta=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\nabla^2\varphi\right)-\alpha^2\nabla^2\left(\nabla^2\varphi\right)=\nabla^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\alpha^2\nabla^2\varphi\right)=0$$

忽略与空间相关的常数，得到：

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \quad （3）$$

（3）式就是地震波标量势的波动方程。

3.4.5 $\omega=-\nabla^2\psi$

3.4.6 根据上一节的求出的剪切变形波动方程

$$\frac{\partial^2\omega_y}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\omega_y \quad （1）$$

$$\frac{\partial^2\omega_x}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\omega_x \quad （2）$$

$$\frac{\partial^2\omega_z}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\omega_z \quad （3）$$

又根据地震波的势和绕轴旋转量的关系式

$$\omega=-\nabla^2\psi \quad （4）$$

将（1）（2）（3）式结合到一起可以得到：

$$\nabla^2\boldsymbol{\omega}-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}=0 \quad （5）$$

将（4）式带入（5）式可得：

$$\nabla^2\boldsymbol{\omega}-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}=-\left(\nabla^2\nabla^2\boldsymbol{\psi}-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\nabla^2\boldsymbol{\psi}\right)\right)=\nabla^2\left(\nabla^2\boldsymbol{\psi}-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}\right)=0$$

同样忽略与空间相关的常数得到：

$$\nabla^2\boldsymbol{\psi}-\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}=0$$

3.4.7 (1) $u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-7i\mathrm{e}^{2i\left(6t-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$，$u_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$，$u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-7\sqrt{3}i\mathrm{e}^{2i\left(6t-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$

（2）$\Theta=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=-7\left(1+3\right)\mathrm{e}^{2i\left(6t-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$=-28$\mathrm{e}^{2i\left(6t-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$

$$\sigma_{xx}=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}=-\left[28\lambda+14\mu\right]\mathrm{e}^{2i\left(6t-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$$

$$\sigma_{yy}=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}=-28\lambda\mathrm{e}^{2i\left(6t-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$$

$$\sigma_{zz}=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\left[28\lambda+42\mu\right]\mathrm{e}^{2i\left(6t-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$$

3.4.8

$$u_x^s=\frac{\partial\psi_z}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left[6e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[-e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}\right]$$
$$=-i\left(16.25\times\sqrt{3}\right)e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}$$

$$u_y^s=\frac{\partial\psi_x}{\partial z}-\frac{\partial\psi_z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\left[\sqrt{3}e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[6e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}\right]$$
$$=i\frac{15}{4}e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}$$

$$u_z^s=\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[-e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{3}e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}\right]$$
$$=i\frac{35}{4}e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}$$

将上面的位移分量采用第二章所讲的应力分量表达式，注意，S 波产生的体应变Θ为零，则 S 波产生的应力的各个分量为

$$\sigma_{xx}^s=\lambda\Theta+2\mu e_{xx}=2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}=2\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[-i\left(16.25\times\sqrt{3}\right)e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}\right]$$
$$=-20.3125\times\sqrt{3}e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}$$

$$\sigma_{yx}^s=2\mu e_{yx}=\mu(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y})=\mu\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[i\frac{15}{4}e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[-i\left(16.25\times\sqrt{3}\right)e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}\right]\right\}$$
$$=\mu\left(\frac{75}{16}-\frac{95}{4}\right)e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}$$

$$\sigma_{zx}^s=2\mu e_{zx}=\mu(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z})=\mu\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[i\frac{35}{4}e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[-i\left(16.25\times\sqrt{3}\right)e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}\right]\right\}$$
$$=\mu\left(\frac{175}{16}-\frac{95}{4}\right)e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}$$

$$\sigma_{yy}^{s}=\lambda\Theta+2\mu e_{yy}=2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}=2\mu\frac{\partial}{\partial y}\left[i\frac{15}{4}e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}\right]$$

$$=\frac{75}{4}\sqrt{3}e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}$$

$$\sigma_{zz}^{s}=\lambda\Theta+2\mu e_{zz}=2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}=2\mu\frac{\partial}{\partial z}\left[i\frac{35}{4}e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}\right]$$

$$=\frac{175}{4}\sqrt{3}e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}$$

$$\sigma_{zy}^{s}=2\mu e_{zx}=\mu(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z})=\mu\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[i\frac{35}{4}e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[i\frac{15}{4}e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\right.\right.$$

$$=\mu\left(\frac{175}{8}+\frac{75}{16}\right)\sqrt{3}e^{5i(4t-\frac{1}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}z)}$$

由于应力的对称性，$\sigma_{zy}^{s}=\sigma_{yz}^{s},\sigma_{xz}^{s}=\sigma_{zx}^{s},\sigma_{xy}^{s}=\sigma_{yx}^{s}$

3.5.1 见课本的相关内容

3.5.2 $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-k_x^2,\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-k_y^2,\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-k_z^2$；则 $k_x^2+k_y^2+k_z^2=\frac{\omega^2}{c^2}$，因此 k_x,k_y,k_z

可以表示波数 k 在各个轴上的投影，可以写作 $\mathbf{k}=k_x\hat{\mathbf{x}}+k_y\hat{\mathbf{y}}+k_z\hat{\mathbf{z}}$，k 沿波的传播方向。

3.5.3 概念解释

（1）同向面：在物理学中，在一个体积甚大的介质内，如果有一个平面上的质点都同相地沿着同一方向做简谐运动，这种振动也会在介质中沿垂直于这个平面的方向传播开去而形成空间的行波。选波的传播方向为 x 轴的方向，则 x 坐标相同的平面上的质点的振动都是同相的，不随 y 轴或 z 轴而变化。这些同相振动的点组成的面叫同相面或波振面.

（2）平面波:同相面是平面的波就叫做平面简谐波，通常简称为平面波。

（3）平面波与球面波的区别：球面波是指波阵面为同心球面的波。而平面波是指波阵面为平面的波。

3.5.4 因为波的势函数的通常表达式是 $f=Ae^{i\omega\left[t-\frac{n_x x+n_y y+n_z z}{c}\right]}$，因此沿 x 正向，沿 z 逆向的波的势函数表示为 $f=Ae^{i\omega\left[t-\frac{n_x x-n_z z}{c}\right]}$。

3.5.5 $\hat{\mathbf{n}}$ 为波传播的方向，c 为波的传播速度，通常称 $\frac{\hat{\mathbf{n}}}{c}$ 为慢度矢量。

3.5.6 根据 $\mathbf{u}=\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$ 可知纵波位移场仅有 x 方向的位移，为

$$\mathrm{u}_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{i\omega A}{\alpha}e^{i\omega\left(t-\frac{x}{\alpha}\right)}$$

根据势函数的表达，波传播沿 x 正方向。传播速度为 α，振动频率为 $\frac{\omega}{2\pi}$。

3.5.7 要求 P 波和 S 波的势函数，需要给出波传播的方向和波速。波传播的方向为 A 点的矢径： $\mathbf{r}=(500,300,141)$，其单位方向矢量为

$$\hat{\mathbf{r}}=\frac{(500,300,141)}{\sqrt{500^2+300^2+141^2}}=\left(\frac{5}{6},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

S 波的速度由介质密度和剪切模量计算： $\beta=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}=\sqrt{10}$ km/s

在 Possion 介质中 P 波速度为 S 波速度的 $\sqrt{3}$ 倍，为 $\sqrt{30}$ km/s

再根据波的频率 0.5Hz，给出角频率 $\omega=\pi$

将这些值代入 P 波势函数表达式为

$$\varphi=Ae^{i\omega\left(t-\frac{n_x x+n_y y+n_z z}{\alpha}\right)}=\mathrm{A}e^{i\pi\left(t-\frac{\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{6}z}{\sqrt{30}}\right)}=\mathrm{A}e^{i\frac{\pi}{\sqrt{30}}\left(\sqrt{30}t-\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{6}z\right)}$$

$$\psi_i=B_ie^{i\omega\left(t-\frac{n_x x+n_y y+n_z z}{\beta}\right)}=B_ie^{i\pi\left(t-\frac{\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{6}z}{\sqrt{10}}\right)}=B_ie^{i\frac{\pi}{\sqrt{10}}\left(\sqrt{10}t-\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{6}z\right)}$$

P 波和 S 波到达该点的时间为

$$t_\alpha=\frac{|\mathbf{r}|}{\alpha}=109.5s,t_\beta=\frac{|\mathbf{r}|}{\beta}=189.7\text{ s}$$

3.5.8

（1）根据位移和势函数的关系

P 波位移场为

$$\mathbf{u}^P=\nabla\varphi=-i7e^{2i\left(6t-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)}\mathbf{i}-i7\sqrt{3}e^{2i\left(6t-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)}\mathbf{j}$$

S 波位移场为

$$\mathbf{u}^S=\nabla\times\boldsymbol{\psi}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \psi_x & \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-\frac{\partial\psi_z}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$=-i9\sqrt{3}e^{2i\left(6t-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)}\mathbf{i}-i9e^{2i\left(6t-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)}\mathbf{j}+i\frac{1}{3}e^{2i\left(6t-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)}\mathbf{k}$$

（2） 根据势的表达式和频率和速度的关系

$$\varphi=7e^{2i\left(6t-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)}=7e^{12i\left(t-\frac{\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y}{6}\right)}$$

因此，P 波的角频率为 12，频率为$\frac{\omega}{2\pi}=\frac{12}{2\pi}=\frac{6}{\pi}$Hz，速度为 6km/s.

$$\boldsymbol{\psi}=\left(\sqrt{3},-1,6\right)e^{3i\left(4t-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)}=\left(\sqrt{3},-1,6\right)e^{12i\left(t-\frac{\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y}{4}\right)}$$

因此，S 波的角频率也为 12，频率也与 P 波相同，为$\frac{\omega}{2\pi}=\frac{12}{2\pi}=\frac{6}{\pi}$Hz。但速度为 4km/s.

（3） 根据 P 波和 S 波的势函数可知，它们的传播方向相同，均为$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

3.5.9 已知 P 波的传播方向为$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}\right)$，频率为 1Hz，则其势函数可以表达为

$\varphi=Ae^{i2\pi\left(t-\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}z}{\alpha}\right)}$，这里 A 和 P 波速度未知。

我们知道 P 波是体变波，与体积变形Θ有关。体积变形Θ和 P 波压强的关系为（注意，由于这里是振幅，我们忽略了符号）

$$|P|=K|\Theta| \qquad (1)$$

其中$\Theta=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\nabla^2\varphi$

将 P 波的势函数表达式代入可得体应变的振幅

$$|\Theta|=\left|\nabla^2\varphi\right|=A\frac{4\pi^2}{\alpha^2} \qquad (2)$$

我们还不知道体应变 K 的表达，但根据 Possion 比为 1/3，采用 $\gamma=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ 得到：

$\lambda=2\mu$，由此可以得到 $K=\lambda+\dfrac{2}{3}\mu=\dfrac{8}{3}\mu$。又根据 P 波速度表达式 $\alpha=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}=\sqrt{\dfrac{4\mu}{\rho}}$，

得到 $\mu=\dfrac{\rho\alpha^2}{4}$。代入体变模量表达式得到：

$$K=\frac{8}{3}\mu=\frac{2}{3}\rho\alpha^2 \qquad (3)$$

将（3）和（2）式代入（1）式，得到

$$|P|=K|\Theta|=\frac{2}{3}\rho\alpha^2 A\frac{4\pi^2}{\alpha^2}=\frac{8\pi^2}{3}\rho A$$

题目中已知介质的密度和压强振幅，可以得到

$$A=\frac{3|P|}{8\pi^2\rho}=\frac{3\times 500dyn/cm^2}{8\pi^2 3g/cm^3}=6.3326cm^2$$

又根据 P 波的位移振幅为 10 μm，根据 P 波位移和势函数的关系，有

$$|u_p|=|\nabla\varphi|=\frac{\omega}{\alpha}A\Rightarrow\alpha=\frac{\omega A}{|u_p|}=\frac{2\pi\times 6.3326cm^2}{10^{-4}cm}=3.9789\times 10^5 cm/s\approx 4.0km/s$$

由此可以得到 P 波势函数的表达式为

$$\varphi=6.3326e^{i2\pi\left(t-\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}z}{4.0}\right)}$$

3.6.1 我们首先证明不引起偏应变的 P 波是不存在的

设 P 波的势函数为 $\varphi=Ae^{i\omega\left(t-\frac{n_x x+n_y y+n_z z}{\alpha}\right)}$，其位移矢量表示为 $u_x=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},u_y=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y},u_z=\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$，体应变 $\Theta=\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\nabla^2\varphi$。如果没有偏应变，则 $e_{11}=e_{22}=e_{33}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},e_{21}=e_{12}=0,e_{23}=e_{32}=0,e_{31}=e_{13}=0$。体应变

$$\Theta=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=3\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=3\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=3\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

体应变对 x 的偏导数为

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}=3\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=3\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x\partial y}=3\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial x}=3\frac{\partial e_{12}}{\partial y}=0$$

同理体应变对 y 和 z 方向的偏导数也为零。因此，体应变不随 x, y, z 方向变化而变化。即体应变处处相等，因此，不是传播的物理量，不会形成波。因此不存在偏应变的 P 波是不存在的。

因为 P 波会引起体应变，也一定引起偏应变。故其传播速度与剪切模量有关。

3.6.2 将 P 波势函数表达为$\varphi=Ae^{i\omega\left(t-\frac{n_x x+n_y y+n_z z}{\alpha}\right)}$的形式，则 P 波的传播方向和振动方向为$\mathbf{n}=n_x\mathbf{i}+n_x\mathbf{j}+n_x\mathbf{k}$。

3.6.3 $\mathbf{n}=n_x\mathbf{i}+n_y\mathbf{j}+n_z\mathbf{k}$ $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

$$t-\frac{\mathbf{r}\bullet\mathbf{n}}{\beta}=t-\frac{xn_x+yn_y+zn_z}{\beta}$$

$$\mathbf{u}=\nabla\times\boldsymbol{\psi}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \psi_x & \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-\frac{\partial\psi_z}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{n}=\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}\right)n_x-\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial z}\right)n_y+\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}\right)n_z$$

$$=\left(-\frac{n_y}{\beta}\psi'_z+\frac{n_z}{\beta}\psi'_y\right)n_x-\left(-\frac{n_x}{\beta}\psi'_z+\frac{n_z}{\beta}\psi'_x\right)n_y+\left(-\frac{n_x}{\beta}\psi'_y+\frac{n_y}{\beta}\psi'_x\right)n_z=0$$

因此，S 波位移方向与传播方向正交。

3.6.4 解释概念

（1）设地震波传播方向为矢量 r，其在水平面的投影为矢量 R。r 与 z 轴的夹角为 i，由于是偏离垂线的夹角，我们称之为偏垂角。

（2）R 与北向 x 的夹角为α，顺时针方向为正。地震学上称之为走向。

（3）S 波振动方向与 SV 波分量的夹角称为偏振角(polarization angle)ε；

（4)通常定义 S 波振动方向和传播方向所组成的平面为 S 波偏振面(polarization plane)；

3.6.5 判断：（1）错；（2）对（3）错（4）错

3.6.6 *（1）P* 波仅在波传播方向上有位移，振动方向与传播方向一致，这样的波叫做纵波。而且因为$\nabla\times\nabla\varphi=0$，质点运动不旋转，或“无旋”。

S 波的实际运动往往可以分成两个分量：含传播矢量的垂直面里的运动（SV 波）和取向与这个面垂直的水平运动（*SH*波）。因为$\nabla\cdot\mathbf{u}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\psi})=0$，运动是纯剪切的，没有任何的体积变化。

（2）S 波依其质点振动方向的不同可分为 SV 及 SH 波

3.6.7　AB

3.6.8　AC

3.6.9 从传播方向与振动方向的关系上：P 波的传播方向与振动方向是一致的，而 S 波的传播方向与振动方向是垂直的；
从传播介质上：S 波不能在液体中传播，但 P 波不受液体介质的限制；
从传播速度上：P 波传播速度快，而 S 波传播速度慢；
P 波通过时，物质团无旋转运动，但有体积变化，P 波是一种无旋波。S 波通过时有旋转运动，但无体积变化，S 波为一种无散的等容波。

3.6.10 S 波在 oyz 平面传播，因此传播方向与 x 轴夹角 90 度，因此，传播方向矢量的 $n_x = 0$。由于传播方向与 z 轴夹 60 度，则与 y 轴夹 30 度，因此得到传播方向矢量的 $n_y = \cos\left(30^o\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, n_z = \cos\left(60^o\right) = \frac{1}{2}$。

SV 波的振动方向在传播方向平面 oyz 内，并且与传播方向垂直，因此振动方向应该与 y 轴夹 60 度角，与 z 轴夹 30 度角。这样振动方向 $\mathrm{v}_x = 0, \mathrm{v}_y = \pm\cos\left(60^o\right) = \pm\frac{1}{2}, \mathrm{v}_z = \pm\cos\left(30^o\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，这里有两个方向，分别表示向上和向下振动。

SH 波的振动方向在水平面 oxy 内，并且与传播方向和 SV 振动方向垂直，这样只有 $(\pm 1, 0, 0)$ 才是其振动方向。

3.6.11 选择：（1）AB　（2）C　（3）AB
3.6.12

(a)　势函数的通解可以写为：$f = Ae^{\mathrm{i}\omega(t-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{c})}$，采用其虚部，可以得到

$$\varphi = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{c}\right)\right]$$

由题意有　$\varphi = 10\sin\left(34t - 3x + 4z\right)$

则 $\varphi = 10\sin\left[34\left(t - \frac{3\mathrm{x} - 4z}{34}\right)\right] = 10\sin\left[34\left(t - \frac{\frac{3}{5}\mathrm{x} - \frac{4}{5}z}{\frac{34}{5}}\right)\right]$

P 波的频率 f= $\frac{34}{2\pi} = \frac{17}{\pi}$ Hz ，p 波的速度为 $\frac{34}{5}$，p 波的射线方向为（$\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}$）。

同理可得 S 波的频率为 $\frac{17}{\pi}$ Hz，S 波的速度为 $\frac{17}{5}$。

注意，虽然这里的 S 波的势函数为矢量，但传播方向与 P 波相同，仿照上面的分析，可以得到传播方向与上面的 P 波相同。

（b）$\mathbf{u}=\nabla\times\boldsymbol{\psi}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \psi_x & \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}$

$$=\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-\frac{\partial\psi_z}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

由于

$$=240\sin(34t-6x+8z)\mathbf{i}-220\sin(34t-6x+8z)\mathbf{j}+180\sin(34t-6x+8z)\mathbf{k}$$

如果 x 方向为北 45°东方向，z 垂直向下，y 方向为南 45°东方向，而 x 方向和 y 方向的位移相位相同，东向位移的振幅为 x 方向和 y 方向两个振幅的矢量合成，为 $240\times\cos45°-220\times\cos45°=10\sqrt{2}\ \mu$m。其相位与 x 方向和 y 方向的相位相同。

同样，北向位移为 x 方向和 y 的反方向位移的合成，为 $240\times\cos45°+220\times\cos45°=230\sqrt{2}\ \mu$m。

(c) SH 波地动位移即为 y 方向的位移

则 $u_y=(\nabla\times\boldsymbol{\psi})_y=-220\sin(34t-6x+8z)$，位移方向为 y 方向，由于振幅为负，y 方向为南 45°东方向，位移方向为其反方向，即北西 45 度方向。

3.6.13

$$\mathbf{u}=\nabla\times\boldsymbol{\psi}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \psi_x & \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}-\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \qquad (1)$$

$$=\mathrm{i}\left[-4\frac{13}{\sqrt{3}},-4\left(\frac{6}{\sqrt{5}}-\frac{7}{5\sqrt{3}}\right),4\left(\sqrt{7}-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}\right)\right]e^{4i\left(4t-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}z\right)}$$

此 S 波的振幅的模为

$$\left|u^{\mathrm{S}}\right|=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}=34.03 \qquad (2)$$

根据 S 波的传播方向与 z 轴夹角（偏垂角 i）的余弦为 $\cos i=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$，可知

$$\sin i=\sqrt{1-\frac{7}{15}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}},$$

根据 $u_z^S=u^{SV}\cos(90^o-i)=u^{SV}\sin i\Rightarrow u^{SV}=\dfrac{u_z^S}{\sin i}$

将（1）式的u_z^S和$\sin i=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}}$代入上式，得到$u^{SV}=10.75$。

根据该 S 波的模，$\left|u^S\right|=\sqrt{\left(u^{SV}\right)^2+\left(u^{SH}\right)^2}\Rightarrow u^{SH}=\sqrt{\left|u^S\right|^2-\left(u^{SV}\right)^2}=32.29$

根据 SV 波和 SH 波的振幅，得到$\tan\varepsilon=\dfrac{u^{SH}}{u^{SV}}\Rightarrow\varepsilon=71.6^o$

3.6.14

$$u^{SV}=\left|u^S\right|\cos\varepsilon=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$u^{SH}=\left|u^S\right|\sin\varepsilon=\frac{5}{2}$$

根据真偏振角和视偏振角的关系$\tan\varepsilon=\cos i\tan\gamma$可以求得$\cos i=\frac{1}{\sqrt{3}}$，可知$\sin i=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$。

根据$u_z^S=u^{SV}\sin i=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}=3.53$

SV 波的水平分量为$u_H^{SV}=u^{SV}\cos i=\dfrac{5}{2}$。

将 SH 波位移分量和 SV 波的水平位移分量按照图 3-6-7（b）旋转得到

$$u_x^S=u^{SH}\sin a_z+u_H^{SV}\cos a_z=\frac{5}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)=3.42$$

$$u_y^S=-u^{SH}\cos a_z+u_H^{SV}\sin a_z=\frac{5}{4}\left(-1+\sqrt{3}\right)=0.92$$

3.6.15 地震波的传播方向与 z 轴的夹角余弦为$\cos\left(30^o\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，与 x 轴的夹角余弦为$\cos\left(60^o\right)=\dfrac{1}{2}$，根据传播矢径与三个轴的夹角余弦平方和为 1，得到该方向与 y 轴的夹角为 90º，即地震波的传播方向在 0xz 垂直面内传播。

SH 波的振动方向在水平面内，并且与传播方向垂直，可知一定沿 y 方向振动。

根据 SV 波在垂直面内且与传播方向垂直，可知 SV 波在与 x 轴夹 30º，与 z 轴夹 60º，与 y 轴夹 90º 的方向上振动。

3.6.16 P 波在传播方向上的振幅应该为三个方向振幅的矢量合成，有：

$$u^P=\sqrt{4^2+4^2+8^2}=4\sqrt{6}$$

则 P 波传播方向与 z 轴的夹角 i（偏垂角）可以根据三角关系求出

$$\cos i=\frac{u_z^P}{u^P}=\frac{8}{4\sqrt{6}},i=35.3^o$$

P 波传播方向在水平面的投影是北向振幅 u_x^P 和东向振幅 u_y^P 的合成矢量，因此传播方向与北向的夹角 a_z（方位角）可以由下式计算

$$\tan a_z = \frac{u_y^P}{u_x^P} = \frac{4}{4}, a_z = 45^o$$

对于 S 波，由于 SH 波在水平面上振动，仅有 SV 波可能在垂直方向上有位移。因此 S 波在垂直方向上的位移 $-\left(4+\sqrt{2}\right)$ 均是 SV 波的贡献。根据在上面 P 波求得的偏垂角，由于 SV 振动方向与传播方向垂直，可以得到传播方向与垂直方向的夹角（偏垂角）可以由下式计算：

$$u^{SV} = \frac{u_z^S}{\cos(90-i)} = \frac{u_z^S}{\sin i} = \frac{-\left(4+\sqrt{2}\right)}{\sin(35.3)} = -9.37$$

这就是 SV 波的振幅。

SH 波的振幅为 S 波的北向和东向的振幅在水平面上的投影，但要注意，SH 波的质点振动垂直于传播方向在水平面的投影方向。由上面 P 波的计算可以知道，传播方向在水平面的投影与北向夹 a_z 角度，因此，SH 波的振幅为

$$u^{SH} = -u_y^S \cos a_z + u_x^S \sin a_z = 3.66$$

S 波的偏振角根据

$$\tan\varepsilon = \frac{u^{SH}}{u^{SV}} = \frac{-3.66}{-9.37} \Rightarrow \varepsilon = 21.3^o$$

根据视偏振角和真偏振角的关系 $\tan\varepsilon = \cos i \tan\gamma$，得到视偏振角为 25.5°。

3.6.17 根据 S 波的传播方向与 z 轴夹角的方向余弦为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，可以求得波传播方向与 z 轴的夹角(偏垂角)为 $i = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^o$。

S 波在垂直方向上的位移均是 SV 波的贡献。又由于 S 波质点振动方向垂直于波的传播方向，则有 $u_z^S = u^{SV}\cos(90-i)$，因此 SV 波的位移振幅为

$$u^{SV} = \frac{u_z^S}{\cos(90-i)} = \frac{6}{0.5} = 12$$ 。

这里给出的波数、频率等参数在这里没有用上，是干扰成分。

3.6.18 根据题意知 P 波的波数 $k_\alpha=\frac{2}{3},\omega=\frac{2\pi}{T}=4$，由角频率、波数和波速之间的关系知：

P 波速度为 $\alpha=\frac{\omega}{k_\alpha}=6km/s$。

由于介质为 Possion 固体，根据 Possion 固体的 P 波和 S 波波速之间的关系可以得到 $\beta=\frac{\alpha}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}km/s$，因此 S 波的波数为 $k_\beta=\frac{\omega}{\beta}=\frac{2}{\sqrt{3}}$。

根据上面的推演，得到地震波的标量势为：

$$\varphi=Ae^{i\omega\left(t-\frac{n_x x+n_y y+n_z z}{\alpha}\right)}=3e^{i4\left(t-\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z}{6}\right)}=3e^{i\frac{2}{3}\left(6t-\frac{1}{2\sqrt{2}}x-\frac{1}{2\sqrt{2}}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$$

$$\boldsymbol{\psi}=\left(\psi_x,\psi_y,\psi_z\right)e^{i\omega\left(t-\frac{n_x x+n_y y+n_z z}{\beta}\right)}=\left(-2,2,0\right)e^{i4\left(t-\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z}{2\sqrt{3}}\right)}=\left(-2,2,0\right)e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}t-\frac{1}{2\sqrt{2}}x-\frac{1}{2\sqrt{2}}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$$

为确定 P 波和 S 波在地震仪的三个方向的振幅，根据关系式

$\mathbf{u}^P=\nabla\varphi,\mathbf{u}^S=\nabla\times\boldsymbol{\psi}$，可以得到：

$$u_x^P=-\frac{1}{\sqrt{2}},u_y^P=-\frac{1}{\sqrt{2}},u_z^P=-\sqrt{3}$$

$$u_x^S=2,u_y^S=2,u_z^S=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

根据 S 波的传播方向与 z 轴夹角的方向余弦为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，可以求得波传播方向与 z 轴的夹角（偏垂角）为 $i=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=30^o$。再根据波传播方向与北向和东向夹角的方向余弦

$$v_x=\sin i\cos a_z=\frac{1}{2\sqrt{2}},v_y=\sin i\sin a_z=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

可以求得波传播方向与正北方向的夹角（方位角）a_z 为 45º。

S 波在垂直方向上的位移均是 SV 波的贡献。又由于 S 波质点振动方向垂直于波的传播方向，则有 $u_z^S=u^{SV}\cos\left(90-i\right)$，因此

$$u^{SV}=\frac{u_z^S}{\cos\left(90-i\right)}=-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

根据 S 波的水平分量和方位角可以得到 SH 波的位移为

$$u^{SH}=-u_y^S\cos a_z+u_x^S\sin a_z=0$$

3.6.19 （1） 令 i 为 P 波传播方向的偏垂角，a_z 为 P 波传播方向的走向，则 P 波的传播方向可表示为

$$\mathbf{n}=\left(\sin i\cos a_z,\sin i\sin a_z,\cos i\right) \qquad (1)$$

由于其振幅矢量方向与振动方向一致，则

$$\frac{n_x}{n_y}=\frac{\sin i\cos a_z}{\sin i\sin a_z}=\frac{u_x^P}{u_y^P}=1\Rightarrow a_z=45^o$$

$$\frac{n_z}{n_x}=\frac{\cos i}{\sin i\cos a_z}=\frac{u_z^P}{u_x^P}=\sqrt{3}\Rightarrow i=30^o$$

将上述值代入（1）式，有

$$\mathbf{n}=\left(\sin i\cos a_z,\sin i\sin a_z,\cos i\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

这样 P 波势函数表达式 $\varphi=Ae^{i\omega\left(t-\frac{n_x}{\alpha}x-\frac{n_y}{\alpha}y-\frac{n_z}{\alpha}z\right)}$ 中只有 A 是未知的。根据 $u_i=\left(\nabla\varphi\right)_i$

有

$$u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-i\frac{\omega n_x}{\alpha}Ae^{i\omega\left(t-\frac{n_x}{\alpha}x-\frac{n_y}{\alpha}y-\frac{n_z}{\alpha}z\right)}=\frac{4}{3\sqrt{3}}e^{i\omega\left(t-\frac{n_x}{\alpha}x-\frac{n_y}{\alpha}y-\frac{n_z}{\alpha}z\right)}$$

则 $u_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-i\frac{\omega n_y}{\alpha}Ae^{i\omega\left(t-\frac{n_x}{\alpha}x-\frac{n_y}{\alpha}y-\frac{n_z}{\alpha}z\right)}=\frac{4}{3\sqrt{3}}e^{i\omega\left(t-\frac{n_x}{\alpha}x-\frac{n_y}{\alpha}y-\frac{n_z}{\alpha}z\right)}$

$$u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-i\frac{\omega n_z}{\alpha}Ae^{i\omega\left(t-\frac{n_x}{\alpha}x-\frac{n_y}{\alpha}y-\frac{n_z}{\alpha}z\right)}=\frac{4}{\sqrt{3}}e^{i\omega\left(t-\frac{n_x}{\alpha}x-\frac{n_y}{\alpha}y-\frac{n_z}{\alpha}z\right)}$$

质点振动取其虚部。由此得到

$$A\frac{\omega n_x}{\alpha}=-\frac{4}{3\sqrt{3}},A\frac{\omega n_y}{\alpha}=-\frac{4}{3\sqrt{3}},A\frac{\omega n_z}{\alpha}=-\frac{4}{\sqrt{3}}$$

以上三式的平方和为

$$A^2\frac{\omega^2}{\alpha^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)=\frac{176}{27}$$

$\left(n_x,n_y,n_z\right)$ 为波传播的方向矢量，有 $n_x^2+n_y^2+n_z^2$=1，考虑到 P 波的速度 6km/s 和频率 $\frac{4}{2\pi}$ Hz，角频率为 4，可以求得：$A=3.8927$

代入方程得到 P 波的势的表达：

$$\varphi = Ae^{i\omega\left(t-\frac{n_x}{\alpha}x-\frac{n_y}{\alpha}y-\frac{n_z}{\alpha}z\right)} = 3.8927e^{\frac{2}{3}i\left(6t-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$$

（2），已知 S 波的传播方向$\mathbf{n}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，频率为$\frac{4}{2\pi}$Hz，速度为 4km/s,则可假定 S 波的势函数为$\psi_i = B_i e^{i\left(4t-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$，根据 S 波位移与势函数的关系为$\mathbf{u}^S = \nabla\times\boldsymbol{\psi}$，同样取虚部得到

$$u_x^S = \left(B_3\frac{\sqrt{2}}{4}-B_2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\left(4t-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)} = -\sqrt{3}e^{i\left(4t-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$$

$$u_y^S = \left(B_1\frac{\sqrt{3}}{2}-B_3\frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{i\left(4t-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)} = -\sqrt{3}e^{i\left(4t-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$$

$$u_z^S = \left(B_2\frac{\sqrt{2}}{4}-B_1\frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{i\left(4t-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(4t-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$$

根据位移场的散度为零

$$\nabla\bullet\boldsymbol{\psi} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}B_1+\frac{\sqrt{2}}{4}B_2+\frac{\sqrt{3}}{2}B_3\right)e^{i\left(4t-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)} = 0$$

将上面式子联立，采用 MATLAB 语句

```
[B1,B2,B3]=solve('B3*sqrt(2)/4-B2*sqrt(3)/2==-sqrt(3),B1*sqrt(3)/2-B3*sqrt(2)/4
==-sqrt(3),B2-B1==4,sqrt(2)/4*B1+sqrt(2)/4*B2+sqrt(3)/2*B3==0')
```

可以得到 B1=-2,B2=2,B3=0.

代入方程得到 S 波的势的表达：

$$\boldsymbol{\psi} = (-2,2,0)e^{i\left(4t-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{4}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$$

3.6.20 根据方位角a_z和偏垂角 i，SV 波的位移为：

$$u^{SV} = \frac{u_z^S}{\sin i} = \frac{3}{\sin 30^o} = 6$$

SH 波位移为：

$$u^{SH} = -u_y^S\cos a_z + u_x^S\sin a_z = -4\cos 60^o + 6\sin 60^o = -2+3\sqrt{3}$$

S 波的偏振角为

$$\varepsilon = \tan^{-1}\frac{u_{SH}}{u_{SV}} = \tan^{-1}\frac{-2+3\sqrt{3}}{6} = 28^o$$

3.7.1 $\dfrac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}-\dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2}=0$

3.7.2 $\varphi(r,t)=\dfrac{f(t-r/\alpha)}{r}$

3.7.3 根据势函数的表达 $\varphi(r,t)=\dfrac{f(t-r/\alpha)}{r}$，可知 $\dfrac{1}{r}$ 项表示波的振幅随距离衰减的几何扩散因子。

3.7.4 $\varphi(r,t)=\dfrac{f\left(t-r/\alpha\right)}{r}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)f'r-f}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)f'r-f\right)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2f''r+\left(\frac{1}{\alpha}\right)f'-\left(\frac{1}{\alpha}\right)f'=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2f''r=\frac{f''r}{\alpha^2}$$

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{f''}{r\alpha^2}$$

因此，（3-7-7）满足（3-7-3）

3.7.5

```
%P3_7.
%球面波的传播(曲面)
close all%关闭所有的图形窗口
clear all%清除所有变量
%f=2;            %假定地震波的频率为2Hz
f=10;            %假定地震波的频率为2Hz
w=2*pi*f;            %角频率
%alpha=5;          %假定地震波的波速为5km/s
alpha=50;          %假定地震波的波速为5km/s
A=1;             %假设中心点的振幅为1
rm=50;           %显示的地震波传播的最大距离
r=1:3:rm;        %距离向量
th=linspace(0,2*pi,30);      %角度向量
```

```
[R,TH]=meshgrid(r,th);          %距离和角度矩阵
[X,Y]=pol2cart(TH,R);           %极坐标化为直角坐标
U=A*cos(w*(-R/alpha))./R;        %初始时间为零的位移
figure                          %创建图形窗口
h=surf(X,Y,U);                  %画曲面并取句柄
axis([-rm,rm,-rm,rm,-1,1])   %坐标范围
box on%图形外加框
fs=16;                          %字体大小
title('球面波传播的曲面','FontSize',fs)%标题
xlabel('\itx\rm/km','FontSize',fs)     %x标签
ylabel('\ity\rm/km','FontSize',fs)     %y标签
zlabel('\itu','FontSize',fs)%z标签
hold on%保持图像
t=0;                                   %初始时刻的相位
while 1                                 %无限循环
if get(gcf,'CurrentCharacter')==char(27)
break
end%按ESC键退出循环
  t=t+0.01;                        %下一时刻的时间相位
  U=A*cos(w*(t-R/alpha))./R;                %曲面的位移
  set(h,'ZData',U)                   %设置位移
  drawnow                            %更新屏幕
end%结束循环
```

通过修改频率和波长，可以发现。频率影响地震波振动的快慢，频率越高，振动越快。而波长则可以通过修改波速来进行调整，波速越大，波长越大，则在一定范围内显示的波数就会减少。

第四章

4.1.1 $\sigma_{zx},\sigma_{zy},\sigma_{zz}$，在界面上具有连续性，界面下方物质通过界面作用于上方物质的应力必然等于上方物质通过界面作用于下方物质的应力，这就是应力连续条件。同样道理，以 x 轴为法向的界面的应力分量 $\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{xz}$ 连续，以 y 轴为法向的界面的应力分量 $\sigma_{yx},\sigma_{yy},\sigma_{yz}$ 连续。

4.1.2 P 波产生的质点振动与传播方向一致，由于 P 波在 oxz 平面内传播，就会有 x 方向和 z 方向的位移，而没有 y 方向的位移。再考虑 SV 波，SV 波的质点振动垂直于波的传播方向的传播射线的平面内，在 oxz 平面内振动，并且垂直于传播方向，因此也有 x 方向和 z 方向的位移。P 波和 SV 波是耦合的，通常称为 P-SV 系统。而 SH 波的质点振动垂直于射线传播方向并且在水平面内振动因此 SH 波只能产生 y 方向的位移，没有 x 和 z 方向的位移，通常称为 SH 系统。因此 SH 系统的地震波场和 P-SV 系统的波场是分离的。

4.1.3 考虑到 P-SV 系统涉及到位移的 x 分量和 z 分量（u_x，u_z），不涉及 y 分量的位移，而根据第二章的广义胡克定律有

$$\sigma_{zz}=\lambda\Theta+2\mu e_{zz}=\lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\sigma_{zx}=2\mu e_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

也就是说应力分量 σ_{zz},σ_{zx} 跟 u_x，u_z 有关，因此，P-SV 系统的连续性为位移 u_x，u_z 和应力 σ_{zz},σ_{zx} 在水平分界面上是连续的。

4.1.4 对于 SH 系统，位移只涉及 y 分量，没有涉及 x 和 z 分量。也可以看作 u_x=0, u_z=0。根据第二章的广义胡克定律有：

$$\sigma_{zy}^{SH}=2\mu e_{zy}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)=\mu\frac{\partial u_y}{\partial z}$$

因此，在 SH 系统中连续条件为连续性条件为应力 σ_{zy} 和位移分量 u_y 连续。

4.1.5 在 oxz 平面内传播的 P 波的方向的标量势的表达式中不含有 y 分量，因此 $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$。

在 oxz 平面内传播的 SV 波，不会沿 y 方向传播，因此不含有 y，因此其势函数对 y 的求导必为零，即

$$\frac{\partial\psi_x}{\partial y}=\frac{\partial\psi_y}{\partial y}=\frac{\partial\psi_z}{\partial y}=0$$

4.1.6 SV 波不产生 y 方向的位移。根据 $\mathbf{u}_{SV}=\nabla\times\boldsymbol{\psi}==\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$ 可知，$\boldsymbol{\psi}$ 的表达式中的 ψ_x,ψ_z 的任一分量不为零，则一般会产生 y 方向的位移 u_y，因此对于 SV 波，由于没有 y 分量位移，ψ_x,ψ_z 必为零。

4.2.1 设入射 P 波为平面简谐波，入射面为 oxz 平面，法线为 z 轴，入射 P 波的入射角为 i_p，反射 SV 波的反射角为 i_s'，由图 4-2-1 中各波的传播方向与坐标轴方向的关系，

$$R_{pp}^{\mathrm{F}}=\frac{A_2}{A_1}=\frac{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}-\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}=\frac{4\beta^4p^2\frac{\sqrt{1-p^2\beta^2}\sqrt{1-p^2\alpha^2}}{\alpha\beta}-\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}{4\beta^4p^2\frac{\sqrt{1-p^2\beta^2}\sqrt{1-p^2\alpha^2}}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}$$

$$\mathrm{R}_{psv}^{F}=\frac{B}{A_1}=\frac{-4\beta^2p\frac{\cos i_p}{\alpha}\left(1-2\beta^2p^2\right)}{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}=\frac{-4\beta^2p\frac{\sqrt{1-\alpha^2p^2}}{\alpha}\left(1-2\beta^2p^2\right)}{4\beta^4p^2\frac{\sqrt{1-\beta^2p^2}\sqrt{1-\alpha^2p^2}}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}$$

A_1 为入射 P 波势函数振幅，A_2 为反射 P 波势函数振幅，B 为反射 SV 波势函数振幅。

4.2.2 （1）P 波势函数的一般表达式为 $\varphi=Ae^{i\omega\left(t-\frac{n_xx+n_yy+n_zz}{\alpha}\right)}$

根据 P 波入射到自由表面的偏垂角为 30 度，可以得到 $\mathrm{n}_x=\cos(60^o)=\frac{1}{2},n_y=0,n_z=\cos(150^o)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$。

根据地震波的频率为 2Hz，可以给出 $\omega=4\pi$。

将上面求得的值和 P 波速度 5km/s 代入 P 波势的表达式得

$$\varphi=Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z}{5}\right)}$$

（2）由于介质为 Possion 介质，$\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{3}$，得到$\beta=\frac{\alpha}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$。根据 Snell 定律可以求得反射 P 波的偏垂角也为 30 度，反射 SV 波的偏垂角 $\sin i_s=\frac{1}{2\sqrt{3}},\cos i_s=\sqrt{1-\sin^2 i_s}=\sqrt{1-\frac{1}{12}}=\sqrt{\frac{11}{12}},\ i_s=\arcsin\frac{1}{2\sqrt{3}}=16.7787^o$。

将这些值代入反射 P 波和反射 SV 波势的反射系数，

$$\begin{cases}\frac{A_2}{A_1}=\frac{\beta^2\sin 2i_p\sin 2i_s-\alpha^2\cos^2 2i_s}{\beta^2\sin 2i_p\sin 2i_s+\alpha^2\cos^2 2i_s}=-0.6263\\ \frac{B}{A_1}=\frac{-2\beta^2\sin 2i_p\cos 2i_s}{\beta^2\sin 2i_p\sin 2i_s+\alpha^2\cos^2 2i_s}=-0.5634\end{cases}$$

计算的 MATLAB 代码如下：

```
alpha=5;alpha2=5*5;beta=5/1.732;beta2=
25/3;
A21=(beta2*sind(2*30)*sind(2*16.7787)-
alpha2*cosd(2*16.7787)^2)/(beta2*sind(
2*30)*sind(2*16.7787)+alpha2*cosd(2*16
.7787)^2)
BA1=-2*beta2*sind(2*30)*cosd(2*16.7787
)/(beta2*sind(2*30)*sind(2*16.7787)+al
pha2*cosd(2*16.7787)^2)
```

反射 P 波的方向为$n_x=\cos(60^o)=\frac{1}{2},n_y=0,n_z=\cos(30^o)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，代入得到

反射 P 波的势为

$$\varphi_{refP}=-0.6263Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z}{5}\right)}$$

同理可得到反射 SV 波的势函数为

$$\psi_{refSV} = -0.5634Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\sqrt{\frac{11}{12}}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}z}{\frac{5}{\sqrt{3}}}\right)}$$

(3) 根据课本中的讲述，

$$u_x = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z} = -i\omega\varphi_1\frac{4\beta^2 p\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}}{4\beta^4 p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}$$

此处，入射波的波函数为$\varphi = Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z}{5}\right)}$，射线参数 $p=\frac{\sin 30}{5}=0.1s/km$，将前面求得的各参数代入上式可得：

$$u_x = -i4\pi Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z}{5}\right)}\frac{4\times\frac{25}{3}\times0.1\times\frac{\sqrt{\frac{11}{12}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{5\times\frac{5}{\sqrt{3}}}}{4\times\frac{625}{9}\times0.01\times\frac{\sqrt{\frac{11}{12}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{5\times\frac{5}{\sqrt{3}}}+\left(1-2\times\frac{25}{3}\times0.01\right)^2}$$

由于这里波函数中没有 y 分量，所以$u_y=0$.

与 u_x 分向求解相似，将所得参数代入下式，可得到地震仪所记录的垂直分量：

$$u_z = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}$$

$$= -i\omega\varphi_1\frac{-2\frac{\cos i_p}{\alpha}\left(1-2\beta^2p^2\right)}{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}$$

这里不再赘述。

（4）根据课本中所讲述的视入射角和 S 波反射角的关系，有$\bar{i}_p = 2i_s$=2*16.7787=33.5574°。

4.2.3 （1）设 P 波势函数为$\varphi = Ae^{i\omega\left(t-\frac{n_x x+n_y y+n_z z}{\alpha}\right)}=Ae^{i12\left(t-\frac{n_x x+n_y y+n_z z}{6}\right)}$，根据其与位移的关系式得到

$$u_x^P=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-i2An_xe^{i12\left(t-\frac{n_xx+n_yy+n_zz}{6}\right)}=-i2A\sin i\cos a_ze^{i12\left(t-\frac{n_xx+n_yy+n_zz}{6}\right)}=5\sqrt{2}e^{i12\left(t-\frac{n_xx+n_yy+n_zz}{6}\right)}$$

$$u_y^P=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-i2An_ye^{i12\left(t-\frac{n_xx+n_yy+n_zz}{6}\right)}=-i2A\sin i\sin a_ze^{i12\left(t-\frac{n_xx+n_yy+n_zz}{6}\right)}=5\sqrt{6}e^{i12\left(t-\frac{n_xx+n_yy+n_zz}{6}\right)}$$

$$u_z^P=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-i2An_ze^{i12\left(t-\frac{n_xx+n_yy+n_zz}{6}\right)}=-i2A\cos ie^{i12\left(t-\frac{n_xx+n_yy+n_zz}{6}\right)}=10\sqrt{2}e^{i12\left(t-\frac{n_xx+n_yy+n_zz}{6}\right)}$$

将前两式子相除得到 $\tan a_z=\sqrt{3}\Rightarrow a_z=60^o$

将第一式和第三式相除得到 $\cos a_z\tan i=\frac{1}{2}\tan i=\frac{5\sqrt{2}}{10\sqrt{2}}\Rightarrow i=45^o$ 。

将偏垂角 i 和走向角的值代入上边的式子可得 A=10.

根据偏垂角 i 和走向角的值，还可以得到 $n_x=\frac{\sqrt{2}}{4}$， $n_y=\frac{\sqrt{6}}{4},n_z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

因此，P 波势函数可以表达为

$$\varphi_{inc}=10e^{i2\left(6t-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{6}}{4}y-\frac{\sqrt{2}}{2}z\right)}$$

要求该波在自由表面产生的反射 P 波和 SV 波的势函数，需要将其转换为 Ox'z'为入射面。

$$\begin{pmatrix}\cos a_z & \sin a_z & 0\\ -\sin a_z & \cos a_z & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{4}\\ \frac{\sqrt{6}}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$\varphi_{inc}=10e^{i\sqrt{2}\left(6\sqrt{2}t-x-z\right)}$$

（2）对于 Possion 固体， $\frac{\alpha}{\beta}=\sqrt{3}$ ，因此有 $\beta=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ 。

根据 Snell 定律， $\frac{\sin i}{\alpha}=\frac{\sin i_s}{\beta}$ 得到 $\sin i_s=\frac{\sqrt{6}}{6}$， $\cos i_s=\sqrt{\frac{5}{6}}$

代入 P 波入射到自由表面的反射系数公式，可以得到 Vps=-0.64

S 波的势函数振幅 B=10*(-0.64)=-6.4.由此可得，反射 SV 波的势函数可表示为

$$\psi_y=-6.4e^{i12\left(t-\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}x+\frac{\sqrt{6}}{6}z}{2\sqrt{3}}\right)}$$

（3）根据上面转换坐标系 P 波和 S 波势的表达，可以求得位移振幅矢量

$$u_x^{SV}=-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}=-i6.4\times\sqrt{2}\times e^{i12\left(t-\frac{\frac{\sqrt{5}}{6}x+\frac{\sqrt{6}}{6}z}{2\sqrt{3}}\right)}$$

$$u_z^{SV}=\frac{\partial\psi_y}{\partial x}=i6.4\times\sqrt{10}\times e^{i12\left(t-\frac{\frac{\sqrt{5}}{6}x+\frac{\sqrt{6}}{6}z}{2\sqrt{3}}\right)}$$

相对于初始坐标系，z 轴在两个坐标系中相同，而在变换后坐标系中 $u_x^{SV}=u_R^{SV}$ 只需要求出 u_R^{SV} 在初始坐标系中的投影即可，这样在老坐标系中

$$\left|u_x^{SV}\right|=\left|u_{\mathrm{R}}^{SV}\right|\cos a_z=3.2\times\sqrt{2}$$
$$\left|u_y^{SV}\right|=\left|u_{\mathrm{R}}^{SV}\right|\sin a_z=3.2\times\sqrt{6}$$

而 z 分向的位移振幅仍为 $6.4\times\sqrt{10}$ 。

4.2.4

$$u_x^P=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=-i\omega p\varphi_1$$
$$u_y^P=0$$
$$u_z^P=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=i\omega\frac{\cos i_p}{\alpha}\varphi_1$$

其合成振幅为：$\sqrt{\left|u_x^P\right|^2+\left|u_z^P\right|^2}=\frac{\omega}{\alpha}\left|\varphi_1\right|$

对于上面提到的 SV 波：

$$u_x^{SV}=\frac{\partial\psi_z}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}=-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}=-i\omega\frac{\cos i_s}{\beta}\psi_y$$
$$u_z^{SV}=\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}=\frac{\partial\psi_y}{\partial x}=-i\omega p\psi_y$$

其合成振幅为：$\sqrt{\left|u_x^{SV}\right|^2+\left|u_z^{SV}\right|^2}=\frac{\omega}{\beta}\left|\psi_y\right|$

所以由上两式可知对于稳态传播的 P 波，位移振幅为势振幅的 $\frac{\omega}{\alpha}$ 倍；对于稳态传播的 S 波振幅为势振幅的 $\frac{\omega}{\beta}$ 倍。

4.2.5

根据 4.2.2 的解，入射 P 波势函数为

$$\varphi = Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z}{5}\right)}$$

入射 P 波的位移为：

$$u_x^P = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = i4\pi\times\frac{1}{10}\times Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z}{5}\right)}$$

$$u_z^P = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -i4\pi\times\frac{\sqrt{3}}{10}\times Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z}{5}\right)}$$

其合成振幅为 $\sqrt{\left|u_x^P\right|^2+\left|u_z^P\right|^2} = \frac{4}{5}\pi A$

根据 4.2.2 的解，反射 P 波势函数为

$$\varphi_{refP} = -0.6263Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z}{5}\right)}$$

反射 P 波的位移为：

$$u_x^P = \frac{\partial\varphi_{refP}}{\partial x} = -0.6263\times i4\pi\times\frac{1}{10}\times Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z}{5}\right)}$$

$$u_z^P = \frac{\partial\varphi_{refP}}{\partial z} = 0.6263\times i4\pi\times\frac{\sqrt{3}}{10}Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z}{5}\right)}$$

其合成振幅为 $\sqrt{\left|u_x^P\right|^2+\left|u_z^P\right|^2} = \frac{4}{5}\pi A\times 0.6263$

所以反射 P 波位移振幅为入射 P 波位移振幅的 0.6263 倍。

根据 4.2.2 的解，反射 SV 波势函数为

$$\psi_{refSV} = -0.5634Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\sqrt{\frac{11}{12}}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}z}{\frac{5}{\sqrt{3}}}\right)}$$

反射 SV 波的位移为：

$$u_x^{SV}=\frac{\partial\psi_z}{\partial y}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}=-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}=-i\omega\frac{\cos i_s}{\beta}\psi_y=i4\pi\times\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{\frac{5}{\sqrt{3}}}\times 0.5634Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\sqrt{\frac{11}{12}}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}z}{\frac{5}{\sqrt{3}}}\right)}$$

$$=i\frac{2\pi}{5}\times 0.5634Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\sqrt{\frac{11}{12}}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}z}{\frac{5}{\sqrt{3}}}\right)}$$

$$u_z^{SV}=\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}=\frac{\partial\psi_y}{\partial x}=-i\omega p\psi_y=i4\pi\frac{\sqrt{\frac{11}{12}}}{\frac{5}{\sqrt{3}}}\times 0.5634Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\sqrt{\frac{11}{12}}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}z}{\frac{5}{\sqrt{3}}}\right)}$$

$$=i\frac{2\pi\sqrt{11}}{5}\times 0.5634Ae^{i4\pi\left(t-\frac{\sqrt{\frac{11}{12}}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}z}{\frac{5}{\sqrt{3}}}\right)}$$

其合成振幅为$\sqrt{\left|u_x^{SV}\right|^2+\left|u_z^{SV}\right|^2}=\frac{4}{5}\pi\times 0.5364\times\sqrt{12}\times A$

因此反射 SV 波的振幅为入射 P 波振幅的 $0.5364\times\sqrt{12}$ 倍。

该题也可以采用式（4-2-28）计算。请读者自己验证。

4.2.6　SV 波入射到自由表面的反射系数 R_{svsv}^F 为：

$$R_{svsv}^F=\frac{B}{A}=\frac{4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}-\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}{4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}=\frac{4p^2\frac{\sqrt{1-\alpha^2p^2}\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\alpha\beta}-\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}{4p^2\frac{\sqrt{1-\alpha^2p^2}\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\alpha\beta}+\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}$$

$$=\frac{4p^2\eta_\alpha\eta_\beta-\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}{4p^2\eta_\alpha\eta_\beta+\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}$$

SV 波入射到自由表面转换为 P 波的反射系数 R_{svp}^F

$$R_{svp}^{F}=\frac{C}{A}=\frac{4p\dfrac{\cos i_s}{\beta}\left(\dfrac{1}{\beta^2}-2p^2\right)}{4p^2\dfrac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(\dfrac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}=\frac{4p\dfrac{\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\beta}\left(\dfrac{1}{\beta^2}-2p^2\right)}{4p^2\dfrac{\sqrt{1-\beta^2p^2}\sqrt{1-\alpha^2p^2}}{\alpha\beta}+\left(\dfrac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}$$

$$=\frac{4p\eta_\beta\left(\dfrac{1}{\beta^2}-2p^2\right)}{4p^2\eta_\alpha\eta_\beta+\left(\dfrac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}$$

其中，i_s 为 SV 波的入射角和反射角，i_p 为 P 波的反射角，p 为射线参数，α,β 分别为介质的 P 波速度和 S 波速度。

4.2.7 （1）已知 P 波速度 β 为 3km/s，并且为 Possion 介质，可以得到 $\alpha=3\sqrt{3}km/s$。由于介质反射中没有 SV 波，即出现偏振交换，则（4-2-33）的第一式为零，令其分子为零，即

$$\beta^2\sin 2i_p\sin 2i_s-\alpha^2\cos^2 2i_s=0$$

由于介质为 Possion 介质，因此 $\alpha=\beta\sqrt{3}$。根据 Snell 定律，有

$$\frac{\sin i_p}{\alpha}=\frac{\sin i_s}{\beta}\Rightarrow\sin i_p=\frac{\alpha\sin i_s}{\beta}=\sqrt{3}\sin i_s$$

采用三角函数的倍角公式将上式展开，得到

$$4\sin i_p\cos i_p\sin i_s\cos i_s=3\left(1-\sin^2 2i_s\right)$$

$$4\left(\sqrt{3}\sin i_s\right)\sqrt{1-3\sin^2 i_s}\sin i_s\sqrt{1-\sin^2 i_s}=3\left(1-4\sin^2 i_s\left(1-\sin^2 i_s\right)\right)$$

其中，$\sin i_s$ 可以按照下面的 MATLAB 函数求解

```
solve('4*sqrt(3)*x*sqrt(1-3*x*x)*x*sqrt(1-x*x)==3(1-4*x*x*(1-x*x))')
```

得到 $\sin i_s=0.5,0.5630$ 两个解，这样可得到 SV 波的入射角为 30 度和 34.3 度。

在这个推导过程中可以看到，如果介质为 Possion 介质，我们不用知道 P 波速度或 S 波速度究竟是多少，并且不需要知道地震波的频率就可以算出偏振交换所需的 SV 波入射角。据此和 Snell 定律还可以得到反射 P 波的偏垂角为 i_p 为 60 度和 77.2 度。

（2）将求得的偏垂角代入（4-2-33）第二式，可得

$$R_{svp}^{F}=\frac{2\alpha^2\sin 2i_s\cos 2i_s}{\beta^2\sin 2i_p\sin 2i_s+\alpha^2\cos^2 2i_s}=\frac{2\times\sin\left(60^o\right)\cos\left(60^o\right)}{\dfrac{1}{3}\sin\left(120^o\right)\sin\left(60^o\right)+\cos^2\left(60^o\right)}=0.7485$$

$$R_{svp}^{F}=\frac{2\alpha^2\sin 2i_s\cos 2i_s}{\beta^2\sin 2i_p\sin 2i_s+\alpha^2\cos^2 2i_s}=\frac{2\times\sin\left(68.6^o\right)\cos\left(68.6^o\right)}{\frac{1}{3}\sin\left(154.4^o\right)\sin\left(68.6^o\right)+\cos^2\left(68.6^o\right)}=0.7622$$

因此在两种入射角下，P 波势函数的振幅分别为 0.7485A 和 0.7622A.

4.2.8　临界反射点的 P 波平行界面射出，即 i_p =90 度，根据 Snell 定律可知，$\sin i_s=\sin\left(30^o\right)=\frac{\beta}{\alpha}$，得到地表 P 波速度为 6km/s。

4.2.9　SV 波入射到介质表面，若入射角大于临界角，会产生超临界反射。临界角的计算为 $i_c=arc\sin\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=arc\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=35.3^o$，SV 波入射角 40 度大于临界角，因此会产生超临界反射。

根据 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{4p^2\frac{\sqrt{\alpha^2p^2-1}\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\alpha\beta}}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}$ 式可知，反射 SV 波与入射 SV 波具有相同的振幅，但有相移 θ，相移的计算公式为：

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{4p^2\frac{\sqrt{\alpha^2p^2-1}\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\alpha\beta}}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}$$

已知介质为 Possion 介质，且 P 波速度为 5km/s,可以得到 S 波速度为 $\frac{5}{\sqrt{3}}$ km/s。又已知 SV 波的入射角，可以得到射线参数 $p=\frac{\sin\left(40^o\right)}{\frac{5}{\sqrt{3}}}=0.2227$，代入上式得到

$$\theta=2\arctan\left(\frac{4p^2\frac{\sqrt{\alpha^2p^2-1}\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\alpha\beta}}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}\right)=170.4^o$$

注：上式采用 MATLAB 计算式为

2*atand(4*p*p*sqrt(25*p*p-1)*sqrt(1-25/3*p*p)/(5*5/sqrt(3))/(3/25-2*p*p)^2)）

所以反射 SV 波的相移为 170.4 度。

4.2.10　入射 SV 势函数 $\psi_y=Ae^{i\omega\left(t-px+\frac{\cos i_s}{\beta}z\right)}$

Possion 介质中，SV 波速度为 $\beta=3$km/s，那么 p 波速度为 $\alpha=3\sqrt{3}$ km/s

$\omega=\pi$， $p=\frac{\sin i_s}{\beta}=\frac{\sqrt{3}}{6}$， $\cos i_s=\frac{1}{2}$，代入 SV 波的势函数表达式有

$$\psi_y=Ae^{i2\pi\left(t-\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{6}z\right)}$$

SV 波入射的临界角为$i_c=arc\sin\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=arc\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=35.3^o$，由于入射角大于临界角，因此会出现超临界反射的情况。根据教材中所述的内容，反射 SV 波会有一个相移，相移θ按下时计算：

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{4p^2\frac{\sqrt{\alpha^2p^2-1}\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\alpha\beta}}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}$$

从而得到$\theta=2\arctan\left(\frac{4p^2\frac{\sqrt{\alpha^2p^2-1}\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\alpha\beta}}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}\right)=151.0^o$

注：上式采用 MATLAB 计算式为

```
2*atand(4*p*p*sqrt(27*p*p-1)*sqrt(1-9*p*p)/(9*sqrt(3))/(1/9-2*p*p)^2)
```

所以反射 SV 波的相移为 151.0 度或 2.6354rad。

根据 SV 波的反射系数

$$R^{\mathrm{F}}_{svsv}=\frac{i4p^2\frac{\sqrt{\alpha^2p^2-1}\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\alpha\beta}-\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}{i4p^2\frac{\sqrt{\alpha^2p^2-1}\sqrt{1-\beta^2p^2}}{\alpha\beta}+\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2}=-e^{-i\theta}$$

可得 SV 波的势函数为：

$$\Psi_y=Ae^{i2\pi\left(t-\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{6}z\right)-i2.6354}$$

4.2.11　根据 SV 波势函数的表达式可知地震波传播方向与 z 轴的夹角(偏垂角)i 的余弦为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而得到该地震波的偏垂角 i 为 30 度，出射角 e 为 60 度。根据射线方向与 x 轴的夹角余弦表达式，可知

$$\sin i\cos a_z=\frac{1}{2}\cos a_z=\frac{1}{2\sqrt{2}}\Rightarrow a_z=45^o$$

又根据 SV 波势函数表达式可知，S 波角频率ω=4 rad/s,波速为 4km/s，由于介质为 Possion 介质，P 波波速$\alpha=\beta\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ km/s。

根据 Snell 定律，已知 SV 波偏垂角 i 和 P 波、S 波速度，可以求得反射 P 波射线与 z

轴的夹角(偏垂角) i_p 为 60 度。

将这些数值代入 SV 波入射到自由界面的反射 P 波系数，可得系数为 $\frac{C}{A}=-\sqrt{3}$，为得到 P 波的反射系数，需要把 SV 波入射情况采用旋转矩阵将入射面转换到（x’,z’）平面上：

$$\begin{pmatrix} \cos a_z & \sin a_z & 0 \\ -\sin a_z & \cos a_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由此得到 A=5, $C=-5\sqrt{3}$。对于入射面转换到 ox’ y’ z’ 平面的坐标系，P 波的势为：

$$\varphi=\mathrm{A}e^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_p x'+\cos i_p z'}{\alpha}\right)}=5\sqrt{3}e^{i4\left(t-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}z'}{4\sqrt{3}}\right)}=5\sqrt{3}e^{i2\left(2t-\frac{\sqrt{3}x'+z'}{4\sqrt{3}}\right)}$$

在转换后的坐标系中，P 波的位移为

$$u_{x'}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=10\sqrt{3}e^{i2\left(2t-\frac{\sqrt{3}x'+z'}{4\sqrt{3}}\right)}$$

$$u_{z'}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=10e^{i2\left(2t-\frac{\sqrt{3}x'+z'}{4\sqrt{3}}\right)}$$

在原始坐标系中位移的振幅为

$$|u_x|=|u_{x'}|\cos a_z=10\sqrt{3}\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{6}$$

$$|u_y|=|u_{x'}|\sin a_z=10\sqrt{3}\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{6}$$

$$|u_z|=|u_{z'}|=10$$

4.2.12 (1)根据地震波的传播方向和偏垂角 i_s、走向角 a_z 的关系，可知

$$\sin i_s\cos a_z=\frac{1}{4},\sin i_s\sin a_z=\frac{\sqrt{3}}{4},\cos i_s=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

可以得到 $i_s=30^o, a_z=60^o$。

由于介质为 Possion 介质，$\alpha=\beta\sqrt{3}$，根据 Snell 定律

$$\frac{\sin i_p}{\alpha}=\frac{\sin i_s}{\beta}\Rightarrow\sin i_p=\frac{\alpha\sin i_s}{\beta}=\sqrt{3}\sin i_s=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow i_p=60^o$$

$$r_{sp}=\frac{\beta^2\sin 2i_p\sin 2i_s-\alpha^2\cos^2 2i_s}{\beta^2\sin 2i_p\sin 2i_s+\alpha^2\cos^2 2i_s}=\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\sin 2i_p\sin 2i_s-\cos^2 2i_s}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\sin 2i_p\sin 2i_s+\cos^2 2i_s}=\sqrt{3}$$

根据我们在 oxz 平面里传播的波的公式，我们需要将入射面转换为 ox’y’z 坐标系，转换矩阵为$\begin{pmatrix}\cos a_z & \sin a_z & 0\\ -\sin a_z & \cos a_z & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$。则将 S 波势函数振幅矢量转换为 ox’y’z 坐标系中为

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10\sqrt{3}\\ 2\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\sqrt{3}\\ 16\\ 4\end{pmatrix}$$

因此，S 波在 ox’y’z’的表达式中的势函数为

$$\boldsymbol{\psi}'=\left(-4\sqrt{3},16,4\right)\mathrm{e}^{i20\left(t-\frac{\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}z'}{4}\right)}$$

其中$\psi'_y=16\mathrm{e}^{i20\left(t-\frac{\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}z'}{4}\right)}$，该分量入射 SV 波，根据前面的反射系数可得反射 SV 波在 ox’y’z’中的表达式为

$$\varphi'_{\mathrm{P}}=16\sqrt{3}\mathrm{e}^{i20\left(t-\frac{\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}z'}{4}\right)}$$

将 P 波的传播方向变换为原来坐标系中为 $n_x=\sin i_p\cos a_z=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$n_y=\sin i_p\sin a_z=\frac{1}{2}$，$n_z=\cos i_p=\frac{\sqrt{3}}{2}$。因此得到反射 P 波在原来坐标系中为

$$\varphi_{\mathrm{P}}=16\sqrt{3}\mathrm{e}^{i\frac{5}{12}\left(t-\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{3}{4}y-\frac{1}{2}z}{4\sqrt{3}}\right)}$$

反射波的位移振幅为

$$u_x^P=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=20\sqrt{3}\mathrm{e}^{i\frac{5}{12}\left(t-\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{3}{4}y-\frac{1}{2}z}{4\sqrt{3}}\right)},u_y^P=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=60\mathrm{e}^{i\frac{5}{12}\left(t-\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{3}{4}y-\frac{1}{2}z}{4\sqrt{3}}\right)},u_z^P=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-40\mathrm{e}^{i\frac{5}{12}\left(t-\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{3}{4}y-\frac{1}{2}z}{4\sqrt{3}}\right)}$$

(2)对于反射 S 波，我们分解为 SV 和 SH 分量。对于反射 SV 波，反射系数为

$$r_{ss}=\frac{2\alpha^2\sin 2i_p\cos 2i_s}{\beta^2\sin 2i_p\sin 2i_s+\alpha^2\cos^2 2i_s}=\frac{2\sin 2i_p\cos 2i_s}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\sin 2i_p\sin 2i_s+\cos^2 2i_s}=0$$

因此，反射 SV 波没有位移分量。

对于反射 SH 波，我们采用位移分量求解。在 ox’ y’ z’ 坐标系中，入射波的位移分量可表示为$u_{y'}^{SH}=\frac{\partial\psi_x'}{\partial z}-\frac{\partial\psi_z'}{\partial x}=-40\mathrm{e}^{i20\left(t-\frac{\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}z'}{4}\right)}$

SH 波的反射系数为 1，因此反射 SH 波的位移向量也表示为$-40\mathrm{e}^{i20\left(t-\frac{\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}z'}{4}\right)}$。

将其表示在原来坐标系中假定为$\mathbf{u}^{\mathbf{SH}}=\left(B_1,B_2,0\right)\mathrm{e}^{i20\left(t-\frac{\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z}{4}\right)}$，又由于 SH 波的传播方向为$\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，其振动振幅向量与传播方向垂直，因此有$\frac{1}{4}B_1+\frac{\sqrt{3}}{4}B_2=0$，再考虑到其总振幅为 40，有$\mathrm{B}_1^2+\mathrm{B}_2^2=1600$，可以求得$B_1=20\sqrt{3},B_2=-20$。

4.2.13　当反射系数式中分子部分为零，则转换波的振幅为零，半空间中只存在一列反射波，也就是 P 波入射只会产生 SV 波，SV 波入射只会产生 P 波。此现象称为偏振交换。

4.2.14　参看 4-2-3 节的证明。

4.2.15　地面测量得到的是地面的实际位移，也就是自由表面的位移，入射波射到自由表面后由于产生了反射波，因而自由表面上的位移并不等于入射波的位移，自由表面上的位移向量与地面之间的夹角就称为视出射角。

4.2.16　当 P 波入射时，有

$$\tan\bar{i}_p=\frac{u_x}{-u_z}\Big|_{z=0}=\frac{u_x^P+u_x^{SV}}{-\left(u_z^P+u_z^{SV}\right)}=\frac{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}}{-\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right)}$$

将 P 波入射反射为 P 波和 SV 波的势函数，并采用前面导出的 P 波入射的反射系数，可得

$$u_x=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}$$

$$=-i\omega\varphi_1\left(p+p\frac{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}-\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}-\frac{\cos i_s}{\beta}\frac{-4\beta^2p\frac{\cos i_p}{\alpha}\left(1-2\beta^2p^2\right)}{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}\right)$$

$$=-i\omega\varphi_1\frac{8\beta^4p^3\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+4\beta^2p\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}\left(1-2\beta^2p^2\right)}{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}$$

$$=-i\omega\varphi_1\frac{4\beta^2p\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}\left(2\beta^2p^2+1-2\beta^2p^2\right)}{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}=-i\omega\varphi_1\frac{4\beta^2p\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}}{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}$$

$$u_z=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}$$

$$=-i\omega\varphi_1\left(-\frac{\cos i_p}{\alpha}+\frac{\cos i_p}{\alpha}\frac{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}-\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}+p\frac{-4\beta^2p\frac{\cos i_p}{\alpha}\left(1-2\beta^2p^2\right)}{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}\right)$$

$$=-i\omega\varphi_1\frac{-2\frac{\cos i_p}{\alpha}\left(1-2\beta^2p^2\right)^2-4\beta^2p^2\frac{\cos i_p}{\alpha}\left(1-2\beta^2p^2\right)}{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}$$

$$=-i\omega\varphi_1\frac{-2\frac{\cos i_p}{\alpha}\left(1-2\beta^2p^2\right)\left(1-2\beta^2p^2+2\beta^2p^2\right)}{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}=-i\omega\varphi_1\frac{-2\frac{\cos i_p}{\alpha}\left(1-2\beta^2p^2\right)}{4\beta^4p^2\frac{\cos i_s\cos i_p}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}$$

由上式得：

$$\tan\bar{i}_p=\frac{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}}{-\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right)}=\frac{4p\beta^2\frac{\cos i_p\cos i_s}{\alpha\beta}}{2\left(1-2\beta^2p^2\right)\frac{\cos i_p}{\alpha}}=\frac{\sin 2i_s}{\cos 2i_s}=\tan 2i_s$$

因此$\bar{i}_p=2i_s$

4.2.17　当 SH 波入射到自由表面时，反射系数为 1. 我们设入射 SH 波的位移为：

$$u_y=He^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_s}{\beta}x+\frac{\cos i_s}{\beta}z\right)}$$

总的位移为:

$$u_y^{all}=u_y+u_y'=H\left[e^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_s}{\beta}x+\frac{\cos i_s}{\beta}z\right)}+e^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_s}{\beta}x-\frac{\cos i_s}{\beta}z\right)}\right]$$

在 z=0 的面上即得到

$$u_y^{all}=u_y+u_y'=H\left[e^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_s}{\beta}x\right)}+e^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_s}{\beta}x\right)}\right]=2He^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_s}{\beta}x\right)}$$

即自由表面的位移为入射 SH 波位移的 2 倍。

4.2.18 由于记录到的是正东南方向的地震，因此传播方向为正西北方向，则 S 波的水平分量投影到正西北方向的水平方向才是 SV 波导致的水平位移。因此

$$u_{svx}=u_N\sin(45^o)-u_E\cos(45^o)=(-20-40)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

当SV波入射到自由表面时,注意SV波的质点振动方向与传播方向垂直,设其视入射角为$\overline{i_s}$，

则 $\tan\overline{i_s}=\dfrac{u_{sz}}{u_{svx}}=\dfrac{20}{60\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

由此得到视出视角为 40.9 度。

4.2.19　入射波射到自由表面后由于产生了反射波,因而自由表面上的位移一般并不等于入射波的位移。但在垂直入射的情况下，两者才会相等。

4.2.20　单色平面 P 波入射到自由面时,入射和反射 P 波势函数可以写为：

$$\varphi_1=A_1e^{i\omega\left(t-px+\frac{\cos i_p}{\alpha}z\right)}$$

$$\varphi_2=A_2e^{i\omega\left(t-px-\frac{\cos i_p}{\alpha}z\right)}$$

P 波产生的位移为：

$$u_x^P=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-i\omega p\varphi$$

$$u_z^P=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\pm i\omega\frac{\cos i_p}{\alpha}\varphi$$

其入射波合成振幅为：$\sqrt{\left|u_{x1}^P\right|^2+\left|u_{z1}^P\right|^2}=\dfrac{\omega}{\alpha}\left|\varphi_1\right|$

反射波合成振幅为：$\sqrt{\left|u_{x2}^P\right|^2+\left|u_{z2}^P\right|^2}=\dfrac{\omega}{\alpha}\left|\varphi_2\right|$

所以反射波合成振幅之比为

$$r_{pp}^{F}=\frac{\sqrt{\left|u_{x1}^{P}\right|^{2}+\left|u_{z1}^{P}\right|^{2}}}{\sqrt{\left|u_{x2}^{P}\right|^{2}+\left|u_{z2}^{P}\right|^{2}}}=\frac{\frac{\omega}{\alpha}\left|\varphi_{1}\right|}{\frac{\omega}{\alpha}\left|\varphi_{2}\right|}=\frac{\left|\varphi_{1}\right|}{\left|\varphi_{2}\right|}=R_{pp}^{F}$$

4.2.21　（1）错误（2）正确（3）正确（4）错误

4.2.22　（1）设地震波传播的水平方向为 x 方向，向下为 z 方向，则向上入射到自由表面的波的势函数可以写为

$$\varphi_{1}=A_{1}e^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_{p}}{\alpha}x+\frac{\cos i_{p}}{\alpha}z\right)}$$

已知 P 波的位移振幅为$\left(5\sqrt{2},0,10\sqrt{2}\right)$，根据

$$\sqrt{\left|u_{x1}^{P}\right|^{2}+\left|u_{z1}^{P}\right|^{2}}=\frac{\omega}{\alpha}\left|\varphi_{1}\right|$$

得到φ_{1}的振幅$A_{1}=\frac{5}{2}\sqrt{10}$。

由$\left|u_{x1}^{P}\right|=\left|\frac{\partial\varphi_{1}}{\partial x}\right|=A_{1}\frac{\omega\sin i_{p}}{\alpha}=5\sqrt{2}$，可以得到$\sin i_{p}=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos i_{p}=\frac{\sqrt{20}}{5}$，将这些参数代入入射 P 波势函数表达式得到

$$\varphi_{1}=A_{1}e^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_{p}}{\alpha}x+\frac{\cos i_{p}}{\alpha}z\right)}=\frac{5}{2}\sqrt{10}e^{i12\left(t-\frac{\sqrt{5}}{30}x+\frac{\sqrt{20}}{30}z\right)}$$

（2）设反射 SV 波的势函数为

$$\psi_{y}=Be^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_{s}}{\beta}x-\frac{\cos i_{s}}{\beta}z\right)}$$

已知泊松比为 0.25，根据纵波速度α和横波速度β的关系得到泊松体中横波速度为：

$\beta=\frac{\alpha}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$，同时 $p=\frac{\sin i_{p}}{\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{30}$，代入反射 SV 波与入射 P 波势函数反射系数关系：

$$\mathrm{R}_{psv}^{F}=\frac{-4\beta^{2}p\frac{\sqrt{1-\alpha^{2}p^{2}}}{\alpha}\left(1-2\beta^{2}p^{2}\right)}{4\beta^{4}p^{2}\frac{\sqrt{1-\beta^{2}p^{2}}\sqrt{1-\alpha^{2}p^{2}}}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^{2}p^{2}\right)^{2}}=-0.5228$$

注意上式根据

```
-4*beta^2*p*sqrt(1-36*p*p)/6*(1-2*beta*beta*p*p)/(4*beta^4*p*p*sqrt(1-beta*beta
*p*p)*sqrt(1-36*p*p)/6/beta+(1-2*beta*beta*p*p)^2)
```

计算。

$$\frac{\sin i_p}{\alpha}=\frac{\sin i_s}{\beta}\Rightarrow \sin i_s=\frac{\beta}{\alpha}\sin i_p=\frac{\sqrt{15}}{15}\Rightarrow \cos i_s=\sqrt{1-\sin^2 i_s}=\frac{\sqrt{210}}{15}$$

所以反射 S 波势函数为：

$$\psi_y=-0.5228\times\frac{5}{2}\sqrt{10}e^{i12\left(t-\frac{\sqrt{15}}{30}x-\frac{\sqrt{70}}{30}z\right)}$$

（3）

设反射 p 波的势函数为

$$\varphi_2=A_2e^{i\omega\left(t-px-\frac{\cos i_p}{\alpha}z\right)}$$

又根据反射 P 波与入射 P 波反射系数关系

$$R_{pp}^{\mathrm{F}}=\frac{4\beta^4p^2\frac{\sqrt{1-p^2\beta^2}\sqrt{1-p^2\alpha^2}}{\alpha\beta}-\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}{4\beta^4p^2\frac{\sqrt{1-p^2\beta^2}\sqrt{1-p^2\alpha^2}}{\alpha\beta}+\left(1-2\beta^2p^2\right)^2}=-0.6991$$

上式根据

(4*beta^4*p*p*sqrt(1-beta*beta*p*p)*sqrt(1-36*p*p)/6/beta-(1-2*beta*beta*p*p)^2

)/(4*beta^4*p*p*sqrt(1-beta*beta*p*p)*sqrt(1-36*p*p)/6/beta+(1-2*beta*beta*p*p)

^2)计算得到。

这样反射 P 波的势函数为

$$\varphi_2=-0.6991\times\frac{5}{2}\sqrt{10}e^{i12\left(t-\frac{\sqrt{5}}{30}x-\frac{\sqrt{20}}{30}z\right)}$$

4.2.23　根据 Possion 比为 3/8，$\gamma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}=\frac{3}{8}$，得到 $\lambda=3\mu$，

$$\alpha=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}=\sqrt{\frac{5\mu}{\rho}}=\sqrt{5}\beta\text{。}$$

根据地震波的传播方向，$\cos i = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow i = 30^o$

$$\sin i \cos a_z = \frac{1}{4} = \sin 30^o \cos a_z \Rightarrow a_z = 60^o$$

根据 Snell 定律，临界角为$\sin i_c = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow i_c = 26.5^o$

入射角 30 度大于临界角。因此没有反射 P 波。

入射 S 波的位移根据 $\mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\psi} = (0, -80, 40)\mathrm{e}^{i20\left(t - \frac{\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z}{4}\right)}$。其振幅的模为

$$\left|u^S\right| = \sqrt{(-80)^2 + 40^2} = 40\sqrt{5}$$

根据入射角与 SV 波振幅的关系，有

$$u^{SV} = \frac{u_z^S}{\cos\left(90^o - i\right)} = 80$$

SH 分量的振幅为

$$u^{\mathrm{SH}} = \sqrt{\left(u^S\right)^2 - \left(u^{SV}\right)^2} = 40$$

SH 波的反射波的振幅与入射波的振幅相等。再采用 60 度的走向角，可以将 SH 波的振幅投影到北向 x 和东向 y 上，得到

$$\mathbf{u}^{\mathrm{SH}} = 40\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\mathrm{e}^{i20\left(t - \frac{\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z}{4}\right)}$$

由于 SV 波为超临界反射，反射 SV 波的振幅等于入射 SV 波的振幅，但差一个相位。再根据 SV 波位移分量投影到坐标轴上的表示有

$$\mathbf{u}^{\mathrm{SV}} = \left|u^{\mathrm{SV}}\right|\left(\cos i \cos a_z, \cos i \sin a_z, \sin i\right)\mathrm{e}^{i20\left(t - \frac{\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z}{4}\right)} = 80\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{i20\left(t - \frac{\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z}{4}\right) - i\theta}$$

根据相移角的计算公式 $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{4p^2 \frac{\sqrt{\alpha^2 p^2 - 1}\sqrt{1 - \beta^2 p^2}}{\alpha\beta}}{\left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right)^2}$ 可以得到θ=77.33^o。

4.3.1 应力连续条件为$\sigma_{zy}^{0^-} = \sigma_{zy}^{0^+}$，位移连续条件为$u_y^{0^-} = u_y^{0^+}$。

4.3.2 参考课本 4-3-1 节的推导,SH 波的反射投射系数为：

$$\overset{\backslash}{S}\overset{/}{S}=\frac{\rho_1\beta_1\cos i_{s1}-\rho_2\beta_2\cos i_{s2}}{\rho_1\beta_1\cos i_{s1}+\rho_2\beta_2\cos i_{s2}}\quad \overset{\backslash}{S}\overset{\backslash}{S}=\frac{2\rho_1\beta_1\cos i_{s1}}{\rho_1\beta_1\cos i_{s1}+\rho_2\beta_2\cos i_{s2}}$$

4.3.3

参看教材中内容，当 i_{s1} 继续增大时，会出现 $\sin i_{s2}>1$ 的情况，此时 $\cos i_{s2}=\sqrt{1-\left(\frac{\beta_1\sin i_{s1}}{\beta_2}\right)^2}=\mathrm{i}\sqrt{\left(\frac{\beta_1\sin i_{s1}}{\beta_2}\right)^2-1}$，在第二种介质中的 $\eta_2=\frac{\cos i_{s2}}{\beta_2}$ 为虚数. 此时反射波的振幅与入射波振幅一样，但有一角度为 θ 的相移。非均匀波(Inhomogeneous wave)，这种波沿 x 轴传播，振幅随深度指数变化。

4.3.4　反射系数：

$$\overset{\backslash}{S}\overset{/}{S}=\frac{\rho_1\beta_1\cos i_{s1}-\rho_2\beta_2\cos i_{s2}}{\rho_1\beta_1\cos i_{s1}+\rho_2\beta_2\cos i_{s2}}$$

透射系数：

$$\overset{\backslash}{S}\overset{\backslash}{S}=\frac{2\rho_1\beta_1\cos i_{s1}}{\rho_1\beta_1\cos i_{s1}+\rho_2\beta_2\cos i_{s2}}$$

对垂直入射的情况（$i_{s1}=0$），此时根据 Snell 定律 $i_{s2}=0$，*SH* 波的系数为：

$$\overset{\backslash}{S}\overset{/}{S}_{vert}=\frac{\rho_1\beta_1-\rho_2\beta_2}{\rho_1\beta_1+\rho_2\beta_2}$$

$$\overset{\backslash}{S}\overset{\backslash}{S}_{vert}=\frac{2\rho_1\beta_1}{\rho_1\beta_1+\rho_2\beta_2}$$

4.3.5　P 波入射到固体内部界面时一般会出现反射 P 波，反射 SV 波，透射 P 波，透射 SV 波。SV 波入射到固体内部界面时一般会出现反射 SV 波，反射 P 波，透射 SV 波，透射 P 波。

4.3.6　对垂直入射的 *P* 波，*P* 不转换为 *SV*，所以 *P* 波的系数也有比较简单的形式：

$$\overset{\backslash}{P}\overset{/}{P}_{vert}=-\frac{\rho_1\alpha_1-\rho_2\alpha_2}{\rho_1\alpha_1+\rho_2\alpha_2},\overset{\backslash}{P}\overset{\backslash}{P}_{vert}=\frac{2\rho_1\alpha_1}{\rho_1\alpha_1+\rho_2\alpha_2}$$

4.3.7

```
is=0:0.1:90;
vp1=6.80;vp2=8.11;
vs1=3.9;vs2=4.49;
den1=2.9;den2=3.38;
n=length(is);
Rcoeff=zeros(1,n);Icoeff=Rcoeff;Acoeff=Rcoeff;Pcoeff=Rcoeff;
for ii=1:n
[rt]=recoff(vp1,vs1,den1,vp2,vs2,den2,sin(deg2rad(is(ii)))/vs1);
```

```
Rcoeff(ii)=real(rt(6));Icoeff(ii)=imag(rt(6));Acoeff(ii)=abs(rt(6));
Pcoeff(ii)=rad2deg(angle(rt(6)));
end
subplot(1,2,1),plot(is,Rcoeff,is,Icoeff,is,Acoeff);
subplot(1,2,2),plot(is,Pcoeff);
```

4.3.8

从第一个图来看，入射波射到界面后产生了一种反射波，并且符合Snell定律，没有出现第二种反射波，因此，第一层介质有可能是液体，A为入射P波，B为反射P波。在第二种介质中出现了两种透射波，只有固体才会产生两种波，分别为透射P波和透射SV波。由于P波速度大于SV波速度，根据Snell定律，SV波的偏垂角应该小于P波的偏垂角，由于D射线的偏垂角小，该射线为SV波，另外一条射线C为P波。

从第二个图来看，入射波射到界面后产生了两种反射波，两种透射波。这是标准的P波入射固体介质界面产生的反射透射波射线路径图。由于射线A和C对称分居于界面法线两侧，因此C为反射P波，根据Snell定律，并且P波速度大于SV波的速度，因此B为反射SV波。在第二种介质中出现了两种透射波，分别为透射P波和透射SV波。由于P波速度大于SV波速度，根据Snell定律，SV波的偏垂角应该小于P波的偏垂角，由于E射线的偏垂角小，该射线为SV波，另外一条射线D为P波。

4.3.9　SH 波垂直入射到固体界面的反射系数公式为 $\overset{\backslash}{S}\overset{/}{S}_{vert}=\dfrac{\rho_1\beta_1-\rho_2\beta_2}{\rho_1\beta_1+\rho_2\beta_2}$

由于反射波有 180 度的相位变化，并且反射波振幅为入射波振幅的 2%，因此 $\overset{\backslash}{S}\overset{/}{S}_{vert}$ 为 -0.02，将已知参数代入反射系数公式，采用 MATLAB 求解语句如下：

```
solve('4.8*2.4-2.0*x==-0.02*(4.8*2.4+2.0*x)')
```

得到下层介质的 S 波速度为 6.0km/s。

4.3.10　根据：$\overset{\backslash}{P}\overset{/}{P}_{vert}=-\dfrac{\rho_1\alpha_1-\rho_2\alpha_2}{\rho_1\alpha_1+\rho_2\alpha_2}$，将数据代入对于第一种情况，P 波势函数的反射系数为-(3*2200-4.1*2200)/(3*2200+4.1*2200)= 0.1549；对于第二种情况，P 波势函数的反射系数为-(6.8*2800-7.3*3200)/(6.8*2800+7.3*3200)= 0.1019；对于第三种情况，P 波势函数的反射系数为-(7.3*3200-8.1*3300)/(7.3*3200+8.1*3300)= 0.0673。

4.3.11　根据：$\overset{\backslash}{P}\overset{\backslash}{P}_{vert}=\dfrac{2\rho_1\alpha_1}{\rho_1\alpha_1+\rho_2\alpha_2}$，将数据代入对于第一种情况，P 波势函数的反射系数为 2*3*2200/(3*2200+4.1*2200)= 0.8457；对于第二种情况，P 波势函数的反射系数为 2*6.8*2800/(6.8*2800+7.3*3200)= 0.8981；对于第三种情况，P 波势函数的反射系数为 2*7.3*3200/(7.3*3200+8.1*3300)= 0.9327。

4.3.12　P 波垂直入射到固体界面的反射系数公式为 $\overset{\backslash}{P}\overset{/}{P}_{vert}=-\dfrac{\rho_1\alpha_1-\rho_2\alpha_2}{\rho_1\alpha_1+\rho_2\alpha_2}$

由于反射波有 180 度的相位变化，并且反射波振幅为入射波振幅的 2%，因此 $\overset{\backslash}{P}\overset{/}{P}_{vert}$ 为 -0.02，将已知参数代入反射系数公式，采用 MATLAB 求解语句如下：

```
solve('4.8*2.1-2.4*x==-0.02*(4.8*2.1+2.4*x)')
```

得到下层砂岩中的 P 波速度为 4.37km/s。

4.3.13　设入射 P 波沿 x 正方向，z 的正方向传播，并且入射面为 oxz 平面，则，入射 P 波的势函数可以写为

$$\varphi_{inc} = A_{inc} e^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_1 x+\cos i_1 z}{\alpha_1}\right)}$$

反射波的势函数可以写为

$$\varphi_{ref} = A_{ref} e^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_1 x-\cos i_1 z}{\alpha_1}\right)}$$

透射波的势函数为

$$\varphi_{\text{tran}} = A_{\text{tran}} e^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_2 x+\cos i_2 z}{\alpha_2}\right)}$$

入射波和反射波在液体分界面的邻域内的第一层液体中($z=0^-$)产生的垂向位移

$$u_z^1 = \frac{\partial\varphi_{inc}}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_{ref}}{\partial z} = \frac{-i\omega\cos i_1}{\alpha_1}\left(1-\frac{A_{ref}}{A_{inc}}\right)A_{inc} e^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_1 x}{\alpha_1}\right)}$$

透射波在液体分界面的邻域内的第二层液体中($z=0^+$)产生的垂向位移为

$$u_z^1 = \frac{\partial\varphi_{\text{tran}}}{\partial z} = \frac{-i\omega\cos i_2}{\alpha_2}\frac{A_{tran}}{A_{inc}}A_{inc} e^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_2 x}{\alpha_2}\right)}$$

根据 Snell 定律，$\sin i_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sin i_1$，因此第一层介质和第二层介质位移的指数部分一致。根据两侧位移相等的连续性条件有

$$\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\left(1-\frac{A_{ref}}{A_{inc}}\right) = \frac{\cos i_2}{\alpha_2}\frac{A_{tran}}{A_{inc}}$$

令 $\frac{A_{ref}}{A_{inc}} = R_{PP}, \frac{A_{tran}}{A_{inc}} = T_{PP}$，可以得到第一个方程

$$\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\left(1-\mathrm{R}_{PP}\right) = \frac{\cos i_2}{\alpha_2}T_{PP}$$

下面考虑应力边界条件，P 波势产生的应力分量

$$\sigma_{zz} = \lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

这里，液体中的剪切模量为 0，因此

$$\sigma_{zz} = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \lambda\frac{\omega^2}{\alpha^2}Ae^{i\omega\left(t-\frac{\sin ix+\cos iz}{\alpha}\right)}$$

设第一种液体的拉梅常数为 λ_1，第二种液体的拉梅常数为 λ_2，入射波和反射波在液体分界面的邻域内的第一层液体中产生的应力分量

$$\sigma_{zz}^{1}=\lambda_1\frac{\omega^2}{\alpha_1^2}\left(1+R_{PP}\right)A_{inc}e^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_1 x}{\alpha_1}\right)}$$

透射波在液体分界面的邻域内的第二层液体中产生的应力分量为

$$\sigma_{zz}^{2}=\lambda_2\frac{\omega^2}{\alpha_2^2}T_{PP}A_{inc}e^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_2 x}{\alpha_2}\right)}$$

同样，根据 Snell 定律，两种介质中应力中的指数部分一样，根据应力连续，得到

$$\frac{\lambda_1}{\alpha_1^2}\left(1+R_{PP}\right)=\frac{\lambda_2}{\alpha_2^2}T_{PP}$$

考虑到$\alpha=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}=\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}$，上式可以写为

$$\rho_1\left(1+R_{PP}\right)=\rho_2 T_{PP}$$

将该式与$\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\left(1-\mathrm{R}_{PP}\right)=\frac{\cos i_2}{\alpha_2}T_{PP}$联立求解得到

$$\begin{cases}\mathrm{R}_{PP}=\dfrac{\rho_2\alpha_2\cos i_1-\rho_1\alpha_1\cos i_2}{\rho_2\alpha_2\cos i_1+\rho_1\alpha_1\cos i_2}\\ T_{PP}=\dfrac{2\rho_1\alpha_2\cos i_1}{\rho_2\alpha_2\cos i_1+\rho_1\alpha_1\cos i_2}\end{cases}$$

这就是两种液体界面的 P 波的反射透射系数。

4.3.14　根据入射波势函数的表达式，可知该地震波的速度为 4km/s,并且地震波的传播方向为$\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$。根据地震波的传播方向与方位角和偏垂角的关系可知$\sin i_1\cos a_z=\frac{1}{\sqrt{6}},\sin i_1\sin a_z=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos i_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$，从而求得偏垂角 i_1 为 45 度，$\sin a_z=\sqrt{\frac{2}{3}},\ \cos a_z=\sqrt{\frac{1}{3}}$。将地震波入射方向转换为 ox’y’z’平面，需要按下面矩阵进行转换，则地震波在原来坐标系的传播方向为$\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$转换到 ox’y’z’坐标系

中为$\begin{pmatrix} \cos a_z & \sin a_z & 0 \\ -\sin a_z & \cos a_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$、

所以，入射波的势函数在 ox’y’z’坐标系中表示为

$$\varphi_{\text{inc}}=4e^{0.25i\left(4t-\frac{x'}{\sqrt{2}}-\frac{z'}{\sqrt{2}}\right)}$$

根据 Snell 定律，可以得到

$$\sin i_2=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sin i_1=\frac{2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}},\cos i_2=\sqrt{1-\sin^2 i_2}=\sqrt{\frac{7}{8}}$$

代入上题给出的反射系数计算可以得到

$$\mathrm{R}_{pp}=\frac{\rho_2\alpha_2\cos i_1-\rho_1\alpha_1\cos i_2}{\rho_2\alpha_2\cos i_1+\rho_1\alpha_1\cos i_2}=0.1150 \text{ 和 } T_{pp}=\frac{2\rho_1\alpha_2\cos i_1}{\rho_2\alpha_2\cos i_1+\rho_1\alpha_1\cos i_2}=0.8362$$

注意上面式子用 MATLAB 计算为

```
(4000*5/sqrt(2)-3000*4*sqrt(7/8))/(4000*5/sqrt(2)+3000*4*sqrt(7/8))
```

和

```
2*3000*5/sqrt(2)/(4000*5/sqrt(2)+3000*4*sqrt(7/8))
```

这样，反射 P 波的势在 ox’y’z’可表示为$\varphi_{\text{ref}}=0.46e^{0.25i\left(4t-\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{z'}{\sqrt{2}}\right)}$

透射 P 波的势在 ox’y’z’可表示为$\varphi_{\text{tran}}=3.3448e^{0.25i\left(5t-\frac{x'}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{7}z'}{\sqrt{8}}\right)}$

4.3.15 假定入射 P 波的方位角为a_z，入射角为i_1，则入射 P 波的传播方向为$(\cos a_z\sin i_1,\sin a_z\sin i_1,\cos i_1)$，则入射波的势可以表达为$\varphi=\mathrm{A}e^{i2\pi*3(\alpha t-\cos a_z\sin i_1x-\sin a_z\sin i_1y-\cos i_1z)}$，根据 P 波位移与势函数的关系有

$$u_x^P=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-iA6\pi\cos a_z\sin i_1e^{i6\pi(\alpha t-\cos a_z\sin i_1x-\sin a_z\sin i_1y-\cos i_1z)}=18\pi e^{i6\pi(\alpha t-\cos a_z\sin i_1x-\sin a_z\sin i_1y-\cos i_1z)}$$

$$u_y^P=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-iA6\pi\sin a_z\sin i_1e^{i6\pi(\alpha t-\cos a_z\sin i_1x-\sin a_z\sin i_1y-\cos i_1z)}=18\pi e^{i6\pi(\alpha t-\cos a_z\sin i_1x-\sin a_z\sin i_1y-\cos i_1z)}$$

$$u_z^P=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-iA6\pi\cos i_1e^{i6\pi(\alpha t-\cos a_z\sin i_1x-\sin a_z\sin i_1y-\cos i_1z)}=18\sqrt{6}\pi e^{i6\pi(\alpha t-\cos a_z\sin i_1x-\sin a_z\sin i_1y-\cos i_1z)}$$

从而可以求得$a_z=45^o,i_1=30^o,A=3$.

根据 $\mathbf{u}_t = \frac{6\sqrt{3}\pi}{a}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$ 可以得到，$\sin i_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \cos i_2 = \frac{2}{\sqrt{7}}$。

根据第一种介质的密度和体变模量，可以得到 $\alpha_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\rho_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

根据 Snell 定律，有 $\alpha_2 = \frac{\sin i_2}{\sin i_1}\alpha_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

根据透射势振幅为反射势振幅的两倍，则根据 4.3.13 题的结果，

$$\frac{T_{PP}}{\mathrm{R}_{PP}} = \frac{2\rho_1\alpha_2\cos i_1}{\rho_2\alpha_2\cos i_1 - \rho_1\alpha_1\cos i_2} = 2$$

则可以求得下层液体的密度 ρ_2，将其代入 4.3.13 题的结果，可得到反射和透射系数 R_{PP}，T_{PP}，这样入射波、反射波和透射波的势函数可以表达为

$$\varphi_{inc} = \mathrm{A}e^{i6\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$$

$$\varphi_{ref} = \mathrm{R}_{PP}\mathrm{A}e^{i6\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)}$$

$$\varphi_{tran} = \mathrm{T}_{PP}\mathrm{A}e^{i6\pi\left(\alpha_2 t - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}y - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}z\right)}$$

4.4.1 （1）位移连续：已知 SH 波只在 y 方向上有位移。所以位移在 y 方向上连续，u_y 连续

（2）应力连续：对于 SH 系统，$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu\frac{\partial u_y}{\partial z}$。

4.4.2 （1）位移表达式：

上行波：$u_y' = A'e^{i\omega(t - px + \eta z)}$

下行波：$u_y'' = A''e^{i\omega(t - px - \eta z)}$

（2）(0-0-1)应力表达式：

上行波：$\sigma_{zy}' = i\omega\mu_1\eta_1 A_1' e^{i\omega(t - px)}$

下行波：$\sigma_{zy}'' = -i\omega\mu_1\eta_1 A_1'' e^{i\omega(t - px)}$

4.4.3 $\mathbf{H}(z)=\begin{bmatrix} u_y \\ \sigma_{zy} \end{bmatrix}=\mathbf{f}(z)e^{i\omega(t-px)}$

，这里矢量 f 包含 Haskell 矩阵中的依赖于深度的部分。

$$\mathbf{f}(z)=\begin{bmatrix} \overset{\backslash}{S}e^{-i\omega\eta z}+\overset{/}{S}e^{i\omega\eta z} \\ -\overset{\backslash}{S}i\omega\mu\eta e^{-i\omega\eta z}+\overset{/}{S}i\omega\mu\eta e^{i\omega\eta z} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-i\omega\eta z} & e^{i\omega\eta z} \\ -i\omega\mu\eta e^{-i\omega\eta z} & i\omega\mu\eta e^{i\omega\eta z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overset{\backslash}{S} \\ \overset{/}{S} \end{bmatrix}$$

将 *SH* 下行波的位移振幅设为 $\overset{\backslash}{S}$，上行波的振幅设为 $\overset{/}{S}$。

4.4.4 $\mathbf{F}=\begin{bmatrix} e^{-i\omega\eta z} & e^{i\omega\eta z} \\ -i\omega\mu\eta e^{-i\omega\eta z} & i\omega\mu\eta e^{i\omega\eta z} \end{bmatrix}$，F 叫做均匀层介质的**层矩阵**，

4.4.5 $\mathbf{R}=\begin{bmatrix} \dfrac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2} & \dfrac{2\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2} \\ \dfrac{2\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2} & \dfrac{\mu_2\eta_2-\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2} \end{bmatrix}$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} \overset{\backslash}{S}\overset{/}{S} & \overset{/}{S}\overset{/}{S} \\ \overset{\backslash}{S}\overset{\backslash}{S} & \overset{/}{S}\overset{\backslash}{S} \end{bmatrix}$$

4.4.6 如果已知从震源出发的 Haskell 矩阵，就知道了 $\mathbf{H}(z)=\begin{bmatrix} u_y \\ \sigma_{zy} \end{bmatrix}=\mathbf{f}(z)e^{i\omega(t-px)}$ 式中的 f。在不同深度的均匀层中 f 通过 $\mathbf{F}=\begin{bmatrix} e^{-i\omega\eta z} & e^{i\omega\eta z} \\ -i\omega\mu\eta e^{-i\omega\eta z} & i\omega\mu\eta e^{i\omega\eta z} \end{bmatrix}$，$\mathbf{w}=\begin{bmatrix} \overset{\backslash}{S} \\ \overset{/}{S} \end{bmatrix}$ 式传播，通过物质分界面时 f 是相等的（可以通过反射透射系数矩阵进行计算振幅 w），这样通过一系列的层，我们可以把解向下（或向上）传播到平层介质的任何地方。

4.4.7 由于我们讨论的是平面波，并且不考虑衰减效应，所以其振幅（位移或势）在均匀介质中保持不变。因此在均匀层里，$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} e^{-i\omega\eta z} & e^{i\omega\eta z} \\ -i\omega\mu\eta e^{-i\omega\eta z} & i\omega\mu\eta e^{i\omega\eta z} \end{bmatrix}$，$\mathbf{w}=\begin{bmatrix} \overset{\backslash}{S} \\ \overset{/}{S} \end{bmatrix}$ 表示的振幅矩阵 w（包括上行波和下行波）是常数。则在深度为 z_1 的均匀层的顶部，

$$\mathbf{f}(z)=\begin{bmatrix} \overset{\backslash}{S}e^{-i\omega\eta z}+\overset{/}{S}e^{i\omega\eta z} \\ -\overset{\backslash}{S}i\omega\mu\eta e^{-i\omega\eta z}+\overset{/}{S}i\omega\mu\eta e^{i\omega\eta z} \end{bmatrix}$$

表示的矩阵为：

$$=\begin{bmatrix} e^{-i\omega\eta z} & e^{i\omega\eta z} \\ -i\omega\mu\eta e^{-i\omega\eta z} & i\omega\mu\eta e^{i\omega\eta z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overset{\backslash}{S} \\ \overset{/}{S} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(z_1)=\mathbf{F}_1\mathbf{w}$$

由此可以得到：

$$\mathbf{w}=\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{f}(z_1)$$

其中，

$$\mathbf{f}(z)=\begin{bmatrix} \overset{\backslash}{S}e^{-i\omega\eta z}+\overset{/}{S}e^{i\omega\eta z} \\ -\overset{\backslash}{S}i\omega\mu\eta e^{-i\omega\eta z}+\overset{/}{S}i\omega\mu\eta e^{i\omega\eta z} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-i\omega\eta z} & e^{i\omega\eta z} \\ -i\omega\mu\eta e^{-i\omega\eta z} & i\omega\mu\eta e^{i\omega\eta z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overset{\backslash}{S} \\ \overset{/}{S} \end{bmatrix}$$

在深度 z_2 的均匀层的底部，表示的矩阵为：

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_2)&=\mathbf{F}_2\mathbf{w} \\ &=\mathbf{F}_2\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{f}(z_1) \qquad \text{代入（4-4-16）} \\ &=\mathbf{E}\Lambda_2(\mathbf{E}\Lambda_1)^{-1}\mathbf{f}(z_1)=\mathbf{E}\Lambda_2\Lambda_1^{-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{f}(z_1) \\ &=\mathbf{E}\begin{bmatrix} e^{i\omega\eta(z_1-z_2)} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega\eta(z_1-z_2)} \end{bmatrix}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{f}(z_1) \end{aligned}$$

上面推到需要注意：$\mathbf{(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}}$。

我们定义 $\mathbf{P}(z_1,z_2)=\mathbf{E}\begin{bmatrix} e^{i\omega\eta(z_1-z_2)} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega\eta(z_1-z_2)} \end{bmatrix}\mathbf{E}^{-1}$，则 $\mathbf{f}(z_2)=\mathbf{P}(z_1,z_2)\mathbf{f}(z_1)$。矩阵 P 把解从 z_1 传播到 z_2，所以 P 被叫做**传播因子矩阵.**

第五章

5.1.1　依据题意可设地壳厚度为 H，取 x, y 在自由表面上（z=0），z 轴垂直向下，令层中横波速度为β_1，密度为ρ_1，令半空间（地幔）中横波速度为β_2，密度为ρ_2，且有$\beta_1<\beta_2$，设 SH 波在上覆弹性层（地壳）中的位移为u_{y1}，在下面的半空间（地幔）中的位移为u_{y2}。由于考虑的是 SH 型面波，因此振动应垂直于 x 轴且平行于分界面，即振动应沿 y 方向，根据

$$u_y=\frac{\partial\psi_x}{\partial z}-\frac{\partial\psi_z}{\partial x}=Ai\omega\frac{\cos i_s}{\beta}e^{i\omega\left(t-px+\frac{\cos i_s}{\beta}z\right)}+Bi\omega pe^{i\omega\left(t-px+\frac{\cos i_s}{\beta}z\right)}$$

$$=i\omega\left(A\frac{\cos i_s}{\beta}+Bp\right)e^{i\omega\left(t-px+\frac{\cos i_s}{\beta}z\right)}=He^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_s}{\beta}x+\frac{\cos i_s}{\beta}z\right)}$$

可以给出沿 x 正向传播的 SH 波的位移表达式为$u_y=Ee^{i\omega\left(t-\frac{\sin i_s}{\beta}x\pm\frac{\cos i_s}{\beta}z\right)}$。令$\phi(z)=Ee^{i\omega\left(\pm\frac{\cos i_s}{\beta}z\right)}$，$\frac{\sin i_s}{\beta}$为水平方向的慢度，与角频率$\omega$的乘积为沿 x 轴的波数$k_x$，这样上覆弹性层的 SH 波的位移表达式可写为$u_{y1}=\phi(z)e^{i(\omega t-k_x x)}$。因此 SH 波的位移在地壳和地幔中的位移$u_{y1},u_{y2}$均满足$\rho\frac{\partial^2u_y}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\mu\nabla^2u_y+f_y$不考虑体力的表达式，我们统一写为$u_y$，则$\frac{\partial^2u_y}{\partial x^2}=-k_x^2\phi(z)e^{i(\omega t-k_x x)}$，$\frac{\partial^2u_y}{\partial y^2}=0$，$\frac{\partial^2u_y}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\phi(z)}{\partial z^2}e^{i(\omega t-k_x x)}$，这样可以得到$\nabla^2u_y=\frac{\partial^2u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u_y}{\partial z^2}=-\left(k_x^2-\frac{\partial^2\phi(z)}{\partial z^2}\right)e^{i(\omega t-k_x x)}$。对时间的二阶导数为$\frac{\partial^2u_y}{\partial t^2}=-\omega^2e^{i(\omega t-k_x x)}$，考虑到$\beta=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$，（3-2-3b）可以表达为：

$$\frac{d^2\phi(z)}{dz^2}-\left(k_x^2-\frac{\omega^2}{\beta_1^2}\right)\phi(z)=0$$

这就是 SH 波所满足的波动方程。

5.1.2 研究 SH 波时，自由表面的边界条件是

$$\sigma_{zy}\Big|_{z=0}=2\mu_1e_{zy}\Big|_{z=0}=2\mu_1\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{y1}}{\partial z}+\frac{\partial u_{z1}}{\partial y}\right)\Bigg|_{z=0}=\mu_1\frac{\partial u_{y1}}{\partial z}\Bigg|_{z=0}=0$$

在上覆弹性层与半空间地幔的层面的连续性条件为位移和应力连续，有

$$\begin{cases} u_{y1}\Big|_{z=H^-} = u_{y2}\Big|_{z=H^+} \\ \mu_1 \dfrac{\partial u_{y1}}{\partial z}\Big|_{z=H^-} = \mu_2 \dfrac{\partial u_{y2}}{\partial z}\Big|_{z=H^+} \end{cases}$$

5.1.3　当 b_1, b_2 都为实数时，由于 $\mu_1 b_1$ 和 $\mu_2 b_2$ 为正值，方程右边为负数，而 $\mu_1 b_1$ 为正值，在正的 x 的范围内找不到函数值对应于负数的情况，因此这种情况下方程无解。当 $\mu_1 b_1$ 和 $\mu_2 b_2$ 均为虚数时，方程右边为实数，而 $\tanh(\mu_1 b_1)$ 为虚数（采用欧拉公式 $e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$ 可以验证），也不满足方程。因此只有 $\mu_1 b_1$ 和 $\mu_2 b_2$ 其中之一为虚数。

考察 b_1, b_2 的表达式 $b_1 = \sqrt{k_x^2 - \left(\dfrac{\omega}{\beta_1}\right)^2}, b_2 = \sqrt{k_x^2 - \left(\dfrac{\omega}{\beta_2}\right)^2}$，并且在实际地球介质中地壳 S 波速度小于地幔 S 波速度，即 $\beta_1 < \beta_2$，只有 $\mu_1 b_1$ 为虚数，而 $\mu_2 b_2$ 为实数时才可能满足方程。

5.1.4　令 $b_1 = i\bar{b}_1$，$\dfrac{e^{b_1 \mathrm{H}} - e^{-b_1 \mathrm{H}}}{e^{b_1 H} + e^{-b_1 H}} = -\dfrac{\mu_2 b_2}{\mu_1 b_1}$ 可以表达为：

$$\frac{e^{i\bar{b}_1 H} - e^{-i\bar{b}_1 \mathrm{H}}}{e^{i\bar{b}_1 H} + e^{-i\bar{b}_1 H}} = -\frac{\mu_2 b_2}{i\mu_1 \bar{b}_1}$$

采用欧拉公式将上式左边展开，化简得到

$$\tan\left(\bar{b}_1 \mathrm{H}\right) = \frac{\mu_2 b_2}{\mu_1 \bar{b}_1}$$

将 $b_1 = \sqrt{k_x^2 - \left(\dfrac{\omega}{\beta_1}\right)^2}, b_2 = \sqrt{k_x^2 - \left(\dfrac{\omega}{\beta_2}\right)^2}$ 代入上式，并考虑波数 $k_x = \dfrac{\omega}{c}$（c 为该波沿着 x 方向传播的速度）和正切函数的周期性，可以得到方程 $\begin{cases} A\left(e^{b_1 H} + e^{-b_1 H}\right) - Ce^{-b_2 \mathrm{H}} = 0 \\ A\mu_1 b_1\left(e^{b_1 H} - e^{-b_1 H}\right) + \mu_2 b_2 C e^{-b_2 H} = 0 \end{cases}$

有非零解的条件为：$\tan\left[H\omega\sqrt{1/\beta_1^2 - 1/c^2} - n\pi\right] = \dfrac{\mu_2\sqrt{1/c^2 - 1/\beta_2^2}}{\mu_1\sqrt{1/\beta_1^2 - 1/c^2}}$

5.1.5　在 $\tan\left[H\omega\sqrt{1/\beta_1^2 - 1/c^2} - n\pi\right] = \dfrac{\mu_2\sqrt{1/c^2 - 1/\beta_2^2}}{\mu_1\sqrt{1/\beta_1^2 - 1/c^2}}$ 中，由于正切函数的周期性，对每个 c 值，有多个 ω 值。每个 ω 对应着一种振型，当 n=0 时，根据波动方程求出的振荡振型称为基阶 Love 波（fundamental mode），n=n 时求出的振型称为 n 阶 Love 波(overtone)。

5.1.6　通常情况下低频的波具有较高的相速度，而高频的波具有较低的相速度。

5.1.7　在远处的地震台站首先观测到低频的面波，后面频率逐渐增高，这种现象称为面波的频散(dispersion)。

5.1.8　由频散方程 $\tan\left[H\omega\sqrt{1/\beta_1^2-1/c^2}-n\pi\right]=\dfrac{\mu_2\sqrt{1/c^2-1/\beta_2^2}}{\mu_1\sqrt{1/\beta_1^2-1/c^2}}$ 可以推出角频率 ω 的表达式为：$\omega=\dfrac{c}{\mathrm{H}\sqrt{c^2/\beta_1^2-1}}\left(\arctan\dfrac{\mu_2\sqrt{1-c^2/\beta_2^2}}{\mu_1\sqrt{c^2/\beta_1^2-1}}+n\pi\right),n=0,1,2\cdots$ 由于波数 $k_x=\dfrac{\omega}{c}$，将上式两边除以 c 得到波数的表达式，并考虑 $k_x=\dfrac{2\pi}{\Lambda}$，可以得到：

$\Lambda=\dfrac{2\pi H\sqrt{c^2/\beta_1^2-1}}{\arctan\dfrac{\mu_2\sqrt{1-c^2/\beta_2^2}}{\mu_1\sqrt{c^2/\beta_1^2-1}}+n\pi},n=0,1,2\cdots$。对 n=0 的基阶 Love 波，当 $c=\beta_2$ 时，上式分子为零，有 $\omega\to 0$，此时没有截止频率。

5.1.9　对 n 阶 Love 波，当 $c=\beta_2$ 时，代入

$\omega=\dfrac{c}{\mathrm{H}\sqrt{c^2/\beta_1^2-1}}\left(\arctan\dfrac{\mu_2\sqrt{1-c^2/\beta_2^2}}{\mu_1\sqrt{c^2/\beta_1^2-1}}+n\pi\right),n=0,1,2\cdots$，得到频率的最小值

$\omega_c=\dfrac{n\pi}{H\sqrt{\dfrac{1}{\beta_1^2}-\dfrac{1}{\beta_2^2}}}$ 代入 $\Lambda=\dfrac{2\pi H\sqrt{c^2/\beta_1^2-1}}{\arctan\dfrac{\mu_2\sqrt{1-c^2/\beta_2^2}}{\mu_1\sqrt{c^2/\beta_1^2-1}}+n\pi},n=0,1,2\cdots$ 得到波长的最大值：

$\Lambda_c=\dfrac{2H\sqrt{\dfrac{\beta_2^2}{\beta_1^2}-1}}{n}$ 这就是 n 阶 Love 波的最低频率和最长波长。由上面两式，可以得出截止频率与地壳厚度呈反比，而最大波长与地壳厚度呈正比。

5.1.10　地壳中的 Love 波振幅为 $2A\cos\left[(g+n\pi)\dfrac{z}{H}\right]$，令 $\cos\left[(g+n\pi)\dfrac{z}{H}\right]=0$，即

$(g+n\pi)\dfrac{z}{H}=m\pi+\dfrac{\pi}{2}$，有 $z=\dfrac{m\pi+\dfrac{\pi}{2}}{n\pi+g}H$，在此深度上，Love 波的振幅为零。由于

$g=\arctan\dfrac{\mu_2\sqrt{1-\dfrac{c^2}{\beta_2^2}}}{\mu_1\sqrt{\dfrac{c^2}{\beta_1^2}-1}}$ 在 $0\sim\dfrac{\pi}{2}$ 之间，则节点的深度为 $z=\dfrac{\dfrac{\pi}{2}}{g}H\geq H$，因此基阶 Love 波在地壳层中无节点

5.1.11　对于一阶 Love 波，$z=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\pi+g}H$ 为零点，因此该类波在地壳层中有一个节点。对于二阶 Love 波，$z_1=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2\pi+g}H, z_2=\dfrac{\frac{3\pi}{2}}{2\pi+g}H$，因此该类波在地壳层中有二个节点。在地壳中，$\beta_1=3.6km/s, \beta_2=4.6km/s, \dfrac{\mu_2}{\mu_1}=1.8,$ 地壳厚度为 30km。代入

$g=\arctan\dfrac{\mu_2\sqrt{1-\dfrac{c^2}{\beta_2^2}}}{\mu_1\sqrt{\dfrac{c^2}{\beta_1^2}-1}}$，得到，一阶 Love 波的节点深度为 11.1847km；二阶 Love 波的节点深度为 6.4075km 和 19.2219km。

5.1.12　相速度的范围是地壳剪切波速度至地幔剪切波速度。

5.1.13　（1）根据 2 阶 Love 波的截止频率公式，有

$$\omega_c=\frac{2\pi}{H\sqrt{\dfrac{1}{\beta_1^2}-\dfrac{1}{\beta_2^2}}}, f_c=\frac{1}{H\sqrt{\dfrac{1}{\beta_1^2}-\dfrac{1}{\beta_2^2}}}=\frac{1}{40\sqrt{\dfrac{1}{3.5^2}-\dfrac{1}{4.5^2}}}=0.1392(Hz)$$

根据 2 阶 Love 波的最长公式，有

$$\Lambda_c=\frac{2H\sqrt{\dfrac{\beta_2^2}{\beta_1^2}-1}}{2}=H\sqrt{\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2}-1}=40\sqrt{\frac{4.5^2}{3.5^2}-1}=32.3249(\text{km})$$

（2）根据已知参数可得：

$$g=\arctan\frac{\mu_2\sqrt{1-\dfrac{c^2}{\beta_2^2}}}{\mu_1\sqrt{\dfrac{c^2}{\beta_1^2}-1}}=\arctan\frac{\rho_2\beta_2^2\sqrt{1-\dfrac{c^2}{\beta_2^2}}}{\rho_1\beta_1^2\sqrt{\dfrac{c^2}{\beta_1^2}-1}}=\arctan\frac{3.3\times4.5^2\sqrt{1-\dfrac{4^2}{4.5^2}}}{2.7\times3.5^2\sqrt{\dfrac{4^2}{3.5^2}-1}}=1.032$$

根据 3 阶 Love 波，节点深度公式为：

$$z_1=\frac{\frac{\pi}{2}}{3\pi+g}H=6.0(\text{km})$$

$$z_2=\frac{\frac{3\pi}{2}}{3\pi+g}H=18.0(\text{km})$$

$$z_3=\frac{\frac{5\pi}{2}}{3\pi+g}H=30.0(\text{km})$$

5.1.14 （1）Love 波的基阶频散方程为

$$\tan\left[h\omega\sqrt{1/\beta_1^2-1/c^2}\right]=\frac{\mu_2\sqrt{1/c^2-1/\beta_2^2}}{\mu_1\sqrt{1/\beta_1^2-1/c^2}}$$

对于本研究，$\mu=4\mu'$，$\rho=\rho'$，可以得到$\beta_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$，$\beta_1=\frac{\beta_2}{2}$，并且写成上面方程的形式符号表示有$\mu_2=4\mu_1$。考虑$a=\frac{c}{\beta},b=\frac{H}{\Lambda}$可以得到

$$\tan\left[2\pi b\sqrt{4a^2-1}\right]=4\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{4a^2-1}}$$

(2)对于基阶：

当 a=1 时，b=0，$c=\beta_2$

当 a=0.5 时，$b\to\infty,c=\beta_1$

当 a=0.75 时，$\tan\left[2\pi b\sqrt{4\frac{9}{16}-1}\right]=4\frac{\sqrt{1-\frac{9}{16}}}{\sqrt{4\frac{9}{16}-1}}\Rightarrow b=0.17\ b\to\infty,c=\beta_1$

对于 1 阶 Love 波

当 a=0.5 时，$b\to\infty$

当 a=1 时，$\tan\left[2\pi b\sqrt{4a^2-1}\right]=0\Rightarrow 2\pi b\sqrt{3}=\pi\Rightarrow b=\frac{1}{2\sqrt{3}}=0.29$

当 a=0.75 时，

$$\tan\left[2\pi b\sqrt{4\frac{9}{16}-1}\right]=4\sqrt{\frac{7}{20}}\Rightarrow 2\pi b\sqrt{5}=\arctan\left(4\sqrt{\frac{7}{20}}\right)+\pi\Rightarrow b=0.61$$

(3)根据(5-1-21)式，1 阶 Love 波的$u_{y1}=2A\cos\left[(g+\pi)\frac{z}{h}\right]e^{i(\omega t-k_x x)}$，可以得到节点处的$(g+\pi)2=\frac{\pi}{2}$，可以得到$b=\frac{3}{2\sqrt{4a^2-1}}$，将 1 阶 Love 波的 a=0.5 时，b 为无穷；a=1 时，b=0.86, a=0.75 时，b=1.34，当取这些值时在地壳深度中点的 1 阶 Love 波的振幅为零。

5.1.15 （1）根据 1 阶 Love 波的最长波长公式有

$$\Lambda_c=\frac{2H\sqrt{\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2}-1}}{1}=2H\sqrt{\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2}-1}=2\sqrt{3}H$$

（2）根据已知参数可得：

$$g=\arctan\frac{\mu_2\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta_2^2}}}{\mu_1\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2}-1}}=\arctan\frac{\mu\sqrt{1-\frac{\left(\frac{3}{4}\beta\right)^2}{\beta^2}}}{\frac{3}{4}\mu\sqrt{\frac{\left(\frac{3}{4}\beta\right)^2}{(\beta/2)^2}-1}}=\arctan\frac{\sqrt{1-\frac{9}{16}}}{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{9}{4}-1}}=0.7888$$

根据 2 阶 Love 波，振幅为零的节点深度为：

$$z_1=\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi+g}H=0.2221\mathrm{H}$$

$$z_2=\frac{\frac{3\pi}{2}}{2\pi+g}H=0.6663H$$

5.1.16　根据1阶Love波的截止频率计算公式有：

$$\omega_c=\frac{\pi}{H\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2}-\frac{1}{\beta_2^2}}}$$

最大周期为 $\mathrm{T}_c=\frac{H\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2}-\frac{1}{\beta_2^2}}}{2}=\frac{30\sqrt{\frac{1}{3.6^2}-\frac{1}{4.5^2}}}{2}=2.5(\mathrm{s})$

。

由于 Love 波的速度介于地壳剪切波速度和地幔剪切波速度之间，所以速度最大的 Love 波为地幔剪切波速，即 4.5km/s，这样可以求得震中距为 900km 的台站的最短走时为 200s。

此处给出的其他参数均为干扰项。

5.1.17 假定地震波传播水平方向为 x，向下为 z，z=0 为地表自由面，z=H 为弹性介质和刚性介质分界深度，则根据教材中的分析，弹性层中的 SH 型波的位移具有以下形式

$$u_y=\left(Ae^{z\sqrt{k_x^2-\frac{\omega^2}{\beta^2}}}+Be^{-z\sqrt{k_x^2-\frac{\omega^2}{\beta^2}}}\right)e^{i(\omega t-k_x x)}$$

其中，β 为 S 波速度。

SH 波的边界条件为:(1)自由表面应力为零，即 $\sigma_{zy}\big|_{z=0}=0$，根据广义胡克定律，可以得到

$$\sigma_{zy}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)=\mu\frac{\partial u_y}{\partial z}=0\big|_{z=0}$$

可以得到$\sqrt{k_x^2-\frac{\omega^2}{\beta^2}}\left(A\text{-}B\right)=0\Rightarrow A=B$。

(2)下面为刚性半空间介质，因此在弹性层中的底界，位移为零，即$u_y\big|_{z=H}=0$，将上面u_y表达式代入可得：$Ae^{H\sqrt{k_x^2-\frac{\omega^2}{\beta^2}}}+Be^{-H\sqrt{k_x^2-\frac{\omega^2}{\beta^2}}}=0$

由于 A=B，得到

$$A\left(e^{H\sqrt{k_x^2-\frac{\omega^2}{\beta^2}}}+e^{-H\sqrt{k_x^2-\frac{\omega^2}{\beta^2}}}\right)=0$$

要使 A 不为零，则必使括号中的式子为零。若$\sqrt{k_x^2-\frac{\omega^2}{\beta^2}}$为实数，不能满足括号中的式子为零的条件。因此，令其为虚数，这样括号中的式子为

$$e^{iH\sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2}-k_x^2}}+e^{-iH\sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2}-k_x^2}}=2\cos\left(H\sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2}-k_x^2}\right)=2\cos\left(H\omega\sqrt{\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{c^2}}\right)$$

上式为零的条件为

$$H\omega\sqrt{\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{c^2}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

这就是通道波的频散方程。这里 n 为整数，n=0 为基阶振型，n=1 为 1 阶振型，以此类推。可见$\omega_c=\frac{(n+1)\pi\beta}{2H}$为其截止频率。

5.2.1 位移：

$$u_x^p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-ikAe^{-zk_\alpha}e^{i(\omega t-kx)}$$

$$u_z^p=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-k_\alpha Ae^{-zk_\alpha}e^{i(\omega t-kx)}$$

$$u_x^{SV}=k_\beta Ce^{-zk_\beta}e^{i(\omega t-kx)}$$

$$u_z^{SV}=-ikCe^{-zk_\beta}e^{i(\omega t-kx)}$$

应力：

$$\sigma_{zx}^p=A(i2\mu kk_\alpha)e^{-zk_\alpha}e^{i(\omega t-kx)}$$

$$\sigma_{zz}^p=A\left[\left(\lambda+2\mu\right)k_\alpha^2-\lambda k^2\right]e^{-zk_\alpha}e^{i(\omega t-kx)}$$

$$\sigma_{zx}^{SV}=-C\mu(k^2+k_\beta^2)e^{-zk_\beta}e^{i(\omega t-kx)}$$

$$\sigma_{zz}^{SV}=C\left[i2\mu kk_\beta\right]e^{-zk_\beta}e^{i(\omega t-kx)}$$

但在自由表面应力的各个分量之和必为零。

5.2.2 $\sigma_{zx}\big|_{z=0}=\sigma_{zx}^P+\sigma_{zx}^{SV}=0$

$\sigma_{zz}\big|_{z=0}=\sigma_{zz}^{P}+\sigma_{zz}^{SV}=0$

5.2.3 由 P 波、SV 波在地球自由表面上相应的应力和位移分量为零可以得到

$$\begin{cases} A(i2kk_\alpha)-C(k^2+k_\beta^2)=0 \\ A\left[\left(\lambda+2\mu\right)k_\alpha^2-\lambda k^2\right]+C\left(-i2\mu kk_\beta\right)=0 \end{cases}$$

将 $\lambda+2\mu=\rho\alpha^2$， $\mu=\rho\beta^2$ 和 $\lambda=\rho(\alpha^2-2\beta^2)$ 代入上式，得到：

$$\begin{cases} A(i2kk_\alpha)-C(k^2+k_\beta^2)=0 \\ A\left[2k^2-\dfrac{\omega^2}{\beta^2}\right]+C\left(i2kk_\beta\right)=0 \end{cases}$$

该方程描述了 P 波和 SV 波的自由表面边界条件。只有当行列式为零时，上式给出的 A 和 C 的线性系统方程才具有有意义的解，即当：

$$4k^2k_\alpha k_\beta-\left(2k^2-\frac{\omega^2}{\beta^2}\right)(k^2+k_\beta^2)=0$$

把 k_α 和 k_β 的表达式代入上式，可得：

$$(2-\frac{c^2}{\beta^2})^2=4(1-\frac{c^2}{\alpha^2})^{1/2}(1-\frac{c^2}{\beta^2})^{1/2}$$

这方程叫做 Rayleigh 方程

5.2.4 Rayleigh 波的相速度为剪切波速度的关系为 $(2-\frac{c^2}{\beta^2})^2=4(1-\frac{c^2}{\alpha^2})^{1/2}(1-\frac{c^2}{\beta^2})^{1/2}$，

由此得到是剪切波速度的 0.9194 倍。

5.2.5 在地球内部：$\begin{cases} u_x=Ak\left(e^{-0.8475kz}-0.5773e^{-0.3933kz}\right)\sin\left(\omega t-kx\right) \\ u_z=Ak\left(-0.8475e^{-0.8475kz}+1.4679e^{-0.3933kz}\right)\cos\left(\omega t-kx\right) \end{cases}$

在地表：$\begin{cases} u_x\big|_{z=0}=0.4227D\sin\left(\omega t-kx\right) \\ u_z\big|_{z=0}=0.6204D\cos\left(\omega t-kx\right) \end{cases}$

5.2.6 由 Rayleigh 的位移方程且 $D=Ak$ 可得：$\left(\dfrac{u_x\big|_{z=0}}{0.4227D}\right)^2+\left(\dfrac{u_z\big|_{z=0}}{0.6204D}\right)^2=1$，为椭圆方程式。椭圆的水平轴和垂直轴的比值约为 2/3，且质点的垂直位移比水平位移超前 $\frac{\pi}{2}$，我们研究 x=0 处的质点运动状态（图 5-2-1），当 t=0 时 $u_x=0,u_z=0.6204D$；当 $t=\dfrac{\pi/2}{\omega}$ 时，$u_x=0.4227D,u_z=0$ ； 当 $t=\dfrac{\pi}{\omega}$ 时， $u_x=0,u_z=-0.6204D$ ； 当 $t=\dfrac{3\pi/2}{\omega}$ 时，$u_x=-0.4227D,u_z=0$；当 $t=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 时，$u_x=0,u_z=0.6204D$，质点运动轨迹正好是一个

逆进椭圆，表明 Rayleigh 波在传播过程中引起地表介质的质点做逆椭圆运动。并由此可判断水平轴和垂直轴的比值为 2/3。

5.2.7　在地表面，Rayleigh 波的质点运动是逆时针的，在大约 $\frac{\lambda}{5}$ 的深度，Rayleigh 波的质点运动为纯垂直运动，在更大的深度上 Rayleigh 波的质点为顺时针运动。

Rayleigh 波由逆进椭圆转变为顺进椭圆的条件是位移的横向分量 $u_x = Ak\left(e^{-0.8475kz} - 0.5773e^{-0.3933kz}\right)\sin\left(\omega t - kx\right)$ 的振幅 $Ak\left(e^{-0.8475kz} - 0.5773e^{-0.3933kz}\right)$ 为零。

5.2.8 为求 Rayleigh 方程的根，我们将两边平方：

$$\frac{c^2}{\beta^2}\left[\frac{c^6}{\beta^6} - 8\frac{c^4}{\beta^4} + c^2\left(\frac{24}{\beta^2} - \frac{16}{\alpha^2}\right) - 16\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\right] = 0$$

由上式可见，$c = 0$ 是方程的解，但这个解是没有意义的，因为根据 φ 和 ψ 的时间空间因子 $e^{i\omega(t-px-\eta_\alpha z)} = e^{ikc(t-px-\eta_\alpha z)}$ 为常数，是不振动的。

对泊松固体，$\lambda = \mu$，可得 $\alpha = \sqrt{3}\beta$，上面的方程为：

$$\frac{c^6}{\beta^6} - 8\frac{c^4}{\beta^4} + \frac{56}{3}\frac{c^2}{\beta^2} - \frac{32}{3} = 0$$

对其进行因式分解得：

$$\left(\frac{c^2}{\beta^2} - 4\right)\left[\frac{c^2}{\beta^2} - \left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right]\left[\frac{c^2}{\beta^2} - \left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right] = 0$$

得到方程有三个根：$\frac{c^2}{\beta^2} = 4, \left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$。因为 $(1 - \frac{c^2}{\beta^2})^{1/2}$ 必须取正值，因此前两个根都不符合要求。只有最小的根 $\left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 满足要求。此时

$$c = 0.9194\beta$$

5.2.9　1）对于 Possion 介质，$\alpha = \beta\sqrt{3}$，$\beta = \frac{6}{\sqrt{3}}$，对于半空间的 Rayleigh 波，

$C_R = 0.919\beta = 3.2\text{kr}$。

（2）该 Rayleigh 波的波数为 k=2*pi/20/3.2=0.0982。

水平分量为零的深度为质点运动由逆进椭圆转换为顺进椭圆的点，根据 $\begin{cases} u_x = Ak\left(e^{-0.8475kz} - 0.5773e^{-0.3933kz}\right)\sin\left(\omega t - kx\right) \\ u_z = Ak\left(-0.8475e^{-0.8475kz} + 1.4679e^{-0.3933kz}\right)\cos\left(\omega t - kx\right) \end{cases}$，求解水平分量为零的点的方程

为

$$k\left(e^{-0.8475kz}-0.5773e^{-0.3933kz}\right)=0$$

可得到 z=12.3km 为水平振动振幅变换的转换点，为由上部的逆进椭圆转换为下部顺进椭圆的转换点。

5.2.10 （1）对于 Possion 介质，$\alpha=\beta\sqrt{3}$，$\beta=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$，对于半空间的 Rayleigh 波，

$C_R=0.9194\times\dfrac{5}{\sqrt{3}}=2.6541$ km/s。根据（5-2-25）的水平分量为零，有

$$\left(e^{-0.8475kz}-0.5773e^{-0.3933kz}\right)=\left(e^{-0.8475\times\frac{2\pi f}{2.6541}\times 20}-0.5773e^{-0.3933\times\frac{2\pi f}{2.6541}\times 20}\right)=0$$

$$e^{-0.4542\times\frac{2\pi f}{2.6541}\times 20}=e^{-21.505f}=0.5773\Rightarrow f=-\frac{\ln 0.5773}{21.505}=0.0255Hz$$

Rayleigh 的波长可以表示为 $\Lambda=cT=\dfrac{c}{f}=\dfrac{2.6541}{0.0255}=104.1km$

5.2.11 判断:(1)错误(应加均匀)　(2)错误(只有 Possion 介质才是这种情况)　(3)错误（只有地表才有此比值，深部不是这样）

5.2.12 两层液体介质的 P 波势函数满足

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha_1^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha_2^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}$$

令 $\varphi_1=f(z)e^{i(\omega t-kx)},\varphi_2=g(z)e^{i(\omega t-kx)}$ 代入上面的方程，并考虑下层液体中深度无穷大时有限，则得到：

$$\varphi_1=\left(Ae^{b_1z}+Be^{-b_1z}\right)e^{i(\omega t-kx)},\quad (0<z<h)$$

$$\varphi_2=Ce^{-b_2z}e^{i(\omega t-kx)}\quad (z>h)$$

其中，$b_1=\sqrt{k^2-\left(\dfrac{\omega}{\alpha_1}\right)^2},b_2=\sqrt{k^2-\left(\dfrac{\omega}{\alpha_2}\right)^2}$

根据自由面边条件, z=0 时压力 $p=-\lambda\theta=-\rho_1\dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}=\rho_1\varphi_1\omega^2=0$ 有 A=-B.

在 z=h 处，位移连续性条件：$u_z^1=u_z^2$，得到：　$\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}=\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}$

应力连续性条件：$p^1=p^2$，得到：$\rho_1\varphi_1=\rho_2\varphi_2$

将上边的式子代入得：

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \rho_1\left(Ae^{b_1h}+Be^{-b_1h}\right)=C\rho_2e^{-b_2h} \\ b_1\left(Ae^{b_1h}-Be^{-b_1h}\right)=-b_2Ce^{-b_2h} \end{cases}$$

消去 B 得：

$$\begin{cases} A\rho_1\left(e^{b_1h}-e^{-b_1h}\right)-C\rho_2e^{-b_2h}=0 \\ Ab_1\left(e^{b_1h}+e^{-b_1h}\right)+b_2Ce^{-b_2h}=0 \end{cases}$$

系数行列式 $\begin{vmatrix} \rho_1\left(e^{b_1h}-e^{-b_1h}\right) & -\rho_2e^{-b_2h} \\ b_1\left(e^{b_1h}+e^{-b_1h}\right) & b_2e^{-b_2h} \end{vmatrix}=0$，该方程有非零解。得到

$$\frac{e^{b_1h}-e^{-b_1h}}{e^{b_1h}+e^{-b_1h}}=-\frac{\rho_2b_1}{\rho_1b_2}$$

只有 b_1 为虚数时有解，得到：

$$\tan\left[h\omega\sqrt{1/\alpha_1^2-p^2}-n\pi\right]=\frac{\rho_2\sqrt{1/\alpha_1^2-p^2}}{\rho_1\sqrt{p^2-1/\alpha_2^2}}$$

问题得证。

5.2.13 由于地球介质为均匀Possion介质，则地表传播的Rayleigh波速度为0.9194*S波速度，因此，Rayleigh的波速为3.2179km/s，震中距为900km的台站的走时为279.69s。

5.2.14

假定波的传播方向的水平向为x，向下为z，根据教材中(5-2-1)和(5-2-4)式，可以知道，液体层中传播的波的势函数为

$$\varphi=\left(Ae^{-z\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}+Be^{z\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}\right)e^{i(\omega t-kx)}$$

题目所述情形的边界条件为

地表(z=0)自由，即 $\sigma_{zz}\big|_{z=0}=0$。

将势函数的表达式代入 σ_{zz} 的表达式有

$$\sigma_{zz}=\lambda\Theta+\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}=\lambda\Theta=\lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=\lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)$$

$$=\lambda\left(-k^2+\left(k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}\right)\right)\left(Ae^{-z\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}+Be^{z\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}\right)e^{i(\omega t-kx)}$$

$$=-\frac{\lambda\omega^2}{\alpha^2}\left(Ae^{-z\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}+Be^{z\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}\right)e^{i(\omega t-kx)}$$

根据 $\sigma_{zz}\big|_{z=0}=0$ 可知，A=-B。

在液体和刚性介质分界面上(z=H)，垂直向位移为零，即 $u_z\big|_{z=H}=0$ 。

将势函数表达式代入得到

$$u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\left(-A\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}e^{-z\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}+B\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}e^{z\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}\right)e^{i(\omega t-kx)}$$

由边界条件 $u_z\big|_{z=H}=0$ ，得到

$$-Ae^{-H\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}+Be^{H\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}=0$$

将前面得到的A=-B代入，可得到

$$B\left(e^{-H\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}+e^{H\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}\right)=0$$

这样，只有括号里的表达式为零，才使得求解的波有意义。要使括号里的表达式为零，指数部分必须为虚数。我们将括号中的表达式写为：

$$e^{-H\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}+e^{H\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}=e^{-iH\omega\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{c^2}}}+e^{iH\omega\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{c^2}}}=2\cos\left(H\omega\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{c^2}}\right)$$

因此有：$H\omega\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{c^2}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ ， $\omega=\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{H\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{c^2}}}$

这说明频率不同，波的传播速度c就不同。n=0对应的振型为基阶，其他为高阶。由上式可见，对于n阶振型，其截止频率为

$$\omega_c=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\alpha}{H}$$

5.2.15

假定波的传播方向的水平向为x，向下为z，z=0对应于液体层与上面刚性体的界面，z=H为液体层与上面刚性体的界面。根据教材中(5-2-1)和(5-2-4)式，液体层中传播的波的势函数为

$$\varphi=\left(Ae^{-z\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}+Be^{z\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}\right)e^{i(\omega t-kx)}$$

题目所述情形的边界条件为

在液体和刚性介质分界面上(z=0和z=H)，垂直向位移为零，即$u_z\big|_{z=0}=0$，$u_z\big|_{z=H}=0$。

将势函数表达式代入得到

$$u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\left(-A\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}e^{-z\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}+B\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}e^{z\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}\right)e^{i(\omega t-kx)}$$

由边界条件$u_z\big|_{z=0}=0$，得到

$$-A+B=0\Rightarrow A=B$$

由边界条件$u_z\big|_{z=0}=0$，得到

$$A\left(-e^{-H\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}+e^{H\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}\right)=0$$

这样，只有括号里的表达式为零，才使得求解的波有意义。要使括号里的表达式为零，指数部分必须为虚数。我们将括号中的表达式写为：

$$-e^{-H\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}+e^{H\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}}=-e^{-iH\omega\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{c^2}}}+e^{iH\omega\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{c^2}}}=2i\sin\left(H\omega\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{c^2}}\right)$$

因此有：$H\omega\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{c^2}}=n\pi$，$\omega=\dfrac{n\pi}{H\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{c^2}}}$

这说明频率不同，波的传播速度c就不同。n=0对应的振型为基阶，其他为高阶。有上式可见，对于n阶振型，其截止频率为

$$\omega_c=\frac{n\pi\alpha}{H}$$

5.2.16 $\sigma_{zz}\big|_{z=-H}=0$

5.2.17 $u_z\big|_{z=0^-}=u_z\big|_{z=0^+}$，$\sigma_{zz}\big|_{z=0^-}=\sigma_{zz}\big|_{z=0^+}$，$\sigma_{xz}\big|_{z=0^+}=0$

5.2.18根据Possion比$\gamma=\dfrac{\alpha^2-2\beta^2}{2\left(\alpha^2-\beta^2\right)}=\dfrac{1}{3}$可知P波速度为6km/s。

将Rayleigh方程变形为：$\frac{c^2}{\beta^2}\left[\frac{c^6}{\beta^6}-8\frac{c^4}{\beta^4}+c^2\left(\frac{24}{\beta^2}-\frac{16}{\alpha^2}\right)-16\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\right]=0$

由于Rayleigh波的速度不能为零，我们仅使中括号里面的值为零就可以得到方程的解，将P波速度和S波速度的值代入，采用MATLAB函数求解

solve('x^6/3^6-8*x^4/3^4+x^2*(24/9-16/36)-16*(1-0.25)==0')

得到Rayleigh波的速度有以下解：2.7976，-2.7976，5.7236 + 0.8204i，5.7236 -0.8204i，-5.7236 + 0.8204i，-5.7236-0.8204i.其中c=2.7976为有意义的解。

因此在这种情况下，Rayleigh波的速度为2.7976km/s。

5.3.1地壳中的SH波速度比下面半空间的波速小，当地震波以一定的角度自地壳向分界面入射时，会出现超临界入射现象，在分界面上产生反射。满足一定条件的类全反射均匀平面波之间发生同相叠加而增强，形成相长干涉。考虑时刻t的A点的超临界SH波的波前（PQ）和刚从地表B点反射的SH波的波前（P’Q’，图5-3-1），为了使PQ的质点运动与P’Q’的质点运动相互干涉，必须使这段行程的总相位差正好为2π的整数倍（$2n\pi$），而相位差可以表示为：$\phi_B-\phi_A=2m\pi=AOB\frac{2\pi}{\Lambda}+\phi_1+\phi_2$ 这里，$AOB\frac{2\pi}{\Lambda}$为AOB传播路径上的相位差别，ϕ_1为0点反射的相位变化，即我们前面所讲的$\overset{\backslash}{S}\overset{/}{S}$相位差，$\phi_2$为自由表面B点反射的相位变化，根据前面的反射系数理论，ϕ_2=0. 而

$$OB=\frac{H}{\cos j_1},AO=OB\cos 2j_1=OB\left(2\cos^2 j_1-1\right)=\frac{H}{\cos j_1}\left(2\cos^2 j_1-1\right)$$

$$AOB=AO+OB=\frac{H}{\cos j_1}+\frac{H}{\cos j_1}\left(2\cos^2 j_1-1\right)=2H\cos j_1$$

$$=2H\sqrt{1-\sin^2 j_1}=2H\sqrt{1-\left(\frac{\beta_1}{c}\right)^2}$$

$$=2H\left(\frac{\beta_1}{c}\right)\sqrt{\left(\frac{c}{\beta_1}\right)^2-1}$$

注意，c为沿着自由表面的水平传播速度，$\frac{\sin j_1}{\beta_1}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{c}=\frac{1}{c}=p$，因此$\sin j_1=\frac{\beta_1}{c}$.注意到$\frac{2\pi}{\Lambda}=\frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{\Lambda}{T}}=\frac{\omega}{\beta_1}=k\frac{c}{\beta_1}$，则$AOB\frac{2\pi}{\Lambda}=2kH\sqrt{\left(\frac{c}{\beta_1}\right)^2-1}$ 。而根据前面的SH波反射系数

$$\overset{\backslash}{S}\overset{/}{S}=\frac{\rho_1\beta_1\cos\theta_1-\rho_2\beta_2\cos\theta_2}{\rho_1\beta_1\cos\theta_1+\rho_2\beta_2\cos\theta_2}=\frac{\rho_1\beta_1\sqrt{1-p^2\beta_1^2}-\rho_2\beta_2\sqrt{1-p^2\beta_2^2}}{\rho_1\beta_1\sqrt{1-p^2\beta_1^2}+\rho_2\beta_2\sqrt{1-p^2\beta_2^2}}$$

公式：

$$=\frac{\mu_1\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2}-p^2}-i\mu_2\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta_2^2}}}{\mu_1\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2}-p^2}+i\mu_2\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta_2^2}}}=\frac{e^{-i\arctan\frac{\mu_2\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta_2^2}}}{\mu_1\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2}-p^2}}}}{e^{i\arctan\frac{\mu_2\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta_2^2}}}{\mu_1\sqrt{\frac{1}{\beta_2^2}-p^2}}}}=e^{-i2\arctan\frac{\mu_2\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta_2^2}}}{\mu_1\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2}-p^2}}}$$

在这个推导过程中，采用了复数运算的知识，即：

$$a+ib=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\left(\arctan\frac{b}{a}\right)+i\sin\left(\arctan\frac{b}{a}\right)\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}e^{i\arctan\frac{b}{a}}$$

式中负的相位表示超前，因此 SH 波在地壳底部反射的相位超前为

$$2\arctan\frac{\mu_2\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta_2^2}}}{\mu_1\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2}-p^2}}$$

因此有：

$$2kH\sqrt{\left(\frac{c}{\beta_1}\right)^2-1}=2\arctan\frac{\mu_2\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta_2^2}}}{\mu_1\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2}-p^2}}+2n\pi$$

将上式两边同时除以 2，并且考虑到 $p=\frac{1}{c},k=\frac{\omega}{c}$，即得 Love 波的频散方程。由此可以理解 Love 波是 SH 波相长干涉的结果。

5.3.2 仿照教材图 5-3-1，沿射线路径自 A 到 B 的距离可表示为根据 Snell 定律，速度为 c 的平行传播的 SH 波有：

$$AB=2H\cos i$$

$$\frac{\sin i}{\beta_1}=\frac{1}{c},\sin i=\frac{\beta_1}{c},\cos i=\frac{\beta_1}{c}\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2}-1}\text{。}$$

根据沿射线路径 AB 的相位改变必须为 $2n\pi$，考虑到自由表面和固体内部分界面的相移，有

$$2H\frac{2\pi\beta_1}{c\Lambda}\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2}-1}+\frac{\pi}{4}-\arctan\left(\frac{\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2}-1}}{\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta_2^2}}}\right)=2n\pi$$

注意到$\dfrac{2\pi}{\Lambda}=\dfrac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{\Lambda}{T}}=\dfrac{\omega}{\beta_1}=k\dfrac{c}{\beta_1}$，则 Love 波的频散方程为

$$\tan\left(2kH\sqrt{\left(\frac{c}{\beta_1}\right)^2-1}-\left(2n-\frac{1}{4}\right)\pi\right)=\frac{\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2}-1}}{\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta_2^2}}}$$

5.3.3 仿照教材图 5-3-1，沿射线路径自 A 到 B 的距离可表示为

$AB=2H\cos i$

根据 Snell 定律，速度为 c 的平行传播的 SH 波有：

$$\frac{\sin i}{\beta_1}=\frac{1}{c},\sin i=\frac{\beta_1}{c},\cos i=\frac{\beta_1}{c}\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2}-1}\text{。}$$

根据沿射线路径 AB 的相位改变必须为$2n\pi$，考虑到自由表面和固体内部分界面的相移，有

$$2H\frac{2\pi\beta_1}{c\Lambda}\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2}-1}-\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{\sqrt{1-\frac{c^2}{\beta_2^2}}}{\sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2}-1}}\right)=2n\pi$$

5.4.1 两个频率相近波的叠加可以写为:

$$u(x,t)=\cos(\omega_1 t-k_1 x)+\cos(\omega_2 t-k_2 x)$$

令$\omega=\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$，$\delta\omega=\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}$，$k=\dfrac{k_1+k_2}{2}$，$\delta k=\dfrac{k_2-k_1}{2}$，频率$\omega$和波数 k 为平均频率和波数。

相对于平均频率ω和波数 k，有：

$$\omega_1=\omega-\delta\omega,\quad k_1=k-\delta k$$
$$\omega_2=\omega+\delta\omega,\quad k_2=k+\delta k$$

因此有：

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\cos(\omega t-\delta\omega t-kx+\delta kx)+\cos(\omega t+\delta\omega t-kx-\delta kx)\\&=\cos[(\omega t-kx)-(\delta\omega t-\delta kx)]+\cos[(\omega t-kx)+(\delta\omega t-\delta kx)]\\&=2\cos(\omega t-kx)\cos(\delta\omega t-\delta kx)\end{aligned}\quad(0\text{-}0\text{-}2)$$

这里我们利用了恒等式$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$，所产生的由平均频率$\omega$的信号组成，其振幅由频率为$\delta\omega$的较长周期的波来调制。在声学上，这种现象称为节拍。当两个音乐有些走调时会观测到这种现象。短周期的波以速度$\dfrac{x}{t}=\omega/k$传播，较长的周期波

的包络线以速度$\frac{x}{t}=\delta\omega/\delta k$传播。前者叫做**相速度**$c$（Phase velocity），后者称为**群速度**U(group velocity)。

5.4.2

$$U=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d(ck)}{dk}=c+k\frac{dc}{dk}$$

$$U=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d\omega}{d\left(\frac{\omega}{c}\right)}=\frac{d\omega}{\frac{cd\omega-\omega dc}{c^2}}=\frac{c}{1-\frac{\omega}{c}\frac{dc}{d\omega}}=c\left(1-k\frac{dc}{d\omega}\right)^{-1}$$

$$U=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d\left(\frac{2\pi}{T}\right)}{d\left(\frac{2\pi}{Tc}\right)}=\frac{-\frac{2\pi}{T^2}dT}{-\frac{2\pi}{T^2c}dT-\frac{2\pi}{c^2T}dT}=c\left(1+\frac{T}{c}\frac{dc}{dT}\right)^{-1}$$

5.4.3 （1）由

$$u(x,t)=\sin(\omega t-\delta\omega t-kx+\delta kx)+\sin(\omega t+\delta\omega t-kx-\delta kx)$$
$$=\sin\left[(\omega t-kx)-(\delta\omega t-\delta kx)\right]+\sin\left[(\omega t-kx)+(\delta\omega t-\delta kx)\right]$$
$$=2\sin(\omega t-kx)\sin(\delta\omega t-\delta kx)$$

得

$$u(\mathrm{x},\mathrm{t})=2\sin(\frac{19}{2}\mathrm{t}-\frac{9}{2}\mathrm{x})\sin(-\frac{1}{2}\mathrm{t}+\frac{1}{2}\mathrm{x})$$

（2）$U=\frac{\delta\omega}{\delta k}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=1$

5.4.4 根据$\omega=\alpha k^2$，并且$k=\frac{\omega}{c}$,可以得到$c=\sqrt{\alpha\omega}$。代入本书（5-4-4）式得到

$U=\frac{c}{1-\frac{\omega}{c}\frac{dc}{d\omega}}=\frac{c}{1-\frac{\omega}{2c\sqrt{\alpha\omega}}}$，这就是群速度和相速度之间的关系。

5.4.5

$$f_1 = 3,\ f_2 = 2.3$$

$$c_1 = 4, c_2 = 4.1$$

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 6\pi, \omega_2 = 2\pi f_2 = 4.6\pi$$

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c_1} = \frac{3}{2}\pi, k_2 = \frac{\omega_2}{c_2} = \frac{46}{41}\pi$$

$$U = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{4.6\pi - 6\pi}{\frac{46}{41}\pi - \frac{3}{2}\pi} = 3.7$$

5.4.6

$$T_1 = 2, T_2 = 2.1$$

$$c_1 = 3, c_2 = 3.2$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \pi, \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{20}{21}\pi$$

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c_1} = \frac{1}{3}\pi, k_2 = \frac{\omega_2}{c_2} = \frac{25}{84}\pi$$

$$U = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{\frac{20}{21}\pi - \pi}{\frac{25}{84}\pi - \frac{1}{2}\pi} = 0.2(\text{km/s})$$

5.4.7

$$k_1 = 2, k_2 = 2.1$$

$$c_1 = 2, c_2 = 2.05$$

$$\omega_1 = k_1 c_1 = 4, \omega_2 = k_2 c_2 = 4.305$$

$$U = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{4.305 - 4}{2.1 - 2} = 3.5(\text{km/s})$$

5.4.8 面波的叠加可以表示为：

$$f(x,t) = \sqrt{\frac{2\pi}{x\left|\frac{dU}{dk}\right|}}\, g(k_0)\, e^{i\left[k_0\left(c(k_0)t - x\right) \mp \frac{\pi}{4}\right]}$$

由此可见，由于频散，使得随着 x 的增大，振幅以 $x^{-\frac{1}{2}}$ 衰减， 所以面波是沿着表面呈柱状向外扩散的，因扩散造成的衰减因子为 $r^{-\frac{1}{2}}$。根据第三章的球面波向外传播的理论，体波的几何扩散按照震中距 x 的倒数进行，即 r^{-1}。因此远处的地震图上，面波占有主要成分。

5.4.9 面波叠加式为 $f(x,t)=\sqrt{\dfrac{2\pi}{x\left|\dfrac{dU}{dk}\right|}}g(k_0)e^{i\left[k_0(c(k_0)t-x)\mp\frac{\pi}{4}\right]}$。当 $\dfrac{dU}{dk}$=0 时，上式不成立，此时必须考虑 $\theta(k)=\theta(k_0)+\left.\dfrac{d\theta}{dk}\right|_{k=k_0}(k-k_0)+\dfrac{1}{2!}\left.\dfrac{d^2\theta}{dk^2}\right|_{k=k_0}(k-k_0)^2+\dfrac{1}{3!}\left.\dfrac{d^3\theta}{dk^3}\right|_{k=k_0}(k-k_0)^3+\cdots$ 的三阶展开项，得到的 $f(x,t)$ 的表达式为正比于 Airy 函数的表达式，在此种情况下频散曲线群速度出现极小值，在地震记录图上相应的面波振幅为极大，称为 **Airy 相**(Airy phase)。Airy 相附近的振幅以 $r^{-\frac{1}{3}}$ 的形式缓慢衰减，所以当 r 足够大时，Airy 相占面波的主要部分。

5.5.1 （1）峰谷法：主要是从地震记录中测量某一时刻面波的优势周期测量地震面波的群速度。地震台到震中的距离已知，发震时刻 t_0 已知，对应于某一优势周期（频率）的到时 t 可以从地震波形记录上测定。因此群速度可以按下时计算：$U=\dfrac{\Delta}{t-t_0}$，对一系列又是周期 T 测定群速度 U，则可以得到群速度的频散曲线。

（2）移动窗分析法：沿着面波数字化信号的记录时间取以序列时间点 t_i，以 t_i 时刻为中心乘以时间窗 $W(\tau)$，得到新的时间信号。$Z_i(\tau)=x(t_i+\tau)W(\tau)$，将该式进行 Fourier 变换，可以求得时窗中心对于时刻 ti 处不同的周期 Tk 的谱。$\mathrm{F}(t_i,T_k)=\int_{-\frac{H_w}{2}}^{\frac{H_w}{2}}Z_i(\tau)e^{-j\frac{2\pi\tau}{T_k}}d\tau$ 将各个到时及各个周期依次求出，其中某一周期的最大值所对应的时间就是该周期的波到达的时间，采用 $U=\dfrac{\Delta}{t-t_0}$ 即可得到单台资料的该周期得群速度。

（3）多重滤波法：是将时间信号 x(t)经 Fourier 变换为谱函数 X(f)，然后以不同的频率点为中心乘以谱窗函数，再经 Fourier 逆变换，求出该频率在不同时刻的瞬时谱振幅。

首先将面波信号x(t)用FFT算法变换为频谱函数

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos(2\pi ft)dt-j\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin(2\pi ft)dt$$
$$=\mathrm{Re}[X(f)]-j\,\mathrm{Im}[X(f)]$$

接着将谱函数X(f)逐点乘以中心频率为 f_k 的频率窗口 $W(f_k,f)$，即 $S(f)=X(f)W(f_k,f)$

频率窗口可采用Gauss函数 $W(f_k,f)=e^{-\alpha\left(\frac{f-f_k}{f_k}\right)^2}$ $f_k=1/T_k$ 为频率窗口的中心频率；T_k 为中心周期； α 为Gauss函数峰值的锐度参数。给出震中距后，可采用插值的方法求得该震中距对应的 α 。

对 $S(f)=X(f)W(f_k,f)$ 做Fourier逆变换，并取实部可得到滤波后的时间信号：

$$s(t)=\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty}X(f)W(f_k,f)e^{j2\pi ft}df\right]=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)W(f_k,f)\cos(2\pi f)df$$

注意在做数值计算时上式中括号中的积分会出现比较小的虚部，因此需要取实部运算。

在群速度计算中，采用Hilbert变换，求得s(t)函数的解析函数，求其幅值就对应于包络线

5.5.2 多重滤波法就是将时间信号 x(t)经 Fourier 变换为谱函数 X(f)，然后以不同的频率点为中心乘以谱窗函数，再经 Fourier 逆变换，求出该频率在不同时刻的瞬时谱振幅。

5.5.3 高斯滤波器的中心频率不衰减，其他频率按此距此频率的远近衰减，其频谱形式为

$$W(f_k,f)=e^{-\alpha\left(\frac{f-f_k}{f_k}\right)^2}$$ 。

5.5.4 采用 Hilbert 变换的绝对值得到地震波性的包络线。

5.6.1 Rayleigh 波沿着地球表面运行，沿小圆弧首次到达地震台称为 R1,而沿大圆弧从反方向绕地球传到地震台的 Rayleigh 波在 R1 之后到达地震台，称为 R2.这两种波到达地震台后继续绕地球表面传播 1 周后达到地震台，分别称为 R3,R4;如果地震能量较大，没有衰减到噪声水平，再绕地球一周后到达地震台，就为震相 R5,R6。以此类推。

5.6.2 Love 波沿着地球表面运行，沿小圆弧首次到达地震台称为 G1,而沿大圆弧从反方向绕地球传到地震台的 Love 波在 G1 之后到达地震台，称为 G2.这两种波到达地震台后继续绕地球表面传播 1 周后达到地震台，分别称为 G3,G4;如果地震能量较大，没有衰减到噪声水平，再绕地球一周后到达地震台，就为震相 G5,G6。以此类推。

5.6.3 Love 波在水平分向容易观测而 Rayleigh 在垂直分向容易观测。

5.6.4 在一张面波地震图上，可以在许多不同的频率测量速度，直接提供震源—接收器路径上不同深度的速度—深度剖面。而一张地震图的体波观测只提供每个体波震相的走时，不能单独用来求解速度-深度剖面（或三维速度结构），只有将很多台站的体波震相到时结合起来才能求解速度结构。因此，采用面波记录可以在台站较为稀疏的地方得到相对精确的速度结构。

5.7.1 $$\mathbf{H}(z)=\begin{bmatrix}u_{ym}\\ \sigma_{yzm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overset{\backslash}{S}_m e^{-i\omega\eta_m z}+\overset{/}{S}_m e^{i\omega\eta_m z}\\ -\overset{\backslash}{S}_m i\omega\mu_m\eta_m e^{-i\omega\eta_m z}+\overset{/}{S}_m i\omega\mu_m\eta_m e^{i\omega\eta_m z}\end{bmatrix}e^{i\omega(t-px)}$$

5.7.2 在层状介质内部的任一界面上，y 方向的位移分量和应力分量 σ_{zy} 都是连续的。位移的连续性使相应的速度分量也连续，由于相速度对各层都一样，因此无量纲的量 $\dot{u}_y/c$ 也连续。我们令

$$r_{\beta m}=\begin{cases}+\left[(c/\beta_m)^2-1\right]^{\frac{1}{2}} & c>\beta_m\\ -i\left[1-(c/\beta_m)^2\right]^{\frac{1}{2}} & c<\beta_m\end{cases}$$

上行波表示为：

$$\overset{\backslash}{D}_m=\overset{\backslash}{S}_m e^{i\omega(t-px)}$$

下行波表示为：

$$\overset{/}{D}_m = \overset{/}{S}_m e^{i\omega(t-px)}$$

采用欧拉公式将指数形式展开为三角函数，第 m 层的 Haskell 矩阵的元素可表示为：

$$\frac{\dot{u}_{ym}}{c} = ik\cos\left(kr_{\beta m}z\right)\left(\overset{\backslash}{D}_m + \overset{/}{D}_m\right) + k\sin\left(kr_{\beta m}z\right)\left(\overset{\backslash}{D}_m - \overset{/}{D}_m\right)$$

$$\sigma_{zym} = -\overset{\backslash}{D}i\omega\mu_m\eta_m e^{-i\omega\eta_m z} + \overset{/}{D}i\omega\mu_m\eta_m e^{i\omega\eta_m z}$$

$$= -kr_{\beta m}\mu_m\sin\left(kr_{\beta m}z\right)\left(\overset{\backslash}{D}_m + \overset{/}{D}_m\right) - ikr_{\beta m}\mu_m\cos\left(kr_{\beta m}z\right)\left(\overset{\backslash}{D}_m - \overset{/}{D}_m\right)$$

写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\dot{u}_{ym}}{c} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik\cos\left(kr_{\beta m}z\right) & k\sin\left(kr_{\beta m}z\right) \\ -kr_{\beta m}\mu_m\sin\left(kr_{\beta m}z\right) & -ikr_{\beta m}\mu_m\cos\left(kr_{\beta m}z\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\overset{\backslash}{D}_m + \overset{/}{D}_m\right) \\ \left(\overset{\backslash}{D}_m - \overset{/}{D}_m\right) \end{bmatrix}$$

将 z 轴的原点置于 m-1 界面上，则在 m-1 界面处于 z=0 处，正弦函数部分为零 0, 余弦函数部分为 1, $\begin{bmatrix} \dfrac{\dot{u}_{ym-1}}{c} \\ \sigma_{yzm-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik & 0 \\ 0 & -ikr_{\beta m}\mu_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\overset{\backslash}{D}_m + \overset{/}{D}_m\right) \\ \left(\overset{\backslash}{D}_m - \overset{/}{D}_m\right) \end{bmatrix}$

由此得到：

$$\begin{bmatrix} \left(\overset{\backslash}{D}_m + \overset{/}{D}_m\right) \\ \left(\overset{\backslash}{D}_m - \overset{/}{D}_m\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik & 0 \\ 0 & -ikr_{\beta m}\mu_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\dot{u}_{ym-1}}{c} \\ \sigma_{yzm-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{k^2 r_{\beta m}\mu_m} \begin{bmatrix} -ikr_{\beta m}\mu_m & 0 \\ 0 & ik \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\dot{u}_{ym-1}}{c} \\ \sigma_{yzm-1} \end{bmatrix}$$

将 z 轴原点置于 m 界面上，即取 z=d_m代入，引入符号：$Q_m = kr_{\beta m}d_m$，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\dot{u}_{ym-1}}{c} \\ \sigma_{yzm-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik\cos\left(Q_m\right) & k\sin\left(Q_m\right) \\ -kr_{\beta m}\mu_m\sin\left(Q_m\right) & -ikr_{\beta m}\mu_m\cos\left(Q_m\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\overset{\backslash}{D}_m + \overset{/}{D}_m\right) \\ \left(\overset{\backslash}{D}_m - \overset{/}{D}_m\right) \end{bmatrix}$$

$$= E \begin{bmatrix} \left(\overset{\backslash}{D}_m + \overset{/}{D}_m\right) \\ \left(\overset{\backslash}{D}_m - \overset{/}{D}_m\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{ym} \\ \frac{}{c} \\ \sigma_{yzm} \end{bmatrix} = \frac{1}{k^2 r_{\beta m}\mu_m}\begin{bmatrix} ik\cos(Q_m) & k\sin(Q_m) \\ -kr_{\beta m}\mu_m\sin(Q_m) & -ikr_{\beta m}\mu_m\cos(Q_m) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -ikr_{\beta m}\mu_m & 0 \\ 0 & ik \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_{ym-1} \\ \frac{}{c} \\ \sigma_{yzm-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(Q_m) & ir_{\beta m}^{-1}\mu_m^{-1}\sin(Q_m) \\ ir_{\beta m}\mu_m\sin(Q_m) & \cos(Q_m) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_{ym-1} \\ \frac{}{c} \\ \sigma_{yzm-1} \end{bmatrix}$$

5.7.3 令 n=m+1，代将各个分量进行递推得

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{y(m+1)-1} \\ \frac{}{c} \\ \sigma_{yz(m+1)-1} \end{bmatrix} = a_m a_{m-1}.....a_1\begin{bmatrix} \dot{u}_{y0} \\ \frac{}{c} \\ \sigma_{yz0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{ym} \\ \frac{}{c} \\ \sigma_{yzm} \end{bmatrix} = a_m a_{m-1}.....a_1\begin{bmatrix} \dot{u}_{y0} \\ \frac{}{c} \\ \sigma_{yz0} \end{bmatrix}$$ 因此，

又根据：

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{ym} \\ \frac{}{c} \\ \sigma_{yzm} \end{bmatrix} = \frac{1}{k^2 r_{\beta m}\mu_m}\begin{bmatrix} ik\cos(Q_m) & k\sin(Q_m) \\ -kr_{\beta m}\mu_m\sin(Q_m) & -ikr_{\beta m}\mu_m\cos(Q_m) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -ikr_{\beta m}\mu_m & 0 \\ 0 & ik \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_{ym-1} \\ \frac{}{c} \\ \sigma_{yzm-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(Q_m) & ir_{\beta m}^{-1}\mu_m^{-1}\sin(Q_m) \\ ir_{\beta m}\mu_m\sin(Q_m) & \cos(Q_m) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_{ym-1} \\ \frac{}{c} \\ \sigma_{yzm-1} \end{bmatrix}$$

由于：$a_m = \begin{bmatrix} \cos Q_m & j\mu_m^{-1}r_{\beta m}^{-1}\sin Q_m \\ j\mu_m r_{\beta m}\sin Q_m & \cos Q_m \end{bmatrix}$

所以当 m=0,1,2,3.....n.时可得

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{yn-1} \\ \frac{}{c} \\ \sigma_{yzn-1} \end{bmatrix} = a_{n-1}a_{n-2}...a_1\begin{bmatrix} \dot{u}_{y0} \\ \frac{}{c} \\ \sigma_{yz0} \end{bmatrix}$$

5.7.4 由 Haskell 矩阵关系式

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} u_{ym} \\ \sigma_{yzm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\backslash}{S}_m e^{-i\omega\eta_m z} + \overset{/}{S}_m e^{i\omega\eta_m z} \\ -\overset{\backslash}{S}_m i\omega\mu_m\eta_m e^{-i\omega\eta_m z} + \overset{/}{S}_m i\omega\mu_m\eta_m e^{i\omega\eta_m z} \end{bmatrix} e^{i\omega(t-px)}$$

这里 μ_m 为第 m 层剪切模量，亦称为拉梅常数

令 $\eta_m = c\left(\frac{\beta_m^2}{c^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}$。

在层状介质中的内部的任一界面上，y 方向的位移分量和应力分量 σ_{zy} 都是连续的。位移的连续性是相应的速度分量也连续，由于相速度对各层都一样，因此无量纲的量 $\dot{u}_y/c$ 也连续。我们令

$$r_{\beta m} = \begin{cases} +\left[(c/\beta_m)^2-1\right]^{\frac{1}{2}} & c>\beta_m \\ -i\left[1-(c/\beta_m)^2\right]^{\frac{1}{2}} & c<\beta_m \end{cases}$$

上行波表示为：

$$\overset{\backslash}{D}_m = \overset{\backslash}{S}_m e^{i\omega(t-px)}$$

下行波表示为：

$$\overset{/}{D}_m = \overset{/}{S}_m e^{i\omega(t-px)}$$

采用欧拉公式将指数形式展开为三角函数

$$\sigma_{yzm} = -\overset{\backslash}{S}_m e^{i\omega(t-px)} i\omega u_m \eta_m e^{-i\omega\eta_m z} + \overset{\backslash}{S}_m e^{i\omega(t-px)} i\omega u_m \eta_m e^{i\omega\eta_m z}$$

$$\sigma_{yzm} = -\overset{\backslash}{D}_m i\omega u_m \eta_m e^{-i\omega\eta_m z} + \overset{\backslash}{D}_m i\omega u_m \eta_m e^{i\omega\eta_m z}$$

采用欧拉公式将上面的指数形式展开成三角函数：

$$\sigma_{yzm} = -\overset{\backslash}{D}_m i\omega u_m \eta_m[\cos(\omega\eta_m z) - i\sin(\omega\eta_m z)] + \overset{\backslash}{D}_m i\omega u_m \eta_m[\cos(\omega\eta_m z + i\sin(\omega\eta_m z)]$$

合并得

$$\sigma_{yzm} = i\omega u_m \eta_m \cos(\omega\eta_m z)[\overset{/}{D}_m - \overset{\backslash}{D}_m] + i\omega u_m \eta_m \sin(\omega\eta_m z)[\overset{\backslash}{D}_m + \overset{\backslash}{D}_m]$$

又因为：$k_x = \frac{\omega}{c}, \omega = k_x c$ $\eta_m = c\left(\frac{\beta_m^2}{c^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}$，代入得：

$$\sigma_{zym} = -\overset{\backslash}{D} i\omega\mu_m \eta_m e^{-i\omega\eta_m z} + \overset{/}{D} i\omega\mu_m \eta_m e^{i\omega\eta_m z}$$

$$= -kr_{\beta m}\mu_m \sin\left(kr_{\beta m} z\right)\left(\overset{\backslash}{D}_m + \overset{/}{D}_m\right) - ikr_{\beta m}\mu_m \cos\left(kr_{\beta m} z\right)\left(\overset{\backslash}{D}_m - \overset{/}{D}_m\right)$$

5.7.5 $F_L(\omega,c) = \begin{bmatrix} s & -i \end{bmatrix} a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$

$$F_L(\omega,c)=\begin{cases}\dfrac{A_{21}+\mu_n r_{\beta n}A_{11}}{i} & \text{最深界面在地幔中}\\[2ex] \dfrac{A_{21}}{i} & \text{最深界面在核幔边界}\end{cases}$$

5.7.6　判断：错误

5.8.1 体波在地球表面反射，面波沿大圆路径环行，在地球表面的一特定的点，有一系列不同震相到达。这些震相相长或相消干涉，在很长的时间间隔里产生共振，这些共振的频率的振动模式叫做地球的简正振型。

5.8.2 驻波

5.8.3 弦的共振频率叫做本征频率，对应于本征频率的弦的位移叫做本征函数。在音乐乐器中，最低的频率叫做基谐模式，高频模式是泛音或谐音。对振动弦，本征函数是正弦和余弦，习惯上采用 Fourier 表达式。

5.8.4 根据课本中的分析，只有频率为 $\omega_{\mathrm{n}}=\dfrac{c(n+1)\pi}{L}$ 的振动才能在弦中振动，并且 n=1,2,…，因此两端固定弦的振动频率是分离的，不是连续的。

5.8.5　本征频率 ω_n 对应的位移振动为 $e^{i\omega_n t}\sin(\omega_n x/c)$，此式又称为本征函数，或简正振型（normal mode）。这种振动的振幅为 $\sin(\omega_n x/c)$，因此振幅不随时间变化，只随空间变化，即波峰和波谷的空间位置保持不变。

5.8.6 根据课本中的讲解，弦的振动角频率为 $\omega_{\mathrm{n}}=\dfrac{c(n+1)\pi}{L}$，当 n=0,1,2,…时，代入已知参数可知，频率为 $f_{\mathrm{n}}=\dfrac{c(n+1)}{2L}=\dfrac{200(n+1)}{2\times0.8}=125,250,375,...(\mathrm{Hz})$，可见弦的振动仅有 125Hz 及其整数倍频率。

当弦的长度变为 0.4m 时，按照同样的方法可得弦的振动仅有 250Hz 及其整数倍频率。

这表明弦越短，出现的相对频率越高。这就是弦乐器中，要出现低频音调，必须增加弦的长度的原因。

5.8.7　本题中本征频率表示为 $f_{\mathrm{n}}=\dfrac{c(n+1)}{2L}=\dfrac{200(n+1)}{2}$，由此知基阶和 1 阶的频率为 100Hz 和 200Hz。根据所讲述的本征函数振幅为 $\sin(\omega_n x/c)$，可以得到基阶在 0.2m 的振幅为 $\sin(2\pi f_0 x/c)=\sin(2\times100\times0.2/200)=0.2/200$；1 阶在 0.2m 的振幅为 $\sin(2\pi f_1 x/c)=\sin(2\pi\times200\times0.2/200)=0.9511$。

可见阶数不同，同一点具有不同的振动振幅。

5.8.8 根据式（5-8-8），可得到基频为

$$f_0=\frac{c}{2L}=\frac{150m/s}{2*0.3m}=250Hz$$

5.8.9 三次谐频振动时的振动频率根据式（5-8-8）为 $f_2=\dfrac{3c}{2L}$，将频率表达代入式（5-8-9），并使得该式为零，可得到 x=0,0.1,0.2,0.3m 时的波形为零，即这些点为节点。

5.8.10 地球内部处于静岩压力状态，因此可以近似按液态球来计算。按照课本中所讲述的理论，地表应力为零，而这里的 $_1S_0$ 的 l 为零，则其解可表达为 0 阶球 Bessel 函数的形式。这样满足地表应力为零的边界条件可以写为：

$$j_0\left(\frac{\omega R_0}{c}\right)=\frac{\sin\left(\omega R_0/c\right)}{\omega R_0/c}=0$$

于是振荡角频率 ω 只能取以下特定值：

$$_n\omega_0=\frac{(n+1)c\pi}{R_0},n=0,1,2,3,\ldots$$

$_1S_0$ 的 n=1，所以代入可得

$$_1\omega_0=\frac{2c\pi}{R_0}=\frac{2\times 7km/s\times\pi}{6300km}=\ 0.07$$

$$_1f_0=\frac{_1\omega_0}{2\pi}=1.1\text{e-}03Hz$$

$$_1T_0=\frac{1}{_1f_0}=900(s)=15(\text{分钟})$$

5.8.11　正确

5.8.12 S表示球型振荡，T表示环型振荡。$_nS_l^m$ 和 $_nT_l^m$ 表示与本征频率相应的振动称为本征振荡，每一种本征振荡都对应一种驻波，是球体的一种谐振形式。n代表某一振型振动量P（振荡时的压强扰动量）沿地球半径方向的节点数；$l-|m|$ 表示P在纬度变化方向的节点数（$|m|\le l$）；$2|m|$表示P 在经度变化方向的节点数。

5.8.13　能观测到球型振荡不能观测到环形振荡。这是因为环型振荡位移无径向分量，位移在垂直于半径的球面内，不会引起重力变化。而球型振荡有径向和水平运动，对压缩波和剪切波的反映都灵敏。5.8.14 球型振荡和环型振荡，球型振荡与 Rayleigh 波相当，环型振荡与 Love 波相当。

5.8.15 地震学中没有 $_0S_1$，这是因为 $_0S_1$ 描述地球质心的移动。这不可能是由纯粹的内力所造成的。环型振荡 $_0T_0$ 描述地球旋转速率的变化，这需要外力矩作用，因此也不可能是内力引起的。

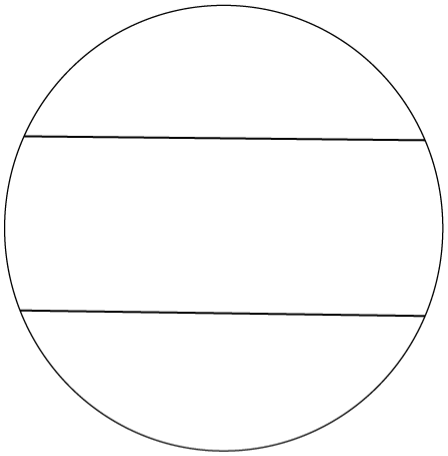
5.8.16 对不同的方位序数 m 和球对称的固体简正振型，本征频率完全相等，这种现象叫做本征频率的退化或简并（degeneracy）。

5.8.17 在描述地球自由振荡的振型时，在本征频率简并的情况下，就描述为 $_nS_l$ 和 $_nT_l$。地球对球对称的偏离（例如，椭圆率，旋转，三维速度分布）将造成本征频率分离，这叫做分裂(即不同的 m 具有不同的频率)。

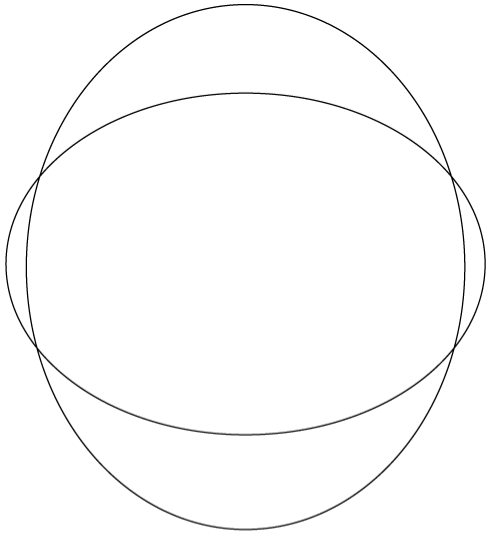
5.8.18　判断：（1）正确（因为环型振荡沿地球的切向运动）　（2）错误（因为地球自由振荡是长周期面波的推广，即球型振荡为P-SV型面波的推广，环型振荡为SH型面波的推广，但不能把他们看做一回事）（3）正确（因为自由振荡的周期与深度呈现一定的相关性，即周期大于 10 分钟的自由振荡主要取决于地球的整体性质，周期为 100s-10min 的自由振荡显

著依赖于地幔结构）（4）正确 （地球简并频率的分裂主要取决于地球的不对称性、地球的自转和三维不均匀结构）

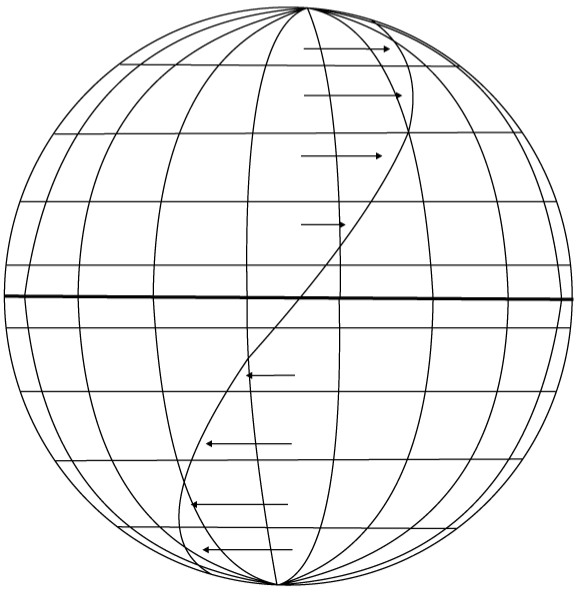
5.8.19



${}_0S_2^0$



${}_0S_2^0$ (振动情况)



${}_0T_2^0$ （振动情况）

图 5E1 各种振型绘图

前者在纬度方向有两个节点，径向位移使得地球交替呈现长椭球和扁椭球，成为足球型；后者节面为赤道平面，上下两个半球以赤道为节面相互扭

5.8.20 D

5.8.21 ABC

5.8.22 表 5-8-1 中给出的各向同性 PREM 模型计算的 ${}_0S_2$ 周期为 3233.45s，表 5-8-2 中给出该振型 a=3.76E-4,b=1.4905E-2,c=-2.671E-4。

根据谱峰分裂公式 $\omega_m = \omega_0\left(1+a+bm+cm^2\right)$，得到

$$\left(\frac{2\pi}{T_m}\right)=\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\left(1+a+bm+cm^2\right)\Rightarrow T_m=\frac{T_0}{\left(1+a+bm+cm^2\right)}$$

对于 ${}_0S_2$ 振型，有 m=0,1,-1,2,-2 五种情况。代入上式得：

$$T_0'=\frac{T_0}{(1+a)}=\frac{3233.45s}{(1+3.76E-4)}=3232.2s$$

$$T_1=\frac{T_0}{(1+a+b+c)}=\frac{3233.45s}{(1+3.76E-4+1.4905E-2-2.671E-4)}=3185.6s$$

$$T_{-1}=\frac{T_0}{(1+a-b+c)}=\frac{3233.45s}{(1+3.76E-4-1.4905E-2-2.671E-4)}=3282.0s$$

$$T_2=\frac{T_0}{(1+a+2b+4c)}=\frac{3233.45s}{(1+3.76E-4+2\times1.4905E-2-4\times2.671E-4)}=3142.0s$$

$$T_{-2}=\frac{T_0}{(1+a-2b+4c)}=\frac{3233.45s}{(1+3.76E-4-2\times1.4905E-2-4\times2.671E-4)}=3335.2s$$

5.8.23 表 5-8-1 中给出的各向同性 PREM 模型计算的 ${}_0S_{12}$ 周期为 502.83s，表 5-8-2 中给出该振型 a=2.655E-3,b=-4.5E-5,c=-2.41E-5。

根据谱峰分裂公式 $\omega_m = \omega_0\left(1+a+bm+cm^2\right)$，得到

$$\left(\frac{2\pi}{T_m}\right)=\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)\left(1+a+bm+cm^2\right)\Rightarrow T_m=\frac{T_0}{\left(1+a+bm+cm^2\right)}$$

对于 ${}_0S_{12}$ 振型，有 m=-12,12 两者的周期相差最大。代入上式得:

$$T_{-12}=\frac{T_0}{\left(1+a-12b+12^2c\right)}=\frac{502.83s}{\left(1+2.655E-3+12\times4.5E-5-12^2\times2.41E-5\right)}=503.0s$$

$$T_{12}=\frac{T_0}{\left(1+a+12b+12^2c\right)}=\frac{502.83s}{\left(1+2.655E-3-12\times4.5E-5-12^2\times2.41E-5\right)}=503.5s$$

可见两者之间周期的差别仅为 0.5 秒，对于频率较高的高阶振型，其频谱分裂的间隔很小。

第六章

6.1.1 因为 $\ddot{\varphi}=-\omega^2\varphi_0 e^{i\omega(t-\tau)}$ $\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

所以 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}e^{i\omega(t-\tau)}-i\omega\frac{\partial\tau}{\partial x}\varphi_0 e^{i\omega(t-\tau)}$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}e^{i\omega(t-\tau)}-2i\omega\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\tau}{\partial x}\varphi_0 e^{i\omega(t-\tau)}-\varphi_0 i\omega\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}e^{i\omega(t-\tau)}+\varphi_0\left(i\omega\right)^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 e^{i\omega(t-\tau)}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}e^{i\omega(\tau-t)}-2i\omega\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial\tau}{\partial y}\varphi_0 e^{i\omega(\tau-t)}-\varphi_0 i\omega\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}e^{i\omega(\tau-t)}+\varphi_0\left(i\omega\right)^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2 e^{i\omega(\tau-t)}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2}e^{i\omega(\tau-t)}-2i\omega\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\frac{\partial\tau}{\partial z}\varphi_0 e^{i\omega(\tau-t)}-\varphi_0 i\omega\frac{\partial^2\tau}{\partial z^2}e^{i\omega(\tau-t)}+\varphi_0\left(i\omega\right)^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2 e^{i\omega(\tau-t)}$$

即得 $-\frac{\omega^2\varphi_0}{c^2}=\nabla^2\varphi_0-2i\omega\nabla\varphi_0\nabla\tau-i\omega\varphi_0\nabla^2\tau-\omega^2\varphi_0\left(\nabla\tau\right)^2$

利用实部与实部相等，虚部与虚部相等，可得：

$$-\omega^2\varphi_0=c^2\left(\nabla^2\varphi_0-\omega^2\varphi_0\left(\nabla\tau\right)^2\right)$$

$$0=-2\omega\nabla\varphi_0\nabla\tau-\omega\varphi_0\nabla^2\tau$$

6.1.2

r 为震源到台站的坐标矢量，有 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，这样

$$\nabla\tau=\nabla\frac{r}{c}=\frac{1}{c}\nabla r=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial r}{\partial x}i+\frac{\partial r}{\partial y}j+\frac{\partial r}{\partial z}k\right)$$
$$=\frac{1}{c}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}i+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}j+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}k\right)$$
$$=\frac{1}{c}\frac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=u\frac{\mathbf{r}}{|r|}=u\hat{\mathbf{k}}$$

6.1.3

对其分离变量有

$\frac{\nabla A}{A}=-\frac{\nabla\cdot(u\hat{\mathbf{k}})}{2u\hat{\mathbf{k}}}$ 沿 $\hat{\mathbf{k}}$ 方向的射线路径积分得到：

$$A=\exp\left(-\tfrac{1}{2}\int\frac{\nabla\cdot(u\hat{\mathbf{k}})}{u}ds\right)$$

把该表达式代入波函数，得到：

$$\varphi(\omega)=Ae^{i\omega T(\mathbf{x})}=\exp\left(-\tfrac{1}{2}\int_{路径}\frac{\nabla\cdot(u_\alpha\hat{\mathbf{k}})}{u_\alpha}ds\right)\exp\left(-i\omega\int_{路径}u_\alpha ds\right) \qquad (1)$$

这里$u_\alpha ds$是沿射线路径的走时，描述前面出现的通常的振荡波动。然而，第一指数式的指数是负的实数。于是它描述了沿射线路径振幅的衰减。考虑场论中的公式$\nabla\cdot(u\mathbf{a})=u\nabla\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\nabla u$，可以把此指数进一步变换为：

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2}\int_{路径}\frac{\nabla\cdot(u_\alpha\hat{\mathbf{k}})}{u_\alpha}ds &= -\tfrac{1}{2}\int_{路径}\left(\frac{\hat{\mathbf{k}}\cdot\nabla u_\alpha}{u_\alpha}+\nabla\cdot\hat{\mathbf{k}}\right)ds \\
&= -\tfrac{1}{2}\int_{路径}\left(\frac{1}{u_\alpha}\frac{du_\alpha}{ds}+\nabla\cdot\hat{\mathbf{k}}\right)ds \\
&= -\tfrac{1}{2}\int_{路径}\frac{du_\alpha}{u_\alpha}-\tfrac{1}{2}\int_{路径}\nabla\cdot\hat{\mathbf{k}}ds \qquad (2) \\
&= -\ln u\Big|_{u_0}^{u}-\tfrac{1}{2}\int_{路径}\nabla\cdot\hat{\mathbf{k}}ds \\
&= -\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{u_\alpha}{u_0}\right)-\tfrac{1}{2}\int_{路径}\nabla\cdot\hat{\mathbf{k}}ds
\end{aligned}$$

这里u_0是在震源的慢度（slowness，为速度的倒数），辐射首先从这里开始。如果把（2）代入（1），可发现

$$\varphi(\omega)=\left(u_0/u\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\int_{路径}\nabla\cdot\hat{\mathbf{k}}ds}e^{-i\omega\int_{路径}u_\alpha ds}$$

平行于射线方向单位矢量的散度$\nabla\cdot\hat{\mathbf{k}}$描述了波前的曲率，当曲率比较大时，就导致较大的振幅衰减。

6.1.4 我们已知：$-\omega^2\varphi_0=c^2\left(\nabla^2\varphi_0-\omega^2\varphi_0(\nabla\tau)^2\right)$

两边同时除以$-\omega^2\phi_0$可得：$1=c^2(\nabla\tau)^2-\dfrac{c^2\nabla^2\varphi_0}{\omega^2}$

当ω较大（高频），而$\nabla^2\varphi_0$很小时，

$$1=c^2(\nabla\tau)^2$$

即：

$$(\nabla\tau)^2=\frac{1}{c^2}$$

6.1.5

从上题我们得出了：

$$(\nabla\tau)^2=\frac{1}{c^2}$$

由于$\nabla\tau=\frac{\partial\tau}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\tau}{\partial z}\mathbf{k}$，而$(\nabla\tau)^2$为两个向量相乘的模，故有，

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{c^2}$$

这就是特征方程或哈密顿方程，又称时间场方程、程函方程(eikonal equation)。它是一个具有纯粹几何图像的波面方程，通过它，波动地震学就过渡为几何地震学了。

6.1.6 从波动地震学过渡到几何地震学的两个根本条件：（1）波长趋近于零，即只对高频适用；（2）$\nabla^2\varphi_0$不能趋于无限，对于球面波而言，$\varphi=\frac{f(r-ct)}{r}$，当 r 趋于零时，$\varphi$趋于无穷，即球心或聚焦点处几何地震学不适用。

6.1.7 两点之间，射线要走短的路径，因此两点之间的走时最小。

6.2.1 参考教材中图 6-2-1

$$\Delta s=\Delta x\sin i$$

因为$\Delta s=\upsilon\Delta t$，故有：

$\upsilon\Delta t=\Delta x\sin i$或：

$$p=\frac{\Delta t}{\Delta x}=\frac{\sin i}{\upsilon}=u\sin i$$

这个式子就是平层介质中的 Benndorf 定律。这里 u 是慢度（$u=\frac{1}{\upsilon}$，υ是速度），p 叫做射线参数。

6.2.2 $p=\frac{\sin i}{\upsilon}$，p 为射线参数，与入射角和此层速度这两个参量有关，单位是 s/km。

6.2.3 如果界面是地表自由表面，我们通过计算波阵面到达两个不同台站的时间Δt和距离Δx，就可以直接测量 p。射线参数 p 表示波阵面在水平方向的视慢度(apparent slowness)，这正是为什么有时把 p 叫做射线的水平慢度的理由。

6.2.4 不对，对于横向均匀介质，单位时间内的水平传播距离总是不变的。但对于横向不均匀介质，该结论不成立。

6.2.5　按照图 1，由 A 到 B 的走时可以表示为：$t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(k-x)^2+b^2}}{v_2}$

根据费马原理，两者要走最短的距离，那么时间也就最少，也就是求上式中时间对 x 的导数为零的点是极值点，即

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{(k-x)^2+b^2}}{v_2}\right)=0$$

那么可得到

$$\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{k-x}{v_2\sqrt{(k-x)^2+b^2}}$$

化简得 snell 定律

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

6.2.6 选择　　ABCD

6.2.7 判断正误（1）正确（由于有震源发出的各条射线具有不同的偏垂角，不同的偏垂角具有不同的 P 参数）（2）正确（由于偏垂角的最大值为 90 度，对应的射线参数最大）（3）正确（这正是 Snell 定律）

6.3.1 在多数情况下，P 波和 S 波的速度是深度的函数，随深度的增大而增加。假如我们考察平层介质中向下传播的波，下层的传播速度比上层快。射线参数 p 保持不变，则有：

$$p=u_1\sin i_1=u_2\sin i_2=u_3\sin i_3$$

因此，随着速度增加，慢度减小，为保持 p 参数不变，就要求偏垂角增大，i 最终达 90°，射线将沿水平向传播。由此可知，对于地球内部速度随深度增加的介质，向下传播的地震波的传播方向会逐渐变平，即射线凸向地球内部。

6.3.2 这句话是正确的。对应的连续的速度梯度的情况（图 6-3-2）。如果我们令在地表面的慢度为 u_0，离源角为 i_0，则有：$u_0\sin i_0=p=u\sin i$ (6-3-2)随着速度随着深度逐渐增加，i 逐渐增大。当 $i=90°$ 时，射线在这点发生转折，$p=u_{tp}$，这里 u_{tp} 是转折点的慢度。根据(6-3-2)Snell 定律，射线参数越小的射线对应的 i_0 越小，在地下向下越陡，则地震射线会在比较深的地方发生转折，在地表上所走的路程较远。

6.3.3 不是，仅在水平层中的 p 参数为常值，在倾斜层、三维不均匀介质中不是常值。

6.3.4 震中距计算公式

$$X(p)=2p\int_0^{z_p}\frac{dz}{(u^2(z)-p^2)^{1/2}}$$

走时计算公式 $T(p)=2\int_0^{z_p}\frac{u^2(z)}{(u^2(z)-p^2)^{1/2}}dz$

计算沿特定射线的走时和距离。考虑沿射线路径的长度为 ds 的一个小线段，按几何学，有：

$$\frac{dx}{dz}=\tan i$$

因为 $p=u\sin i$，故可以写成：

$$\sin i=\frac{p}{u},\qquad \cos i=(1-\sin^2 i)^{1/2}=(1-p^2/u^2)^{1/2}$$

所以有

$$\frac{dx}{dz}=\tan i=\frac{\sin i}{\cos i}=\frac{p}{(u^2-p^2)^{1/2}}, \qquad dx=\frac{p}{(u^2-p^2)^{1/2}}dz$$

对其积分得到 x：

$$x(z_1,z_2,p)=p\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{(u^2(z)-p^2)^{1/2}}$$

如果我们令 z_1 为自由表面（$z_1=0$），z_2 为转折点 z_p，地震射线自地表震源到转折点（射线最深点）之间的在地表投影的距离 x 为：

$$x(p)=p\int_0^{z_p}\frac{dz}{(u^2(z)-p^2)^{1/2}}$$

由于转折点两边的射线是对称的，所以从地表原点（震源点）到地表接收点的距离 $X(p)$ 正好是上式的两倍，即：

$$X(p)=2p\int_0^{z_p}\frac{dz}{(u^2(z)-p^2)^{1/2}}$$

根据几何学还可以得知：

$$\frac{dz}{ds}=\cos i=(1-\sin^2 i)^{1/2}=(1-p^2/u^2)^{1/2}$$

因此有：

$$ds=\frac{dz}{(1-p^2/u^2)^{1/2}}$$

由此得到：

$$dt=uds=\frac{udz}{(1-p^2/u^2)^{1/2}}$$

可以得到走时自深度 z_1 到 z_2 的走时的表达式：

$$t(z_1,z_2,p)=\int_{z_1}^{z_2}\frac{u^2(z)}{(u^2(z)-p^2)^{1/2}}dz$$

该式给出了从地表原点到转折点 z_p 的走时，从地表—地表的总的走时 $T(p)$ 为：

$$T(p)=2\int_0^{z_p}\frac{u^2(z)}{(u^2(z)-p^2)^{1/2}}dz$$

6.3.5 在上面的层中，$(u^2(z)-p^2)^{1/2}$ 为实数。到达慢度小于射线参数的情况，$(u^2(z)-p^2)^{1/2}$ 为虚数，则表明地震波不能到达该层。

6.3.6

当 p=0.1s/km 时

$$dx=\frac{p}{(u^2-p^2)^{1/2}}dz=\frac{0.1\times 2}{(0.2^2-0.1^2)^{1/2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=1.15(\text{km})$$

$$dt=\frac{udz}{(1-p^2/u^2)^{1/2}}=\frac{0.2\times 2}{(1-0.1^2/0.2^2)^{1/2}}=0.4619(\text{s})$$

当 p=0.12s/km 时

$$dx=\frac{p}{(u^2-p^2)^{1/2}}dz=\frac{0.12\times 2}{(0.2^2-0.12^2)^{1/2}}=1.5(\text{km})$$

$$dt=\frac{udz}{(1-p^2/u^2)^{1/2}}=\frac{0.2\times 2}{(1-0.12^2/0.2^2)^{1/2}}=0.5(\text{s})$$

由此可见，随着 p 参数的增大，偏垂角增大，射线可以穿过更长的水平距离，走时也会增加。

6.3.7 根据 $dx=\frac{p}{(u^2-p^2)^{1/2}}dz$，得到 $4=\frac{0.3\text{dz}}{(0.5^2-0.3^2)^{1/2}}$，从而得到该层的厚度为 dz=5.333km

将这些参数代入 $dt=uds=\frac{udz}{(1-p^2/u^2)^{1/2}}=\frac{0.3\times 5.333}{(1-0.5^2/0.3^2)^{1/2}}=1.2(\text{s})$

6.3.8 首先求取 p 参数，根据描述可知

$$p=\frac{\sin i}{v}=\frac{\sin 30^o}{6km/s}=\frac{1}{12}s/km$$

该射线在 8km 的水平层中的偏垂角为 $i=\arcsin(vp)=\arcsin\left(\frac{8}{12}\right)=41.8^o$

该射线在 10km 的水平层中的偏垂角为 $i=\arcsin(vp)=\arcsin\left(\frac{10}{12}\right)=56.4^o$

可见，同一条射线（射线参数相同）在速度较高的水平层中偏垂角越大，即传播越接近水平。

6.3.9

（1）地表震源点射出射线的偏垂角分别为 30 度时,射线参数为

$$p=\frac{\sin i}{v}=\frac{\sin 30^o}{1km/s}=\frac{1}{2}s/km$$

该射线在下层中的偏垂角为 $i=\arcsin(vp)=\arcsin\left(\frac{1.5}{2}\right)=48.6^o$

这样可以求出：

$$dx=\frac{p}{(u^2-p^2)^{1/2}}dz=\frac{0.5\times 2}{(\frac{1}{1.5^2}-0.5^2)^{1/2}}=2.3(\text{km})$$

$$dt=\frac{udz}{(1-p^2/u^2)^{1/2}}=\frac{\frac{1}{1.5}\times 2}{(1-\left(0.5\times 1.5\right)^2)^{1/2}}=2(\text{s})$$

（2）第一层的慢度矢量 $s=\left(\frac{\sin 30^o}{1km/s}=\frac{1}{2}s/km,\frac{\cos 30^o}{1km/s}=\frac{\sqrt{3}}{2}s/km\right)$

第二层的慢度矢量 $s=\left(\frac{\sin 48.6^o}{1.5km/s}=\frac{1}{2}s/km,\frac{\cos 48.6^o}{1.5km/s}=0.441s/km\right)$

6.4.1 假定速度梯度为常数的层的上边界和下边界的速度分别为$\upsilon_1(z_1)$与$\upsilon_2(z_2)$，清对应的深度为 z_1 和 z_2, 该层中的速度和梯度斜率 b 值可以表示为

梯度斜率 b 值可以表示为：

$$\upsilon(z)=a+bz,\quad b=\frac{\upsilon_2-\upsilon_1}{z_2-z_1}$$

通过求解积分 t（p）和 x（p），可以得到

$$x(p)=p\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{\sqrt{\left(a+bz\right)^{-2}-p^2}}=-p\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{bu^2\sqrt{u^2-p^2}}=\frac{\sqrt{u^2-p^2}}{bup}\Bigg|_{u_2}^{u_1}$$

$$t(p)=\int_{z_1}^{z_2}\frac{\left(a+bz\right)^{-2}dz}{\sqrt{\left(a+bz\right)^{-2}-p^2}}=-\frac{1}{b}\int_{z_1}^{z_2}\frac{d\left[\left(a+bz\right)^{-1}\right]}{\sqrt{\left(a+bz\right)^{-2}-p^2}}=\frac{1}{b}\left[\ln(u+\sqrt{u^2-p^2})+C\right]_{u_2}^{u_1}$$

$$=\frac{1}{b}\left[\ln(u+\sqrt{u^2-p^2})-\ln p\right]_{u_2}^{u_1}=\frac{1}{b}\left[\ln(\frac{u+\eta}{p})\right]_{u_2}^{u_1}$$

6.4.2 如图 6-4-1, 地震射线由上向下穿过地下某地层, 其中一微元 ds 对应的曲率中心为 0, 在 A 点的偏垂角为 i, 在 B 点的偏垂角为 i+di, 则根据平面几何相关知识得知 AB 弧对应的角度为 di。其曲率半径 R 为

$$\frac{1}{\rho}=\frac{di}{ds}$$

根据 Snell 定律，$pv=\sin i$，两边对 s 求导数有：

$$\frac{d\sin i}{ds}=p\frac{dv}{ds}=p\frac{dz}{ds}\frac{dv}{dz}$$

因为 $\frac{di}{ds}=p\frac{dv}{dz}$ 所以代入得 $\frac{1}{\rho}=p\frac{dv}{dz}$

如果随深度线性增加的速度定义为$v = v_0 + bz$，则可以得到

$$\frac{1}{\rho} = pb = const$$

与地震波速度随深度的变化率和 p 参数有关。

6.4.3 设地表的速度为v_0，p 参数表示为 $p = \frac{\sin i_0}{v_0}$，则$\sin i_0 = pv_0$。射线穿透的最深深度 d 和震中距 x 可表示为

$$d = \frac{1 - pv_0}{bp}$$

$$x = 2\frac{\sqrt{1 - p^2 v_0^2}}{bp}$$

因此可以看出 d 和 x 与 p、地表速度、速度随深度的变化率 b 都有一定关系。

6.4.4

该地震射线的参数为 $p = \frac{\sin i}{v} = \frac{\sin 30^o}{2km/s} = \frac{1}{4} s/km$。

速度随深度增加的斜率为 b=0.5km/s. 由此可得：

（1） 穿透深度为：$d = \frac{1 - pv_0}{bp} = \frac{1 - 0.25 \times 2}{0.5 \times 0.25} = 4(\text{km})$

（2）震中距为 $x = 2\frac{\sqrt{1 - p^2 v_0^2}}{bp} = 2\frac{\sqrt{1 - 0.25^2 \times 2^2}}{0.5 \times 0.25} = 13.9(km)$

（3）传到地面的时间：$t = \frac{2}{b}\sinh^{-1}\frac{bx}{2v_0} = \frac{2}{0.5}\sinh^{-1}\frac{0.5 \times 13.9}{2 \times 2} = 5.3(s)$

6.4.5 因为 $$\frac{1}{\rho} = pb = const$$

其中 p 为 0.25s/km，b=0.15 ，所以曲率半径为 26.6667km 。射线到达地表的震中距为

$$x = 2\frac{\sqrt{1 - p^2 v_0^2}}{bp}$$

所以震中距为 35.28km

$$t = \frac{2}{b}\sinh^{-1}\frac{bx}{2v_0}$$

t=10.61 s

当 p 为 0.2 时用上述方法求解可得：震中距为 53.3km，返回地面所需时间为 14.64s。可见随着 p 参数的减小，偏垂角减小，震中距和返回地面的时间均增大。

6.4.6 因为 $$\frac{1}{\rho}=p\frac{dv}{dz}$$

根据 $v=3+0.2z+0.02z^2$ 可知 $\frac{dv}{dz}=0.2+0.02z$，在 3km 深处的 0.01s/km 的地震射线曲率为：$\frac{1}{\rho}=p\frac{dv}{dz}=0.01\times(0.2+0.01\times3)=0.0023$，$\rho$ 为 434.8km。

6.4.7 地震射线最低点处的偏垂角为 90 度，由此可知，射线参数 $p=\frac{\sin 90^o}{10.87}=0.092(\mathrm{s/km})$，

水平层状介质中射线参数不变，$p=\frac{\sin 90^o}{10.87}=\frac{\sin i}{6.1}$ 可得射线在地表的偏垂角为 34.137 度。

6.4.8 设射线穿过的最深深度为 r，则根据 Snell 定律有：

$$\frac{\sin i_0}{v_0}=\frac{1}{v_0+kr}=\frac{\sin i_h}{v_0+kh}\Rightarrow \sin i_h=\frac{v_0+kh}{v_0+kr} \qquad (1)$$

只要我们能给出 r 的表达式就可以给出 i_h 的表达式了。

假定震中距 x 由两部分组成 a 和 b。我们知道速度随深度线性分布的射线路径为圆，曲率半径为：$\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\rho^2-\left(\frac{v_0}{k}\right)^2}$

曲率半径和最深点深度的关系为

$$\rho=\frac{v_0}{k}+r\Rightarrow\frac{x}{2}=\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}+r\right)^2-\left(\frac{v_0}{k}\right)^2}$$

$$a=\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}+r\right)^2-\left(\frac{v_0}{k}+h\right)^2}$$

$$b=x-a\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}+r\right)^2-\left(\frac{v_0}{k}\right)^2}=x-\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}+r\right)^2-\left(\frac{v_0}{k}+h\right)^2}$$

由此可得到

$$r=\sqrt{\left(\frac{x^2-h^2-2\frac{v_0}{k}h}{2x}\right)^2+\left(\frac{v_0}{k}+h\right)^2}-\frac{v_0}{k} \qquad (2)$$

将（2）式代入（1）式可得到偏垂角的表达式。

6.4.9 震源深度处的地震波速度为 $v_h=4+0.1\times10=5km/s$，30 度离源角的射线到达的最

深深度为$\frac{\sin i_h}{v_h}=\frac{1}{v_m}\Rightarrow v_m=\frac{5}{\sin 30^o}=10km/s$，根据地震波速度表达式 v=4+0.1z，速度岁深度的变化率 k 为 0.1，可求出射线转折点的深度r_h=60km。射线的曲率半径为

$$\rho=r_h+\frac{v_0}{k}=60+40=100km$$

根据上题中的推导，x=a+b

这里$a=\sqrt{\rho^2-\left(\frac{v_0}{k}+h\right)^2}=86.6km$，$b=\sqrt{\rho^2-\left(\frac{v_0}{k}\right)^2}=91.65km$

这样得到震中距为 x=178.25km。

6.4.10

正如我们在上题所看到的，速度随深度线性增加的介质层中的射线路径的半径为$\rho=\frac{v_0}{k}+r_h$，其中r_h射线在最低点的深度。则射线的总走时可以表示为：

$$t=2\frac{\overline{FP}}{v_0}+\frac{2}{k}\sinh^{-1}\frac{kx'}{2v_0}$$

这里x'为线性增加速度层中的震中距。

在速度为常数的层中，射线为直线，在下面的速度线性增加的速度层中，射线路径为圆。总的震中距 x 可以表达为：

$$x=x'+2H\tan i_0$$

直线在常数速度层中的$\overline{FP}=\frac{H}{\cos i_0}$。这样地震波的走时为：

$$t=\frac{2H}{v_0\cos i_0}+\frac{2}{k}\sinh^{-1}\frac{kx'}{2v_0}$$

根据 Snell 定律，有：

$$\frac{\sin i_0}{v_0}=\frac{1}{v_0+kr_h}\Rightarrow v_m=v_0+kr_h=\frac{v_0}{\sin i_0}$$

根据线性速度增加介质中的射线曲率半径的表达式可以知道

$$\left(\frac{x'}{2}\right)^2+\left(\frac{v_0}{k}\right)^2=\left(\frac{v_0}{k}+r_h\right)^2=\frac{v_m^2}{k^2}=\frac{v_0^2}{k^2\sin^2 i_0}$$

$$x'=2\frac{v_0}{k}\cot i_0$$

这样，震中距可以表达为：

$$x=x'+2H\tan i_0=\frac{2v_0}{k}\cot i_0+2H\tan i_0$$

将 $x' = 2\frac{v_0}{k}\cot i_0$ 代入走时表达式得：

$$t = \frac{2H}{v_0 \cos i_0} + \frac{2}{k}\sinh^{-1}\left(\cot i_0\right)$$

（2）将震中距的表达式代入得

$$140 = \frac{2\times 6}{0.01}\cot i_0 + 2\times 10\tan i_0$$

$$i_0 = 45^o, i_0 = 80.5^o$$

6.4.11 射线自地表射到第一层底部马上折返的直达波的震中距为

$$x = 2\int_0^H \frac{vp}{\sqrt{1-p^2v^2}}dz = \frac{2}{k}\int_0^H \frac{kp\left(v_0+kz\right)}{\sqrt{1-p^2\left(v_0+kz\right)^2}}dz$$

到达底部马上折返的直达波在底部的偏垂角为 90 度。因此有：

$$p = \frac{\sin i_c}{v_0 + kH} = \frac{1}{2\left(v_0+kH\right)}$$

代入上面震中距的表达式进行积分得到：

$$x_c = \frac{4\left(v_0+kH\right)}{k}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1-\frac{v_0^2}{4\left(v_0+kH\right)^2}}\right]$$

直达波最大距离对应于射线曲率半径为 $\rho = H + \frac{v_0}{k}$，则

$$\left(\frac{x_{\max}}{2}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{k}+H\right)^2 \Rightarrow x_{\max} = 2H\sqrt{1+\frac{2v_0}{kH}}$$

（2）对于 H=10km,地表速度为 1km/s，k=0.1/s。上层底层的速度为

$$v_H = v_0 + kH = 1 + 10\times 0.1 = 2km/s$$

下层介质顶部的速度为 $v_1 = 2\left(v_0+kH\right) = 4km/s$

可以计算得到第一临界距离为 8.2km，直达波的最大距离为 34.6km
走时表达式为

$$t = \frac{2}{k}\sinh^{-1}\left(\frac{kx}{2v_0}\right) = 20\sinh^{-1}\left(0.05x\right)$$

6.5.1（1）根据本节所讲的内容： $p = \frac{1}{v_0}\cos\left(\frac{\alpha x}{2}\right)$

$$t = \int_0^x pdx = \int_0^x \frac{1}{v_0}\cos\left(\frac{\alpha x}{2}\right)dx = \frac{2}{\alpha v_0}\sin\left(\frac{\alpha x}{2}\right)$$

对于偏垂角为 30 度、地表为 6km/s 的速度，可以得到 $p=\frac{\sin i_0}{v_0}=\frac{1}{12}$，因此

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{6}\cos\left(\frac{x}{2\times 2}\right)\Rightarrow x=\frac{4\pi}{3}$$

对应的走时为

$$t^{\mathrm{P}}=\frac{2}{\alpha v_0}\sin\left(\frac{\alpha x}{2}\right)=\frac{2}{\frac{1}{2}\times 6}\sin\left(\frac{4\pi}{2\times 2\times 3}\right)=0.58s$$

（2）PP 波自震源第一次到达地表的路径应该为台站震中距的一半，因此其距离为 $\frac{4\pi}{6}$，其走时为两次 P 波震中距为 $\frac{4\pi}{6}$ 所用的时间，因此为

$$t^{\mathrm{PP}}=2\frac{2}{\alpha v_0}\sin\left(\frac{\alpha\frac{x}{2}}{2}\right)=2\frac{2}{\frac{1}{2}\times 6}\sin\left(\frac{4\pi}{2\times 2\times 6}\right)=0.67s$$

两者之差为 0.09s。

（3）由于 $p=\frac{1}{v_0}\cos\left(\frac{\alpha x}{2}\right)$，并且 PP 波运行路程得一半即到达地表，因此得到

$$p=\frac{1}{6}\cos\left(\frac{1}{2}\frac{4\pi}{6}\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

根据 $p=\frac{\sin i_0}{v_0}$ 可以得到 PP 波的偏垂角为 60 度。

6.5.2 根据 Snell 定律出现首波的射线在第一层的偏垂角 i_c 满足，

$$i_c=\arcsin\frac{v_H}{v_1}=\arcsin\frac{v_0e^{\alpha H}}{2v_0e^{\alpha H}}\Rightarrow i_c=30^o$$

此时对应的 p 参数为 $p=\frac{1}{2v_0e^{\alpha \mathrm{H}}}$

代入指数增加速度层的震中距表达式得：$x=\frac{2}{\alpha}\left[\sin^{-1}\left(pv_0e^{\alpha H}\right)-\sin^{-1}\left(pv_0\right)\right]=\frac{2}{\alpha}\left(i_c-i_0\right)$

（2）反射波的最小时间为垂直到达界面并垂直反射的时间，即

$$t=2\int_0^H \frac{dz}{v}=2\int_0^H \frac{e^{-\alpha z}dz}{v_0}=\frac{2}{\alpha v_0}\left(1-e^{-\alpha H}\right)$$

（3）在第一层传播的直达波的最远距离为在第一层底部为水平传播的射线，此射线的 p 参数为 $p=\frac{\sin 90^0}{v_0 e^{\alpha H}}=\frac{1}{v_0 e^{\alpha H}}$ ，代入指数增加速度层的震中距表达式得：

$$x_{\max}=\frac{2}{\alpha}\left[\sin^{-1}\left(pv_0e^{\alpha H}\right)-\sin^{-1}\left(pv_0\right)\right]=\frac{2}{\alpha}\left[\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(e^{\alpha H}\right)\right]=\frac{2}{\alpha}\arccos e^{-\alpha H}$$

（4）将 v0=1km/s，H=10km，α=0.1/km 代入上面的表达式得到：首波出现的最小距离为 6.8km，反射波的最短时间为 12.6 秒，在第一层传播的直达波的最大震中距为 23.9km。

6.6.1 错误。因为震中距 x 随 p 减小而增大，即随偏垂角的减小，震中距离增大。p 值较大的射线在较浅的深度转折，行进的距离较短。射线参数减小，转折点的深度增大，震中距 x 也增大。

6.6.2 p 值较大的射线在较浅的深度转折，行进的距离较短。射线参数减小，转折点的深度增大，距离 x 也增大。这是地球介质通常能够看到的现象。在这种情况下，导数 dx/dp 是负的，我们说，这支走时曲线是顺行的。此时走时曲线也是逐渐上升的。

6.6.3 当遇到速度陡变带或高速度时，会出现走时曲线逆行的情况。为了更清楚地研究走时、震中距及 p 参数之间的关系，地震学中引入

$$\tau(p)=T(p)-pX(p)$$

此时，$T(p)$ 和 $X(p)$ 分别为射线参数为 p 的走时和震中距。

6.6.4

$$\begin{aligned}\tau&=2\int_0^{z_p}\left[\frac{u^2}{(u^2-p^2)^{1/2}}-\frac{p^2}{(u^2-p^2)^{1/2}}\right]dz\\&=2\int_0^{z_p}(u^2(z)-p^2)^{1/2}dz\\&=2\int_0^{z_p}\eta(z)dz\end{aligned}$$

其中，$\eta(z)=(u^2(z)-p^2)^{1/2}=u(z)\cos\theta$

τ 与 p 关系曲线的斜率为：

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{dp}&=\frac{d}{dp}2\int_0^{z_p}(u^2-p^2)^{1/2}dz\\&=-2p\int_0^{z_p}\frac{dz}{(u^2-p^2)^{1/2}}=-X(p)\end{aligned}$$

$\tau(p)$ 曲线的斜率为 $-X$ 。因为 $X\geq 0$，所以 $\tau(p)$ 曲线总是下降或单调下降。

6.6.5 如果地球里速度偶然快速变化，$\frac{dx}{dp}>0$，射线本身出现反向迴转。当 $\frac{dx}{dp}>0$，就会

出现走时曲线是逆行的现象。

6.6.6 地球平层介质中存在低速区时，由于低速层的存在使走时曲线产生了一个间隙，在 $T(x)$ 和 $\tau(p)$ 曲线上叫做影区

6.7.1 在地震研究中，一般将震中距小于 1000km 或 10° 的地震称为近震或区域地震(regional event)，其中小于 200km 的地震称为地方震（local event）。

6.7.2 沿莫霍面下的上地幔顶部传播的折射波，称为首波。

6.7.3（1）直达波是从震源直接到达地震台的波，图 6-7-1 为直达波在单层地壳中传播的示意图。假设地壳的地震波的速度为 V1，震源深度为 h，震中距（在近震采用 km）为 Δ，则地震波走时可以表示为

$$t_{P_g,Sg}=\frac{\Delta}{v_1}\sqrt{1+(\frac{h}{\Delta})^2}$$

（2）一般情况下，震源深度小于 20km 的范围，如果震中距相对于震源深度 h 足够大，上式子的根号里可以简化为 1，这就是震中距较大的走时曲线的渐近线（asymptote），走时曲线都以过原点的直线为渐近线（asymptote），渐近线的斜率(slope)为地震波速的慢度。

渐近线方程为 $t=\frac{\Delta}{v_1}$

6.7.4（1）假设莫霍面深度为 H，震源深度和震中距与上题相同（图 6-7-3），根据初等几何知识，可知反射波的走时为：

$$t_{PmP,SmS}=\frac{\sqrt{\Delta^2+\left(2H-h\right)^2}}{v_1}$$

（2）渐近线为 $t=\frac{\Delta}{v_1}$.

6.7.5 当波由上层介质传播至与下层介质的分界面时，将发生波的反射和折射。部分能量会反射回上层介质中传播，部分能量将透射到下层介质中去，在下层介质中传播。通过第三章的学习，我们已经知道：当下层波速大于上层波速时，入射角越大，反射波能量的比例将越大，透射波能量的比例将越小，当入射角大到一定值时，波的能量将全部反射，无能量透射，该入射角我们定义为临界角，并记为 i_0。根据 Snell 定律有 $\sin i_0=\frac{v_1}{v_2}$。

如图 6-7-5 所示，首波的走时为 AB, CB, CD 段的走时之和。AB 段走时 $t_{AB}=\frac{AB}{v_1}=\frac{H-h}{v_1\cos i_0}$，CD 段走时 $t_{CD}=\frac{CD}{v_1}=\frac{H}{v_1\cos i_0}$，而 BC 段的距离为：

$$BC=\Delta-\Delta_{AB}-\Delta_{CD}=\Delta-\left(H-h\right)\tan i_0-H\tan i_0=\Delta-\left(2H-h\right)\tan i_0$$

所以，BC 段的走时为 $t_{BC}=\frac{BC}{v_2}=\frac{\Delta-\left(2H-h\right)\tan i_0}{v_2}$

所以首波的走时为：

$$t_{Pn}=t_{AB}+t_{CD}+t_{BC}=\frac{2H-h}{v_1\cos i_0}+\frac{\Delta-(2H-h)\tan i_0}{v_2}$$

$$=\frac{\Delta}{v_2}+\frac{(2H-h)}{v_1}\left(\frac{1}{\cos i_0}-\frac{v_1}{v_2}\tan i_0\right)=\frac{\Delta}{v_2}+\frac{(2H-h)}{v_1}\cos i_0$$

$$=\frac{\Delta}{v_2}+\frac{(2H-h)\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}}{v_1}=\frac{\Delta}{v_2}+(2H-h)\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-\frac{1}{v_2^2}}$$

6.7.6（1）在首波 Pn,Sn 的射线路径示意图中，当 BC 为零时为首波的出现的临界距离，称为第一临界距离，即：

$$\Delta_{c1}=(2H-h)\tan i_0=(2H-h)\frac{\sin i_0}{\cos i_0}=(2H-h)\frac{\frac{v_1}{v_2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}}=(2H-h)\frac{v_1}{\sqrt{v_2^2-v_1^2}}$$

（2）与直达波比较，虽然首波以更快的速度传播，但由于传播路径较直达波长，因而在一定的震中距范围内，Pg 波仍是地震图记录的第一个震相，而 Pn 波由于是沿 Moho 界面传播的次生波源的波，通常较 Pg 波弱，容易被 Pg 波所覆盖，不易识别。在超过一定临界震中距时，Pn 将是地震图上记录的第一个震相，从而可以清楚的识别出 Pn 震相，我们将这个临界距离称为首波的第二临界震中距

6.7.7 选择 D

6.7.8 根据

$$t_{Pn}=\frac{\Delta}{v_2}+(2H-h)\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-\frac{1}{v_2^2}}$$

可知，走时曲线的斜率为地幔顶部速度的倒数即$1/v_2$，求得v_2=8km/s；

再由截距为$3\sqrt{7}$ s，即$(2H-h)\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-\frac{1}{v_2^2}}=3\sqrt{7}$，将地幔、地壳的速度和地震深度10km代入，可以求出地壳的厚度，H=42.6km。

6.7.9已知震源深度和每一个地层的厚度，根据这两个条件就可以计算得出地震所在的层号.

6.7.10对于第一层的震源，不必用试射法，离源角通过$\theta_j=\tan^{-1}\frac{\Delta}{h}$可直接求出（图6-7-7）。对于位于其他层的地震，由于地下介质速度随深度会增大，我们台站所在的位置一定在离源角的$\alpha_{\min}=\arctan\frac{\Delta}{h}$（最小值）和$\alpha_{\max}=\arctan\frac{\Delta}{d_z}$（最大值）所射出的射线到达地面的位置之间。我们以这两个边界为初值，以它们的平均值$\alpha=\frac{\alpha_{\min}+\alpha_{\max}}{2}$为离源角，利用(6-7-12)式试算出射到地面的震中距。如果此震中距大于台站的震中距，则说明离源角取得大了，则令$\alpha_{\max}=\alpha$，反之，则说明离源角取得小了，则令$\alpha_{\min}=\alpha$，进行下一次迭代，再次以

$\alpha=\dfrac{\alpha_{\min}+\alpha_{\max}}{2}$ 为离源角迭代计算，这样反复迭代直到计算得到的震中距和台站震中距在一定的误差范围内，则此时的离源角 θ_j 就可直接射到台站上。

6.7.11根据Snell定律：$p=\dfrac{\sin i_p}{\alpha}=\dfrac{\sin i_s}{\beta}$，在平层均匀介质中，p参数是由震源层的速度和偏垂角确定而且保持不变的，任何一层的层速度已知，其偏垂角是由震源层的层速度和偏垂角决定，与其他层的速度无关。

6.7.12 参看 6.7.2 节多层介质直达波得到的从震源到台站穿过各层的总走时为

$$T=\frac{d_z}{\cos\theta_j\bullet V_j}+\sum_{l=1}^{j-1}\frac{d_l}{\cos\theta_{jl}\bullet V_l}$$

总震中距为 $\Delta=d_z\tan\theta_j+\sum_{l=1}^{j-1}d_l\tan\theta_{jl}$

6.7.13假定震中距为x，震源深度为h，震源到台站的距离为 $r=\sqrt{x^2+h^2}=\sqrt{4h^2+h^2}=h\sqrt{5}$，则根据S波和P波的到时差为5.5秒，考虑到介质为possion介质，$\alpha=\beta\sqrt{3}$=3km/s

$$\frac{r}{\beta}-\frac{r}{\alpha}==\frac{h\sqrt{5}(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}=\frac{h\sqrt{5}\left(3-\sqrt{3}\right)}{3\sqrt{3}}=5.5s$$

得到h=10.5km，从而得到震中距x=21km。

6.7.14设直达波在地壳中传播的路径长度为s_1，地壳厚度为H，偏垂角为i_1，在地幔中传播的路径长度为s_2，偏垂角为i_2，则

$$\cos i_1=\frac{H}{s_1}\Rightarrow s_1=\frac{H}{\cos i_1}$$

$$\cos i_2=\frac{H}{s_2}\Rightarrow s_2=\frac{H}{\cos i_2}$$

因此，直达波的走时为地幔和地壳中地震波走时之和为

$$t=\frac{s_1}{v_1}+\frac{s_2}{v_2}=\frac{H}{v_1\cos i_1}+\frac{H}{v_2\cos i_2}$$

根据地幔的偏垂角 $i_2=30^o$，根据Snell定律，

$$\frac{\sin i_1}{v_1}=\frac{\sin i_2}{v_2}=\frac{\sin i_2}{2v_1}\Rightarrow\sin i_1=\frac{\sin 30^o}{2}\Rightarrow i_1=14.47^o$$

则P波走时为

$$t^p=\frac{H}{\alpha\cos 14.47^o}+\frac{H}{2\alpha\cos 30}=1.61\frac{H}{\alpha}$$

根据Possion介质的P波速度和S波速度的关系$\alpha=\beta\sqrt{3}$，按照上面同样的方式可以求得

同样可以求得S波的走时

$$t^S=2.79\frac{H}{\beta}$$

根据S波和P波的到时差为5.31秒，得到

$$2.79\frac{H}{3}-1.61\frac{H}{3}=5.31\Rightarrow H=13.61\text{km}$$

根据震中距的计算公式

$$x=H\tan i_1+H\tan i_2=11.41km$$

6.7.15 参看本书所给出的程序。

6.7.16根据地震首波临界角的定义$\frac{\sin i_c}{v_1}=\frac{\sin 90^o}{v_2}\Rightarrow\sin i_c=\frac{v_1}{v_2}=\frac{2.5}{4.5}\Rightarrow i_c=33.75^o$

临界角对应的首波出现的最短距离公式为$x_c=(2*0.2-0)\tan i_c=0.27km$

6.7.17 $x_{c1}=(2H-h)\tan i_c=\left(2H-\frac{H}{2}\right)\tan(48.59)=51.09$

求得H=30km，h=15km。

$$\frac{\sin i_c}{v_1}=\frac{1}{v_2},v_1=0.75v_2$$

再根据首波走时$t=\frac{(2H-h)\sqrt{v_2^2-v_1^2}}{v_1v_2}$，代入临界距离的走时，可以得到v1=6km/s，v2=8km/s。

6.7.18反射波的走时$t=\frac{\sqrt{x^2+(2H-h)^2}}{v_1}=\frac{\sqrt{150^2+(2*20-10)^2}}{6}=25.5s$

首波的走时为$t=\frac{x}{v_2}+\frac{(2H-h)\sqrt{v_2^2-v_1^2}}{v_1v_2}=22.06s$

两者的差约为3.4秒，首波比反射波早3.4秒到达地震台。

6.7.19首波第一临界距离的公式为：

$$\Delta_{c1}=(2H-h)\tan i_0=(2H-h)\frac{\sin i_0}{\cos i_0}=(2H-h)\frac{\frac{v_1}{v_2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}}=(2H-h)\frac{v_1}{\sqrt{v_2^2-v_1^2}}$$

将数值代入可得：

$$\Delta_{c1}=\left(2H-h\right)\frac{v_1}{\sqrt{v_2^2-v_1^2}}=\left(2*20-10\right)\frac{6}{\sqrt{8^2-6^2}}=34(\mathrm{km})$$

6.7.20假定地震波在地壳中的速度为v，Moho面的深度为H,由于地幔比均匀地壳的速度快20%，所以地幔速度为1.2v.由于99km恰为首波的第一临界距离，则根据（6-7-4）式可得：

$$\Delta_{c1}=\left(2H\right)\frac{v}{\sqrt{\left(1.2v\right)^2-v^2}}=\frac{2H}{\sqrt{1.2^2-1^2}}=99(\mathrm{km})$$

由此可以得到：H=32.8346km.

根据地表震源在Moho面反射波经17.2秒反射至99km的台站，因此一半的震中距为地震波由地面到达moho面，即44.5km。则地震反射波的走时为：$\frac{2\sqrt{32.8346^2+44.5^2}}{v}=17.2$ s

由此可以得到地壳的速度为：$v=\frac{2\sqrt{32.8346^2+44.5^2}}{17.2}=6.4km/s$

地幔的速度为1.2v=7.7km/s。

6.7.21直达波走时为$t=\frac{x}{a}$

根据首波临界距离公式，有

$$x_c=\left(2H-0\right)\tan i_c=2\mathrm{H}\frac{v_1}{\sqrt{v_2^2-v_1^2}}=\frac{2\mathrm{H}a}{\sqrt{v_2^2-a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{3}}\qquad（1）$$

直到波和首波在震中距$x=2a\sqrt{3}$同时到达，直达波到达的时间为$t=\frac{x}{a}=2\sqrt{3}$.

根据首波走时计算公式有：

$$t=\frac{x}{v_2}+\frac{2H\sqrt{v_2^2-v_1^2}}{v_1v_2}=\frac{2a\sqrt{3}}{v_2}+\frac{2H\sqrt{v_2^2-a^2}}{av_2}=2\sqrt{3}\qquad（2）$$

将（1）式与（2）式联立，其中仅含有H和v2的未知数，求解得到H=a;v2=2a。

首波临界角的估计：

根据（1）式

$$x_c=2H\tan i_c=2a\tan i_c=\frac{2a}{\sqrt{3}}\Rightarrow\tan i_c=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow i_c=30^o$$

6.7.22

直达波走时方程为：$t_{P_g}=\frac{\Delta}{v_1}\sqrt{1+(\frac{h}{\Delta})^2}$，可以得到直达波走时t=50.03s

反射波走时方程为 $t_{PmP}=\dfrac{\sqrt{\Delta^2+(2H-h)^2}}{v_1}$，可以得到PmP走时为51.07s。

首波走时方程为 $t_{Pn}=\dfrac{\Delta}{v_2}+(2H-h)\sqrt{\dfrac{1}{v_1^2}-\dfrac{1}{v_2^2}}$，可以得到首波Pn的走时为42.99s

可见在震中距为 250km，首波先到达，直达波次之，PmP 波后面到达。

6.7.23

直达波走时方程为 $t_{Pg}=\dfrac{\Delta}{v_1}\sqrt{1+(\dfrac{h}{\Delta})^2}$，反射波走时方程为 $t_{PmP}=\dfrac{\sqrt{\Delta^2+(2H-h)^2}}{v_1}$，根据直达P波比反射P波早到2秒，可以得到：

$$t_{PmP}-t_{Pg}=\frac{\sqrt{\Delta^2+(2H-h)^2}}{v_1}-\frac{\sqrt{\Delta^2+h^2}}{v_1}=\frac{\sqrt{\Delta^2+(2\times30-8)^2}-\sqrt{\Delta^2+8^2}}{5}=2$$

解上述方程可以得到震中距 Δ 为126.75km.

将震中距代入直达波走时计算公式，可以得到 $t_{Pg}=\dfrac{\Delta}{v_1}\sqrt{1+(\dfrac{h}{\Delta})^2}=25.4(\mathrm{s})$

直达波到时之前25.4s为地震发震时刻，得到地震发生时刻为：15：09:34.6

6.7.24

单层地壳的地震首波的走时公式为：$t_{Pn}=\dfrac{\Delta}{v_2}+(2H-h)\sqrt{\dfrac{1}{v_1^2}-\dfrac{1}{v_2^2}}$，直达P波的走时为 $t_{Pg}=\dfrac{\Delta}{v_1}\sqrt{1+(\dfrac{h}{\Delta})^2}$，首波P波比直达P波早到9.04秒，可以得到

$$t_{Pg}-t_{Pn}=\frac{\Delta}{v_1}\sqrt{1+(\frac{h}{\Delta})^2}-\frac{\Delta}{v_2}-(2H-h)\sqrt{\frac{1}{v_1^2}-\frac{1}{v_2^2}}=9.04$$

将各个已知参数代入可以得到：

采用命令 solve('sqrt(280^2+x*x)/5-280/7-(2*30-x)*sqrt(1/5^2-1/7^2)=9.04')

可以得到震源深度为 10km。

6.7.25 第 j 层的厚度为 h_j,速度为 v_j,入射角为 i_j,则在第 j 层的水平传播距离为 $\Delta x_i=\tan i_j h_j$ 将所有层的震中距相加，就得到题目中要求的震中距，$x=\sum_{j=1}^{N}\tan i_j h_j$

同理走时为各个层的走时之和，为 $t=\sum_{j=1}^{N}\dfrac{h_j}{v_j\cos i_j}$

当层厚趋于无穷小时，求和转换为积分，可以得到

$$x=\int_0^h \tan i dz \qquad t=\int_0^h \frac{dz}{v\cos i}$$

6.7.26 设反射波的速度为 v，界面深度为 h，根据题意可得：

$$\frac{2\sqrt{300^2+h^2}}{v}=0.2\text{，}\ \frac{2\sqrt{400^2+h^2}}{v}=0.22$$

从而得到 $300^2+h^2=0.01v^2, 400^2+h^2=0.0121v^2$

两式相减得：v=sqrt((400^2-300^2)/0.0021)=5.774(km/s)

代入上面第一式得：h=sqrt(0.01*v^2-300^2)=493.3m

6.7.27　　教材图 6-7-1

6.7.28　　教材图 6-7-3

6.7.29　　教材图 6-7-5

6.8.1 采用 MATLAB 程序计算

```
h=50;vp=1000;w=10;    %震源距界面距离、P 波速度及界面倾斜角度
x=[100,200];     %震中距
tup=sqrt(x.*x+4*h*h-4*h*x*sind(w))/vp
tup(2)-tup(1)
tdown=sqrt(x.*x+4*h*h+4*h*x*sind(w))/vp
tdown(2)-tdown(1)
```

计算得到上坡的 100m 和 200m 的接收点的 P 波走时为 0.1286s 和 0.2075s，200m 的接收点在 100m 接收点收到反射波后 0.0789s 才能接收到反射波。下坡的 100m 和 200m 的接收点的 P 波走时为 0.1532s 和 0.2386s，200m 的接收点在 100m 接收点收到反射波后 0.0854s 才能接收到反射波。

6.8.2 采用 MATLAB 程序计算

```
h=50;vp1=500;vp2=1500;w=10;    %震源距界面距离、P 波速度及界面倾斜角度
i0p=asin(vp1/vp2);  %临界角
x=[1000,2000];     %震中距
Pnup=(2*h*sin(i0p)+x*sin(i0p-deg2rad(w)))/vp1  %根据（6-8-2）计算接收点在上坡的 Pn 波走时
Pndown=(2*h*sin(i0p)+x*sin(i0p+deg2rad(w)))/vp1  %根据（6-8-2）计算接收点在下坡的 Pn 波走时
```

计算得到上坡的 1000m 和 2000m 的首波走时为 0.3958s 和 0.7249s；下坡的 1000m 和 2000m 的走时为 1.0506s 和 2.0346s。

6.8.3 根据倾斜界面接收点在上坡的反射波走时公式可化为 $t=\dfrac{\sqrt{\Delta\left(\Delta-4h\sin\omega\right)+4h^2}}{v_1}$，

当 $\Delta<4h\sin\omega$ 时，括号中为负值，则震中距增大会导致分子值减小，此时走时会随震中距的增大而减小。

第七章

7.1.1　假设介质是由均匀的同心球层组成(如教材图 7-1-1),各层中的波速分别为$v_1, v_2, \ldots$，地震射线在各层之间的界面上将会发生折射，由平层介质中的 Snell 定律，在 A1 点可看作平层介质，有：

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_1'}{v_2}$$

在三角形 OA_1A_2 中，应用正弦定理

$$\frac{\sin i_1'}{r_2} = \frac{\sin i_2}{r_1}$$

上面两式消去 i_1' 可得：

$$\frac{r_1 \sin i_1}{v_1} = \frac{r_2 \sin i_2}{v_2}$$

当层数无限增加，波速随 r 连续变化时，射线成为一条光滑的连续曲线，仍有

$$\frac{r \sin i}{v(r)} = \frac{R \sin i_0}{v_0} = p$$

其中 R 为地球半径，i_0, v_0 分别为地表处的入射角和波速；R, i_0, v_0 都是常数。因此 p 也是常数。这就是球层介质中的 Snell 定律。

7.1.2

$$p = \frac{R \sin i_0}{v_0} \Rightarrow i_0 = \arcsin\left(\frac{p v_0}{R}\right) = \arcsin\left(\frac{300 \times 5.0}{6371}\right) = 13.6^o$$

7.1.3

$$v = 6km/s$$

$$i_0 = 30^o$$

$$p = \frac{R \sin i_0}{v} = \frac{6371km \times \sin 30^o}{6km/s} = 530.92 s/rad$$

7.1.4

1500km 深处的半径为 $R = 6371 - 1500 = 4871(\mathrm{km})$，由于地震在该处开始折返，因此此处

的偏垂角为 90 度。将这些值代入 Snell 定律,有

$$v=\frac{R\sin i}{p}=\frac{4871km\times\sin 90^o}{530.92s}=9.17(\mathrm{km/s})$$

7.1.5

地震射线穿透的最深深度为 0.9R，则在此深处的偏垂角为 90 度，则射线参数为

$$p=\frac{0.9\times 6371km\times\sin 90^o}{10.55km/s}=543.4976s/\mathrm{rad}$$

根据球层介质的 Snell 定律有

$$\frac{R\sin i_0}{6km/s}=\frac{0.9R\sin 90^o}{10.55km/s}\Rightarrow i_0=\sin^{-1}\left(\frac{0.9\times 6}{10.55}\right)=30.8^o$$

7.1.6

根据地表震源的 p 参数表达有 $p=\frac{R\sin i_0}{v_0}$，由于地表的速度和地球半径固定不变，因此偏垂角越大，p 参数越大。偏垂角越大，地球内的射线越容易传到地表（即在较近的距离到达地表），因此震中距越小。反之亦然。

7.1.7　判断正误　（1）正确（2）正确（3）正确（4）正确

7.1.8　下面将给出走时曲线的斜率 $\frac{dt}{d\Delta}$ 与 p 的关系。这样能从实测的走时曲线求出射线参数 p 值。设由 E 出发，在同一平面内的两条相邻射线 EA 和 EB（教材图 7-1-2）。AB 之间的距离为（注意 Δ 代表弧度值）。AA’为波前，与波的传播方向垂直，经 dt 时间后，波前传到 B 处，设地表处的速度为 v_0，则有

$$A'B=ds=v_0dt$$

如果我们取的 dt 时间非常短，则弧 A’B 可看作直线，AA’B 可看作直角三角形，直角为∠AA’B，又由于波前 AA’与射线 EA 垂直，A 的矢径与地表弧 AB 垂直，因此∠AA’B=i_0，在直角三角形 A’AB 中，有

$$\frac{ds}{Rd\Delta}=\sin i_0$$

因此有

$$\frac{dt}{d\Delta}=\frac{R\sin i_0}{v_0}=p$$

这就是 Benndorf 定律，它说明走时曲线 t-Δ 图上的斜率就等于射线参数 p。其中

$\frac{Rd\Delta}{dt}=\bar{v}_0$ 为地震波视速度（Apparent velocity），$\frac{ds}{dt}=v_0$ 为地震波真速度，它与地震波视速度的关系为 $\sin i_0=\frac{v_0}{\bar{v}_0}$。

7.1.9

根据地震波射线参数和地表速度关系可知

$$p=\frac{R\sin i_0}{v_0}\Rightarrow \sin i_0=\frac{pv_0}{R}=\frac{300s\times 5km/s}{6371km}=0.2354$$

又根据 Benndorf 定律中的视速度和真速度的表达式

$$\overline{v_0}=\frac{v_0}{\sin i_0}=\frac{5}{\frac{300\times 5}{6371}}=21.24(\mathrm{km/s})$$

7.1.10

根据 Benndorf 定律，地震射线参数为走时曲线的斜率，有

$$p=\frac{dt}{d\Delta}=\frac{10s}{0.5/180rad}=3600s/rad$$

7.2.1 由于介质的对称性，射线应该在通过球心的平面内，我们用平面极坐标 r,θ 来表达射线方程。设 E 为震源，S 为台站，A 为射线上任何一点，OA 为向径 r，考虑射线上非常相近的两点 A,B，令 AB=ds，OB 为 r 和 dr 之和，把 ABC 近似看作直角三角形，有

$$\sin i=\frac{rd\theta}{ds},\cos i=\frac{dr}{ds}$$

消去 ds 得：

$$d\theta=\frac{\sin i}{\cos i}\frac{dr}{r}$$

根据球层介质中的 Snell 定律，$p=\frac{r\sin i}{v}$ 有

$$\sin i=\frac{pv}{r},\cos i=\sqrt{1-\sin^2 i}=\sqrt{1-\left(\frac{pv}{r}\right)^2}$$

代入上式有

$$d\theta=\frac{\sin i}{\cos i}\frac{dr}{r}=\frac{p}{r\sqrt{\frac{r^2}{v^2}-p^2}}dr$$

所以，
$$d\theta = \pm \frac{p}{r\sqrt{\frac{r^2}{v^2} - p^2}} dr$$

7.2.2 $dt = \frac{ds}{v}$

而根据 $ds = \frac{dr}{\cos i}$

考虑到 $\cos i = \sqrt{1 - \left(\frac{pv}{r}\right)^2}$，有

$$dt = \pm \frac{rdr}{v^2\sqrt{\frac{r^2}{v^2} - p^2}}$$

7.2.3

$$\Delta = 2p\int_{r_M}^{R} \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^2}{v^2} - p^2}}, \quad t = 2\int_{r_M}^{R} \frac{rdr}{v^2\sqrt{\frac{r^2}{v^2} - p^2}}$$

7.3.1 震中距可以表达为：

$$\Delta_i = \int_{r_B}^{r_T} \frac{p}{r\sqrt{\frac{r^2}{b^2} - p^2}} dr = \int_{r_B}^{r_T} \frac{pb}{r\sqrt{r^2 - p^2b^2}} dr \quad T_i = \int_{r_B}^{r_T} \frac{rdr}{b^2\sqrt{\frac{r^2}{b^2} - p^2}}$$

采用高等数学中的积分公式 $\int \frac{du}{u\left(u^2 - a^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{u} + c$，可得：

$$\Delta_i = \arccos\left(\frac{pb}{r_T}\right) - \arccos\left(\frac{pb}{r_B}\right)$$

因为

$$T_i = \int_{r_B}^{r_T} \frac{rdr}{b^2\sqrt{\frac{r^2}{b^2} - p^2}} = \int_{r_B}^{r_T} \frac{rdr}{b\sqrt{r^2 - p^2b^2}} = \int_{r_B}^{r_T} \frac{d\left(r^2 - p^2b^2\right)}{2b\sqrt{r^2 - p^2b^2}}$$

进行变量替换积分可得：

$$T_i = \frac{1}{b}\left(\sqrt{r_T^2 - (pb)^2} - \sqrt{r_B^2 - (pb)^2}\right)$$

7.3.2

射线能通过某层回折的必要条件为$r_T > pb$并且$r_B \le pb$。

7.3.3

设第 i 层的速度随半径 r 变化呈幂函数关系：$v = ar^b$，其中 a, b 为常数。设该层顶部和底部的速度为v_T和v_B，层顶的地球半径为r_T，层底的地球半径为r_B。则$v_T = ar_T^b, v_B = ar_B^b$，可以得到 a, b 的系数为

$$b = \frac{\ln(v_T/v_B)}{\ln(r_T/r_B)}, \quad a = e^{(\ln v_T - b\ln r_T)}$$

代入震中距**错误!未找到引用源。**进行积分，

$$\Delta_i = \int_{r_B}^{r_T} \frac{p}{r\sqrt{\frac{r^2}{a^2r^{2b}} - p^2}}dr = \int_{r_B}^{r_T} \frac{par^b}{r\sqrt{r^2 - p^2a^2r^{2b}}}dr = \int_{r_B}^{r_T} \frac{par^{b-2}}{\sqrt{1 - p^2a^2r^{2b-2}}}dr$$

$$= \int \frac{d\left(par^{b-1}\right)}{\sqrt{1 - p^2a^2r^{2b-2}}}$$

考虑到数学公式$\int \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}dv = \arccos v + c$可得到：

$$\Delta_i = \frac{1}{1-b}\left[\arccos\left(\frac{p}{\eta_T}\right) - \arccos\left(\frac{p}{\eta_B}\right)\right]$$

代入走时公式可得：

$$T_i = \int_{r_B}^{r_T} \frac{rdr}{a^2r^{2b}\sqrt{\frac{r^2}{a^2r^{2b}} - p^2}}$$

$$d\left(\frac{r^2}{a^2r^{2b}} - p^2\right) = \frac{(2-2b)r^{1-2b}dr}{a^2} \qquad dr = \frac{a^2}{(2-2b)r^{1-2b}}d\left(\frac{r^2}{a^2r^{2b}} - p^2\right)$$

由于，，代入上式，

积分可以得到：

$$T_i = \frac{1}{1-b}\left[\sqrt{\eta_T^2 - p^2} - \sqrt{\eta_B^2 - p^2}\right]$$

注意，$\eta_T = r_T/v_T, \eta_B = r_B/v_B$，射线穿过该层而回折的条件为$\eta_B \geq p$。

7.3.4

球层均匀介质中的走时计算公式为：$T_i = \frac{1}{b}\left(\sqrt{r_T^2-(pb)^2}-\sqrt{r_B^2-(pb)^2}\right)$，其中 b 为均匀层的速度，将已知参数代入上式，得到

$$T_i = \frac{1}{8}\left(\sqrt{6330^2-(200\times 8)^2}-\sqrt{6300^2-(200\times 8)^2}\right)=3.88s$$

7.3.5

传过均匀球层的震中距的计算公式为$\Delta_i = \arccos\left(\frac{pb}{r_T}\right)-\arccos\left(\frac{pb}{r_B}\right)$，将已知参数代入可得：

$$\Delta_i = \arccos\left(\frac{pb}{r_T}\right)-\arccos\left(\frac{pb}{r_B}\right)=\arccos\left(\frac{200\times 8}{6330}\right)-\arccos\left(\frac{200\times 8}{6300}\right)=0.07^o$$

7.3.6

设第 i 层的速度随半径 r 变化呈幂函数关系：$v = ar^b$，其中 a, b 为常数。设该层顶部和底部的速度为v_T和v_B，层顶的地球半径为r_T，层底的地球半径为r_B。则$v_T = ar_T^b, v_B = ar_B^b$，可以得到 a, b 的系数为

$$b = \frac{\ln(v_T/v_B)}{\ln(r_T/r_B)},\quad a = e^{(\ln v_T - b\ln r_T)}$$

代入震中距表达式进行积分，

$$\Delta_i = \int_{r_B}^{r_T}\frac{p}{r\sqrt{\frac{r^2}{a^2r^{2b}}-p^2}}dr = \int_{r_B}^{r_T}\frac{par^b}{r\sqrt{r^2-p^2a^2r^{2b}}}dr = \int_{r_B}^{r_T}\frac{par^{b-2}}{\sqrt{1-p^2a^2r^{2b-2}}}dr$$

$$= \int\frac{d\left(par^{b-1}\right)}{\sqrt{1-p^2a^2r^{2b-2}}}$$

考虑到数学公式$\int\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}dv = \arccos v + c$可得到：

$$\Delta_i = \frac{1}{1-b}\left[\arccos\left(\frac{p}{\eta_T}\right)-\arccos\left(\frac{p}{\eta_B}\right)\right]$$

7.3.7

由 7.3.7 由于 $d\left(\frac{r^2}{a^2r^{2b}}-p^2\right)=\frac{(2-2b)r^{1-2b}dr}{a^2}$ ，$dr=\frac{a^2}{(2-2b)r^{1-2b}}d\left(\frac{r^2}{a^2r^{2b}}-p^2\right)$ ，

可知 $T_i=\frac{1}{1-b}\left[\sqrt{\eta_T^2-p^2}-\sqrt{\eta_B^2-p^2}\right]$

7.3.8

根据幂指数分布速度和地球半径的关系 $v_T=ar_T^b, v_B=ar_B^b$ 可以得到

$$b=\frac{\ln(v_T/v_B)}{\ln(r_T/r_B)}=\frac{\ln(7.5/8.5)}{\ln(6330/6300)}=-26.3468$$

又已知射线参数为 200s/rad，代入教材公式（7-3-4）得到

$$\Delta_i=\frac{1}{1-b}\left[\arccos\left(\frac{pv_T}{r_T}\right)-\arccos\left(\frac{pv_B}{r_B}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{1+26.3468}\left[\arccos\left(\frac{200*7.5}{6330}\right)-\arccos\left(\frac{200*8.5}{6300}\right)\right]$$

$$=0.0012$$

即此层中的震中距增加为 0.0012 弧度。

7.3.9

将上题中的各参数代入速度指数分布球层中走时的计算公式（7-3-6），得到

$$T_i=\frac{1}{1-b}\left[\sqrt{\left(r_T/v_T\right)^2-p^2}-\sqrt{\left(r_B/v_B\right)^2-p^2}\right]$$

$$=\frac{1}{1+27.3468}\left[\sqrt{\left(\frac{6330}{7.5}\right)^2-200^2}-\sqrt{\left(\frac{6300}{8.5}\right)^2-200^2}\right]=3.8863s$$

7.4.1

球层介质中的射线曲率可以直接由曲率的定义出发来求。如教材图7-4-1，设FJ是一条由震源F到地球表面上一点J的地震射线，L是其最低点。BN和BM分别为射线在坐标（r，θ）的B点的切线和法线，M和N分别是它们与OL及其延长线的交点。以ω表示∠ONB，φ 表示∠BMN，i表示∠MBO，θ表示∠BOL。射线的一小段弧AB为 ds ，ρ表示射线在B点的曲率半径，则有：

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\omega}{ds}$$

$$\omega=\frac{\pi}{2}-\varphi=\frac{\pi}{2}-i-\theta$$

代入上式得到

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{di}{ds}-\frac{d\theta}{ds}$$

由 7.2 节的小微元分析，可知：$\sin i=\frac{rd\theta}{ds},\cos i=\frac{dr}{ds}$，所以

$$\frac{1}{\rho}=-\cos i\frac{di}{dr}-\frac{\sin i}{r}$$

将 Snell 定律表达式 $p=\frac{r\sin i}{v}$ 对 r 求微商得：

$$\frac{\sin i}{v}+\frac{r\cos i}{v}\frac{di}{dr}-\frac{r\sin i}{v^2}\frac{dv}{dr}=0$$

解出 $\frac{di}{dr}$ 代入曲率表达式可得：

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{\sin i}{v}\frac{dv}{dr}$$

对于地球速度的不同分布，射线路径有较大差别。

7.4.2

当 $v(r)=v_0$ 时，代入 $\frac{1}{\rho}=-\frac{\sin i}{v}\frac{dv}{dr}$，可得：$\rho\to\infty$，此时射线是一条直线。如教材图 7-4-2 所示。很容易求得走时 T 与距离 Δ 满足关系：

$$T=\frac{2R\sin\frac{\Delta}{2}}{v_0}$$

其中R为地球的半径。因而，走时曲线呈现为正弦曲线。

7.4.3

$$T=\frac{2R\sin\frac{\Delta}{2}}{v_0}=\frac{2\times6371\times\sin15^o}{7}=471.1246(\mathrm{s})$$

7.4.4 根据教材公式 $\mathrm{T}=\dfrac{2R\sin\dfrac{\Delta}{2}}{v}$，$p=\dfrac{dT}{d\Delta}=\dfrac{R\cos\dfrac{\Delta}{2}}{v}$，可以求得各种情况下的走时和 p 参数：

$\Delta=30^o$时，$\mathrm{T}=\dfrac{2\times6000km\times\sin15^o}{10km/s}=310.5829\mathrm{s}$，$\mathrm{p}=\dfrac{\cos15^o\times6000km}{10km/s}=579.5555\mathrm{s}$

$\Delta=60^o$时，$\mathrm{T}=\dfrac{2\times6000km\times\sin30^o}{10km/s}=600.0000\mathrm{s}$，$\mathrm{p}=\dfrac{\cos30^o\times6000km}{10km/s}=519.6152\mathrm{s}$

$\Delta=90^o$时，$\mathrm{T}=\dfrac{2\times6000km\times\sin45^o}{10km/s}=848.5281\mathrm{s}$，$\mathrm{p}=\dfrac{\cos45^o\times6000km}{10km/s}=424.2641\mathrm{s}$

$\Delta=120^o$时，$\mathrm{T}=\dfrac{2\times6000km\times\sin60^o}{10km/s}=1039.2\mathrm{s}$，$\mathrm{p}=\dfrac{\cos60^o\times6000km}{10km/s}=300.0000\mathrm{s}$

$\Delta=180^o$时，$\mathrm{T}=\dfrac{2\times6000km\times\sin90^o}{10km/s}=1200\mathrm{s}$，$\mathrm{p}=\dfrac{\cos90^o\times6000km}{10km/s}=0$

7.4.5 当 $\dfrac{dv}{dr}=\dfrac{v}{r}$，并且射线的偏垂角为 90 度时，地震射线恒绕着地球旋转。

7.4.6 当 $\dfrac{dv}{dr}=\dfrac{v}{r}$ 并且射线的偏垂角不为 90 度及 $\dfrac{dv}{dr}>\dfrac{v}{r}$ 两种情况下，地震射线会旋转进入地心。

7.4.7 地球速度分布满足 $0<\dfrac{dv}{dr}<\dfrac{v}{r}$ 情况下，地震射线凹向地球球心但可以出露地表。

7.4.8 当 $\dfrac{dv}{dr}<0$ 时，根据 $\dfrac{1}{\rho}=-\dfrac{\sin i}{v}\dfrac{dv}{dr}$ 式，$\rho>0$，射线凸向球心。这时速度随深度增加（半径 r 减小）而增加，每一条射线都有一个最低点而且都是向上弯曲的。

7.4.9 假定速度随半径指数变化，有：$v=v_0\left(\dfrac{\mathrm{R}}{r}\right)^{\alpha}$，这里 R,v_0 为地球表面的半径和速度。

则走时的解析表达式为 $t=\dfrac{2\eta_0}{1+\alpha}\sin\left(\dfrac{1+\alpha}{2}\Delta\right)$。其中 $\eta_0=\dfrac{R}{v_0}$。

7.4.10 在教材中讨论过 $v=v_0\left(\dfrac{\mathrm{R}}{r}\right)^{\alpha}$ 的射线走时的计算，将本题中的速度分布转换为教材讨论的速度分布形式，可以得到 $\alpha=0.2$，$a=\dfrac{v_0}{R^{\alpha}}$。教材给出的这种速度分布的地震波走

时计算公式为$t=\frac{2\eta_0}{1+\alpha}\sin\left[(1+\alpha)\frac{\Delta}{2}\right]$，其中$\eta_0=\frac{R}{v_0}=\frac{6000km}{6km/s}=1000s$。射线参数的计算为$p=\frac{dt}{d\Delta}=\eta_0\cos\left[(1+\alpha)\frac{\Delta}{2}\right]$，将已知的参数代入到公式中得到：

$\Delta=30^o$时，$t=\frac{2\times1000s}{1.2}\sin(1.2\times15^o)=515.0283\text{s}$，$p=1000s\times\cos(1.2\times15^o)=$ 951.0565s

$\Delta=60^o$时，$t=\frac{2\times1000s}{1.2}\sin(1.2\times30^o)=979.6421\text{s}$，$p=1000s\times\cos(1.2\times30^o)=$ 809.0170s

$\Delta=90^o$时，$t=\frac{2\times1000s}{1.2}\sin(1.2\times45^o)=1348.4\text{s}$，$p=1000s\times\cos(1.2\times45^o)=$ 587.7853s

Δ=120°时，$t=\frac{2\times1000s}{1.2}\sin(1.2\times60^o)=1585.1s$，$p=1000s\times\cos(1.2\times60^o)=309.017s$

$\Delta=150^o$时，$t=\frac{2\times1000s}{1.2}\sin(1.2\times75^o)=1666.7s$，$p=1000s\times\cos(1.2\times75^o)=0$

7.4.11

该种速度分布的地震波走时为$t=\frac{2\eta_0}{1+b}\sin\left[(1+b)\frac{\Delta}{2}\right]$

地震波在地表处$\eta_0=\frac{R}{v_0}=1000s$。根据地震射线参数为走时曲线的斜率，有$p=\frac{dt}{d\Delta}=\eta_0\cos\left[(1+b)\frac{\Delta}{2}\right]$，题目给出地震走时曲线的斜率为500s，有

$$500=1000\cos\left[(1+b)\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow b=\frac{1}{3}$$

假设震中距为 90 度的穿透的最深深度为r_p，则$p=\frac{r_p}{v_p}\Rightarrow r_p=pv_p$。根据前面的推导知道 b=1/3，代入得到：$v_p=v_0\left(\frac{R}{r_p}\right)^{\frac{1}{3}}$。与前面的式子联合可以得到：

$$r_p=v_0pR^{\frac{1}{3}}r_p^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow r_p=3564km,v_p=\frac{r_p}{p}=7.1km/s$$

7.4.12 ：北半球的地震波走时 $t^N = \frac{2R}{v_0}\sin\frac{\Delta}{2} = \frac{R}{v_0}$

南半球的地震波走时为 $t^S = \frac{2\eta_0}{1+b}\sin\left[(1+b)\frac{\Delta}{2}\right] = \frac{2\frac{R}{v_0}}{1+\frac{1}{2}}\sin\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\Delta}{2}\right] = 0.47\frac{R}{v_0}$

因此南半球的地震波先达到震中距为 60 度的台站。

7.4.13　进入低速层后，速度随着半径减小而下降较快，射线陡然向地心偏转。由于在低速区下面，速度再度增大，高于上覆介质里的速度，射线在这些介质层中达到最低点，转折向地表传播。这些射线由于经过低速层而传播了较长的震中距。这时在地面上AB段便接收不到地震波而成为影区。对应的走时曲线上出现间断，这就是地震影区。

7.4.14　当地球内部出现速度突然增加的高速层时，由于由正常的速度随深度增加到出现高速异常增加，根据射线曲率半径公式，此时曲率半径会减小，更快地折返到地面，导致震中距比正常速度分布小，这样往往会与前面射线参数较大的射线在同一震中距附近交汇，形成焦点。

7.4.15 参考教材图 7-4-11，在靠近地表的低速度中，地震射线随着射线参数的减小震中距和走时均逐渐增大(A 之前的射线)。到达速度间断面后由于存在速度间断面，地震射线在速度间断面反射，导致本来应该传到远处的地震波再近处就返回到地表，形成 A 点。然后随着 p 参数的减小震中距和走时逐渐增加，在走时曲线上形成三次往返。

7.4.16

曲率 $\frac{1}{\rho} = -\frac{p}{r}\frac{dv}{dr} = -\frac{bp}{r}$，因此地震射线在不同的深度有不同的斜率。

当 $b<0$ 时，地震射线向上弯曲；当 $b>0$ 时，地震射线向下弯曲

若射线沿球面传播，射线在地表的偏垂角为 90 度，射线参数为

$$p = \frac{R\sin\frac{\pi}{2}}{a+bR} = \frac{R}{a+bR}$$

将其代入射线曲率公式，有

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{bp}{r} = -\frac{b}{R}\frac{R}{a+bR}$$

由于射线沿球面传播的曲率半径 $\rho = -R$，代入上式可知，满足 $a=0$，并且 $b>0$ 时射线沿球面传播。

7.4.17 地球内部的速度分布为 $v(r) = a - br^2$，射线路径为圆形，根据射线曲率半径公式（7-4-6）可以得到 $\rho = \frac{r}{p\frac{dv}{dr}}$。

地表速度为 v_0，有 $v_0 = a - bR^2$，地心的速度为 2 v_0，有 $2v_0 = a$，再根据地表速度表达式

$v_0 = a - bR^2$ 得到 $b = \dfrac{v_0}{R^2}$。因此地球内部的速度可表达为 $v = v_0\left(2 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$。可以得到 R/2 处的速度为 $v' = \dfrac{7}{4}v_0$，在 R/2 处转折的射线参数为 $p = \dfrac{\frac{R}{2}\sin\frac{\pi}{2}}{v'} = \dfrac{R}{2v'} = \dfrac{2R}{7v_0}$。

在曲率半径表达式 $\rho = \dfrac{r}{p\dfrac{dv}{dr}}$ 中，速度对半径的导数是未知的，这里求得

$$\frac{dv}{dr} = \frac{d}{dr}\left(a - br^2\right) = -2br = -2\frac{v_0}{R^2}r$$

代入射线曲率表达式为

$$\rho = \frac{r}{p\left(-2br\right)} = -\frac{7R}{4}$$

如下图在该曲线的曲率中心和地心 0 和出射点 S 组成的三角形中，根据余弦定理有

$$\left(\frac{7}{4}R\right)^2 = \left(\frac{9}{4}R\right)^2 + R^2 - 2\frac{9}{4}R^2\cos\frac{\Delta}{2}$$

由此得到：$\Delta = 96.4^o$。

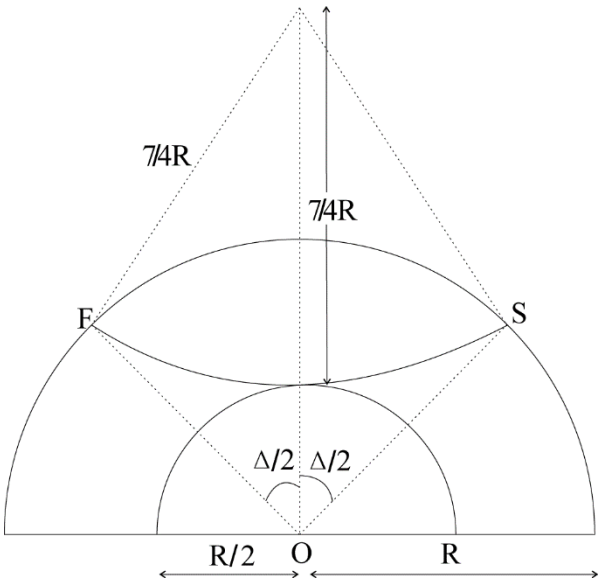


图 7E1 速度分布为 $v\left(r\right) = a - br^2$ 的射线路径

7.5.1 在地幔和地核传播的 *P* 波和 *S* 波标注如下：*P* 表示地幔里的 *P* 波，*K* 表示外核里的 *P*，*I* 表示内核里的 *P* 波，*S* 表示地幔里的 *S* 波，*J* 表示内核里的 *S* 波。由于地球外核不传播 S 波，在此没有定义。*c* 表示核—幔边界（*CMB*）的反射波，*i* 表示内核边界（*ICB*）的反射波。对整个地球里的 *P* 波和 *S* 波用上述缩写表示从震源到接收点射线的连续线段就构成了震相的名称。

7.5.2 对深源地震，向上传播、并在地表反射的那段用小写的字母 p 或 s 标注，规定为 pP，sS，sP 等。

7.5.3(1)PKP (2)PKKKKKP (3)SSS (4)PPPPP (5)ScSScS (6)PKPPKP (7)SKSSKS

7.5.4 实际地震波的传播偏离几何射线理论预示的传播路径，遇到障碍体(波阻抗极高的物体)一个著名的衍射波震相是 Pdif（参看教材图 7-5-3）。

7.5.5 103° 至 120° 之间。

7.5.6 103° 至 142° 之间。

7.5.9 因为 P 波速度大于 S 波速度，根据 Snell 定律，P 波的偏垂角大。

7.5.10 震中距是按照地震和台站的地心夹角来计量的，对于某些震相如 SSPP,SKSSKS,PcPPKP，SKKKS，PPP 等，可能绕过半个地球到了地球的另外半球，使得从震中到台站的反方向量取震中距较小，这样震中距越小，地震射线的传播路径越长，这就导致了在较远的震中距射线较早到达，就出现了走时曲线的负斜率。

7.5.11 Sdif:S 波以接近核幔界面切线方向到达核幔界面，又沿着核幔界面向前爬行一段距离然后射向地幔到达地震台站的波。

PKPPcP：从震源发出的 P 波到达核幔界面，进入外核后再次到达核幔界面，通过地幔到达地表，经地表再次反射进行地幔到达核幔界面，在核幔界面反射回到地表台站，这种路径的震相为 PKPPcP.

SSPP: 从震源发出的 S 波在地幔到达地表，经地表 1 次反射到地幔，在地幔运行后再次到达地表，然后反射转换为 P 波，经地幔到达地表，经地表再次反射后到达地震台站。这种路径的震相称为 SSPP。

7.5.12 不一样，PKIKP 为地震射线传过地球内核的震相，而 PKiKP 为在地球内外核反射的震相。

7.5.13 PcP为Gutenberg面的反射波，仅在地幔中传播，又由于是垂直入射，接收点也在震源处，则地幔的平均速度为v=2*2891km/520s=11.12km/s.

PKiKP震相为地球内外核界面的反射震相，也为垂直入射，因此在外核中的传播时间为 PKiKP 的传播时间去除地幔的传播时间 520s，即 480s, 这样外核的平均速度为 v=2*(5149.5-2891)/480=9.41(km/s).

7.5.14 PKiKP震相为地球内外核界面的反射震相，PKIKP为传过地球内核的震相，均为垂直入射，两者时间差为传过地球内核的时间，并且路径为内核的直径。这样，地球内核的速度估计为：2*(6371-5149.5)/(1217-1000)=11.23（km/s）。

7.5.15 P_{diff}为在外核边界的衍射震相，因此在内外核边界上切向射出，即偏垂角为90度。这样代入p参数的计算公式为p=(6371-2891)×sin90/13.7=254 (s/rad).

7.6.1 (1)地幔中直达波的走时为 $T=\dfrac{2R\sin\dfrac{\Delta}{2}}{v_0}$，这里 $0\le\Delta\le\Delta_{\max}$（图 7E2），$\Delta_{\max}$ 为地幔中传播射线的最大路径。根据它们的几何关系，$\cos\dfrac{\Delta_{\max}}{2}=\dfrac{\frac{R}{2}}{R},\Delta_{\max}=120^o$。

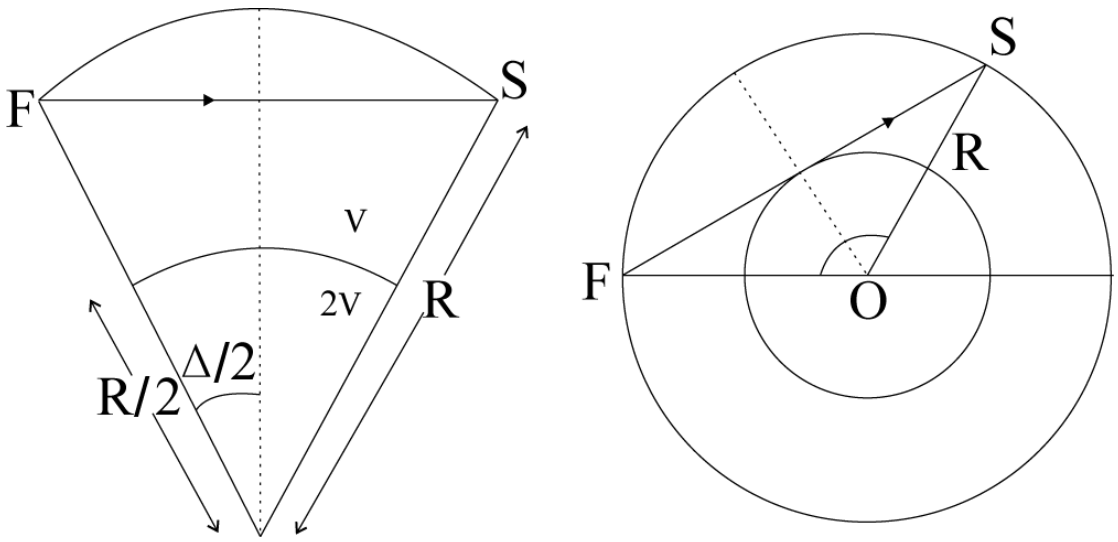


图 7E2 计算直达波的最大角距离

（2）

能够射到地核的射线的临界角为 $\frac{\sin i_c}{v}=\frac{1}{2v}, i_c=30^o$ 。为了计算临界距离 Δ_c（图 7E3），我们考虑关系三角形的内角和为 180 度，即 $\theta+\alpha+\beta=180$，再考虑三角形中的正弦定理 $\frac{\sin\alpha}{\frac{R}{2}}=\frac{\sin\beta}{R}$，可以得到 Δ_c =31 度。

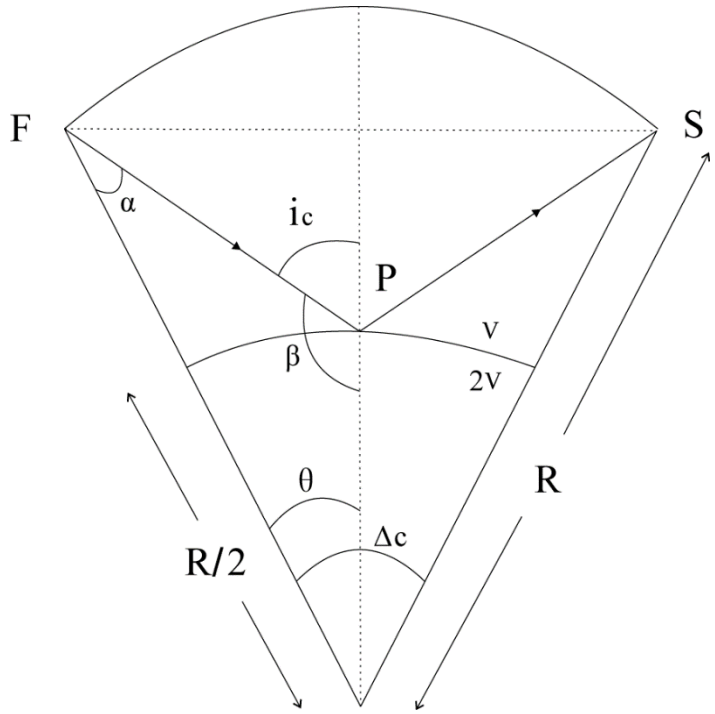


图 7E3 计算核幔界面爬行波的最小角距离

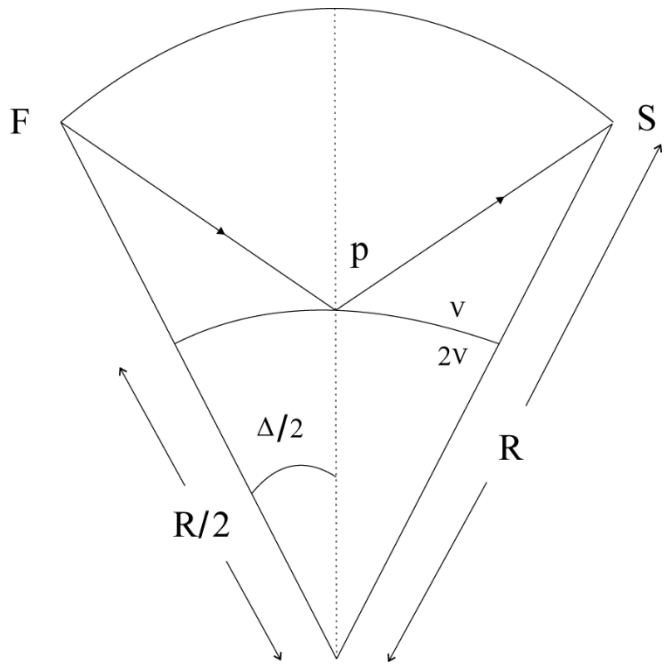


图 7E4 计算反射波的走时

(3)在核幔界面反射波的走时为

$$t=\frac{\overline{FP}}{v}+\frac{\overline{PS}}{v}=2\frac{\overline{FP}}{v}$$

根据余弦定理（图 7e4），有

$$\overline{FP}^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2+R^2-2\frac{R}{2}R\cos\frac{\Delta}{2}$$

代入上式得

$$t=\frac{R}{v}\sqrt{5-4\cos\frac{\Delta}{2}}$$

将 $\Delta_{\max}=120^o$ 代入上式的，$t=\sqrt{3}\frac{R}{v}$。

最小距离的沿核幔界面的爬行波仅在核幔界面以临界角反射，因此与反射波的走时计算类似。将 Δ_c =31 度代入走时计算公式得到：$t=1.07\frac{R}{v}$.

7.6.2 该题与上题有类似之处，但这里的地核速度小于地幔速度。在地幔中，存在直达波和反射波。正如上题所讨论的，直达波的最大距离为 120 度，直达波的走时为

$$T=\frac{2R\sin\frac{\Delta}{2}}{v_0}$$

反射波的走时为

$$t_2 = \frac{R}{v}\sqrt{5-4\cos\frac{\Delta}{2}}$$

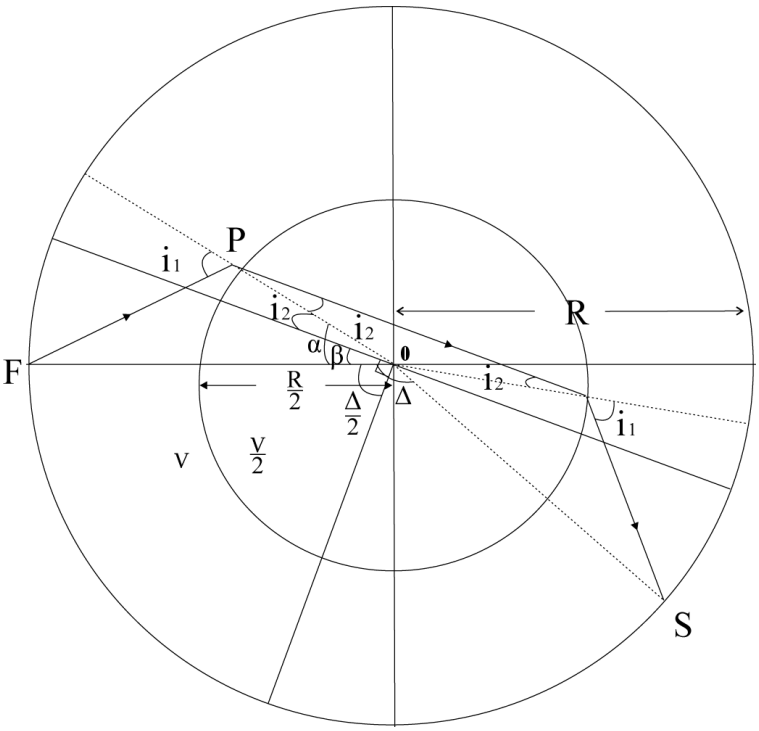


图 7E5 穿透地核的地震波路径

由于地核的速度小于地幔的速度。根据 Snell 定律，核幔界面的折射角 i_2 小于入射角 i_1（图 7E5），

$$\frac{\sin i_1}{v} = \frac{\sin i_2}{\frac{v}{2}} \Rightarrow \sin i_2 = \frac{1}{2}\sin i_1$$

穿过地幔和地核的射线走时为：

$$t_3 = \frac{\overline{FP}}{v} + \frac{2\overline{PQ}}{v} + \frac{\overline{QS}}{v} = \frac{2\overline{FP}}{v} + \frac{2\overline{PQ}}{v}$$

$$\overline{FP}^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} - 2R\frac{R}{2}\cos\alpha = R^2 + \frac{R^2}{4} - 2R^2\cos\left(90 + i_2 - \frac{\Delta}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{4}R^2 + R^2\sin\left(i_2 - \frac{\Delta}{2}\right)$$

$$\overline{PQ} = 2\frac{R}{2}\cos i_2 = R\cos i_2$$

可以得到穿透地核的地震波走时为

$$t_3 = \frac{2R}{v}\sqrt{\frac{5}{4} - \sin\left(i_2 - \frac{\Delta}{2}\right)} + \frac{2R}{v}\cos i_2$$

这里 i_2 为未知量，我们讨论它与震中距的关系。

根据图 7E5 中的几何关系，有

$$\angle PFO = i_1 - \alpha = i_1 - i_2 - \beta = i_1 - i_2 - \left(90^o - \frac{\Delta}{2}\right) = i_1 - i_2 + \frac{\Delta}{2} - 90^o$$

$$\angle FPO = 180^o - i_1$$

在三角形 FPO 中，由正弦定理有

$$\frac{\sin\angle FPO}{R} = \frac{\sin\angle PFO}{R/2}$$

将上面的表达代入有

$$\frac{\sin\left(180^o - i_1\right)}{R} = \frac{\sin\left(i_1 - i_2 + \frac{\Delta}{2} - 90^o\right)}{R/2}$$

得到 $\sin i_1 = -2\cos\left(i_1 - i_2 + \frac{\Delta}{2}\right)$，在根据前面已经得到的 i_1 和 i_2 的关系 $\sin i_2 = \frac{1}{2}\sin i_1$，变换得到

$$\Delta = 2\left[\arccos\left(-\sin i_2\right) - \arcsin(2\sin i_2) + i_2\right]$$

代入 t3 的表达式，就可以给出走时的显式表达式。

7.6.3

对于直达波，在三角形 OFS 中（图 7E6），根据余弦定理有：

$$\overline{FP} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}R\right)^2 + R^2 - 2R\frac{3}{4}R\cos\Delta}$$

因此直达波走时为

$$t_1 = \frac{\overline{FP}}{v} = \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{4}R\right)^2 + R^2 - 2R\frac{3}{4}R\cos\Delta}}{v} = \frac{R}{v}\sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{2}\cos\Delta}$$

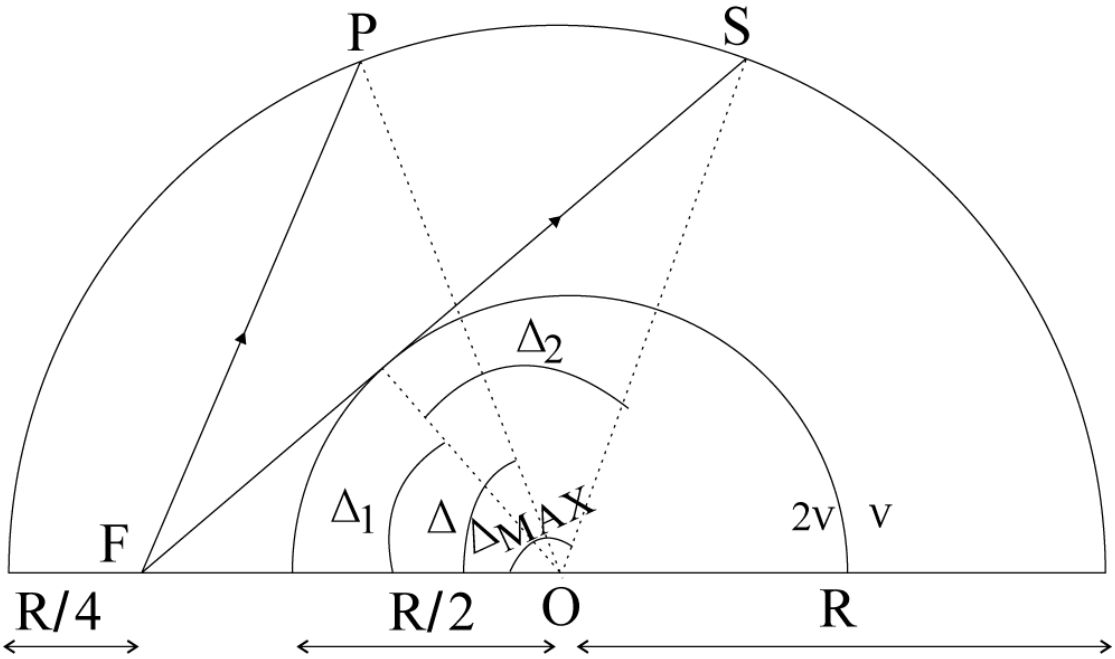


图 7E6 直达波的路径

直达波所能到达的最大距离为地震射线与核幔界面相切的情况。

$\Delta_{\max} = \Delta_1 + \Delta_2$

$$\cos\Delta_1 = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{3R}{4}} \Rightarrow \Delta_1 = 48.2^o$$

$$\cos\Delta_2 = \frac{\frac{R}{2}}{R} \Rightarrow \Delta_2 = 60.0^o$$

因此直达波的最大距离为 108.2 度。

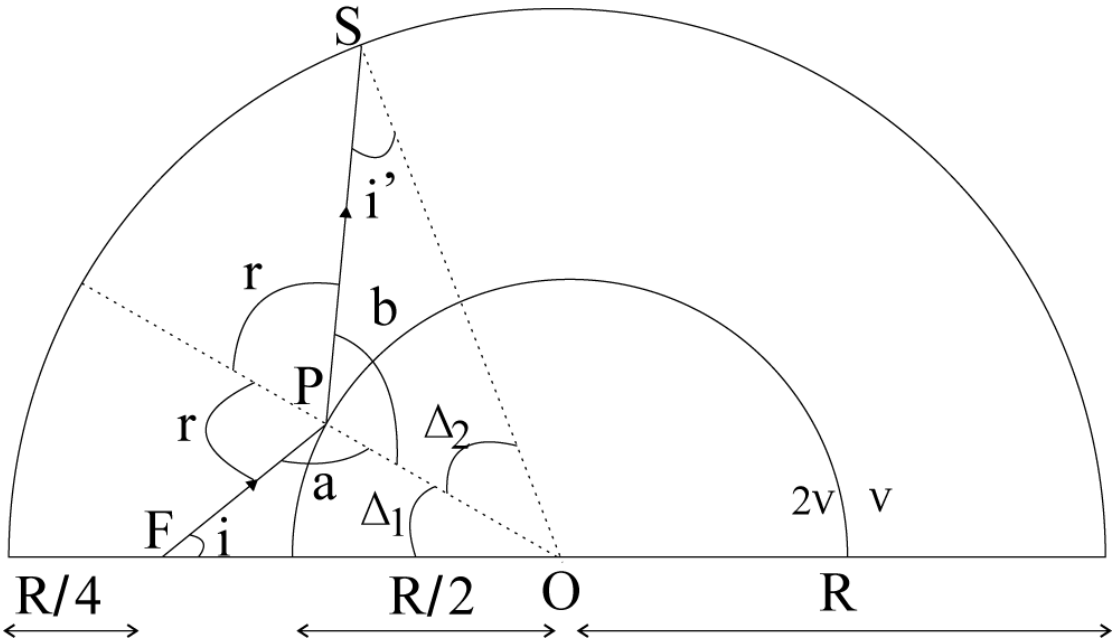


图 7E7 反射波的路径

反射波的走时为：

$$t_2=\frac{\overline{FP}}{v}+\frac{\overline{PS}}{v}$$

$$\overline{FP}=\sqrt{\left(\frac{3R}{4}\right)^2+\frac{R^2}{4}-2R\frac{3R}{4}\cos\Delta_1}$$

$$\overline{PS}=\sqrt{R^2+\frac{R^2}{4}-2R\frac{R}{2}\cos\Delta_2}$$

$$t_2=\frac{R\sqrt{\frac{13}{16}-\frac{3}{4}\cos\Delta_1}}{v}+\frac{R\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\Delta_2}}{v}$$

如果我们用震源处的离源角表示Δ_1,Δ_2，就解决了问题。

采用球层介质中的 Snell 定律有

$$\frac{\frac{3R}{4}\sin i}{v}=\frac{\frac{R}{2}\sin r}{v}=\frac{R\sin i'}{v}\Rightarrow\sin i'=\frac{3}{4}\sin i \quad （1）$$

对于三角形 FOP 中，有

$$i+a+\Delta_1=180^o,\frac{\sin a}{\frac{3R}{4}}=\frac{\sin i}{\frac{R}{2}}$$

得到：$2\sin\left(\Delta_1+i\right)=3\sin i$ （2）

对于三角形 POS，

$$b=180^o-\Delta_2-i',\frac{\sin b}{R}=\frac{\sin i'}{\frac{R}{2}}$$

得到：$\sin\left(\Delta_2+i'\right)=2\sin i'$ （3）

联立（1-3）就给出了Δ_2和Δ_1之间的关系，将Δ_2和Δ_1用震中距$\Delta=\Delta_1+\Delta_2$表示，就给出了用震中距表示的走时表达式。

7.6.4

地球的地核为整个地球半径的一半，根据前面的分析可知直达波的范围为 120 度（图 7E8）。根据 Possion 比为 1/6，可以得到$\alpha=\sqrt{\frac{5}{2}}\beta,\beta=2.53km/s$

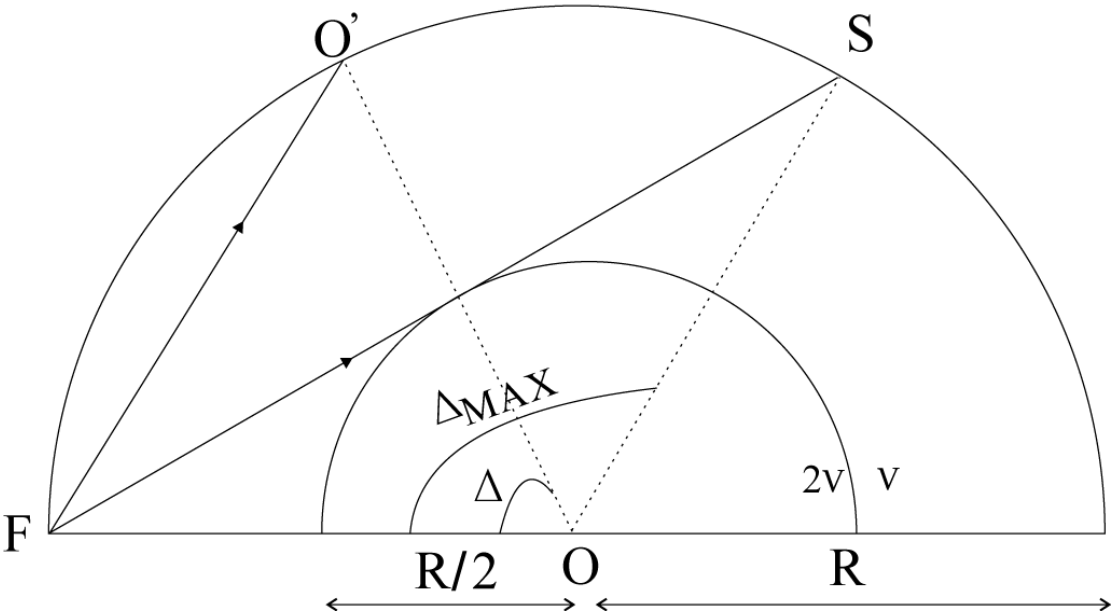


图 7E8 直达波路径

根据直达 S 波和 P 波的到时差为 547 秒。则

$$2R\sin\frac{\Delta}{2}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)=547\Rightarrow\Delta=77.7^{o}$$

由于震中距小于 120 度，因此完全可以按照均匀球体内直达波的计算公式计算。

P 波的走时为

$$\frac{2R}{\alpha}\sin\frac{\Delta}{2}=940.9s$$

地震的发震时刻为 12h07m39.5s。

7.6.5 根据 Possion 比为 1/8，可得 $\alpha=\sqrt{\frac{7}{3}}\beta$，根据直达 S 波和 P 波的到时差为 600 秒，得到震源到地表台站的路径 $\overline{FP}$ 的长度为 5212km（图 7E9）。

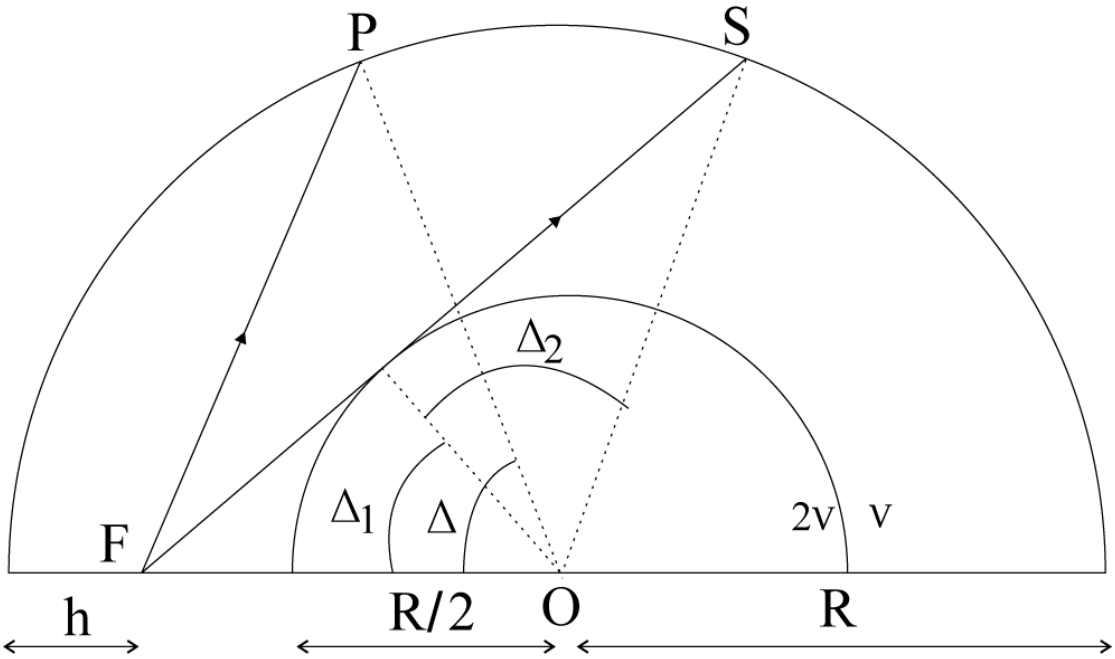


图 7E9 震源在内部的直达波路径计算

已知地震的深度为 R/10，采用正弦定理

$$\overline{FP}^2=(R-h)^2+R^2-2R(R-h)\cos\Delta$$

$$\cos\Delta=\frac{\overline{FP}^2-(R-h)^2-R^2}{2R(R-h)}$$

得到震中距为 86 度。

7.6.6

根据 Possion 比和 S 波速度得到 P 波的速度为 7.22km/s,根据第三章的 P 波速度和 S 波速度与 Possion 比之间的关系（3-3-11 式）：$\gamma=\frac{(\alpha^2-2\beta^2)}{2(\alpha^2-\beta^2)}$，即 $0.25=\frac{(\alpha^2-2\times4.17^2)}{2(\alpha^2-4.17^2)}$，得到 P 波的速度为 7.22km/s(采用 MATLAB 函数 solve('x^2-2*4.17^2==0.5*(x^2-4.17^2)')计算).

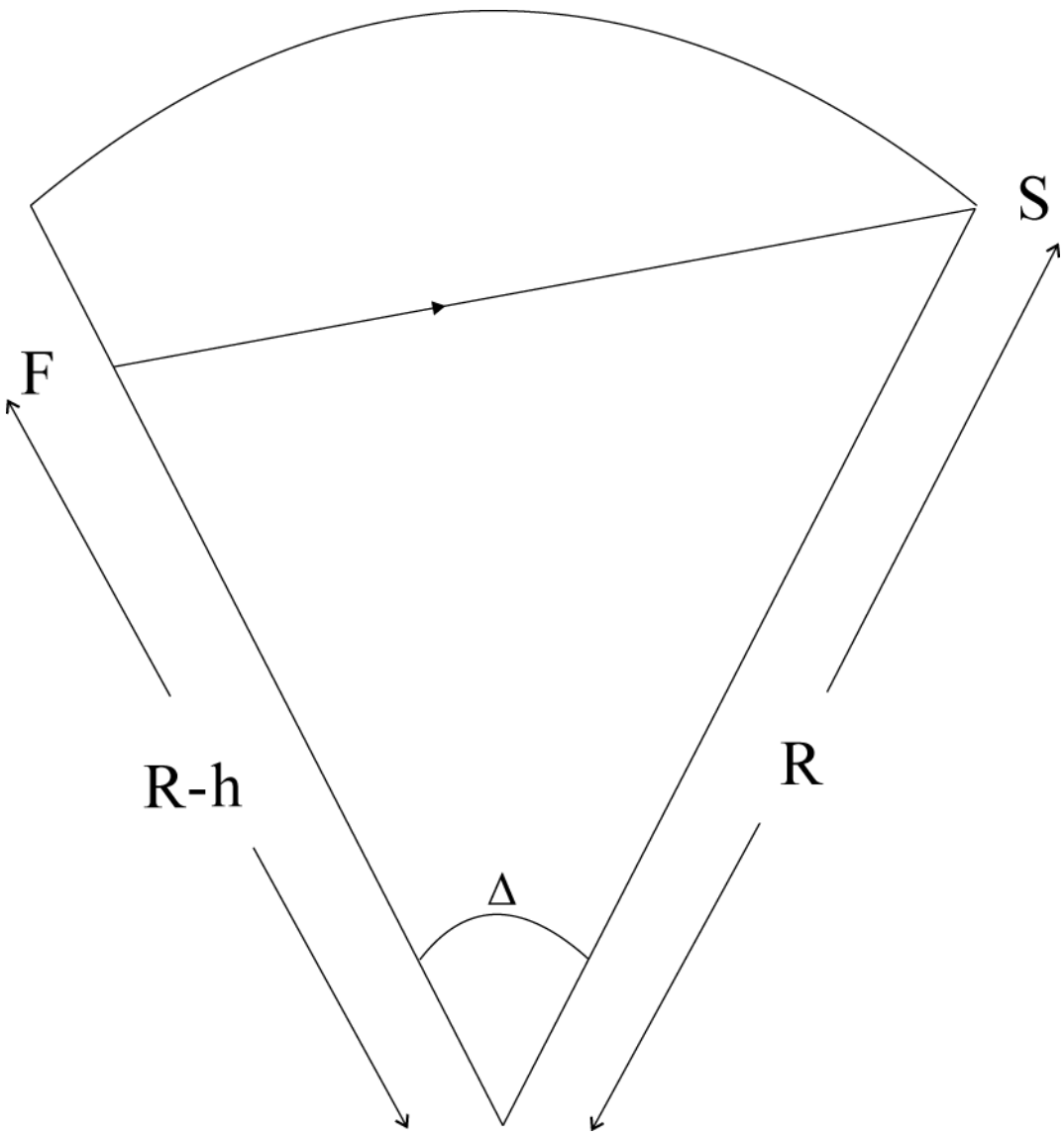


图 7E10 震源在地球内部的直达波路径

根据直达 S 波和 P 波的到时差为 554 秒，$\frac{\overline{FP}}{\beta}-\frac{\overline{FP}}{\alpha}=\overline{FP}\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}\right)=554s$ 得到射线传播的距离 $\overline{FP}=\frac{554\alpha\beta}{\alpha-\beta}=\frac{554\times7.22\times4.17}{7.22-4.17}=5469(\mathrm{km})$。

根据 $\overline{F}^{2}P=(\quad)^{2}R^{2}h+2(R)\ c\ l$，采用 MATLAB 函数 solve('5469^2==(6000-x)^2+6000^2-2*6000*(6000-x)*cosd(60)')计算可以得到 h 有两个解 h1=4706km，h2=1294km。

7.6.7（1）由于地表的速度为v_0，可以求得$a=v_0R^{\frac{1}{2}}$。地震波的速度分布为$v=v_0\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$。

这样震中距可以表达为：$\Delta = \frac{2}{1+b}\cos^{-1}\left(\frac{p}{\eta_0}\right)$，其中$\eta_0 = \frac{R}{v_0}$。

仅穿过地幔的射线达到的深度为 R/2，速度为

$$v = v_0\left(\frac{R}{\frac{R}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = v_0\sqrt{2} \Rightarrow \eta_p = \frac{\frac{R}{2}}{v_0\sqrt{2}} = \frac{R}{v_0 2\sqrt{2}} = p$$

代入震中距的表达式得到：

$$\Delta_m = \frac{2}{1+\frac{1}{2}}\cos^{-1}\left(\frac{\frac{R}{v_0 2\sqrt{2}}}{\frac{R}{v_0}}\right) = 92.4^o$$

这就是仅穿过地幔的最大震中距。

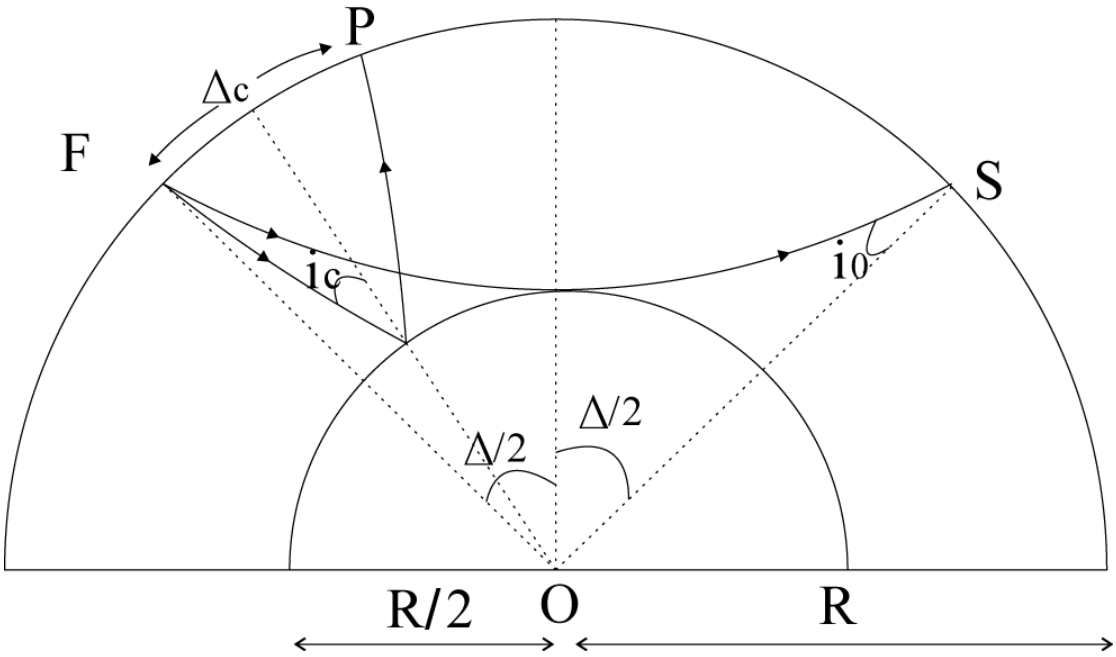


图 7E11 直达波最大距离及首波临界距离的计算

该地震射线的走时采用教材中的公式（7-4-11），得到

$$t_m = \frac{2\eta_0}{1+\alpha}\sin\left(\frac{1+\alpha}{2}\Delta_m\right) = \frac{4}{3}\frac{R}{v_0}\sin\left(\frac{3}{4}\times 92.4^o\right) = 1.2473\frac{R}{v_0}$$

（2）沿核幔界面爬行的波的偏垂角为 90 度，设在地幔中的核幔边界（R/2）邻域内处的偏垂角为i_c，根据 Snell 定律有$\frac{\sin i_c}{v_0\sqrt{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{4v_0} \Rightarrow i_c = 20.7^o$。根据 Snell 定律求射线在地表的偏垂角：

$$\frac{\mathrm{R}\sin i_0}{v_0}=\frac{\frac{R}{2}\sin\left(20.7^o\right)}{v_0\sqrt{2}}\Rightarrow i_0=7.2^o$$

（3）核幔界面爬行波出现的最小震中距为自地表以临界偏垂角射到核幔边界，立即从核幔界面返回到地表的总体震中距增加量，为从地表到核幔界面的震中距增加量的 2 倍。可以采用教材中幂指数分布球层中的震中距计算公式，将地震波速度分布写为$v=ar^b$，$a=v_0R^{\frac{1}{2}}$，b=-0.5。代入震中距计算公式（7-3-4），可得

$$\Delta_c=\frac{2}{1-b}\left[\arccos\left(\frac{p}{\eta_T}\right)-\arccos\left(\frac{p}{\eta_B}\right)\right]=\frac{4}{3}\left[\arccos\left(\frac{\frac{R\sin i_0}{v_0}}{\frac{R}{v_0}}\right)-\arccos\left(\frac{\frac{R\sin i_0}{v_0}}{\frac{R/2}{v_0\sqrt{2}}}\right)\right]$$

$$=\frac{4}{3}\left[\arccos\left(\sin i_0\right)-\arccos\left(2\sqrt{2}\sin i_0\right)\right]=18^o$$

对应的走时按照（7-3-6）式计算，有

$$T_c=\frac{4}{3}\left[\sqrt{\left(\frac{R}{v_0}\right)^2-\left(\frac{R\sin i_o}{v_0}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{R}{\sqrt{2}v_0}\right)^2-\left(\frac{R\sin i_o}{v_0}\right)^2}\right]=\frac{4}{3}\frac{R}{v_0}\left[\cos i_0-\sqrt{\frac{1}{2}-\sin^2 i_o}\right]$$

$$=0.3949\frac{R}{v_0}$$

7. 6. 8 北半球的地震波走时 $t^N=\frac{2R}{v_0}\sin\frac{\Delta}{2}=\frac{R}{v_0}$

南半球的地震波走时为$t^S=\frac{2\eta_0}{1+b}\sin\left[\left(1+b\right)\frac{\Delta}{2}\right]=\frac{2\frac{R}{v_0}}{1+\frac{1}{2}}\sin\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\Delta}{2}\right]=0.47\frac{R}{v_0}$

因此南半球的地震波先达到震中距为 60 度的台站。

7. 6. 9 根据地表地震波速度v_0得到$a=v_0R^{\frac{1}{2}}$，因此地幔速度分布为$v=v_0\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$，地核速度分布为$v=v_0\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{3}}$。

地表震源离源角为 14.5 度的射线参数 $p=\frac{r\sin i}{v}=\frac{\mathrm{R}\sin 14.5^o}{v_0}=\frac{R}{4v_0}$，半径为 R/2 的地

幔底部的速度为$v_1 = v_0\left(\dfrac{R}{\frac{R}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = v_0\sqrt{2}$。

射线到达地幔底部的偏垂角 i 可以按下式计算：

$$\frac{\frac{R}{2}\sin i}{v_0\sqrt{2}} = \frac{R\sin i_0}{v_0} \Rightarrow i = 45^o$$

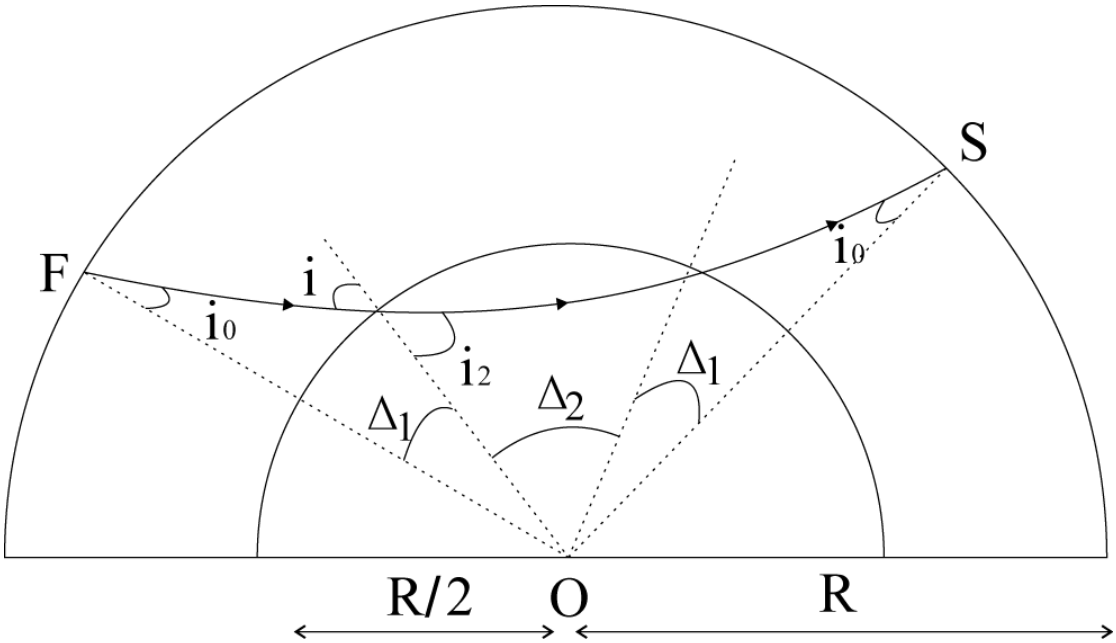


图 7E12 穿过地核的地震波路径

地核顶部的速度为$v = v_0\left(\dfrac{R}{r}\right)^{\frac{1}{3}} = v_0\sqrt[3]{2}$。假定在地核顶部的速度为$v_2$,偏垂角为$i_2$，根据 Snell 定律有：

$\dfrac{\sin i}{v_1} = \dfrac{\sin i_2}{v_2}$，可以得到$i_2 = 39^o$。

射线的总震中距为两次在地幔中传播的震中距Δ_1和地核中传播的震中距Δ_2之和。我们先求地核中传播的震中距。根据该类射线传播的震中距公式，有：

$$\Delta_2 = \frac{2}{1+b}\cos^{-1}\left(\frac{p}{\eta_0}\right)$$

此处，$p = \dfrac{R}{4v_0}, \eta_0 = \dfrac{\frac{R}{2}}{v_0\sqrt[3]{2}}$，代入上式可得：$\Delta_2 = 76.4^o$。

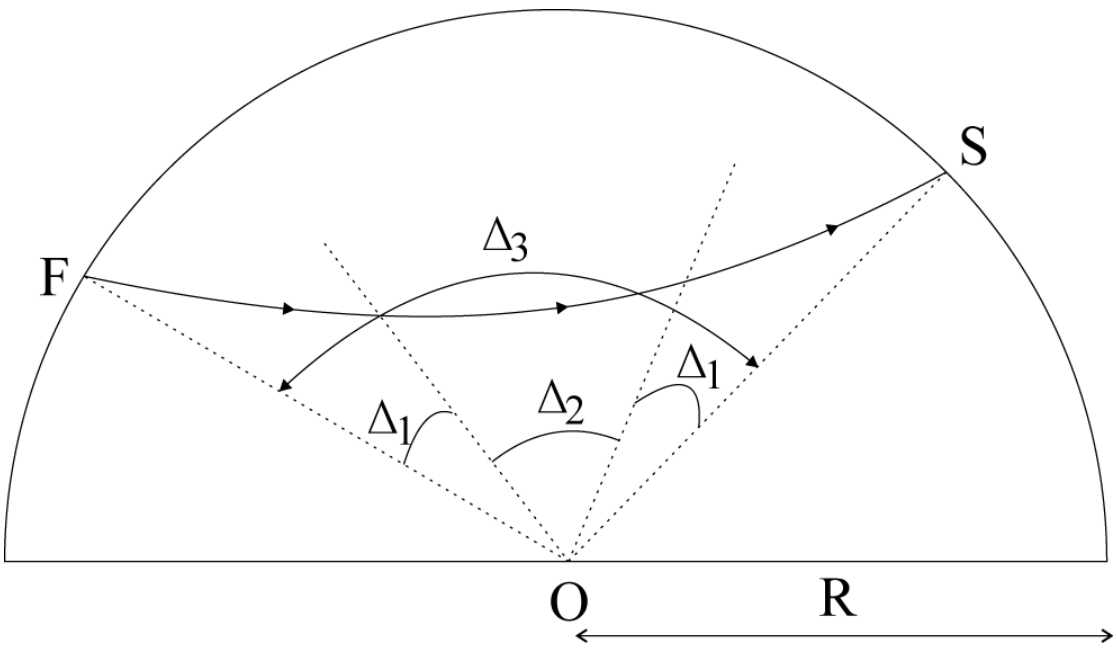


图 7E13 穿过地核的地震波震中距计算

为计算射线在地幔中穿过的震中距增加Δ_1，首先假定没有地核计算 i0=14.5 度的震中距Δ_3和以地幔速度分布的在地核中射线走过的震中距Δ_4。此时由于地幔速度分布不变，所以在地幔中的震中距Δ_1不变。再扣除在地核中的速度分布即可得到Δ_1的值。$2\Delta_1 = \Delta_3 - \Delta_4$。采用公式有

$$\Delta_3 = \frac{2}{1+\frac{1}{2}}\cos^{-1}\left(\frac{\frac{R}{4v_0}}{\frac{R}{v_0}}\right) = 100.6^o$$

$$\Delta_4 = \frac{2}{1+\frac{1}{2}}\cos^{-1}\left(\frac{\frac{R}{4v_0}}{\frac{R}{v_0}2^{-\frac{3}{2}}}\right) = 60.0^o$$

由此得到Δ_1 =20.3 度，与前面的$\Delta_2 = 76.4^o$结合，得到，震中距为 117 度。

7.6.10 根据题意可知，地表半径 R 为地核半径、下地幔厚度和上地幔厚度之和，为 6400km。上下地幔分界面的深度为 5800km。

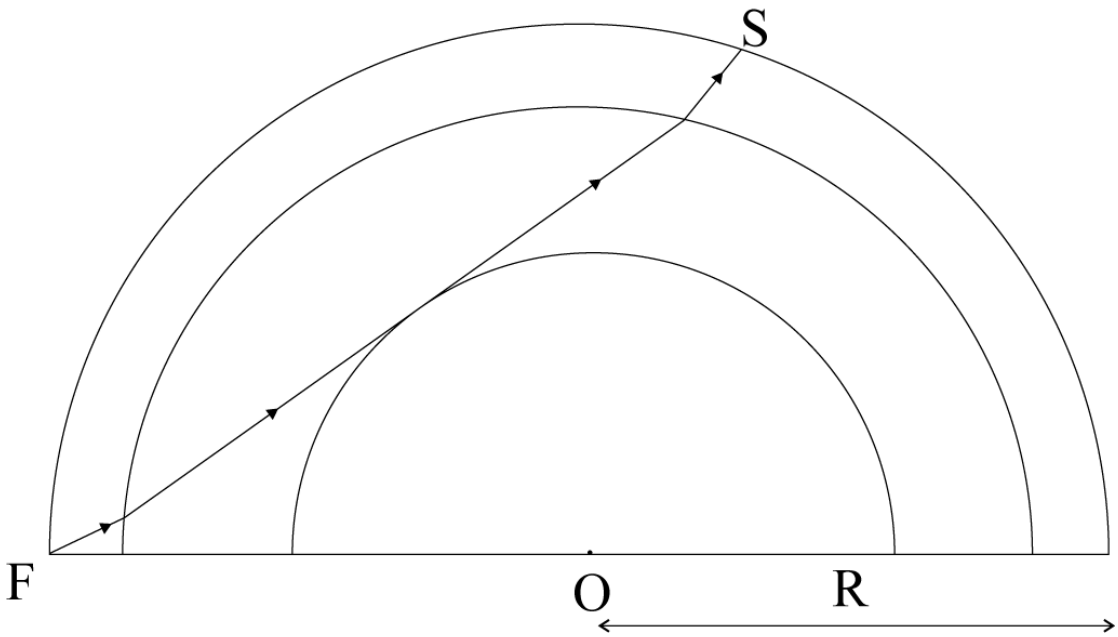


图 7E14 出现影区的起始震中距计算

在地震波出现影区之前，应该是地幔中的直达波，出现影区的临界射线为在下地幔底部核幔界面相切（如图 7E14）。因此该射线的射线参数为

$$p=\frac{r\sin\frac{\pi}{2}}{v}=\frac{3500km}{12km/s}=291.6667s$$

在下地幔传播的地震震中距可以采用直接三角形 OPB 中求解，有

$$\cos\frac{\Delta_2}{2}=\frac{3500km}{5800km}\Rightarrow\Delta_2=105.7655^o$$

而在上地幔传播的Δ_1可以按照自地表（6400km）传播到上下地幔界面（5800km）的均匀球层来计算，有：

$$\Delta_1=\arccos\left(\frac{pb}{r_T}\right)-\arccos\left(\frac{pb}{r_B}\right)=\arccos\left(\frac{291.6667s\times 9km/s}{6400km}\right)-\arccos\left(\frac{291.6667s\times 9km/s}{5800km}\right)=2.695$$

则地震射线的临界震中距为$\Delta=2\Delta_1+\Delta_2=111.1557^o$

这就是出现影区的起始震中距。

7.6.11（1）对于这类速度分布，根据教材所述，走时计算公式为

$$t=\frac{2\eta_0}{1+\alpha}\sin\left(\frac{1+\alpha}{2}\Delta\right)$$

其中$\eta_0=\frac{R}{v_0}=\frac{6000km}{6km/s}=1000s$。

根据 Bennodorf 定律可知，走时曲线的斜率为射线参数。因此$p=500s$。

根据地震波走时公式可以得到

$$p=\frac{dt}{d\Delta}=\eta_0\cos\left(\frac{1+\alpha}{2}\Delta\right)$$

将已知参数代入可以得到$\alpha=\frac{1}{3}$。

（2）设到达震中距为 90 度的射线的最低点半径r_p和速度v_p。射线最低点的偏垂角为 90 度，因此有$p=\frac{r_p\sin\frac{\pi}{2}}{v_p}=\frac{r_p}{v_p}\Rightarrow r_p=pv_p=500v_p$。

根据地震波速度分布表达式$v=v_0\left(\frac{\mathrm{R}}{r}\right)^{\alpha}=v_0\left(\frac{\mathrm{R}}{r}\right)^{\frac{1}{3}}$可以得到

$$v_p=6km/s\times\left(\frac{6000km}{r_p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

将其代入r_p的表达式中有：

$$r_p=500v_p=500s\times6km/s\times\left(\frac{6000km}{r_p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

解上述方程得到

$$r_p=\left(500\times6\times6000^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=3568(\mathrm{km})$$

将最低半径的值代入最低速度表达式有

$$v_p=6km/s\times\left(\frac{6000km}{r_p}\right)^{\frac{1}{3}}=7.135km/s$$

7.6.12（1）根据地球内部速度表达式，可以得到$a=v\sqrt{r}$，将地表的对应值代入，可以得到$a=v_0\sqrt{R}$，这样地球内部速度表达式可以写为$v=v_0\left(\frac{\mathrm{R}}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$。

在地表以 45 度偏垂角射出的地震射线的射线参数为

$$p=\frac{R\sin45^o}{v_0}=\frac{R}{v_0\sqrt{2}}=\frac{6000km}{\sqrt{2}\times6km/s}=707s$$

根据此类速度分布的走时表达式$t=\frac{2\eta_0}{1+\alpha}\sin\left(\frac{1+\alpha}{2}\Delta\right)$，可以得到

$$p=\frac{dt}{d\Delta}=\eta_0\cos\left(\frac{1+\alpha}{2}\Delta\right)=\frac{R}{v_0}\cos\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\Delta\right)=1000\cos\left(\frac{3}{4}\Delta\right)$$

将上面求得的 p 参数代入可得：

$\Delta=60^o$

（2）该类速度分布的走时和震中距的关系为

$$t=\frac{2\eta_0}{1+\alpha}\sin\left(\frac{1+\alpha}{2}\Delta\right)$$

将$\Delta=60^o$代入，得到

$$t^P=\frac{R}{v_0}\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{4}\Delta\right)=\frac{4000}{3}\sin(45^o)=943(s)$$

震中距为 60 度的 PP 波为两次震中距为 30 度的 P 波走时之和。因此有

$$t^{PP}=2\times\frac{4000}{3}\sin\left(\frac{3}{4}30^o\right)=1020.5(s)$$

因此 PP 波和 P 波的到时差为 1020.5-943=77.5（s）。

7.6.13（1）地核顶部（R/2）的速度为$v_1=v_0\left(\frac{R}{R/2}\right)^{\frac{1}{2}}=v_0\sqrt{2}$。

能进入地核的射线在地核顶部的最小角度为 90 度。假定该射线在地幔中的核幔边界邻域内的偏垂角为i_c（图 7E15），则根据 Snell 定律，有$\frac{\frac{R}{2}\sin i_c}{v_0}=\frac{\frac{R}{2}\sin\frac{\pi}{2}}{v_1}\Rightarrow i_c=45^o$。

上述射线在地表的偏垂角为i_0，因此根据 Snell 定律有

$$\frac{R\sin i_0}{v_0}=\frac{\frac{R}{2}\sin i_c}{v_0}\Rightarrow i_0=20.7^o$$

即小于 20.7 度的偏垂角的地震射线均能够进入地核。

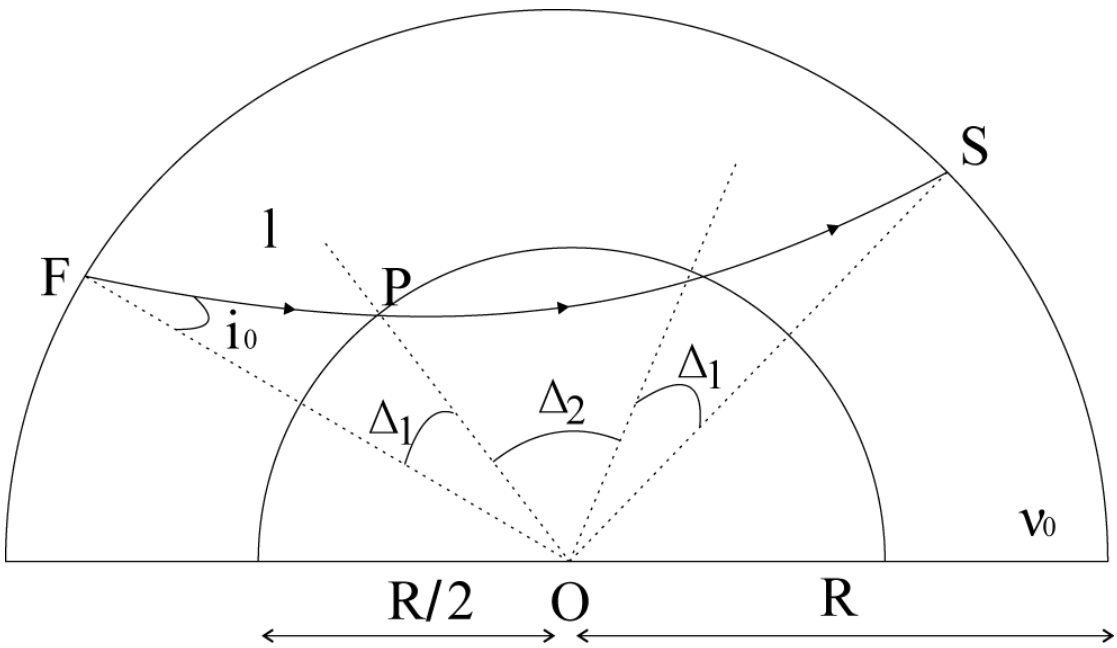


图 7E15 射线路径

（2）能进入地核的射线的震中距的计算分为两部分：

第一部分在地幔中传播的震中距 Δ_1，分为地表到地幔底部和自地幔底部到地表的两个对称部分。这部分的震中距计算可按照均匀球层介质的地震波震中距计算，假设在地表射出射线的偏垂角为 i 有

$$\Delta_1=\arccos\left(\frac{pv_0}{r_T}\right)-\arccos\left(\frac{pv_0}{r_B}\right)=\arccos\left(\frac{\frac{\mathrm{R}\sin i}{v_0}v_0}{R}\right)-\arccos\left(\frac{\frac{\mathrm{R}\sin i}{v_0}v_0}{\frac{R}{2}}\right)$$

$$=\arccos\left(\sin i\right)-\arccos\left(2\sin i\right)$$

第二部分为在地核中传播的射线路径对应的震中距 Δ_2，采用速度随半径指数分布的公式求得，只不过 η_0 的求取采用地核顶部的速度和半径，$\eta_0=\frac{\frac{R}{2}}{v_1}=\frac{R}{2\sqrt{2}v_0}$，代入震中距求取公式

$$\Delta_2=\frac{2}{1+\alpha}\cos^{-1}\left(\frac{p}{\eta_0}\right)=\frac{2}{1+\frac{1}{2}}\cos^{-1}\left(\frac{\frac{R\sin i}{v_0}}{\frac{R}{2\sqrt{2}v_0}}\right)=\frac{4}{3}\arccos\left(2\sqrt{2}\sin i\right)$$

将这两部分相加就得到进入地核的震中距表达。

第八章

8.1.1 利用走时曲线的拐点处与从震源处水平方向射出的射线相对应，据此可求出震源处的波速。

所以 $\left.\frac{dp}{d\Delta}\right|_{i_h=\frac{\pi}{2}}=0$；因 $p=\frac{dt}{d\Delta}$；所以 $\left.\frac{d^2t}{d\Delta^2}\right|_{i_h=\frac{\pi}{2}}=0$

这样，我们只要求得某地震的震源深度及有观察分析归纳得到其走时曲线，找出走时曲线的拐点，并确定该点的走时曲线的斜率 $\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)_M$，则

$$\frac{r_h \sin i_h}{v_h}=p=\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)_M$$

而对应的 M 点有 $i_h=\frac{\pi}{2}$，因此有

$$v_h=\frac{r_h}{\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)_M}=\frac{R-h}{R\left(\frac{dt}{Rd\Delta}\right)_M}=\frac{R-h}{R}\bar{v}_M$$

其中，h 为震源深度，$\bar{v}_M$ 为走时曲线拐点 M 点的视速度（参看第七章球层介质的 Benndorf 定律），R 为地球半径。

8.1.2　古登堡法按照偏垂角为 90 度的射线具有最大的 p 参数，这样 $p_{\max}=\frac{r_h}{v_h}$，根据 Bendorff 定律 $p=\frac{dt}{d\Delta}$，这样寻找 p 参数最大的数学运算就是寻找 $\frac{d^2t}{d\Delta^2}=0$ 的点，这就是走时曲线的拐点。因为这种算法是求解走时曲线上的拐点，因此这种方法又称为拐点法。

8.1.3 将已知参数代入 $v_h=\frac{r_h}{\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)_M}=\frac{R-h}{R\left(\frac{dt}{Rd\Delta}\right)_M}=\frac{R-h}{R}\bar{v}_M$ 式，得到

$$v_h=\frac{R-h}{\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)_M}=\frac{R-h}{p_M}=\frac{6371km-10km}{1060.2s/rad}=6km/s$$

8.1.4　考虑球面介质，速度随半径 r 变化[v(r)]，根据 7.2 节中得出震中距的表达式有

$$\Delta = 2p\int_{r_1}^{R}\frac{dr}{r\sqrt{\xi^2-p^2}}$$

其中$\xi=\frac{r}{v}$，r_1为射线转折点距地心的距离，p=$\frac{r\sin i}{v(r)}$，R 为地球半径。

在此介绍一积分式，

$$\int_{p=\xi_1}^{p=\xi_0}\frac{dp}{\sqrt{p^2-\xi_1^2}},$$

其中$\xi_0=\frac{R}{v_0};\xi_1=\frac{r_1}{v_1}=p_1$，为转折半径为$r_1$的射线参数，所以$\int_{p=\xi_1}^{p=\xi_0}\frac{dp}{\sqrt{p^2-\xi_1^2}}$式表示从转折半径为 0 至到转折半径为$r_1$的所有射线的积分。将$\int_{p=\xi_1}^{p=\xi_0}\frac{dp}{\sqrt{p^2-\xi_1^2}}$式作用于震中距表达式$\Delta=2p\int_{r_1}^{R}\frac{dr}{r\sqrt{\xi^2-p^2}}$式的两边，得到

$$\int_{\xi_1}^{\xi_0}\frac{\Delta dp}{\sqrt{p^2-\xi_1^2}}=\int_{\xi_1}^{\xi_0}dp\int_{r_1}^{R}\frac{2p}{r\sqrt{\xi^2-p^2}\sqrt{p^2-\xi_1^2}}dr \qquad (1)$$

方程的左边变为$\int_{\xi_1}^{\xi_0}\frac{\Delta dp}{\sqrt{p^2-\xi_1^2}}=\int\frac{\Delta d\left(\frac{p}{\xi_1}\right)}{\sqrt{\left(\frac{p}{\xi_1}\right)^2-1}}$，考虑到$\left(\cosh^{-1}x\right)'=\pm\frac{x'}{\sqrt{x^2-1}}$,可以用分部积分的形式给出

$$\Delta\cosh^{-1}(\frac{p}{\xi_1})\Big|_{p=\xi_1}^{p=\xi_0}-\int_{p=\xi_1}^{p=\xi_0}\frac{d\Delta}{dp}\cosh^{-1}(\frac{p}{\xi_1})dp$$

上式的第一项代入积分上下限，由于 $\cosh^{-1}(1)=0$，且在 p=ξ_0，半径为 R，Δ=0，因此第一项消失。仅剩下第二项，可写成：

$$\int_0^{\Delta_1}\cosh^{-1}(\frac{p}{\xi_1})d\Delta$$

(1)式的右侧为一双重积分式，改变积分变数，得到：

$$\int_{r_1}^{R}\frac{dr}{r}\int_{p=\xi_1}^{p=\xi}\frac{2pdp}{\sqrt{p^2-\xi_1^{\,2}}\sqrt{\xi^2-p^2}}$$

$$=\int_{r_1}^{R}\frac{dr}{r}\int_{p=\xi_1}^{p=\xi}\frac{2pdp}{\sqrt{p^2-\xi_1^{\,2}}\sqrt{\xi^2-p^2}}=\int_{r_1}^{R}\frac{dr}{r}\int_{p=\xi_1}^{p=\xi}\frac{dp^2}{\sqrt{-\xi^2\xi_1^{\,2}+\left(\xi^2+\xi_1^{\,2}\right)p^2-p^4}}$$

$$=\int_{r_1}^{R}\frac{dr}{r}\arcsin\left[\frac{2p^2-(\xi^2+\xi_1^{\,2})}{\xi^2-\xi_1^{\,2}}\right]_{p=\xi_1}^{p=\xi}=\int_{r_1}^{R}\frac{dr}{r}(\arcsin[1]-\arcsin[-1])$$

$$=\int_{r_1}^{R}\frac{dr}{r}\pi=\pi\int_{r_1}^{R}\frac{dr}{r}=\pi\ln r\,|_{r_1}^{R}=\pi\ln\left(\frac{R}{r_1}\right)$$

这里采用了不定积分公式：$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$

整理变为

$$\pi\int_{\xi_1}^{\xi_0}(\frac{d\xi}{r})(\frac{dr}{d\xi})=\pi\int_{r_1}^{R}\frac{dr}{r}$$

与 $\int_0^{\Delta_1}\cosh^{-1}(\frac{p}{\xi_1})d\Delta$ 式结合，得出

$$\ln(\frac{R}{r_1})=\frac{1}{\pi}\int_0^{\Delta_1}\cosh^{-1}(\frac{p}{\xi_1})d\Delta$$

令 $S_1=\int_0^{\Delta_1}\cosh^{-1}(\frac{p}{\xi_1})d\Delta$，可以得到：

$$r_1=R/\exp(S_1/\pi)$$

8.1.5(1)做出 0-Δ 范围内的走时曲线，即 t-Δ 曲线，震源要取在地表上，否则要进行修正；在该步骤中，通常在计算机上利用三次自然样条函数对一元函数进行成组插值及微分，从而使得走时曲线具有较好的平滑性能，采用该方法能保证所插值的函数及其一阶导数、二阶导数连续。

(2)由 t-Δ 曲线求曲线上各点的斜率，从而做出 $\frac{dt}{d\Delta}$ 曲线；该步骤求出 p 随震中距的分布。

(3)在 0-Δ 范围内任取 $\Delta=\Delta_1$，取出 Δ_1 点对应的 $\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)_1$；这就是 $\xi_1=p_1=(\frac{dT}{d\Delta})_1$。

(4)将$\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)-\Delta$曲线中0-$\Delta_1$段除以常数$\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)_1$即$\xi_1$，得到$\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)\Big/\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)_1-\Delta$，即$\frac{p}{\xi_1}-\Delta$曲线，从而求出$\cosh^{-1}(p/\xi_1)-\Delta$曲线；这就是$\cosh^{-1}(\frac{p}{\xi_1})$随震中距的变化。

(5) 在 0- Δ_1 范围内求出$\cosh^{-1}(p/\xi_1)-\Delta$曲线下的面积，即求$\int_0^{\Delta_1}\cosh^{-1}\left[\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)\Big/\left(\frac{dt}{d\Delta}\right)_1\right]d\Delta$，这就是$\int_0^{\Delta_1}\cosh^{-1}(\frac{p}{\xi_1})d\Delta$；在计算积分的过程中，通常采用复化 Simpson 积分数值公式进行，复化 Simpson 积分公式参看计算方法的相关书籍。

(6)求出r_1，并得到r_1所对应的速度v_1。

(7)取不同的Δ_1值，重复上述步骤，从而求出不同的r_1值所对应的速度值v_1；

8.1.6 如果震源在地下 h 处，则按照教材中（8-1-16）式将震中距增加$\Delta\theta$，按照教材中（8-1-17）式将观测走时增加Δt。

$$\Delta\theta=\arccos\left(\frac{\frac{\partial t}{\partial\Delta}v_0}{R}\right)-\arccos\left(\frac{\frac{\partial t}{\partial\Delta}v_0}{R-h}\right)$$

$$\Delta t=\frac{1}{v_0}\left(\sqrt{R^2-\left(\frac{\partial t}{\partial\Delta}v_0\right)^2}-\sqrt{(R-h)^2-\left(\frac{\partial t}{\partial\Delta}v_0\right)^2}\right)$$

这样就可以按照地表震源进行地球内部结构反演了。

8.1.7 根据题意可知$\frac{\partial t}{\partial\Delta}=8.81\text{s}/^o=8.81*180/\pi=504.7758(\text{s/rad})$，将已知参数代入（8-1-16）和（8-1-17）式，得到

$$\Delta\theta=\arccos\left(\frac{\frac{\partial t}{\partial\Delta}v_0}{R}\right)-\arccos\left(\frac{\frac{\partial t}{\partial\Delta}v_0}{R-h}\right)$$

$$=\arccos\left(\frac{504.7788s/rad\times6.5km/s}{6371km}\right)-\arccos\left(\frac{504.7788s/rad\times6.5km/s}{6371km-50km}\right)=0.2727^o$$

$$\Delta t=\frac{1}{v_0}\left(\sqrt{R^2-\left(\frac{\partial t}{\partial\Delta}v_0\right)^2}-\sqrt{(R-h)^2-\left(\frac{\partial t}{\partial\Delta}v_0\right)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{6.5}\left(\sqrt{6371^2-(504.7758*6.5)^2}-\sqrt{(6371-50)^2-(504.7758*6.5)^2}\right)$$

$$=9.0(s)$$

因此校正后的震中距为 31.27 度，校正后的走时为 388 秒。

8.1.8 根据题意可知 $\frac{\partial t}{\partial \Delta}=6.88s^o/=6.88*180/\pi=394.195$，将已知参数代入（8-1-16）和（8-1-17）式，得到

$$\Delta\theta=\arccos\left(\frac{\frac{\partial t}{\partial\Delta}v_0}{R}\right)-\arccos\left(\frac{\frac{\partial t}{\partial\Delta}v_0}{R-h}\right)$$

$$=\arccos\left(\frac{394.195s/rad\times 6.5km/s}{6371km}\right)-\arccos\left(\frac{394.195s/rad\times 6.5km/s}{6371km+5km}\right)=-0.02^o$$

$$\Delta t=\frac{1}{v_0}\left(\sqrt{R^2-\left(\frac{\partial t}{\partial\Delta}v_0\right)^2}-\sqrt{(R-h)^2-\left(\frac{\partial t}{\partial\Delta}v_0\right)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{6.5}\left(\sqrt{6371^2-(394.195*6.5)^2}-\sqrt{(6371-5)^2-(394.195*6.5)^2}\right)$$

$$=-0.84(s)$$

因此校正后的震中距为 59.98 度，校正后的走时为 607.45 秒。

8.1.9（1）观测的走时曲线只有有限个数据点，求其导数往往需要内插，内插的不同方案导致不同的地球一维速度模型反演结果。（2）实际的地震观测数据往往含有噪声，自身也会相互矛盾。

8.1.10 采用书上的程序计算可得结果

8.1.11 根据教材中的公式有：

$$\Delta=\arccos\left(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2\right)$$

$$=\arccos\left(\sin 28.2^o\sin 40^o\cos(84.7^o-116.8^o)+\cos 28.2^o\cos 40^o\right)$$

$$=21.2^o$$

因此防灾科技学院台站对 2015 年 4 月 25 日尼泊尔地震的震中距为 21.2 度。

8.2.1 参考教材中的推导。

8.2.2 (1)根据 W-A 公式，$\frac{d\ln\rho}{dz}=\frac{g}{\phi}$，可以得到，$\rho=Ce^{\frac{g}{\phi}z}$，代入边界条件 $\rho|_{z=0}=\rho_0$，得到 $C=\rho_0$，由此得到 $\rho=\rho_0e^{\frac{g}{\phi}z}$。

(2) 根据 W-A 公式，$\frac{d\ln\rho}{dz}=\frac{g}{a_0+a_1z}$，可以得到，$\ln\rho=\frac{g}{a_1}\ln(a_0+a_1z)+C\Rightarrow\rho=(a_0+a_1z)^{\frac{g}{a_1}}e^C$，代入边界条件 $\rho|_{z=0}=\rho_0$，得到

$C=\ln\left(\rho_0 a_0^{-\frac{g}{a_1}}\right)$，由此得到 $\rho=\rho_0 a_0^{-\frac{g}{a_1}}\left(a_0+a_1 z\right)^{\frac{g}{a_1}}$。

8.2.3 根据题目

$$\phi=\alpha^2-\frac{4}{3}\beta^2=6.8\times6.8-\frac{4}{3}\times5.8\times5.8=1.386667(\mathrm{km}^2/\mathrm{s}^2)=1386667(m^2/\mathrm{s}^2)$$

根据绝热均匀介质内密度分布情况有 $\rho=2.9e^{\frac{9.81m/s^2\times30000m}{1386667m^2/s^2}}=3.59\left(g/cm^3\right)$。

8.2.4 采用教材中的公式 $\mathrm{g}=\frac{G}{r^2}\int_0^r\rho4\pi r^2dr=\left(\frac{G\rho}{r^2}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\Big|_0^{1221.5km}$

将所给参数均转换为国际单位制，并且万有引力常数 G=6.672×10^{-11}N.m/s^2，代入上式有

$$\mathrm{g}=\frac{4}{3}\pi G\rho r=\frac{4}{3}\pi\times6.672\times10^{-11}\times13\times10^3\times1221.5\times10^3=4.436(\mathrm{m/s}^2)$$

8.2.5 从地表到深部 2400km 处，g 的变化很小，在 9.85~9.90m/s^2。在一般的计算中可视为常数。在核幔边界上，g 达到极大，为 10.69m/s^2。在地核内部，随深度增加，g 逐渐减小，在地心处 g=0。

8.2.6 压力变化相对减缓，在内核下部压力梯度又逐渐变大，到地心处的压力达 3.6×10^{11}Pa.

8.3.1 严格来说，地震破裂并不是一个点，但对于远场台站观测来说，通常将破裂起始点的位置作为地震的发生位置，这很容易从高频地震波根据射线理论定出。

8.3.2 一般地震定位都是根据初至的高频地震波、按照射线理论的观测走时拟合确定破裂起始点的位置，而观测走时为观测到时和地震发生时刻之差。不知道地震发生时刻就不能确定观测走时。因此在定位问题中，将地震空间位置的三个参数和地震发生时刻均作为地震定位要求解的参数。

8.3.3 通常来讲，地震定位采用地震波在台站的高频波的初至，根据射线理论确定地震位置，因此地震定位确定的是破裂起始点的位置。而矩心位置为破裂的重心位置，通常根据长周期体波、面波来确定。因此这两个概念是不同的。

8.3.4 根据 $\alpha=\arctan\frac{u_E}{u_N}$ 式，可以给出

$$\alpha=\arctan\frac{u_E}{u_N}=\arctan\frac{-1.732}{1}=-60^o$$

因此可以知道，地震位于防灾科技学院台站的 N60° W 或 S60° E 的方位上。

8.3.5 根据 $\alpha=\arctan\frac{u_E}{u_N}$ 式，可以给出

$$\alpha=\arctan\frac{u_E}{u_N}=\arctan\frac{2}{2}=45^o$$

因此可以知道，地震位于防灾科技学院台站的 N45° E 或 S45° W 的方位上，但我们知道

P 波的东向和北向位移均为正，射线方向在北向和东向的投影均为正，即射线传播方向在水平面的投影为 N45° E 的方向。由于台站观测的初动向下，参看教材图 8-3-2 可知，射线传播方向指向震中的方向。因此，地震位于台站 N45° E 的方向上，排除了 S45° W 的方向。

8.3.6 虚波速度的定义式：$k=\left(\frac{1}{v_s}-\frac{1}{v_p}\right)^{-1}=\frac{v_p v_s}{v_p-v_s}$；在定位过程中使用虚波速度计算单台到震源的距离，即 $r=k\left(t_s-t_p\right)$.

8.3.7 本题中虚波速度 $k=\left(\frac{1}{v_s}-\frac{1}{v_p}\right)^{-1}=\frac{v_p v_s}{v_p-v_s}$=75m/s， $r=k\left(t_s-t_p\right)$=0.2625m。

8.3.8 根据 $\alpha=\arctan\frac{u_E}{u_N}$ 式，可以给出

可以给出

$$\alpha=\arctan\frac{u_E}{u_N}=\arctan\frac{1}{-1.732}=-30^o$$

因此可以知道，地震位于防灾科技学院台站的 N30°W 或 S30°E 的方位上，但我们知道 P 波的东向为正和北向位移为负，射线矢径方向为 S30°E。由于台站观测的初动向上，参看图 8-2-2 可知，射线传播方向背向震中的方向。因此，地震位于台站 N30°W 的方向上，排除了 S30°E 的方向。

水平位置在地表的投影大小为 $u_H=\sqrt{u_N^2+u_E^2}=\sqrt{\left(-1.732\right)^2+1^2}=2(\mu\mathrm{m})$。

由此得到视入射角为：

$$\bar{i}_p=\arctan\frac{u_H}{u_U}=\arctan\frac{2}{2}=45^o$$

根据真入射角和视入射角的转换公式 $\sin i_p=\frac{\alpha}{\beta}\sin\frac{\bar{i}_p}{2}$ 得到

$$i_p=\arcsin\left(\frac{\alpha}{\beta}\sin\frac{\bar{i}_p}{2}\right)=\arcsin\left(\frac{5}{3}\sin\frac{45^o}{2}\right)=39.6^o$$

根据 Vp = 5.0 km/s，Vs = 3.0 km/s 则虚波速度 k=7.5km/s，可以得到该地震距防灾科技学院台站的距离为 $r=k\left(t_s-t_p\right)=7.5km/s*3s=22.5km$

则震中距为 $\Delta=r\sin i_p=22.5km*\sin 39.6^o=14.3km$

震源深度为 $h=r\cos i_p=22.5km*\cos 39.6^o=17.3km$

即该地震在防灾科技学院台站的 N30°W 的方向上、距离为 14.3km 的地方，地震震源深度为 17.3km。

8.3.9 根据题意得到地震相对于台站的方位角为-30 度。则地震相对于台站的坐标为

$$\begin{cases} x = r\sin\alpha = -100km \\ y = r\cos\alpha = 173.2km \end{cases}$$

将上述坐标值代入（8-2-10）式，得到

$$\theta = \frac{173.2}{111.195} + 40^o = 41.56^o$$

$$\phi = \frac{-100}{111.195 \cdot \cos\left(\frac{40^o + 41.56^o}{2}\right)} + 116.8 = 115.6^o$$

所以地震震中位置为 115.6° E，41.56° N.

8.3.10 根据 Vp = 5.0 km/s，Vs = 3.0 km/s 则虚波速度 k=7.5km/s，可以得到该地震距防灾科技学院台站的距离为 $r = k\left(t_s - t_p\right) = 7.5km/s * 4s = 30km$。

P 波的走时为 $\frac{r}{v_p} = \frac{30km}{5km/s} = 6s$

地震的发震时刻比 P 波到时提前 6 秒，因此地震发震时刻为 5h3m16.5s。

根据（8-2-1）式，可以给出

$$\alpha = \arctan\frac{u_E}{u_N} = \arctan\frac{-1.732}{-1} = 60^o$$

因此可以知道，地震位于防灾科技学院台站的 N60°E 或 S60°W 的方位上，但我们知道 P 波的东向为负和北向位移为负，射线矢径方向为 S60°W。由于台站观测的初动向上，参看图 8-2-2 可知，射线传播方向背向震中的方向。因此，地震位于台站 N60°E 的方向上。

水平位置在地表的投影大小为 $u_H = \sqrt{u_N^2 + u_E^2} = \sqrt{\left(-1.732\right)^2 + \left(-1\right)^2} = 2(\mu\mathrm{m})$。

由此得到视入射角为：

$$\bar{i}_p = \arctan\frac{u_H}{u_U} = \arctan\frac{2}{0.8} = 68.2^o$$

根据真入射角和视入射角的转换公式 $\sin i_p = \frac{\alpha}{\beta}\sin\frac{\bar{i}_p}{2}$ 得到

$$i_p = \arcsin\left(\frac{\alpha}{\beta}\sin\frac{\bar{i}_p}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{5}{3}\sin\frac{68.2^o}{2}\right) = 69.1^o$$

震中距为 $\Delta = r\sin i_p = 30km * \sin 69.1^o = 28km$

震源深度为 $h = r\cos i_p = 30km * \cos 69.1^o = 10.7km$

现在根据防灾科技学院的台站坐标及记录计算地震震中坐标。根据题意得到地震相对于台站的方位角为 60 度。则地震相对于台站的坐标为

$$\begin{cases} x = r\sin\alpha = 28km * \sin 60^o = 24.2km \\ y = r\cos\alpha = 28km * \cos 60^o = 14km \end{cases}$$

将上述坐标值代入（8-2-10）式，得到

$$\theta = \frac{14}{111.195} + 40^o = 40.13^o$$

$$\phi = \frac{24.2}{111.195 \cdot \cos\left(\frac{40^o + 40.13^o}{2}\right)} + 116.8 = 117.08^o$$

所以地震震中位置为 117.08°E，40.13°N，地震的深度为 10.7km。

8.3.11 将程序中的赋值语句部分改为

Slat=40; Slon=116.8; %台站的经纬度

ue=-1.732;un=-1;uu=0.8; %地震台记录的南北分向、东西分向和上下分向

Parrival=4;Sarrival=8; %P 波和 S 波到时，单位为秒

其他内容不变，就可以得到下面的结果

地震相对于台站的方位角为：59.9993

地震的经度东经 117.085254 度,纬度为北纬 40.126048 度,深度 10.688646 km

地震到台站的震中距为 28.031283km

P 波的走时为 6.000000 秒

8.3.12 将 P8_6.m 的前四句改为：Slat=40; Slon=116.8; %台站的纬度和经度

ue=-1.732;un=-1;uu=0.8; %地震台记录的南北分向、东西分向和上下分向

Delta=30; %从走时表中查得震中距为 30 度

其他内容不变，运行程序即可得到震中的经度 157.5°，纬度 48.4°。

8.3.13 利用每个台站的 S 波和 P 波的到时差得到震源到台站的距离 (R1,R2,R3)，然后以每个台站为圆心，以震源到台站的距离为半径做圆，三个台站所做圆的相交部分弧顶点连线相交点即是震中。

8.3.14 得到地震震中距后，任选一台站，连接震中与台站的连线，然后过震中做垂直于震中台站连线的垂线，该垂线于该台站的震中距为半径的圆交于两点，震中和任一点之间的距离即为震源深度。

8.3.15 以三站为一组的作法，称为虚波速度法，亦称石川法。虚波速度在近震范围内是相当稳定的，可由本地经验得到，一般都在 8 公里/秒左右。设选定的三个观测站为 S_1，S_2，S_3，先将它们按照地理位置，标在地图上，如图教材图 8-3-3，再按各站记录到的(ts-tp)到达时间差，用公式 $r = k\left(t_s - t_p\right)$ 求得各站相应的震源距离：R_1，R_2，R_3。然后以 S_1 为中心，以 R_1 为半径，在操作地图上作第一地震圆，其实应为一个隐藏在下的半球面。震源应当是此球面上的一点。同样以 S_2 及 S_3 为中心，以及为半径作第二、第三地震图，各有其下隐的半球面。这三个半球面互相交切，每两个构成一个弧形交切痕，共有三条，投影到图上为：aa, bb, cc。这三条弧相交于一点，因它是三个下隐半球面的共同点，当然就是震源，投影到

图上为 E，就是震中，便可在操作地图上定出其地理位置。

过震中 E，垂直于观测点 S_1（S_2 或 S_3 亦可）与震中的连线，作一直线与第一地震圆交于 A，则 EA 之长就是震源深度 h。这个从教材图 8-3-3 右图清楚的看到，b_1 是第一地震圆的半球面，今若过 E 并垂直 S_1E 于作一垂直面切下，则这个垂面必通过震源 F，并与地震圆的半球面交割成一半圆形割痕，为 b_2，很显然 AE=EF=h，都是这半圆形的半径。最后用操作地图的比例尺，将 AE 折合成公里数，便得到震源深度的数据。

8.3.16 四个

8.3.17 设震源坐标为(x_0, y_0, z_0),发震时刻为t_0,台站 i 的坐标为(x_i, y_i, z_i),P 波、S 波到时分别为$t_{\mathrm{P}i}$和t_{Si},震源到台站 i 的距离为R_i。采用均匀介质模型,设 P 波、S 波速度分别为V_{P}和V_{S},引入虚波速度$\bar{v}=\left(\frac{1}{V_{\mathrm{S}}}-\frac{1}{V_{\mathrm{P}}}\right)^{-1}=\frac{V_{\mathrm{P}}V_{\mathrm{S}}}{V_{\mathrm{P}}-V_{\mathrm{S}}}$，则有

$$t_{Si}-t_{\mathrm{P}i}=\frac{R_i}{V_{\mathrm{S}}}-\frac{R_i}{V_{\mathrm{P}}}=\frac{R_i}{\bar{v}}$$

从而

$$R_i=\bar{v}\left(t_{Si}-t_{\mathrm{P}i}\right)$$

对台站 i 有 $(x_0-x_i)^2+(y_0-y_i)^2+(z_0-z_i)^2=R_i^2$

对台站 j 有 $(x_0-x_j)^2+(y_0-y_j)^2+(z_0-z_j)^2=R_j^2$

将方程上两式 展开后相减,得到线性方程

$$(x_i-x_j)x_0+(y_i-y_j)y_0+(z_i-z_j)z_0=\frac{1}{2}\left(r_i^2-r_j^2+R_j^2-R_i^2\right)$$

其中$r_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2$。将上式方程用于 3 对以上的台站,即得到一关于(x_0, y_0, z_0)的线性方程组,方程组写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(r_1^2-r_2^2+R_2^2-R_1^2\right) \\ \frac{1}{2}\left(r_1^2-r_3^2+R_3^2-R_1^2\right) \\ \vdots \\ \\ \end{bmatrix}$$

可以写为$\mathbf{Ax}=\mathbf{B}$的形式，从而方程的解就变成了求解 A 的逆矩阵的形式，方程的解可以表示为：$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$。这样就得到了震源位置。

由于z_i表示台站高度,当台站海拔高度相差不大时,$\left|z_i-z_j\right|$远小于$\left|x_i-x_j\right|$和

$\left|y_i - y_j\right|$,使得方程组的系数矩阵具有奇异性,导致 z_0 解发散。可以通过其它方法单独求解 z_0 :取震中解 x_0 , y_0 ,将其代入 $(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_0 - z_i)^2 = R_i^2$ 式求得 z_0 ,将各个台站求得的 z_0 的平均值作为震源深度的解。这样 z_0 的误差仅决定于震中的定位误差和 R_i 的到时读数误差(二者均是可控的) ,从根本上解决了无法得到震源深度有效信息的问题。

关于发震时刻, 有方程

$$t_0 = t_{\mathrm{Pi}} - \frac{R_i}{V_{\mathrm{P}}}$$

将 $t_0 = t_{\mathrm{Pi}} - \dfrac{R_i}{V_{\mathrm{P}}}$ 用于各个台站, 然后求各台站得到的 t_0 的平均值即可作为发震时刻。

由于 R_i 完全取决于到时（$R_i = \bar{v}\left(t_{Si} - t_{\mathrm{Pi}}\right)$ 式）, 所以 t_0 和震源的求解完全独立, 其误差的唯一来源是到时读数的误差, 只要到时读数足够精确, 即使震源定位误差很大, 也可求得很精确的 t_0 。

8.3.18 由于一般情况下，台站高程差别相对于台站的水平距离差别总是很小的，这样很容易使得台站高程差别的矩阵元素变得非常小，这就使得 z0 很不稳定。

8.3.19 在 Inglada 方法中，经常采用各个台站记录的 P 波到时扣除 P 波走时来得到地震的发展时刻，即 $t_0 = t_{\mathrm{Pi}} - \dfrac{R_i}{V_{\mathrm{P}}}$ 。这样多个台站就可以估计多个发震时刻，将这些发震时刻平均就得到较为可靠的发震时刻。

8.3.20 由于地壳为 Possion 介质，则地震 P 波和 S 波的比例为 $\sqrt{3}$ 。根据已知的 S 波速度 $\sqrt{3}$ km/s，可知 P 波速度为 3km/s。假设震源距台站的距离为 r，根据题意有

$\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}} - \dfrac{r}{3}\right) = 5.5$，得到：$r = \dfrac{5.5\left(\sqrt{3} - 1\right)}{3}$，根据震源深度为震中距 x 的一半，有

$\sqrt{x^2 + \dfrac{x^2}{4}} = r$，从而解得 x=21km，震源深度 h=10.5km。

8.3.21 参考教材中的推导。

8.4.1 在地震定位问题中，通常定义震相观测到时和理论到时之间的差别为残差，将所有台站震相残差的平方和定义为 χ^2 。

8.4.2 地震定位中的自由度数目为根据观测数据所列的方程个数减去方程中未知数的个数。在地震定位问题中，未知数的个数为地震的空间坐标三个参数和发震时刻一个参数，总共为

4，则地震定位的自由度个数为观测数据所列方程个数减去 4。

8.4.3 将教材中的程序 P8_9.m 中的语句

chisqlim=interp1([5,10,20,50,100],[1.15,3.94,10.85,34.76,77.93],ndf,'spline'); 改为

chisqlim=interp1([5,10,20,50,100],[4.35,9.34,19.34,49.33,99.33],ndf,'spline');即可。

8.4.4 将教材中的程序 P8_9.m 中的语句

chisqlim=interp1([5,10,20,50,100],[1.15,3.94,10.85,34.76,77.93],ndf,'spline'); 改为

chisqlim=interp1([5,10,20,50,100],[11.07,18.31,31.41,67.50,124.34],ndf,'spline');即可。

8.4.5　根据观测台站网内、网缘、网外的地震定位的95%置信度的置信区间可以看出，对于网内地震，周围台站密集并且分布于地震周围，地震95%置信区间，相对为圆形，并且较小，说明容易准确得到地震位置。如地震在网外，则地震95%置信度的置信区间偏离圆形成为类椭圆形，椭圆半短轴指向台网中心。说明在这个方向台站相对比较密集，容易得到在这个方向的位置。而长半轴方向的台站较为稀疏（或没有台站）。在网缘的地震95%置信区间介于网内和网外之间，但与台站分布密切相关。

8.4.6 不一样。在空间上看，地震周围的台站密集程度不同会导致对不同的方向上参数的确定不同。

8.5.1　$t_i^p(m) = t_i^p(m_0) + \dfrac{\partial t_i^p}{\partial m_j}\Delta m_j$

8.5.2

$$\begin{aligned} r_i(m) &= t_i - t_i^p(m) \\ &= t_i - t_i^p(m_0) - \frac{\partial t_i^p}{\partial m_j}\Delta m_j \\ &= r_i(m_0) - \frac{\partial t_i^p}{\partial m_j}\Delta m_j \end{aligned}$$

8.5.3

$r_i(m_0) = \dfrac{\partial t_i^p}{\partial m_j}\Delta m_j$ 或 $r(m_0) = G\Delta m$

8.5.4

根据(6-7-9)，即 $T = \dfrac{d_z}{\cos\theta_j \bullet V_j} + \sum_{l=1}^{j-1}\dfrac{d_l}{\cos\theta_{jl} \bullet V_l}$，当 Z_0 变化非常小时，Z_0 仅影响到 Dz，我们将震源层的震中距增加设为 Δ_j，$\dfrac{d_z}{\cos\theta_j} = \sqrt{d_z^2 + \Delta_j^2}$，而 $d_z = Z_0 - z_{j-1}$，z_{j-1} 为震源所在层的顶的深度，与震源所在的深度无关。

$$T=\frac{d_z}{\cos\theta_j\bullet V_j}+\sum_{l=1}^{j-1}\frac{d_l}{\cos\theta_{jl}\bullet V_l}=\frac{\sqrt{\left(Z_0-z_{j-1}\right)^2+\Delta_j^2}}{V_j}+\sum_{l=1}^{j-1}\frac{d_l}{\cos\theta_{jl}\bullet V_l}$$

上式对 Z_0 求导得到

$$\frac{\partial T}{\partial Z_0}=\frac{\left(Z_0-z_{j-1}\right)}{V_j\sqrt{\left(Z_0-z_{j-1}\right)^2+\Delta_j^2}}=\frac{\cos\theta_j}{V_j}$$

8.5.5

根据平层介质的 Benndorf 定律，有 $\frac{\partial T}{\partial\Delta}=p=\frac{\sin\theta_j}{v_j}$ 。

震中距可以表示为 $\Delta=\sqrt{\left(X-X_0\right)^2+\left(Y-Y_0\right)^2}$ ，而震中距对 X0 和 Y0 的偏导数为

$$\frac{\partial\Delta}{\partial X_0}=-\frac{1}{2}\frac{2\left(X-X_0\right)}{\sqrt{\left(X-X_0\right)^2+\left(Y-Y_0\right)^2}}=\frac{X_0-X}{\Delta}$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial Y_0}=-\frac{1}{2}\frac{2\left(Y-Y_0\right)}{\sqrt{\left(X-X_0\right)^2+\left(Y-Y_0\right)^2}}=\frac{Y_0-Y}{\Delta}$$

这样可得到偏导数为：

$$\frac{\partial T}{\partial X_0}=\frac{\partial T}{\partial\Delta}\bullet\frac{\partial\Delta}{\partial X_0}=\frac{\sin\theta_j}{V_j}\bullet\frac{X_0-X}{\Delta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial Y_0}=\frac{\partial T}{\partial\Delta}\bullet\frac{\partial\Delta}{\partial Y_0}=\frac{\sin\theta_j}{V_j}\bullet\frac{Y_0-Y}{\Delta}$$

8.5.6

将（6-7-16）式对震中距求偏导 $\frac{\partial T}{\partial\Delta}=\frac{1}{v_m}$ ，由此得到

$$\frac{\partial T}{\partial X_0}=\frac{\partial T}{\partial\Delta}\bullet\frac{\partial\Delta}{\partial X_0}=\frac{1}{V_m}\frac{X_0-X}{\Delta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial Y_0}=\frac{\partial T}{\partial\Delta}\bullet\frac{\partial\Delta}{\partial Y_0}=\frac{1}{V_m}\frac{Y_0-Y}{\Delta}$$

8.5.7 当 Z_0 变化非常小时，Z_0 仅影响到 Dz，而考虑（6-7-16）时除了第一项含有 Dz 外，观测到首波的临界距离 Δ_0 也含有 Dz，因此应该把（6-7-15）式代入（6-7-16）时再对 Dz 求偏导数。可以得到：$\frac{\partial T}{\partial Z_0}=-\frac{1}{V_j\cos\theta_j}+\frac{\tan\theta_j}{V_m}$

8.5.8

系数矩阵 A 为 m×4 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial T_1}{\partial x} & \frac{\partial T_1}{\partial y} & \frac{\partial T_1}{\partial z} \\ 1 & \frac{\partial T_2}{\partial x} & \frac{\partial T_2}{\partial y} & \frac{\partial T_2}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{\partial T_m}{\partial x} & \frac{\partial T_m}{\partial y} & \frac{\partial T_m}{\partial z} \end{pmatrix}$$

r = (r_1, r_2, ……, r_m)为每个震相的观测走时和初始震源模型的理论走时之差。

Δ X = (Δt ,Δx ,Δy ,Δz)为在初始震源的发震时刻、空间坐标的 x,y,z 方向上的扰动。

8.5.9① Δ X < ϕ ,这里 ϕ 为一小量, 或②第 n 次迭代 $|\Delta X_n - \Delta X_{n-1}| \langle \varepsilon$,这里 ε 为一小量,或③迭代 n 次,这里 n 为预先设置的迭代次数

8.5.10 （1）震源的最小深度和最大深度，使得定位地震在一定的深度范围内；

（2）规定了每次迭代的最大深度改变量，如果大于此改变量，则按照比例缩小所有改变量，直至深度改变量满足要求；

（3）规定了每次迭代的最大水平距离改变量，如果大于此改变量，则按照比例缩小所有改变量，直至水平距离改变量满足要求；

上述规定防止迭代步长太大超过了最优解。

8.6.1 如果地震中有一个时间的定位结果是通过其他方法验证正确的（比如地表爆破），通常称之为主事件，则其周围地震在地震台站的到时可以相对主事件给出，通过对主事件的扰动来求得。

8.6.2 可以较大限度地消除了绝对定位方法中因所用速度结构模型的不确定性所造成的定位误差。

8.6.3 2003 年张海江改进了 Waldhauser 提出的双差定位法，考虑了速度结构变化的影响，并增加了同时反演浅层速度结构的功能。人们将张海江的定位方法称为层析双差定位法(TomoDD)。

第九章

9.1.1 在初等物理学中，动能表示为 $E=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}\rho V\dot{u}^2$，而动能密度为单位体积的动能，有：$\tilde{E}_K=\frac{1}{2}\rho\dot{u}^2$，这里 ρ 是密度，$\dot{u}$ 是速度。

9.1.2 弹性能密度为：

$$\tilde{E}_W=\int_0^{e_{ij}}\sigma_{ij}de_{ij}=\int_0^{e_{ij}}\left(\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij}\right)de_{ij}=\lambda\int_0^{e_{ij}}e_{kk}\delta_{ij}de_{ij}+2\mu\int_0^{e_{ij}}e_{ij}de_{ij}$$
$$=\lambda\int_0^{e_{kk}}e_{kk}de_{ii}+\mu e_{ij}^2$$

其中，σ_{ij} 和 e_{ij} 分别是应力和应变张量。推导公式中注意：e_{kk} 为体应变 $\Theta=\frac{\Delta V}{V}$，所以上式第一项的直接积分到相应的体积变形即可：

$\int_0^{\Theta}\Theta d\Theta=\frac{\Theta^2}{2}=\frac{e_{kk}^2}{2}$，因此有

$$\tilde{E}_W=\frac{1}{2}\lambda e_{kk}(\delta_{ij}e_{ij})+\mu e_{ij}^2=\frac{1}{2}e_{ij}\left(\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij}\right)=\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}$$

9.1.3 $\tilde{E}_K=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\cos^2(\omega t-kx)$

9.1.4 $\tilde{E}_W=\frac{1}{2}\left(\sigma_{xy}e_{xy}+\sigma_{yx}e_{yx}\right)=\frac{1}{2}A^2k^2\mu\cos^2(\omega t-kx)$

9.1.5 平均动能密度 $\overline{E_K}$ 表达为：

$$\overline{E_K}=\frac{1}{4}\rho A^2\omega^2$$

平均应变能密度为：$\overline{E_W}=\frac{1}{4}A^2k^2\mu$

用$k=\omega/\beta$和$\beta^2=\mu/\rho$，就变为：$\overline{E_W}=\frac{1}{4}\rho A^2\omega^2$

可以看出，与动能方程完全相同，所以动能与弹性势能是同相随时间变化的。

9.1.6 质元的总机械能为：

$$E=\tilde{E}_K+\tilde{E}_W=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\cos^2(\omega t-kx)+\frac{1}{2}A^2k^2\mu\cos^2(\omega t-kx)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\rho A^2\omega^2+A^2k^2\mu\right)\cos^2(\omega t-kx)$$

9.1.7　这个总能量随时间作周期性变化，时而达到最大值，时而为零。

9.1.8 $\overline{E_K}=\overline{E_W}=\frac{1}{4}\rho A^2\omega^2$

平均能量密度为$\overline{E}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$

平均的能量密度与振幅的平方和频率的平方成正比;对同样的振幅,高频波携带更多的能量。

9.1.9　假设地震波能量通过的射线管的面积为ΔS，波的传播速度为 c，则在Δt时间内波传播的长度为$c\Delta t$，则在这段时间内射线管的总体积为$c\Delta t\Delta S$。

9.1.10　射线管的总体积为$c\Delta t\Delta S$乘以能量密度为这段时间的总能量为$\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2c\Delta t\Delta S$，

则在传播方向（垂直于波前）上，单位时间、单位面积的能流密度为：$\overline{E}^{flux}=\frac{1}{2}c\rho A^2\omega^2$，

这里 c 是波的速度（对 P 波，$c=\alpha$；对 S 波，$c=\beta$）。

9.1.11　考虑在时刻t_1、波前上横截面积为dS_1的一个小的通道，通道的边缘由局部传播方向的这些射线所限定。通过这个通道的能流为：$\overline{E}^{flux}_{(t_1)}=\frac{1}{2}c\rho A_1^2\omega^2dS_1$

假定能量只沿这些射线传播（高频的近似），那么尽管通道的面积可能发生变化，但射

线管里的能流必定保持不变。于是在时间t_2：$\overline{E}^{flux}(t_2)=\frac{1}{2}c\rho A_2^2\omega^2 dS_2=\overline{E}^{flux}(t_1)$

且根据(9-1-18)和(9-1-19)，对常数的 c 和ρ，我们得到：$\frac{A_2}{A_1}=\sqrt{\frac{dS_1}{dS_2}}$

这就是说振幅与由射线管所限定的通道截面面积的平方根呈反比。

9.1.12　地震波传播介质的密度和地震波传播速度的乘积ρc叫做材料的阻抗。

9.1.13 我们知道$\frac{A_2}{A_1}=\sqrt{\frac{dS_1}{dS_2}}$，这就是说，振幅与由射线管所限定的通道截面面积的平方根呈反比。如果密度ρ和波速 c 随位置发生变化，那么振幅也发生变化。在没有几何扩散（$dS_1=dS_2$）时，我们有：$\frac{A_2}{A_1}=\sqrt{\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}}$，这就是说，振幅与阻抗的平方根呈反比变化。

9.1.14　根据$\frac{A_2}{A_1}=\sqrt{\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}}$可以得出波在速度比较慢，密度比较小的固体里传播时，振幅将变大。

9.1.15　(1)由$\overline{E}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$，$\omega=2\pi f$得平均能量密度为 1.9187E-6J/m^3。

(2)总能量等于$\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 c\Delta t\Delta S$,代入数值得 0.0115J.

9.1.16　根据$\frac{A_2}{A_1}=\sqrt{\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}}$可以得到

$$A_2=A_1\sqrt{\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}}=1\mu m\sqrt{\frac{2.8\times 5}{0.9\times 1.2}}=3.6\mu m$$

即在松软土上的地震仪的振幅为摆墩上地震仪记录振幅的 3.6 倍。

9.1.17

根据式（9-1-17）有

$$A=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2\overline{E}^{flux}}{\rho v}}=\frac{1}{2\pi f}\sqrt{\frac{2\overline{E}^{flux}}{\rho v}}=\frac{1}{2\pi 5}\sqrt{\frac{2\times 0.6}{3.0\times 10^3\times 6.0}}=8.72\times 10^{-6}(\mathrm{m})=8.72\mu\mathrm{m}$$

所以，介质在这种介质中的振幅为 8.72 微米。

9.2.1 $\tilde{E}(X)=\dfrac{p}{4\pi u_0^2 X\cos^2\theta_0}\left|\dfrac{dp}{dX}\right|E_s$

9.2.2

在 $\tilde{E}(x)=\dfrac{p}{4\pi u_0^2 x\cos^2 i_0}\left|\dfrac{dp}{dx}\right|E_s$ 式中,地表慢度为常数，在分母上，震中距的增大会引起分母的增大，同时震中距越大，偏垂角越小，其余弦平方越小。因此随着震中距的增大分母部分会增大，导致平均能量密度减小。但要注意，随着震中距的增大，射线参数 p 会减小。通常情况下 $\left|\dfrac{dp}{dx}\right|$ 变化不太大。因此平均能量密度会随着震中距的增加而迅速减小，地震波的振幅也就快速衰减。

9.2.3 当 $dx/dp=0$ 时，预测能量出现“灾变”，振幅变成无穷大。在射线理论中，称之为焦散点，为三次往返走时曲线的交汇点。此结果只有在无穷高的频率情况下才是真实的。对感兴趣的有限频率，波长是相当长的，易于对 $dx/dp=0$ 场地的所有点求平均。在焦散点附近，振幅变大，但不是无穷大。实际上，因为焦散点是走时曲线上的一个点，由射线几何理论预测的在焦散点处无穷大的振幅通常不会在数值上引起什么问题，积分的能量仍是有限的。

9.2.4 由于地震低速层使得到达这里的地震射线通过较远的距离才能到达地面，这与穿过下面正常层的射线叠加使这里地震波的振幅增大。

9.2.5 当地震射线遇到速度突变带时，就会出现走时曲线顺行、逆行、再次顺行的焦散点，在这些焦散点，地震波的振幅会增大。

9.2.6 $E(\Delta)=\dfrac{\sin\theta_1}{4\pi r_2^2\sin\Delta\cos\theta_2}\left|\dfrac{d\theta_1}{d\Delta}\right|E_s$

9.2.7 当 Δ 很小时，$\sin\Delta\approx\Delta, R\sin\Delta=x$，$Rd\Delta=dx, p=u_0R\sin i$，则

$$\tilde{E}(\Delta)=\frac{pE_s}{4\pi R^4u_0^2\sin\Delta\cos^2 i_0}\left|\frac{dp}{d\Delta}\right|=\frac{u_0R\sin i_0E_s}{4\pi R^2u_0^2(\mathrm{R}\sin\Delta)\cos^2 i_0}\left|\frac{d}{Rd\Delta}\left(u_0R\sin i_0\right)\right|$$
$$=\frac{u_0\sin i_0E_s}{4\pi u_0^2x\cos^2 i_0}\left|\frac{d}{dx}\left(u_0\sin i_0\right)\right|=\frac{pE_s}{4\pi u_0^2x\cos^2 i_0}\left|\frac{dp}{dx}\right|$$

9.3.1 在散射衰减中，主要的地震波振幅的减小是由小尺度的不均匀的散射所造成的，但整个波场的积分能量不变，通常采用该观测确定地震的持续时间震级。固有衰减是地震波的能

量随着时间和空间的变化而衰减的。

9.3.2

由 $\frac{1}{Q}=-\frac{\Delta E}{2\pi E}$，$\gamma=\frac{\omega}{2cQ}$，$w=\frac{2\pi}{T}$，$T=\frac{\Lambda}{C}$ 代入即可得到 $\frac{\Delta E}{E}\approx-2\gamma\Lambda$。

9.3.3

$$Q=\frac{-2\pi E}{\Delta E}=\frac{-2\pi E}{T\frac{dE}{dt}}$$

分离变量得到：

$$\frac{dE}{E}=\frac{-2\pi}{QT}dt$$

得到能量的表达式为

$$E=E_0e^{-2\pi t/QT}$$

9.3.4　由前面的讲解可知位移振幅比为能量比的开方，因此有

$$A=A_0e^{-\pi t/QT}=A_0e^{-\omega t/2Q}=A_0e^{-\omega(x/c)/2Q}=A_0e^{-\omega x/2cQ}$$

9.3.5（正确）

9.3.6（正确）

9.3.7　除了在内核外，通常假定 Q_K 是无穷大的。在上地幔和内核，剪切衰减是最大的。PREM 模型给出了典型的假定值。在 80 公里深度以上，Q_μ 为 600，在深度 80-220 公里之间，Q_μ 降到 80，在 220-670 公里之间，Q_μ 增大到 143，在下地幔（670 公里以下），Q_μ 为 312。在流体外核，没有剪切波传播。PREM 模型给出内核的 $Q_\mu=85$。

9.3.8（错误）

9.3.9　(A,C)

9.3.10（正确）

9.3.11（正确）

9.3.12　S 波的速度表达式为 $\beta=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$，直接由剪切衰减 Q_μ 来确定：$Q_\beta=Q_\mu$

而 P 波的速度表达式$\alpha=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}=\sqrt{\frac{K+\frac{4}{3}\mu}{\rho}}$与体积变形衰减和剪切衰减均有关系。根据 P 波速度表达式，可以将其合成：

$$Q_\alpha^{-1}=\frac{\frac{4}{3}\mu}{K+\frac{4}{3}\mu}Q_\mu^{-1}+\frac{K}{K+\frac{4}{3}\mu}Q_K^{-1}=\frac{4}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2Q_\mu^{-1}+\left[1-\frac{4}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right]Q_K^{-1}$$

9.3.13 （1） $$Q_\alpha^{-1}=\frac{\frac{4}{3}\mu}{K+\frac{4}{3}\mu}Q_\mu^{-1}+\frac{K}{K+\frac{4}{3}\mu}Q_K^{-1}=\frac{4}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2Q_\mu^{-1}+\left[1-\frac{4}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right]Q_K^{-1}$$

则，Q_α=740.8，$Q_\beta=Q_\mu$=100.

（2）由$A=A_0e^{-\pi t/QT}=A_0e^{-\omega t/2Q}=A_0e^{-\omega(x/c)/2Q}=A_0e^{-\omega x/2cQ}$，$\omega=\frac{2\pi}{T}$代入数值得

周期为100s的衰减为0.9906，周期为10s的衰减为0.9101，周期为1s的衰减为0.3899。

9.3.14 $A=A_0e^{-\pi t/QT}=A_0e^{-\omega t/2Q}=A_0e^{-\omega(x/c)/2Q}=A_0e^{-\omega x/2cQ}$，$\omega=\frac{2\pi}{T}$代入数值得0.9896。

9.3.15 根据公式$A=A_0e^{-\pi t/QT}=A_0e^{-\omega t/2Q}=A_0e^{-\omega(x/c)/2Q}=A_0e^{-\omega x/2cQ}$采用matlab进行运算

```
Q1=600;
Q2=300;
T=5;
t=5;
u1=exp(-pi*t/(T*Q1)) %地震波位移表达式
u2=exp(-pi*t/(T*Q2))
```

结果为u1 = 0.9948,u2 = 0.9896

100秒内：

```
Q1=600;
Q2=300;
T=5;
t=100;
u1=exp(-pi*t/(T*Q1)) %地震波位移表达式
u2=exp(-pi*t/(T*Q2))
```

结果为u1 =0.9006，u2 = 0.8110

整个传播过程：

```
c1=7.2;   %地震波的传播速度为 7.2km/s
c2=4;
Q1=600;
Q2=300;
f1=0.2;f2=0.2;
w1=2*pi*f1;w2=2*pi*f2;
x=3000;
u1=exp(-w1*x/2/c1/Q1)  %地震波位移表达式
u2=exp(-w1*x/2/c2/Q2)
```

结果为：u1 =0.6464，u2 =0.2079

可见S波的衰减较P大得多，因此在远处地震图上，S波在体波中占有优势成分。

9.3.16　$A = A_0 e^{-\pi t/QT} = A_0 e^{-\omega t/2Q} = A_0 e^{-\omega(x/c)/2Q} = A_0 e^{-\omega x/2cQ}$，$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$，A0=5，代入数值得 4.7449 微米。

9.3.17　根据 $A(x) = A_0 \exp\left(-\dfrac{\pi t}{QT}\right)$ 得 0.9657mm。

9.4.1　三种标度，一是近震震级 M_L，二是面波震级 M_S，三是体波震级标度 M_B 或 M_b。

9.4.2　目前已知的最大地震 M_S 还没有超过 8.9 级的

9.4.3　最小的地震则已可以用高灵敏度的微震仪器观测到-3 级。

9.4.4　我国测定的 M_S 震级比国际上的地震机构测定的震级系统偏高 0.2 级。

9.4.5 填空　伍德—安德森标准;两水平向最大振幅的算术平均值的对数之比

9.4.6　$\lg A_0$ 是震中距的函数，是零级地震在不同震中距的振幅对数值，称作起算函数、标定函数或量规函数。

9.4.7　$M_L = \lg A_{\max} - \lg A_0$ 如果 $A_{\max} = A_0$，则 $M = 0$。

9.4.8　由于地震辐射源是各向异性源，所以处于不同方位的地震台站测得的震级有差别是很自然的。

9.4.9 填空　15°<Δ<130°；$A_{H\max}$；Δ；T= (20±2)s

9.4.10　M_B 是用 1s 左右的地震体波振幅来量度地震的大小，而 M_b 是用 5s 左右的地震体波振幅来量度地震的大小。

9.4.11 $M_0 = \mu \bar{D} A$，其中，μ是介质的剪切模量；D 是破裂的平均位错量；A 是破裂面的面积。

9.4.12 地震矩是对断层滑动引起的地震强度的直接测量。所以，M_0由地震波振幅的低频成分的大小决定，它反映了震源处破裂的大小，断层面积越大，激发的长周期地震波的能量越大，周期越长。

9.4.13 $M_W = \frac{2}{3}\lg M_0 - 6.033$，地震矩 M_0的单位为 N.m。

9.4.14 矩震级标度有以下优点：

(1) 它反映了形变规模的大小，是目前量度地震大小最好的物理量。

(2) 它是一个绝对力学标度，不产生饱和问题。对大震、小震、微震甚至极微震、深震均可测量。

(3) 能够与我们熟悉的震级标度衔接起来，对于破坏性地震，$M_W \approx M_S$

(4) 它是一个均匀震级标度，适于震级尺度范围很宽的统计。

9.4.15 对于地方震，地震信号的持续时间主要由尾波的长度决定，尾波持续时间是从 P 波开始，到振动衰减到与干扰背景相当为止之间的时间长度。

9.4.16 当采用地震仪记录地方强震时经常出现限幅现象，无法测定震级的情况下采用持续时间震级比较合适。

9.4.17 最早出现震级饱和的是短周期体波震级 M_b，其次是近震震级 M_L、中长周期体波震级 M_B，最后是面波震级 M_S，而矩震级无饱和现象。

9.4.18 产生震级饱和的主要原因如下：由于里克特-古登堡震级系统建立在单一频率地震波振幅测定震级的基础上，从某个角度讲，振幅的大小表现了震源所释放能量的大小，地震越大，断层越长，激发的面波的波长越大，周期越大，携带的能量越丰富。对于近震和小震，我们通常使用的各种地震仪器能对地震体波和 20s 周期以内的面波记录较好，测出的震级也比较客观地反映了震源所释放的能量。但对于大地震或特大地震，地下岩石破裂的长度达数百公里，激发了更长周期的面波，并且携带更多的能量，而通常的中长周期地震仪受频带的限制，对周期为 20s 以上的面波记录到的振幅却不再增加，故产生了震级饱和现象。

9.4.19 面波震级的计算公式为 $M_S = \lg(A/T) + 1.66\lg\Delta + 3.3$，代入可得：

$$6.13 = \lg(A/T) + 1.66\lg\frac{3000}{111.195} + 3.3$$

得到

$$\lg(A/T) = 0.4545$$

$$A = 10^{0.4545} \times 20 \times 1500 = 85432\mu m = 8.5cm$$

由于在 Ms5.7-8.0 的范围内 MW≈MS，因此

$$M_W = 6.13 = \frac{2}{3}\lg M_0 - 6.033$$

$$M_0 = 1.756\times10^{18} N.m$$

9.4.20　6 级地震在震中距为 16°的振幅为 $A_{16} = 10^{6-1.66\log16-3.3} = 5.0253\mu m$

6 级地震在震中距为 20°的振幅为 $A_{20} = 10^{6-1.66\log20-3.3} = 3.4697\mu m$

品质因子求一定震中距的振幅公式为 $A = A_0 e^{-\omega x/2cQ}$，因此可以得到

$$\frac{A_{20}}{A_{16}} = \frac{A_0 e^{-\frac{2\pi}{20}(20\times111.195)/2\times3\times Q}}{A_0 e^{-\frac{2\pi}{20}(16\times111.195)/2\times3\times Q}} = e^{-\frac{2\pi}{20}(4\times111.195)/2\times3\times Q} = \frac{3.4697\mu m}{5.0253\mu m}$$

由此得到：Q=62.87.

9.4.21 1 千瓦时=1000watt*3600s=3.6E6J.

10 年消耗的电能为 10*365.25*5E6*3.6E6=6.5745E16(J)。

由 $\log_{10} E = 4.8 + 1.5M_s$，计算得 Ms=8.0。

这就是说，燕郊 10 年的用电量相当于一个 8 级地震所释放的能量。

9.4.22 由 $\log_{10} E = 4.8 + 1.5M_s$ 计算出 8 级地震的能量 E1=6.3096e+16J，6 级地震的能量 E2=6.3096e+13J,5 级地震的能量 E3= 1.9953e+12J，4 级地震的能量 E4= 6.3096e+10J。

E1/E2=1000,E1/E3= 31622,E1/E4=1000000;

则在 400 年内需要发生 1000 个 6 级地震或 31622 个 5 级地震或一百万个 4 级地震。

9.4.23 由 8.9 级地震的能量公式得 $\log_{10} E_{8.9} = 4.8 + 1.5*8.9$，由 7.1 级地震的能量公式得 $\log_{10} E_{7.1} = 4.8 + 1.5*7.1$，由此得到 $\frac{E_{8.9}}{E_{7.1}} = 10^{1.5*1.8} = 10^{2.7} \approx 501$。

9.4.24 该地震为倾滑型地震，按公式（9-7-20）计算，由于介质为 Possion 介质，$\lambda=\mu$，代入公式得到

8.97E27/(4000000^2)/30000000*8/3/pi=1.5862e+007dyn/cm2=1.6MPa。

9.4.25　$\Delta\sigma = \frac{7M_0}{16R^3} = \frac{7\times4.5\times10^{14} N.m}{16\times(500m)^3} = 1575000Pa = 1.575MPa$

9.4.26 地震烈度是对地震引起的地震动及其对人、人工结构、自然环境影响的强弱程度的描述，不是一个物理量；它直接由地震造成的影响评定，但也间接反映了地震动本身的强烈程度。

9.4.27 地震烈度受震级、距离、震源深度、地质构造、场地条件等多种因素的影响。

9.4.28 房屋；结构物；地表

9.4.29 Ⅰ~Ⅴ；Ⅵ~Ⅹ；Ⅺ~Ⅻ

9.4.30 震害大小；地震动强弱

第十章

10.1.1 格林函数 $\mathbf{G}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_0,t_0)$ 表示单位力矢量 t0 时刻作用在 $\mathbf{r}_0$ 点，在 $\mathbf{r}$ 处,t 时刻产生的位移矢量。因此 G 联系了 t0 时刻作用在 $\mathbf{r}_0$ 处的三个方向的单位力矢量和 $\mathbf{r}$ 处,t 时刻的三个方向位移量，是一个张量形式。

10.1.2 格林函数表示单位力矢量 t0 时刻作用在 $\mathbf{r}_0$ 点，在 $\mathbf{r}$ 处,t 时刻产生的位移矢量。

10.1.3 t0 时刻作用在 $\mathbf{r}_0$ 处的 y 方向的单位力在 $\mathbf{r}$ 处、t 时刻产生的位移矢量为 $G_{xy}\hat{\mathbf{i}}+G_{yy}\hat{\mathbf{j}}+G_{zy}\hat{\mathbf{k}}$

10.1.4 由于地震断层错动是力偶来描述的，力偶是大小相等，方向相反的力，因此震源处的动量守恒，即力是平衡的。

10.1.5 作用在断层上的力偶的力矢量大小相等，方向相反，但通常作用点在力矢量的垂直方向上分开。在这种情况下，除非还存在一对互补的力偶来平衡这对力，否则角动量不会守恒（震源介质会旋转起来）,这种两个力偶来描述震源，这种模型叫做双力偶模型。用双力偶描述震源更符合物理规律。

10.1．6　参看图 10-1-2 的右上角图。

10.1.7 N.m

10.1.8 力偶 M_{ij} 为一对作用在 i 取向上、方向相反、在 j 取向上分开的力（沿 i 方向的力位于 j 增加方向,而逆 i 方向的力位于 j 减小方向)。由于只有这样一个力偶作用在震源处，角动量不守恒，而震源没有外力作用，角动量必须守恒。所以必须增加一个力偶的力矢量沿 j 方向，在 i 方向错开的相同大小的力偶（沿 j 方向的力位于 i 增加方向，而逆 j 方向的力位于 i 减小方向）才能保证角动量守恒，这样有 $M_{ij}=M_{ji}$，所以矩张量实对称张量。

10.1.9 $$u_i(\mathbf{r},t)=\frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_0,t_0)}{\partial x_k}M_{jk}(\mathbf{r}_0,t_0)$$

10.2.1 断层走向：断层与水平地表面交线的自北算起向东旋转的角度。

倾角：断层面自水平面转到断层面的角度，该旋转角度小于 90°。

滑动角：断层滑动矢量和断层走向之间的夹角。

断层上盘、下盘：对于非垂直的断层，比较低的块体叫做下盘（footwall），上面的块体叫做上盘(upwall)。

逆断层：上盘向上运动的断层叫做逆断层。

正断层：上盘向下运动的断层叫做正断层。

冲断层：倾角小于 45° 的逆断层也叫做冲断层。

逆掩断层：近于水平的冲断层叫做逆掩断层。
走滑：断层面之间的水平运动叫做走滑(strike slip)。
倾滑：断层面之间的垂直运动叫做倾滑(dip slip)。
右旋走滑：如果站在断层一边的观测者看到邻近的块体向右运动，叫做右旋走滑运动。
主断层面、辅助断层面：对双力偶模型，一般来说，两个可能的断层面都与远距离的地震观测结果相吻合。实际的断层面叫做主断层面，另一个断层面叫做辅助断层面。
10.2.2（1）走向北，倾角 90°，滑动角 0°或者是走向东，倾角 90°，滑动角 180°
走向北，倾角 0°，滑动角 180°或者是走向东（或西），倾角 90°，滑动角 90°（或-90°）
（3）走向东，倾角 0°，滑动角 180°或者是走向北（或南），倾角 90°，滑动角-90°（或 90°）
10.2.3 对于地震矩张量，矩张量的迹则表示膨胀源（或塌缩源）分量。如果膨胀或塌缩源为各向同性的，则矩张量有简单的形式：

$$M=\begin{bmatrix} M_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & M_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & M_{zz} \end{bmatrix}$$

这里 $M_{xx}=M_{yy}=M_{zz}$ 。

10.2.4 将 $\phi=30^o,\delta=60^o,\lambda=45^o,M_0=10^{15}$ 矩张量表达式得到

$$M_{11}=-M_0\left(\sin\delta\cos\lambda\sin 2\phi+\sin 2\delta\sin\lambda\sin^2\phi\right)=-10^{15}\times\left(\frac{3}{8}\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{16}\right)$$

$$M_{22}=M_0\left(\sin\delta\cos\lambda\sin 2\phi-\sin 2\delta\sin\lambda\cos^2\phi\right)=10^{15}\times\left(\frac{3}{8}\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{6}}{16}\right)$$

$$M_{33}=M_0\left(\sin 2\delta\sin\lambda\right)=-\left(M_{11}+M_{22}\right)=10^{15}\times\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$M_{12}=M_0\left(\sin\delta\cos\lambda\cos 2\phi+\tfrac{1}{2}\sin 2\delta\sin\lambda\sin 2\phi\right)=10^{15}\times\left(\frac{\sqrt{6}}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{16}\right)$$

$$M_{13}=-M_0\left(\cos\delta\cos\lambda\cos\phi+\cos 2\delta\sin\lambda\sin\phi\right)=-10^{15}\times\left(\frac{\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$$

$$M_{23}=-M_0\left(\cos\delta\cos\lambda\sin\phi-\cos 2\delta\sin\lambda\cos\phi\right)=-10^{15}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{8}\right)$$

10.2.5　错误
10.2.6 按照题意，将地震矩张量在北东下坐标系下表示为

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\times 10^{18}$$

对其求本征值和本征向量，忽略因子 1018，采用 MATLAB 语句[V,D]=eig([2 -1 1;-1 0 1;1 1 2])得到 λ_1=-1，λ_2=2，λ_3=3 。其对应的本征向量分别为（-0.4082，-0.8165,0.4082）、

（0.5774，-0.5774，-0.5774）和（-0.7071,0，-0.7071）。最小本征值对应于挤压轴，该方向在南西下方向或北东上方向。最大本征值对应于南上或北下方向，与南和上的方向分别夹 45 度角。如果以这三个本征向量作为坐标轴。则该地震矩张量可以表示为

$$M=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\times 10^{18}$$

10.2.7 根据教材中（10-2-5）的矩张量分解，同样忽略相同的因子，有

$$M=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{7}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

其中分解的前一部分为各向同性源，由于这里为正，表示该地震矩张量中有一定的膨胀分量，相当于火山爆发的膨胀源成分。后面的一部分纯偏矩张量部分。

10.2.8 按照教材中的（10-2-6）式，考虑 10.2.7 矩张量的分解为

$$M=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

可见在拉张轴上的双力偶（最后一部分）最大，挤压轴上的双力偶（分解的第二部分）次之。

10.2.9 按照教材中的（10-2-7）式，矩张量的分解为

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

其中，后面的所有补偿线性向量偶极的迹为零。

10.2.10 按照教材中的（10-2-8）式，再考虑 10.2.7 中已经分解的偏量本征值，我们将偏量本征值的绝对值从大到小排列（注意，在进行上述排列时，其对应的本征向量要与本征值对应），进行矩张量分解为

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{7}{3}&0&0\\0&\frac{7}{3}&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-\frac{2}{3}&0\\0&0&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

其中，所分解的第二项为大双力偶（最佳双力偶），含有最大本征值，而另一个双力偶为小双力偶。此处 $M_3^1=\frac{2}{3}$，则最小双力偶有一定的分量，表明此震源与双力偶模型有一定差距。

10.2.11 考虑 10.2.7 中已经分解的偏量本征值，我们将偏量本征值的绝对值从大到小排列，

可以得到

$$\mathrm{F}=-\frac{M_2^1}{M_1^1}=-\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{7}{3}}=\frac{2}{7}$$

按照教材中的（10-2-9）式，，进行矩张量分解为

$$\mathbf{M}'=\begin{bmatrix}-\frac{7}{3}&0&0\\0&\frac{2}{3}&0\\0&0&\frac{5}{3}\end{bmatrix}=-\frac{7}{3}\left(1-\frac{4}{7}\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}-\frac{7}{3}\times\frac{2}{7}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

补偿线性向量偶极的相对强度 200×F%=57.1%，双力偶的相对大小为 100×（1-2F）%=43%。

根据教材中的公式，$\mathrm{M}_0=\frac{|M_1|+|M_3|}{2}=2e18(N.m)$。

10.2.12 根据矩张量表达式，Myy=-1,Mzz=1，因此东西向为压缩轴，上下向为拉张轴，得到的断层面倾角为45°。所以两个节面的走向、倾角和滑动角分别为:0°,45°,90°和180°,45°,90°。

10.2.13 该断层有 Mxy 和 Myx 两个分量。对于 Mxy 的分量，对应的节面的走向、倾角和滑动角为 0°,90°,0°，对于 Myx 对应的节面的走向、倾角和滑动角为 90°,90°,180°。

10.2.14 由于只有 z 方向的张裂，所以其矩张量的各个分量中只有 Mzz 不为零，而其他分量均为零。

10.2.15 （1）$M_0=\mu DA$，这里 μ 为剪切模量，D 是断层位移，A 是断层面积

计算得，标量地震矩为 3×1018N.m。（2）$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&3\times10^{18}&0\\3\times10^{18}&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$。

10.2.16 根据（10-2-17）式，将上东南坐标系转换为北东下坐标系，并且 Mrr，Mtt，Mpp，Mrt，Mrp，Mtp 分别表示 $M_{rr},M_{\theta\theta},M_{\phi\phi},M_{r\theta},M_{r\phi},M_{\theta\phi}$。因此可以写出北东下坐标系下的

矩张量（略去共同的因子）表示：

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} M_{\theta\theta} & -M_{\theta\phi} & M_{r\theta} \\ -M_{\theta\phi} & M_{\phi\phi} & -M_{r\phi} \\ M_{r\theta} & -M_{r\phi} & M_{rr} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1.820 & -0.475 & 8.040 \\ -0.475 & 0.058 & 1.510 \\ 8.040 & 1.510 & 1.760 \end{bmatrix}$$

采用 MATLAB 中的语句 [V,D]=eig([-1.820,-0.475,8.040;-0.475,0.058,1.510;8.040,1.510,1.760]) 得到 $\lambda_1=-8.4708$，λ_2，λ_3。其对应的本征向量分别为（0.7659,0.1532,-0.6245）、（0.1868,-0.9823,-0.0119）和（-0.6153,-0.1076,-0.7810）。最小本征值对应于挤压轴，该方向在北东上或南西下方向。最大本征值为拉张轴对应于南西下或北东上方向。

10.2.17 (1)破裂的最终位错为 1m，将已知参数代入标量地震矩表达式：

$$M_0=\mu DA=3.0e10\times1\times100000\times20000=6.0e19(\mathrm{N.m})$$

矩震级 Mw=log10(6*10^19)/1.5 - 6.033=7.2

（2）
$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & M_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10.2.18

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & M_0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} M_{DC} & 0 & 0 \\ 0 & -M_{DC} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} M_{CLVD} & 0 & 0 \\ 0 & M_{CLVD} & 0 \\ 0 & 0 & -2M_{CLVD} \end{bmatrix}$$

其中,

$$M_0=\frac{M_1+M_2+M_3}{3},M_{DC}=\frac{M_1-M_2}{2},$$

$$M_{CLVD}=\frac{M_0-M_3}{2}=\frac{\frac{M_1+M_2+M_3}{3}-M_3}{2}=\frac{M_1+M_2-2M_3}{6}$$

10.3.1

采用教材中所给的 MATLAB 程序 v2trpl，运用语句[trpl]=v2trpl([0.7659,0.1532,-0.6245])，得到挤压轴走向为 191.31°，倾伏角为 38.64°。表明该震源为近北向挤压的应力作用，与印度板块向青藏高原逆冲的机制一致。运用语句[trpl]=v2trpl([-0.6153,-0.1076,-0.7810])，得到拉张轴走向为 9.92°，倾伏角为 51.35°。

10.3.2

采用教材中所给的 MATLAB 程序 dsrin，运用语句[Ptrpl,Ttrpl,Btrpl,str2,dip2,rake2]=dsrin(231,35,138)，得到该地震辅助面的走向 357.4°，倾角 67.4°，滑动角 62.5°；挤压轴（P）走向为 107.5°，倾伏角为 17.9°；拉张轴(T)走向为 229.0°，倾伏角为 58.3°；中间轴(B)走向为 8.7°，倾伏角为 25.2°。

10.3.3

采用教材中所给的 MATLAB 程序轴 pt2ds，运用语句[str1,dip1,rake1,str2,dip2,rake2,Btrpl,PTangle]=pt2ds([191.31,38.64],[9.92,51.3

5])，得到震源的两个节面走向、倾角、滑动角分别为 100.7°,83.6°,89.3° 和 286.8°，6.4°,96.1°。中间轴（B）走向为 100.8°，倾伏角为 0.7°。

10.3.4

采用教材中所给的 MATLAB 程序轴 mom2other，运用语句

```
Mrr=-0.034;Mtt=-1.610;Mpp=1.640;Mrt=0.156;Mrp=0.329;Mtp=0.904;
m=[Mtt,Mpp,Mrr,-Mtp,Mrt,-Mrp];
[str1,dip1,rake1,str2,dip2,rake2,Ptrpl,Ttrpl,Btrpl]=mom2other(m)
```

得到震源的两个节面走向、倾角、滑动角分别为 80.0°,84.3°,8.9° 和 329.1°，81.2°,174.2°。挤压轴(P)走向为 194.3°，倾伏角为 2.2°；拉张轴(T)走向为 284.7°，倾伏角为 10.3°；中间轴(B)走向为 92.4°，倾伏角为 79.5°。

10.4.1 球面波的 P 波的表达式可以表述为：$u(r,t)=-\frac{1}{r^2}f(t-r/\alpha)-\frac{1}{r\alpha}\frac{\partial f(t-r/\alpha)}{\partial\tau}$。

其中，第一项按 $\frac{1}{r^2}$ 衰减，因其只在接近震源处才起重要作用，故称为近场项，表示震源的永久性位移。第二项按 $\frac{1}{r}$ 衰减，因其在远离震源的较大距离处居主导地位，故称为远场项。

10.4.2 $u_i^p(x,t)=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3}\frac{x_ix_jx_k}{r^3}\frac{1}{r}\dot{M}_{jk}(t-r/\alpha)$，其中，$r^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$，是震源至接收器的距离的平方，$\dot{M}$ 是矩张量的时间导数。这里采用了 Einstein 求和约定，如果有多个矩张量元素时，应该加起来。

10.4.3 震源时间函数：假设地震矩张量的各个分量随时间变化是同步的（即同步震源假设），则 $M_{ij}(t)=M_{ij}\cdot S(t)$，其中 M_{ij} 为一个量值，而 $M_{ij}(t)$ 则是随时间变化的一系列数值。S(t)就是震源时间函数。

膨胀区、压缩区：断层错动的前方形成膨胀区，后方形成压缩区。

辅助断层面：与断层面和滑动矢量垂直的面通常叫做辅助断层面。

零运动节线：断层面和辅助断层面（垂直于断层面和滑动矢量）形成了把 P 波极性分成四个象限的零运动节线。

压缩象限、膨胀象限：向外指向的矢量表示在远场向外的位移（假定 $\dot{M}$ 是正的），这叫做压缩象限。朝内指向的矢量出现在膨胀象限。

震源球：在地震学中，定义以地震震源为球心，球内的介质可看作均匀介质（即球内的地震射线为直线）的虚拟球，叫做震源球（focal sphere）。

节面：在地震震源研究中，把将膨胀区和压缩区分开的两个平面均叫做节面(nodal plane)。

10.4.4 判断：正确

10.4.5 双力偶震源的 P 波辐射花样是正负相间的，断层错动的前方形成膨胀区，后方形成压缩区，压缩区和膨胀区以断层面和与断层面和滑动矢量垂直的平面区分开，在与断层面夹角为 45°的方向位移最大，在断层前方为正，在断层后方为负，位于节面处的方向振幅为零。

10.4.6 $$u_i^s(x,t)=\frac{(\delta_{ij}-\gamma_i\gamma_j)\gamma_k}{4\pi\rho\beta^3}\frac{1}{r}\dot{M}_{jk}(t-r/\beta)$$

这里β是剪切波速度，方向余弦是$\gamma_i=x_i/r$。

10.4.7 $$\mathbf{u}=\frac{1}{4\pi\rho\beta^3 r}\left(\cos 2\theta\cos\phi\hat{\boldsymbol{\theta}}-\cos\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)\dot{M}_0(t-r/\beta)$$

10.4.8 根据教材中的图 10-4-4 可知，S 波位移在与压缩轴（P 轴）和拉张轴（T 轴）夹角为 45 度的方向振幅最大，在压缩轴、拉张轴和中间轴上振幅为零。

10.4.9 根据地震台站所在的射线方位可以得到，台站相对于地震的方向为$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=(\sin i\cos\alpha_z,\ \sin i\sin\alpha_z,\ \cos i)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$。

以震源为坐标系原点，则$\gamma_1=\frac{x_1}{r},\gamma_2=\frac{x_2}{r},\gamma_3=\frac{x_3}{r}$。

滑动矢量为$(0,1,0)$，在法向为$(1,0,0)$的方向错开 2m 的地震矩张量中只有$\dot{M}_{yx}=\dot{M}_{xy}=\frac{\mu DA}{\Delta t}=\frac{3.0E10Pa\times 2m\times 1.0E6m^2}{1s}=6.0E16N.m/s$（这里考虑矩张量的对称性）。将其代入远场 P 波位移表达式$u_i^p(x,t)=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3}\frac{x_ix_jx_k}{r^3}\frac{1}{r}\dot{M}_{jk}(t-r/\alpha)$中

$$u_1^p(x,t)=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3 r}\frac{x_1}{r}\left[\frac{x_2x_1}{r^2}\dot{M}_{yx}(t-r/\alpha)+\frac{x_1x_2}{r^2}\dot{M}_{xy}(t-r/\alpha)\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3 r}\gamma_1\left[\gamma_2\gamma_1\dot{M}_{yx}(t-r/\alpha)+\gamma_1\gamma_2\dot{M}_{xy}(t-r/\alpha)\right]$$

$$=\frac{\gamma_1^2\gamma_2}{2\pi\rho\alpha^3 r}\dot{M}_{yx}(t-r/\alpha)=\frac{\gamma_1^2\gamma_2}{2\pi\rho\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{\frac{3}{2}}r}\dot{M}_{yx}(t-r/\alpha)$$

$$=\frac{\frac{1}{8}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times 6.0e16}{2\pi\times 3000\times\left(\frac{3\times 3e10}{3000}\right)^{\frac{3}{2}}10000}=8.5612e-5(m)$$

注意：上面计算中采用国际单位制进行变换，下同。

$$u_2^p(x,t)=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3 r}\frac{x_2}{r}\left[\frac{x_2x_1}{r^2}\dot{M}_{yx}(t-r/\alpha)+\frac{x_1x_2}{r^2}\dot{M}_{xy}(t-r/\alpha)\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3 r}\gamma_2\left[\gamma_2\gamma_1\dot{M}_{yx}(t-r/\alpha)+\gamma_1\gamma_2\dot{M}_{xy}(t-r/\alpha)\right]$$

$$=\frac{\gamma_2^2\gamma_1}{2\pi\rho\alpha^3 r}\dot{M}_{yx}(t-r/\alpha)=\frac{\gamma_1^2\gamma_2}{2\pi\rho\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{\frac{3}{2}}r}\dot{M}_{yx}(t-r/\alpha)$$

$$=\frac{\frac{1}{8}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times 6.0e16}{2\pi\times 3000\times\left(\frac{3\times 3e10}{3000}\right)^{\frac{3}{2}}10000}=8.5612e-5(m)$$

$$u_3^p(x,t)=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3 r}\frac{x_3}{r}\left[\frac{x_2x_1}{r^2}\dot{M}_{yx}(t-r/\alpha)+\frac{x_1x_2}{r^2}\dot{M}_{xy}(t-r/\alpha)\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3 r}\gamma_3\left[\gamma_2\gamma_1\dot{M}_{yx}(t-r/\alpha)+\gamma_1\gamma_2\dot{M}_{xy}(t-r/\alpha)\right]$$

$$=\frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{2\pi\rho\alpha^3 r}\dot{M}_{yx}(t-r/\alpha)=\frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{2\pi\rho\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{\frac{3}{2}}r}\dot{M}_{yx}(t-r/\alpha)$$

$$=\frac{\frac{1}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6.0e16}{2\pi\times 3000\times\left(\frac{3\times 3e10}{3000}\right)^{\frac{3}{2}}10000}=2.0971e-4(m)$$

10.4.10 (1)断层面的倾角为 90 度，表明为垂直断层；滑动角为 0 度，表明为左旋走滑的水平错动，因此此断层为纯左旋走滑断层。

（2）辅助面的走向 120 度（或 300 度），倾角 90 度，滑动角 180 度。

（3）T 轴走向 75 度或 255 度；倾伏角为零度；P 轴走向 165 度或 345 度；倾伏角为零度。

10.5.1 虽然直接向震源球的半球进行投影符合我们的观测，但在下半球上的两条互相垂直的弧投影到水平面的圆内就不垂直了，并且在下半球上的均匀分布的点投影到圆内，边缘密集而中心稀疏。

10.5.2 $r=a\tan\left(\frac{i}{2}\right)=a\frac{1-\cos i}{\sin i}$

10.5.3 判断：正确

10.5.4 根据等面积投影的要求，投影震源球上的面积和投影到大圆上面积的比例为常数。我们知道，震源下半球的总面积为 $2\pi a^2$，而投影的大圆面积为 πa^2，因此，一般将比例常数取为 2。按照图 10-5-7，在震源球面上取一半径为 $a\sin i$，宽为 ds 的一个环带，而投影

到大圆上为宽度为 dp 的一个环。如果也按上面的比例常数投影，则 ds=2dp,由于 $ds=2\pi\left(a\sin i\right)adi$ ，则 $dp=2\pi rdr$ ，这样我们有 $2\pi\left(a\sin i\right)adi=2\left(2\pi rdr\right)$ ，则 $a^2\sin idi=2rdr$ ，对两边进行积分得到：$-a^2\cos i=r^2+C$ 。我们知道当 i=0 时 r=0，当 i= $\frac{\pi}{2}$ 时 r=a，代入上式可得，常数为 $C=a^2$ ，这样可以得到：

$$r=a\sqrt{1-\cos i}$$

表达为

$$r=a\sqrt{2}\sin\frac{i}{2}$$

10.5.5 参考教材中所给 MATLAB 函数 beachball_ea 函数代入相应参数的输出结果。

10.5.6（1)根据两个节面表示弧线的凸向方向确定两个节面的走向。根据前面的分析知道，如果我们面向节面弧线的凸向方向，节面右侧的指向为断层的走向，从正北方向转向走向所转过的角度即为节面的走向角，由此可以判断图 10-5-8 的节面 I 约在 80°左右，节面 II 约在 210°左右。

（2）根据两个节面在 Wulff 网的弯曲程度估计两个节面的倾角(参看 10-5-6 图的弯曲度与倾角的对应关系)。

（3)根据两个节面在 Wulff 网上的交点 B,在两个节面上找到距交点 B 相差 90°的点(A 点)，如果 Wulff 网心的区域为阴影区，则滑动角取正，反之滑动角取负。对于滑动角取正的情况，则该断层节线起始点（走向的反方向）到该滑动方向点（A 点）的角距离即为滑动角。对于滑动角取负的情况，则断层节线结束点（走向方向）到该滑动方向点（A 点）的角距离的负值即为滑动角。这样通过上面三个步骤即可估计海滩球所表示的两个节面的各个参数了。

10.5.7 判断下述震源机制海滩球中的两个节面的走向、倾角和滑动角。

（1）走向 210°,倾角 30°,滑动角 80°；走向 41°,倾角 60°,滑动角 95°

（2）走向 220°,倾角 30°,滑动角 30°；走向 103°,倾角 75°,滑动角 116°

（3）走向 80°,倾角 70°,滑动角 5°；走向 348°,倾角 85°,滑动角 160°

（4）走向 80°,倾角 40°,滑动角-80°；走向 247°,倾角 51°,滑动角-98°

10.5.8 判断 10.5.7 中的海滩球表示中的 P 轴、T 轴和中间轴的走向和倾伏角。

(1)P 轴走向 127°，倾伏角 15°，T 轴走向 326°，倾伏角 74°；B 轴走向 219°，倾伏角 5°。

(2)P 轴走向 173°，倾伏角 26°，T 轴走向 44°，倾伏角 52°；B 轴走向 276°，倾伏角 26°。

(3)P 轴走向 36°，倾伏角 11°，T 轴走向 302°，倾伏角 17°；B 轴走向 156°，倾伏角 69°。

(4)P 轴走向 113°,倾伏角 82°,T 轴走向 343°,倾伏角 5°;B 轴走向 252°,倾伏角 6°。

10.6.1 错误，虽然纯正断层或纯逆断层在绘制 Wulff 投影或 Schmidt 投影时均能表现三个区域，但这是在下半球内的表示，如果考虑整个震源球，则还是四象限分布。

10.6.2 不对。考虑辐射花样，在相同的震源距离下，P 轴和 T 轴附近的振幅相对较大，而断层面或其辅助面的振幅为零。

10.6.3 （1）走向 300°、 倾角 90°、 滑动角 180°。
（2）主压应力方向：方位角 345°（或 165°），倾伏角 0°。
主张应力方向：方位角 75°（或 255°）， 倾伏角 0°。
（3）根据 P 波初动的四象限分布，在 0 度方位角上，位于压缩象限，P 波初动方向向下。
10.6.4 参看教材中的叙述。
10.6.5 实践。
10.9.1 错误。由于多普勒效应，会使得破裂前方的地震波频率增大，周期减小。
10.9.2 在研究有限断层模型中，将地震破裂传播速度和地震波传播速度之比称为马赫数。该参数控制了辐射花样中的破裂传播效应。
10.9.3 地震破裂速度为$V_f = \dfrac{L}{t} = \dfrac{100km}{40s} = 2.5km/s$。

根据式(10-9-6)，破裂正前方的φ为 0°，可以得到，破裂正前方的台站记录地震 P 波的初动半周期持续时间为

$$\mathrm{T_u} = \frac{L}{V_f}\left(1 - \frac{V_f}{c}\cos\varphi\right) = \frac{100km}{2.5\mathrm{km}/s}\left(1 - \frac{2.5\mathrm{km}/s}{5\mathrm{km/s}}\cos 0\right) = 20s$$

10.9.4 根据式(10-9-6)，破裂正前方的φ为 0°，设破裂速度为V_f，可以得到，破裂正前方的台站记录地震 P 波的初动半周期持续时间为

$$\frac{315km}{V_f}\left(1 - \frac{V_f}{5\mathrm{km/s}}\cos 0\right) = 42s$$

从而得到地震破裂速度为 3km/s。

10.9.5 根据式(10-9-6)，破裂正后方的φ为 180°，设破裂速度为V_f，可以得到，破裂正后方的台站记录地震 P 波的初动半周期持续时间为

$$\frac{L}{2.5\mathrm{km/s}}\left(1 - \frac{2.5\mathrm{km/s}}{5\mathrm{km/s}}\cos 180^{\circ}\right) = 45s$$

从而得到地震破裂长度为 75km。

10.9.6 设破裂速度为V_f，单侧破裂长度为 L，跟据式(10-9-6)和题意有

$$\frac{L}{V_f}\left(1 - \frac{V_f}{5\mathrm{km/s}}\right) = 45s, \quad \frac{L}{V_f}\left(1 - \frac{V_f}{5\mathrm{km/s}}\cos 45^{o}\right) = 60s$$

两式相除得到

$$\frac{1-\dfrac{V_f}{5\text{km/s}}}{1-\dfrac{V_f}{5\text{km/s}}\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{45}{60}$$

从而得到 Vf=2.66km/s。代入上面任一式，得到断层长度为 256km。

10.9.7 设破裂速度为 V_f ，双侧破裂长度的一半为 L，跟据式(10-9-14)和题意有

$$\frac{L}{V_f}\left(1-\frac{V_f}{5\text{km/s}}\cos 0^o\right)=30s,\quad \frac{L}{V_f}\left(1-\frac{V_f}{5\text{km/s}}\cos 90^o\right)=60s$$

从而得到 Vf=2.5km/s。断层长度为 2*L=2*60s*2.5km/s=300km。

10.10.1 在矩心矩张量反演中，除了对地震矩张量的参数进行迭代求解外，同时还将地震的发震时刻和位置也进行迭代求解，最为得到的位置和发震时刻为矩心的位置和矩心时间。
10.10.2 不是，是甚长周期（T>135s）面波。
10.10.3 体波；地幔波；中周期面波。
10.10.4 通常按照矩心矩张量的反演步骤确定矩心深度。但当反演试图将震源放在比最小允许深度还小的深度时，震源深度固定在 12km。当反演过程中深度表现为不稳定时，把深度固定在报告的震源深度或认为对该地区的适当的震源深度。
10.10.5 不一定。事件数据中含有"CMT: 1" 表示矩张量反演中将其迹约束为零；标有"CMT: 2" 表示矩张量约束为双力偶模型震源。
10.10.6 矩形；三角形。