

“元素核合成中的关键科学问题研究”
创新群体会议报告/厦门，2011年10月13日

天体物理反应率的有效能区

一、各类天体物理反应有效能区
的 Gamow 窗口近似公式

二、近来对 Gamow 窗口近似公式
适用性的思辨和质疑

白希祥

中国原子能科学研究院

天体物理反应率

$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \sigma(E) E e^{-E/(kT)} dE$$

$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} S(E) e^{-E/(kT)} e^{-2\pi\eta} dE$$

$$S(E) = \sigma(E) E e^{2\pi\eta}$$

尽管公式中积分涵盖的能区从0到 ∞ , 实际上起决定作用的有效能区只有一小段.

一. 各类天体物理热核反应的有效能区

以Gamow peak (或Gamow window) 表征的有效能区是核天体物理最基本的概念之一，它对于恒星平稳和爆发性核燃烧阶段相关核反应实验的设计, 反应率的确定和元素核合成的研究至关重要.

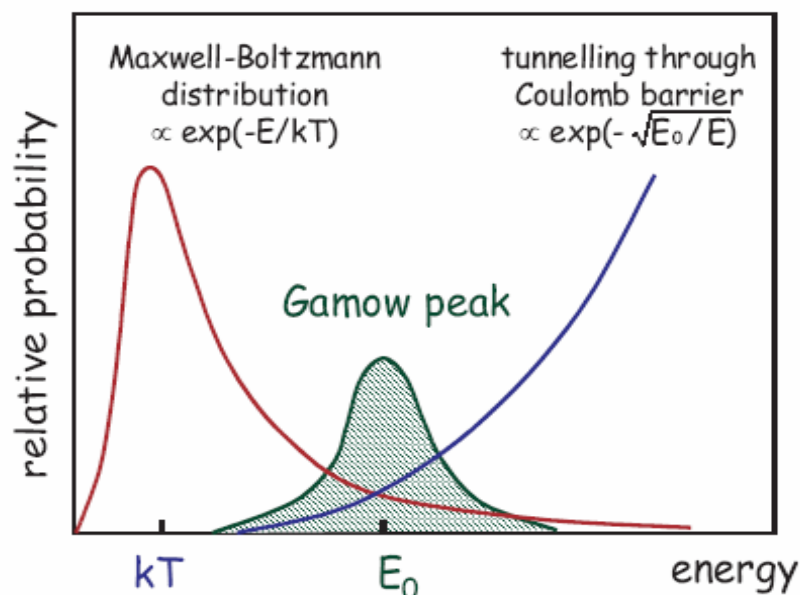


图1. 恒星等离子体中任一带电粒子对的数目按相对运动动能的Maxwell-Boltzmann分布和库仑势垒穿透几率随相对运动动能的变化. 二者的卷积产生了一个对热核反应率起决定性作用的近似高斯分布的Gamow峰.

(1) Gamow 峰值能量 和 $1/e$ ($e=2.718$) 峰值处的宽度分别为

$$E_0 = 1.22 (Z_1^2 Z_2^2 \mu T_6^2)^{1/3} \text{ keV}$$

$$\Delta E_0 = 0.749 (Z_1^2 Z_2^2 \mu T_6^5)^{1/6} \text{ keV}$$

$E_0 \pm \Delta E_0 / 2$ 称为 **Gamow窗口**, 式中 Z_1, Z_2 为反应粒子的核电荷数, μ 为以原子质量单位的约化质量, T_6 表示以 10^6 K 为单位的温度值.

(2) 中子引起反应的有效能区 / T. Raucher et al. Phys. Rev. C 56,

1613 (1997); R. V. Wagoner. Astrophys. J. Suppl.18, 247 (1969)

对于中子引起的核反应虽无库仑势垒可言, 但存在离心势垒. 由于反应截面随能量的变化一般比较缓慢, 对s, p 和 d 波中子 $\sigma(E)$ 可分别参数化为 $\propto E^{-1/2}$, $\propto E^{1/2}$ 和 $\propto E^{2/3}$. 卷积也产生一个主要由MB分布的峰值能量 $E_{\text{MB}}=KT$ 决定的 Gamow-like 能量窗口.

对于中子能量低于离心势垒的情况, 通常采用下列近似公式估算窗口的峰值能量和1/e宽度

$$E_0 \approx 0.172T_9(l + \frac{1}{2}) \text{ MeV}$$

$$\Delta E_0 \approx 0.194T_9(l + \frac{1}{2})^{1/2} \text{ MeV}$$

有效能量窗口为 $E_0 \pm \Delta E_0 / 2$

因为难以预判起主要作用的分波, 这套近似公式用起来不如前面的带电粒子的公式顺手. 不过, $l > 0$ 分波的角动量势垒引起的窗口移动相对较小, 按 s 波估算可以给出粗略的结果.

(3) 光致裂解反应的有效能区 / P. Mohr et al. Eur. Phys. J. A32, 357(2007)

(3.1) (γ, p) 反应的 Gamow-like window

$E_0^{(\gamma, p)} = E_0(p, \gamma) + Q(p, \gamma) \approx 0.122 (Z_1^2 Z_2^2 \mu T_9^2)^{1/3} + Q(p, \gamma) \text{ MeV}$
 $\Delta E_0^{(\gamma, p)} = 0.237 (Z_1^2 Z_2^2 \mu T_9^5)^{1/6} \text{ MeV}$; 有效能区 $E_0^{(\gamma, p)} \pm \Delta E_0^{(\gamma, p)} / 2$
式中 Z_1, Z_2, μ 和 $Q(p, \gamma)$ 分别为逆反应弹核, 靶核的核电荷数, 约化质量数和反应能(即 (γ, p) 反应靶核的质子分离能).

(3.2) (γ, α) 反应的 Gamow-like window

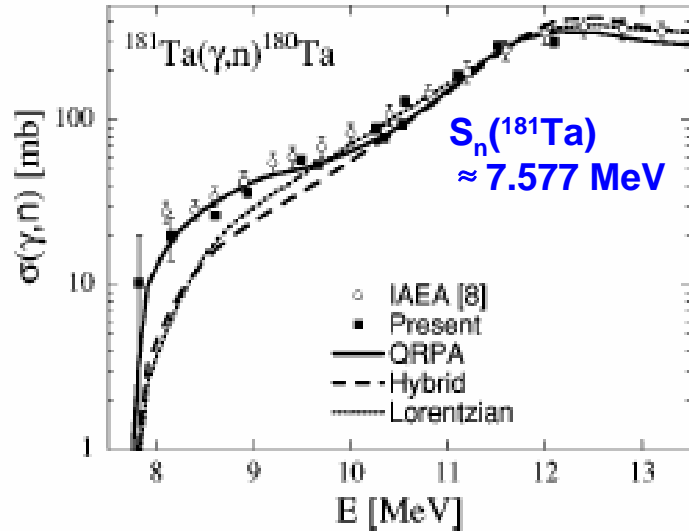
$E_0^{(\gamma, \alpha)} = E_0(\alpha, \gamma) + Q(\alpha, \gamma) \approx 0.122 (Z_1^2 Z_2^2 \mu T_9^2)^{1/3} + Q(\alpha, \gamma) \text{ MeV}$
 $\Delta E_0^{(\gamma, \alpha)} = 0.237 (Z_1^2 Z_2^2 \mu T_9^5)^{1/6} \text{ MeV}$; 有效能区 $E_0^{(\gamma, \alpha)} \pm \Delta E_0^{(\gamma, \alpha)} / 2$
式中 Z_1, Z_2, μ 和 $Q(\alpha, \gamma)$ 分别为逆反应弹核, 靶核的核电荷数, 约化质量数和反应能(即 (γ, α) 反应靶核的 α 粒子分离能).

(3.3) (γ, n) 反应的 Gamow-like window

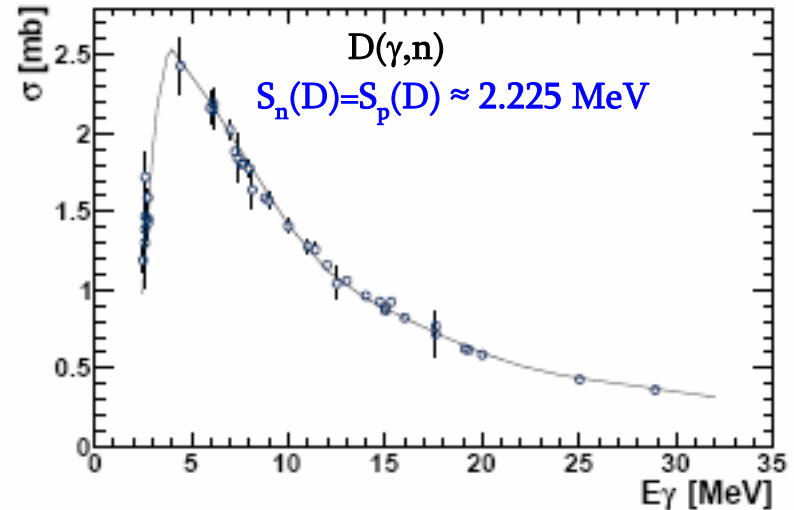
$E_0^{(\gamma, n)} \approx E_0(n, \gamma) + Q(n, \gamma) \approx 0.172(l + \frac{1}{2}) + Q(n, \gamma) \text{ MeV}$
 $\Delta E_0^{(\gamma, n)} \approx 0.194 \left(l + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \text{ MeV}$; 有效能区 $E_0^{(\gamma, n)} \pm \Delta E_0^{(\gamma, n)} / 2$
式中 $Q(n, \gamma)$ 为逆反应的反应能(即 (γ, n) 反应靶核的中子分离能).

若干核素(γ, n) 反应激发函数的测量结果

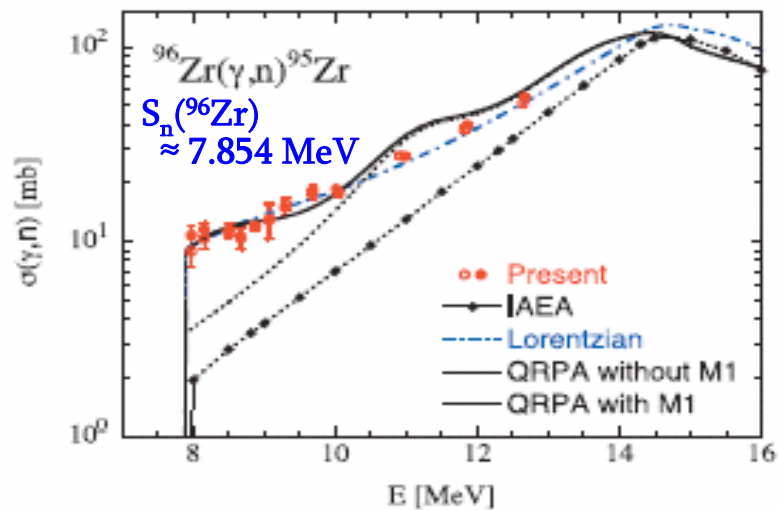
PRC 67, 016807(2003)



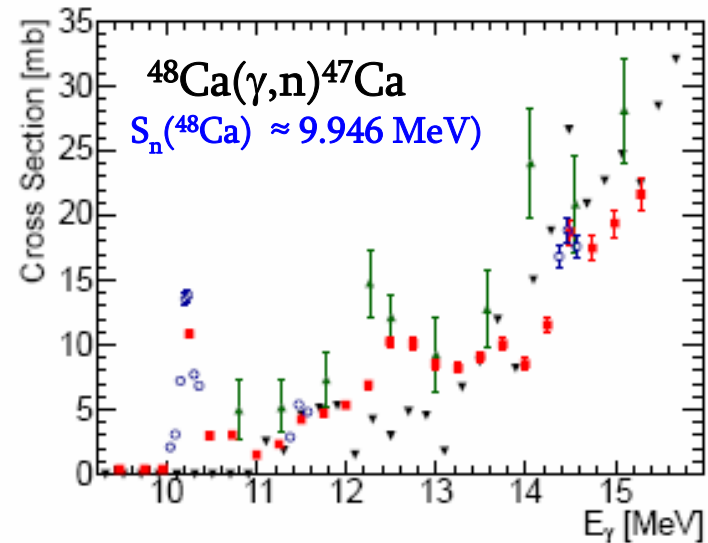
PRC 72, 034001(2005)



PRC 81, 035801(2010)



arXiv:1109. 0430



二. 近来对上述 Gamow window 公式适用性的思辨和质疑

J. R. Newton, C. Iliadis et al. Gamow peak in thermonuclear reactions at high temperatures. Phys. Rev. C75, 045801(2007)

T. Rauscher. Relevant energy ranges for astrophysical reaction rates. Phys. Rev. C81, 045807(2010) and references therein

(1) Newton 等的研究表明, 严格地说, Gamow window只适用于非共振反应. 对高温环境中通过窄共振进行的大部分带电粒子热核反应的确存在一个有效能区, 但它可能显著地偏离通常估算的 Gamow 峰. 大质量恒星演化晚期阶段中和恒星爆发性事件中的大多数热核反应就属于这种情况. 在估算热核反应率时, 只考虑Gamow 峰能区内的共振常常是不恰当的. 相应的天体核反应, 包括放射性离子束反应的有效能区应由 $E \pm \Delta E/2$ 改为 $E' \pm \Delta E'/2$. 下面的图2, 图3 和 图4 是他们的具体研究结果.

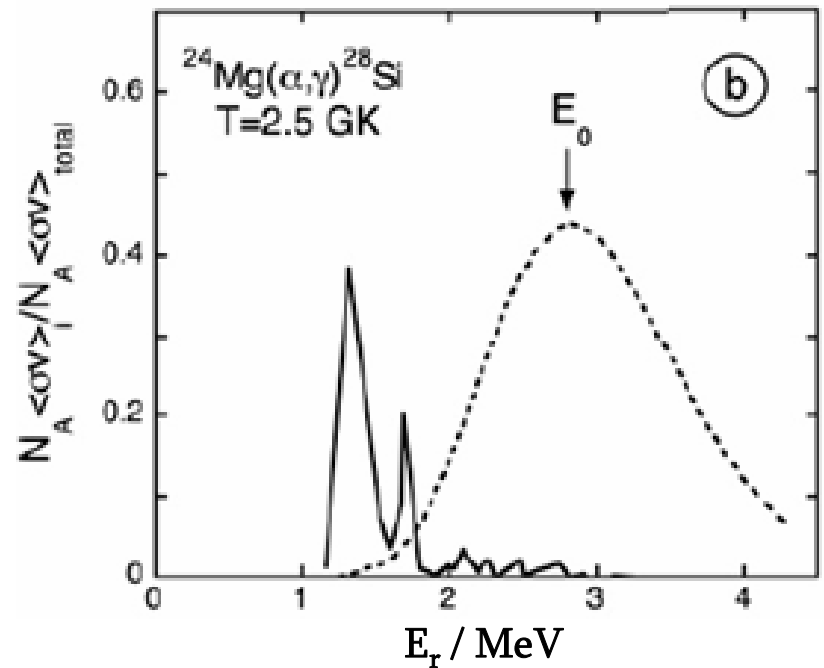
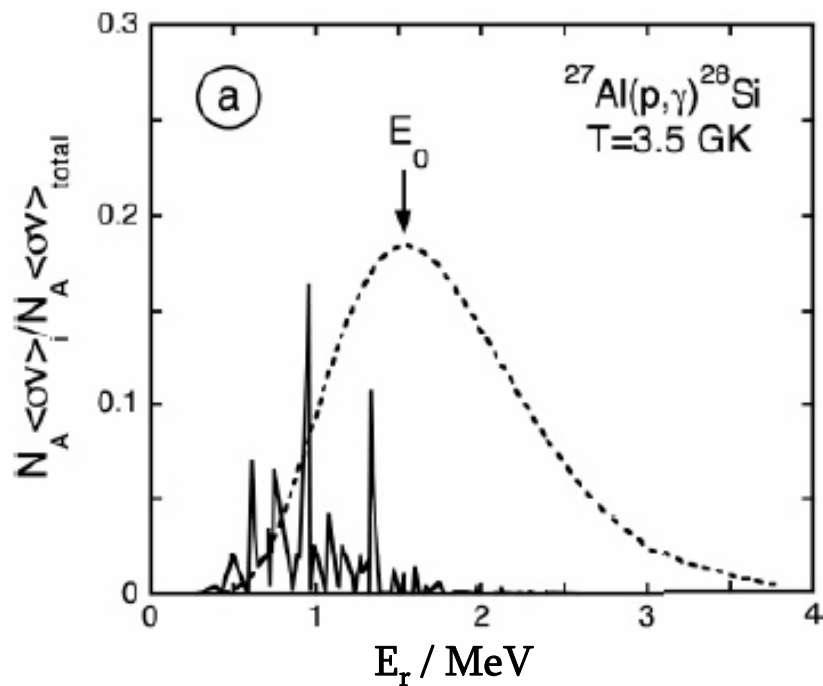


图2. 各窄共振对总反应率的贡献随共振能量的变化与Gamow 峰的比较: (a) $^{27}\text{Al}(p,\gamma)^{28}\text{Si}$, $T=3.5 \times 10^9 \text{ K}$, $G_\alpha \ll \Gamma_\gamma$; (b) $^{24}\text{Mg}(\alpha,\gamma)^{28}\text{Si}$, $T=2.5 \times 10^9 \text{ K}$, $\Gamma_\alpha \gg \Gamma_\gamma$. 点线是Gamow 峰. 共振能量和强度取自 P. M. Endt, Nucl.Phys. A521,1(1990); A 633,1(1998). 可以看出, $\Gamma_\alpha \ll \Gamma_\gamma$ 的共振组对总反应率的最大贡献出现在 E_0 附近, 而 $\Gamma_\alpha \gg \Gamma_\gamma$ 共振组最大贡献出现在共振能量最小处.

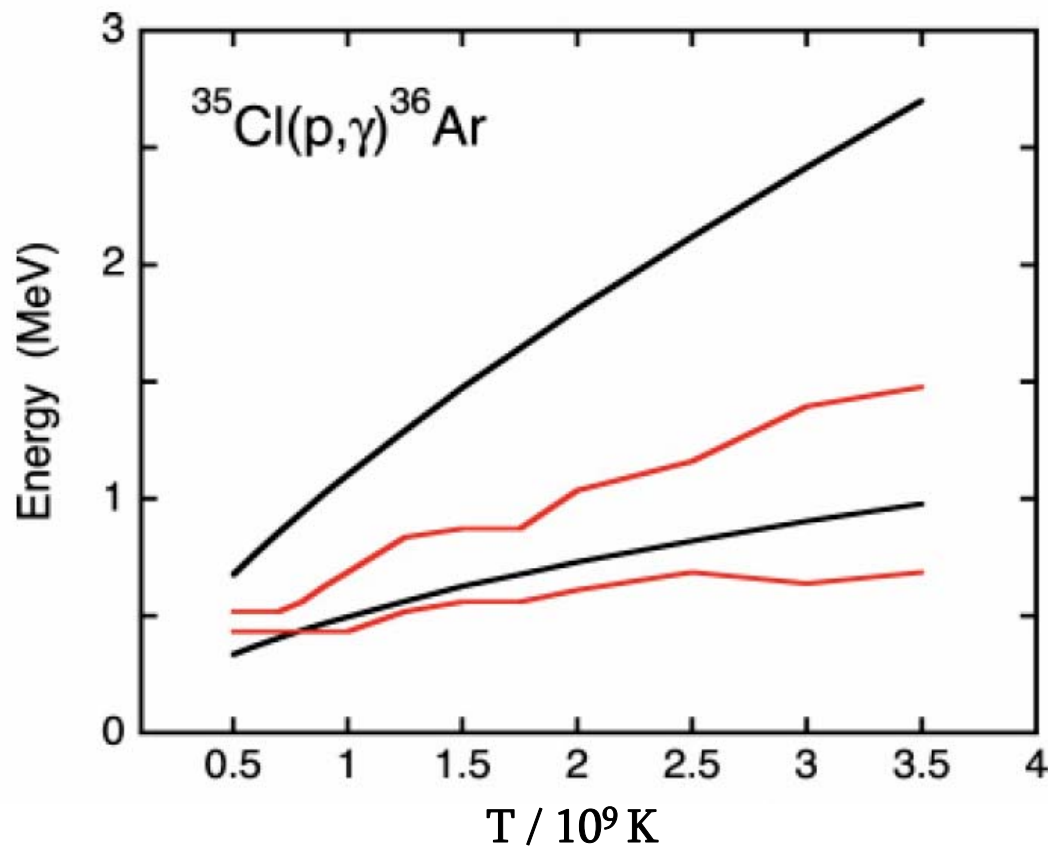


图3. $^{35}\text{Cl}(p,\gamma)^{36}\text{Ar}$ 反应的Gamow 窗口(黑线之间的能区)与红线之间的有效能区随温度的变化. 共振能量和强度取自 P. M. Endt, Nucl. Phys. A 521, 1 (1990); A 633, 1(1998).

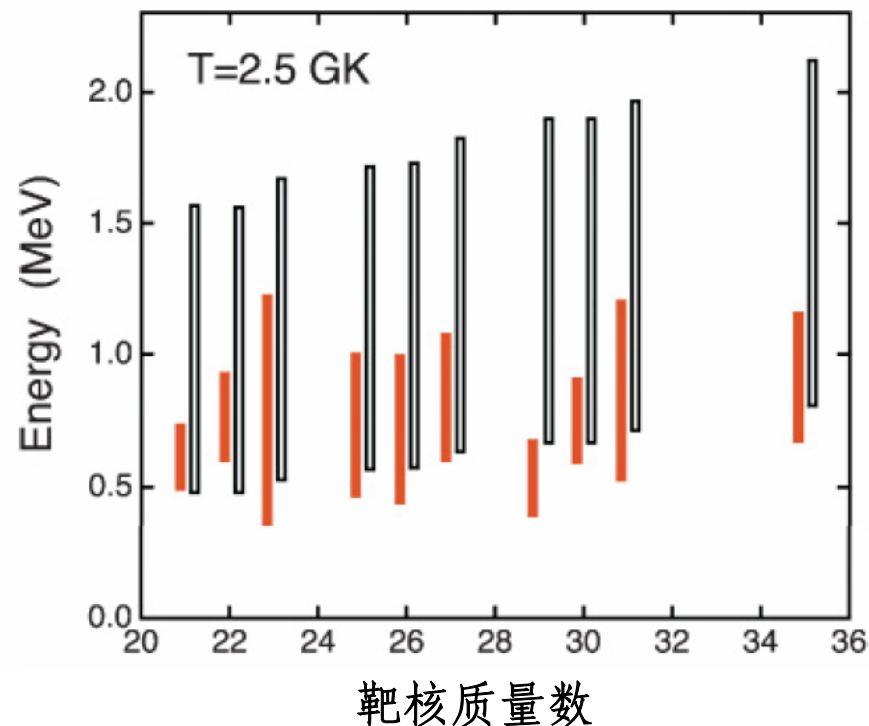
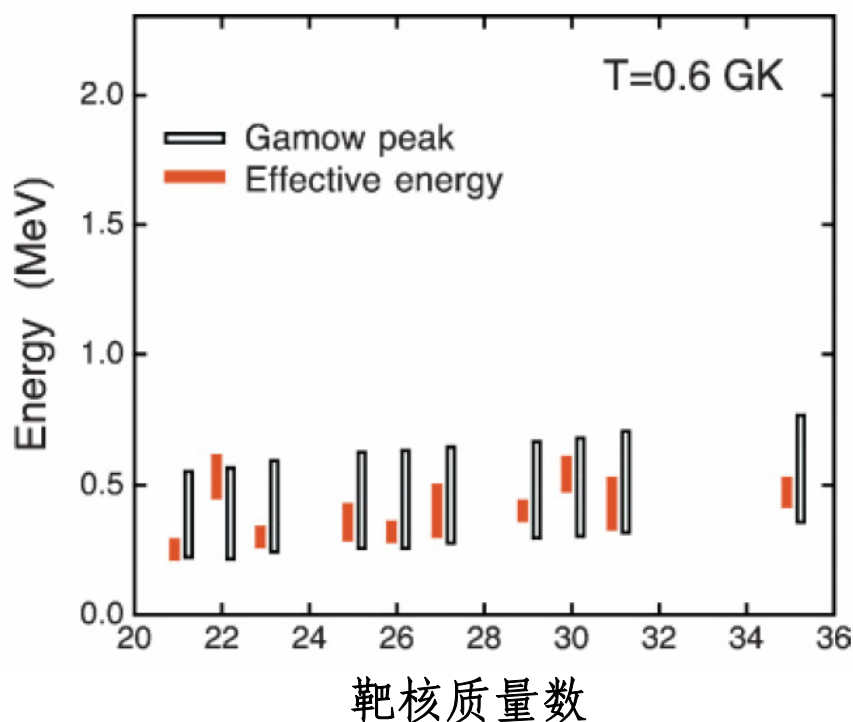


图4. 不同温度下 $^{21,22}\text{Ne}$, ^{23}Na , $^{25,26}\text{Mg}$, ^{27}Al , $^{29,30}\text{Si}$, ^{31}P 和 ^{35}Cl (p, γ)反应的有效能区(红线)与 Gamow窗口(黑线)随靶核质量数的变化. 左图: 在相对低的温度, 虽然大多数反应的有效能区位于Gamow窗口以内, 但它们之间呈现程度不同的偏离; 右图: 在较高的温度, 大多数反应的有效能区位于Gamow峰值能量 E_0 以下, 而且显著窄于Gamow窗口; 它们的中心能量相差 ≈ 0.8 MeV.

以图2所示不同的温度的 $^{27}\text{Al}(p,\gamma)^{28}\text{Si}$ 和 $^{24}\text{Mg}(\alpha,\gamma)^{28}\text{Si}$ 反应为例,对总反应率有贡献的共振可按照其分宽度的相对大小分为 $\Gamma_\alpha \ll \Gamma_\gamma$,

$\Gamma_\alpha \gg \Gamma_\gamma$ 和 $\Gamma_\alpha \approx \Gamma_\gamma$ 三组. 分析结果如下:

- ① $\Gamma_\alpha \ll \Gamma_\gamma$ 的共振组对总反应率的最大贡献出现在 E_0 附近,而 $\Gamma_\alpha \gg \Gamma_\gamma$ 共振组最大贡献出现在共振能量最小处. 当温度足够高时, $\Gamma_\alpha \gg \Gamma_\gamma$ 共振组将成为总反应率的决定因素,从而使最有效能量 E' 明显移至 E_0 以下;
- ② 对 $\Gamma_\alpha \ll \Gamma_\gamma$ 的共振,有效能区随温度升高而移动,但对 $\Gamma_\alpha \gg \Gamma_\gamma$ 的共振并不发生这样随温度升高的明显移动. 在最后一情况下,同一组共振对总反应率起决定作用,与温度关系不大. 这些共振虽位于最低能区,但仍满足 $\Gamma_\alpha \gg \Gamma_\gamma$. 因为一般情况下两种共振都对总反应率有贡献,有效能量窗口 $E' \pm \Delta E'/2$ 将随温度升高移向更高的能量,但移动量应比按常用的Gamow窗口公式估计的小得多;
- ③ 当温度足够高时, Gamow 峰将位于大多数共振满足 $\Gamma_\alpha \gg \Gamma_\gamma$ 的能区. $\Gamma_\alpha \ll \Gamma_\gamma$ 的共振对总反应率的贡献可以忽略,因而有效能量窗口 $E' \pm \Delta E'/2$ 变成能量无关的. 这个对核反应特定的 E' 应接近一个能量,平均而言在该能量 γ 分宽度近似等于粒子分宽度,即 $\Gamma_\alpha \approx \Gamma_\gamma$.

(2) Rauscher采用理论截面计算了在质子滴线到 neutron 滴线之间 $10 \leq Z \leq 83$ 靶核上 (p,γ) , (p,n) , (p,α) , (α,γ) , (α,n) , (α,p) , (n,γ) , (n,p) 和 (n,α) 天体物理反应率的有效能量窗口. 结果显示, 对大量与平稳和爆发性核合成相关的反应, 第一节所列举的在假定反应截面 σ 的能量依赖关系由入射道库仑势垒穿透几率决定的前提下导出的带电粒子反应 Gamow 窗口近似公式是不正确的. 他讨论了重叠共振平均宽度能量相关性对有效能量窗口位置的影响并以列表的形式给出了数值计算的结果.

常用 Gamow 窗口近似公式中的 Δ 表示高斯分布的 $1/e$ 宽度. 当用该定义导出应在什么能区测定实验截面时应注意 $1/e$ 宽度限定的峰面积仅占对积分总贡献的 55%-70%, 即使该窗口内的截面完全由实验定出, 也会导致反应率相应的不确定性. 为了用数值计算定出更接近真实的有效能量窗口, 引入包含 90% 贡献的宽度 $\tilde{\Delta}$. 表 1 中的 \tilde{E}_0 和 \tilde{E}_{hi} 分别表示反应率被积函数中截面权重最大处的能量和有效能量窗口最高端的能量.

表1. 在设定的等离子体温度下若干反应的有效能量窗口 $\tilde{E}_{\text{hi}} - \tilde{\Delta} \leq E \leq \tilde{E}_{\text{hi}}$
 \tilde{E}_0 表示反应率被积函数最大值处的能量, $\delta = \tilde{E}_0 - E_0$ 是相对带电粒子反应Gamow 峰 E_0 位置的变化, $\delta = \tilde{E}_0 - E_{\text{MB}}$ 是相对中子引起反应MB分布最大值处能量 E_{MB} 的变化.

Target	Reaction	T (GK)	\tilde{E}_{hi} (MeV)	$\tilde{\Delta}$ (MeV)	\tilde{E}_0 (MeV)	δ (MeV)
^{24}Mg	(α, γ)	2.5	2.36	1.05	1.66	-1.16
^{27}Al	(p, γ)	3.5	1.47	1.12	0.65	-0.89
^{40}Ca	(α, γ)	2.0	3.62	1.39	2.85	-0.63
		4.0	4.66	1.97	3.56	-1.97
^{60}Fe	(n, γ)	5.0	1.20	1.20	0.13	-0.30
^{62}Ni	(n, γ)	3.5	1.00	1.00	0.15	-0.15
^{106}Cd	(α, γ)	3.5	10.07	3.44	8.08	-1.17
^{120}Sn	(n, α)	5.0	9.54	4.16	6.92	+6.49
^{144}Sm	(α, γ)	3.5	11.97	3.99	9.90	-1.10
^{169}Tm	(α, γ)	2.0	9.20	2.94	7.61	-0.54
		5.0	13.20	4.27	10.22	-4.79

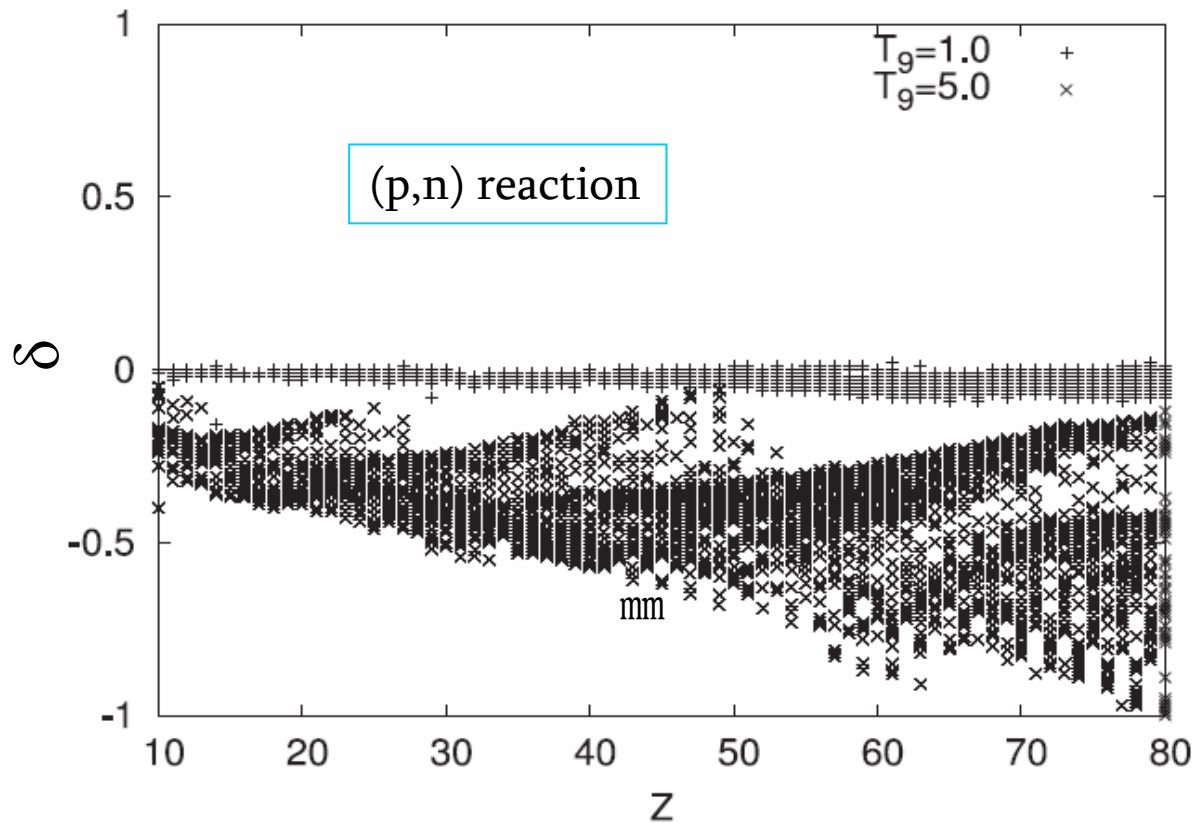


图5. 在两个温度下, (p,n) 反应率被积函数最大值处的 \tilde{E}_0 相对高斯近似Gamow 峰 E_0 的 δ (MeV) 与靶核电荷数的关系. $T_9=1.0$ 时几乎没有变化, $T_9=5.0$ 时 Z 越大向低能移动越多.

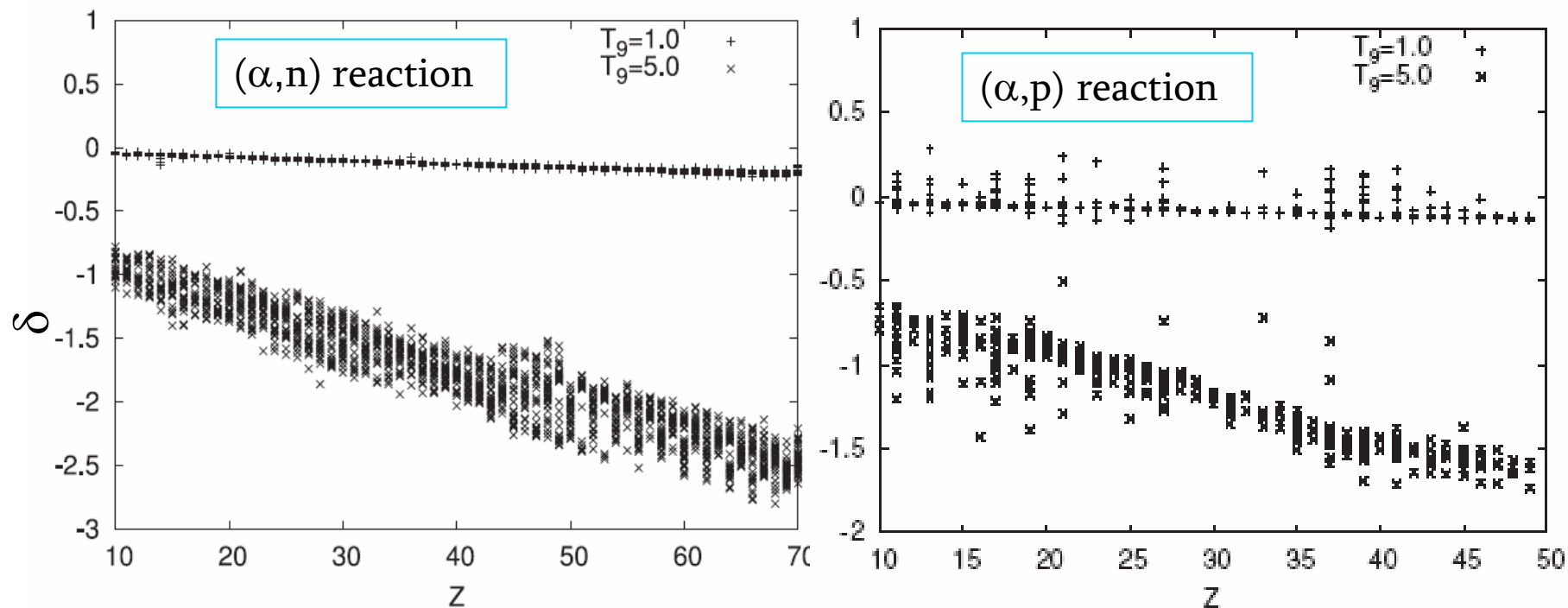


图6. 在两个温度下, (α, n) 和 (α, p) 反应率被积函数最大值处能量 \tilde{E}_0 相对高斯近似Gamow 峰 E_0 的 δ (MeV) 与靶核电荷数的关系. $T_9=1.0$ 时几乎没有变化; $T_9=5.0$ 时显著变为负值, Z 越大变化幅度越大.

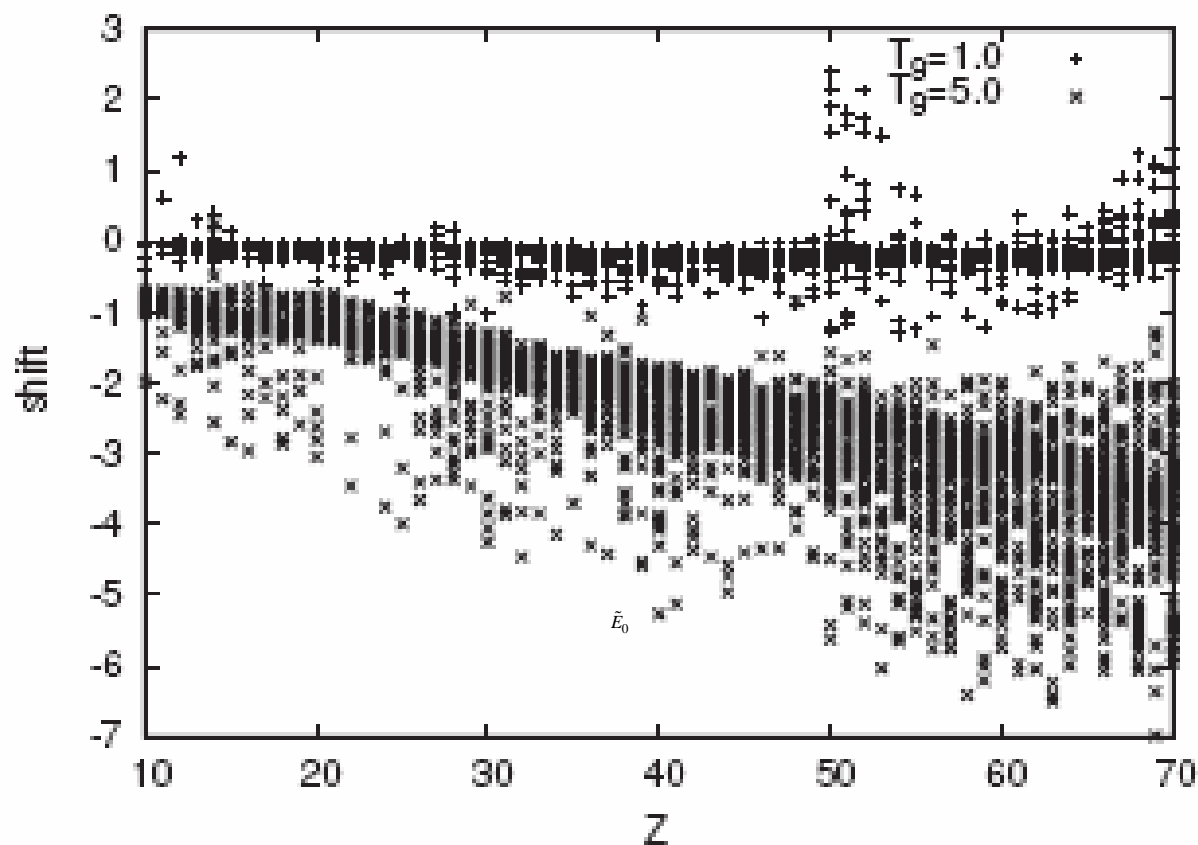


图7. 在两个温度下 (α, γ) 反应被积函数的极大值处能量 \tilde{E}_0 相对高斯近似Gamow 峰 E_0 的移动随靶核 Z 的变化. $T_9=1.0$ 时几乎没有移动; $T_9=5.0$ 变为负值, Z 越大变化幅度越大.

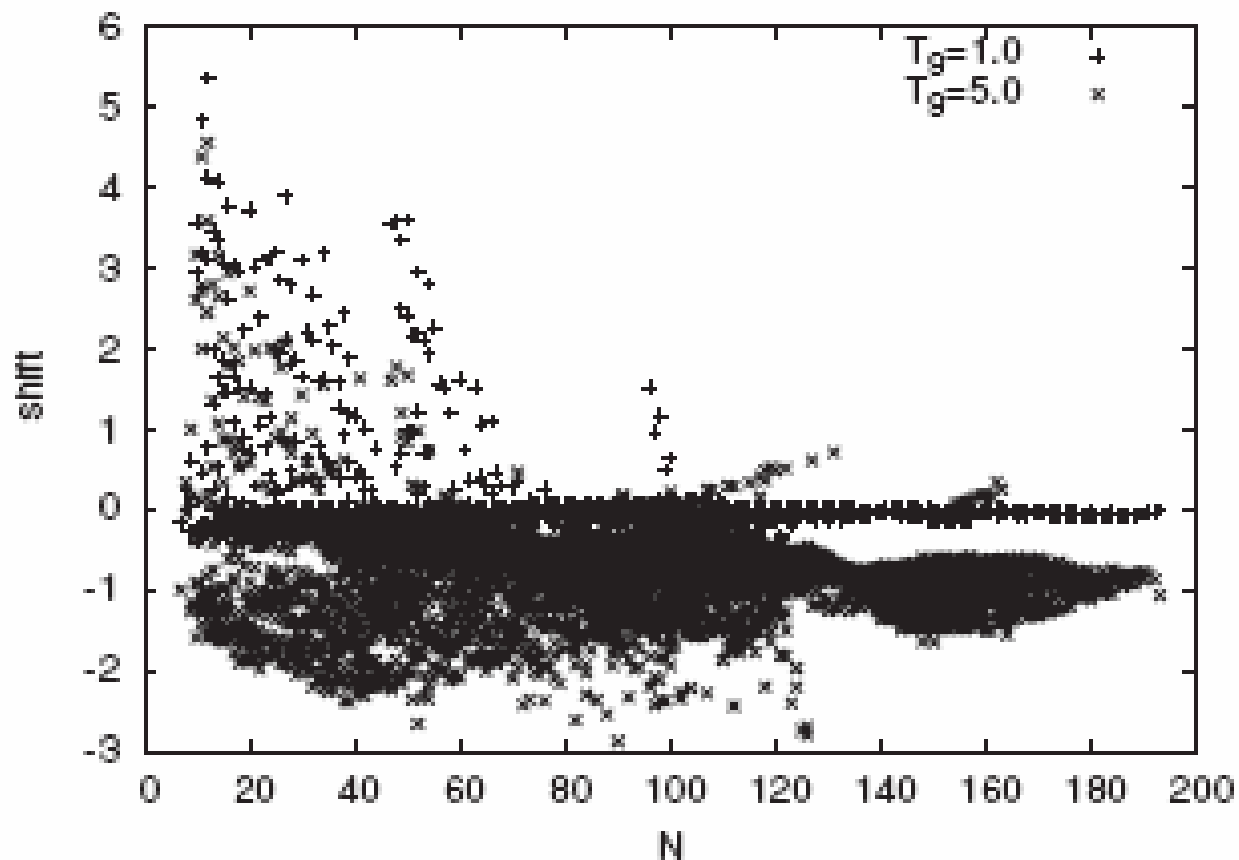


图8. 在两个温度下(p, γ)反应被积函数的极大值处能量 \tilde{E}_0 相对高斯近似Gamow 峰 E_0 的移动随靶核中子数的变化. 除负 Q 值的丰质子靶核外, $T_9=1.0$ 时几乎看不出移动; $T_9=5.0$ 时, 移动仍小于(α,γ) 反应的情况.

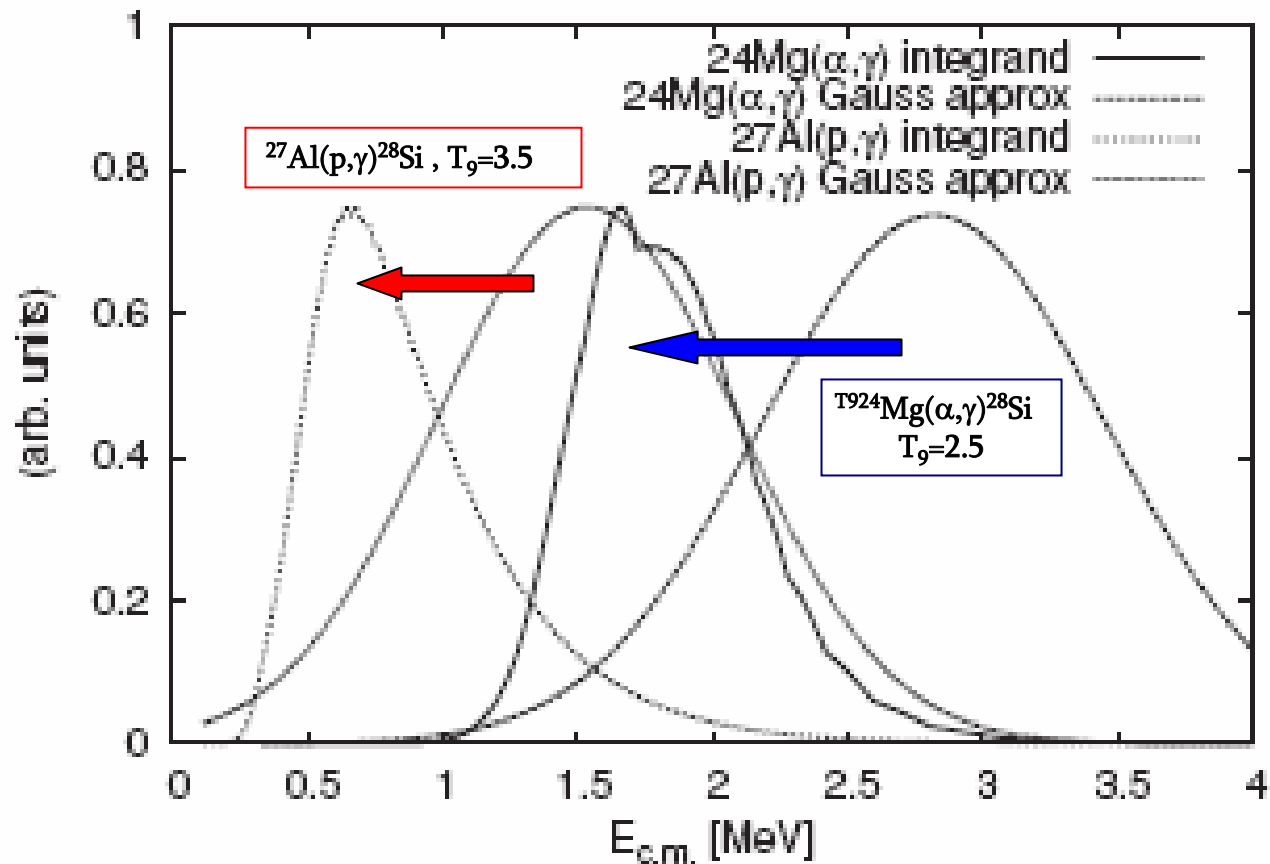


图9. $T_9=2.5$ 条件下 $^{24}\text{Mg}(\alpha,\gamma)^{28}\text{Si}$ 和 $T_9=3.5$ 条件下 $^{27}\text{Al}(p,\gamma)^{28}\text{Si}$ 反应率的被积函数与 Gamow 峰高斯近似的比较，有效窗口分别移向低能处并变窄和不对称。

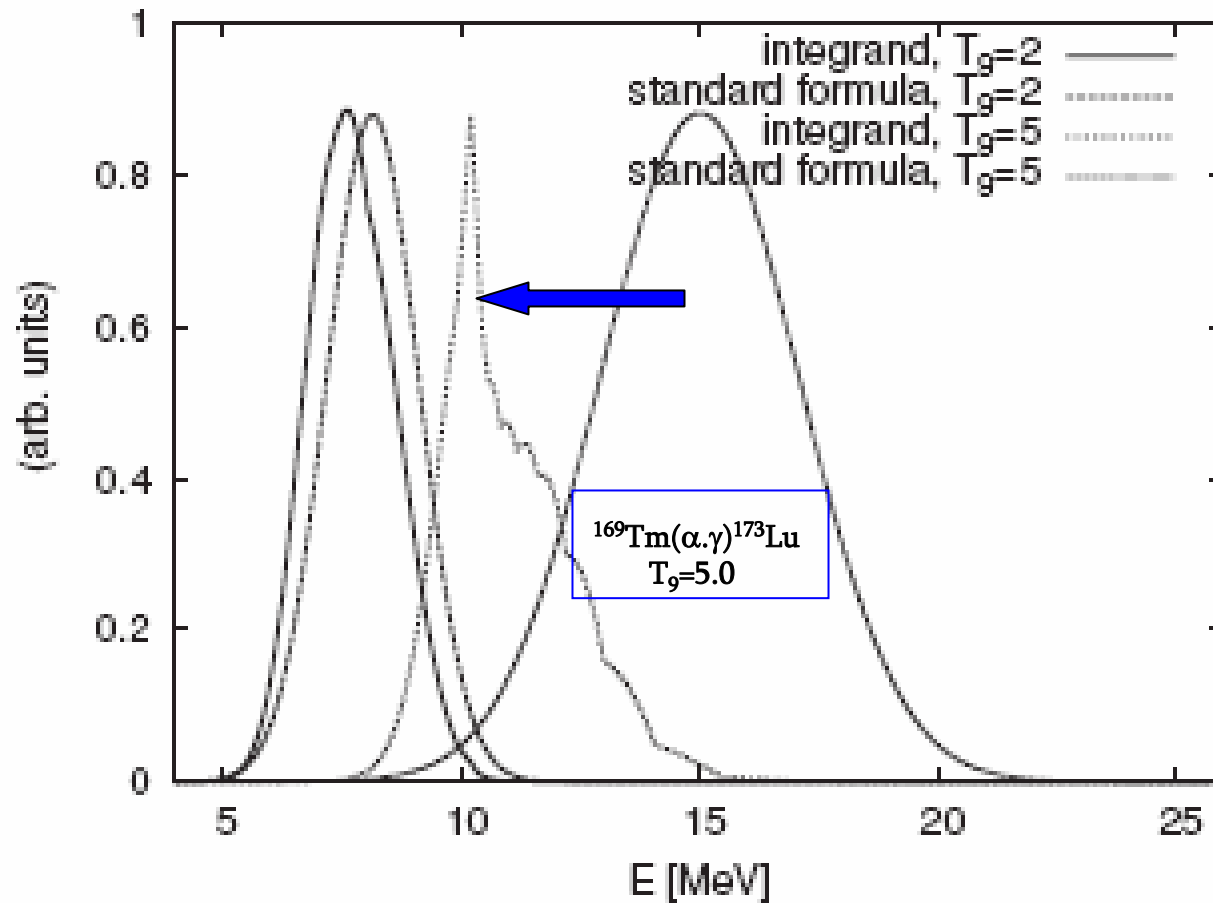


图10. $T_9=2.0$ 和 5.0 条件下 $^{169}\text{Tm}(\alpha, \gamma)^{173}\text{Lu}$ 反应率的被积函数与 Gamow 峰高斯近似的比较. $T_9=2.0$ 时变化较小; $T_9=5.0$ 时向低能移动约 5 MeV , 而且变得明显不对称.

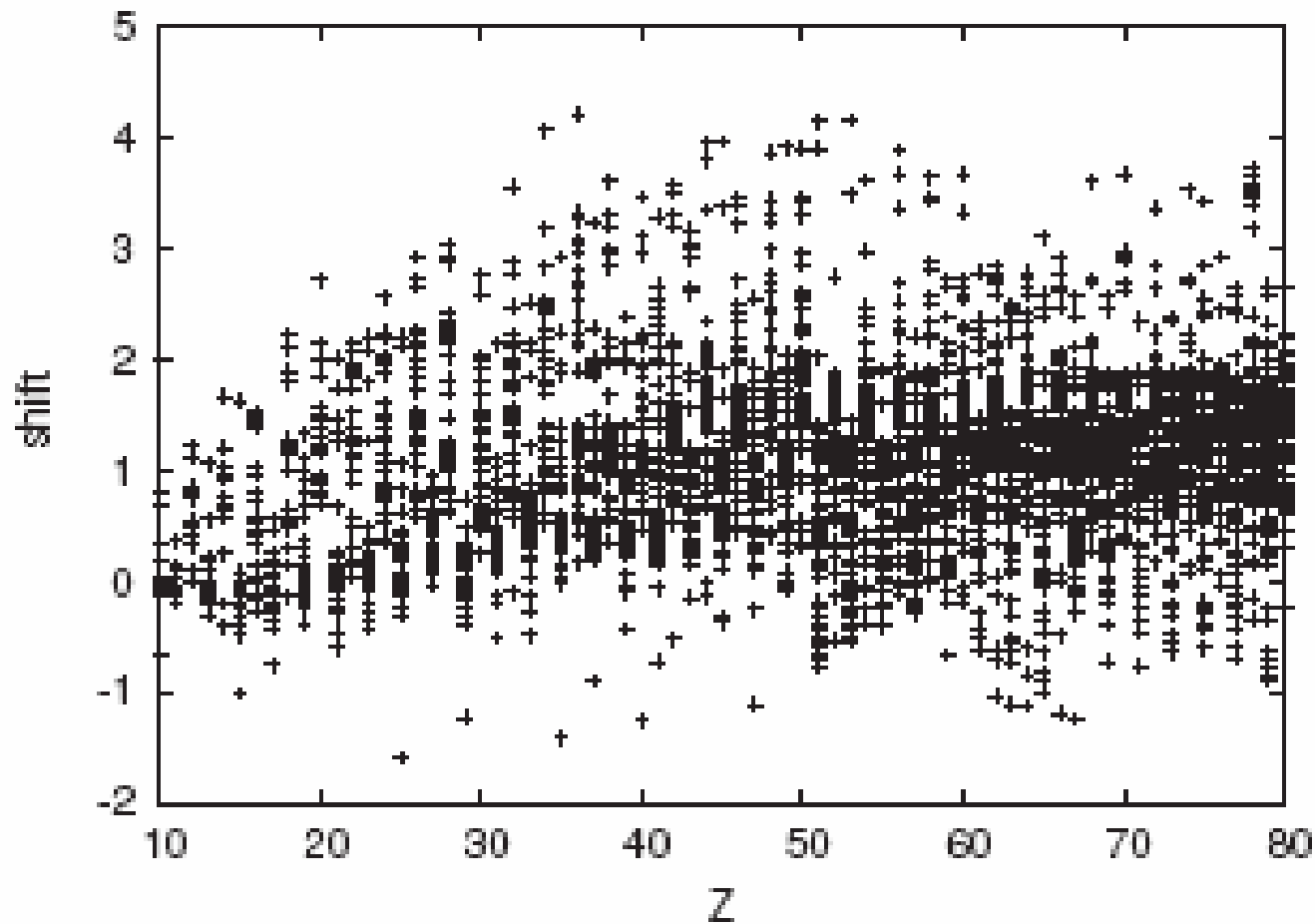


图11. $T_9=5.0$ 时 (p, α) 反应被积函数极大值处能量相对 Gamow 峰
高斯近 E_0 的移动随靶核 Z 的变化. 绝大多数移动是正值, 大于
 (α, p) 反应的移动幅度的绝对值.

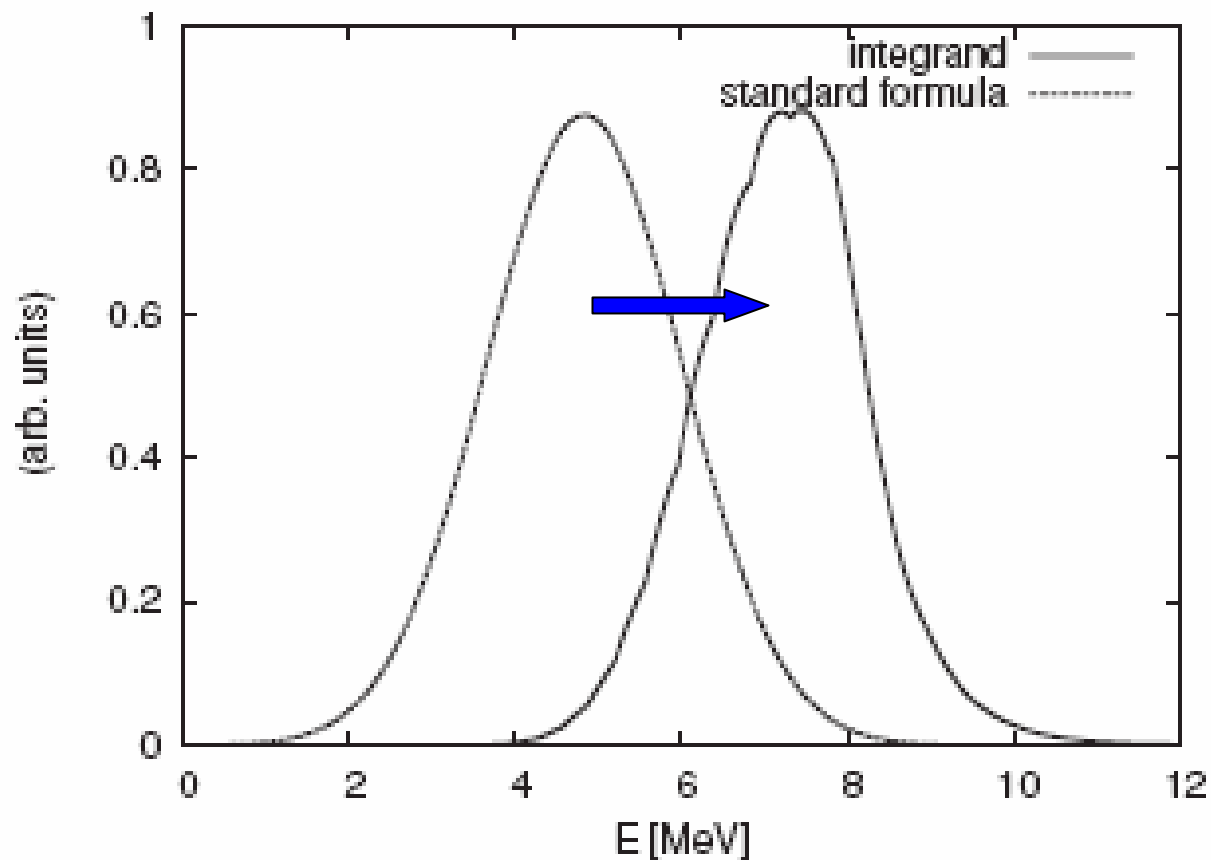


图12. $T_9=5$ 条件下 $^{112}\text{Sn}(p,\alpha)^{109}\text{In}$ 反应率被积函数与 Gamow 峰高斯近似的比较. 被积函数的极大值比高斯分布的 E_0 上移了几MeV.

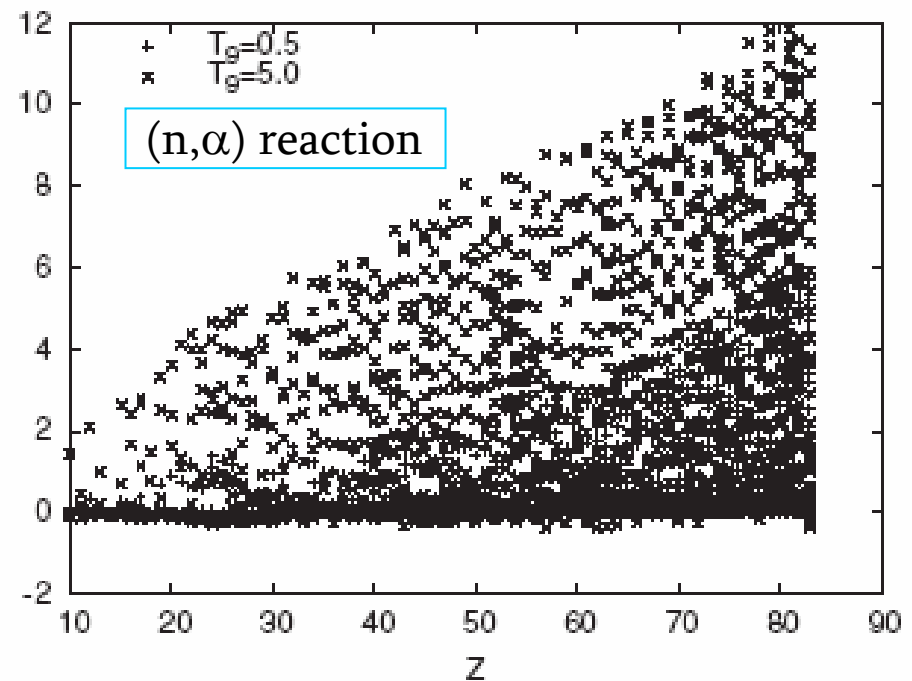
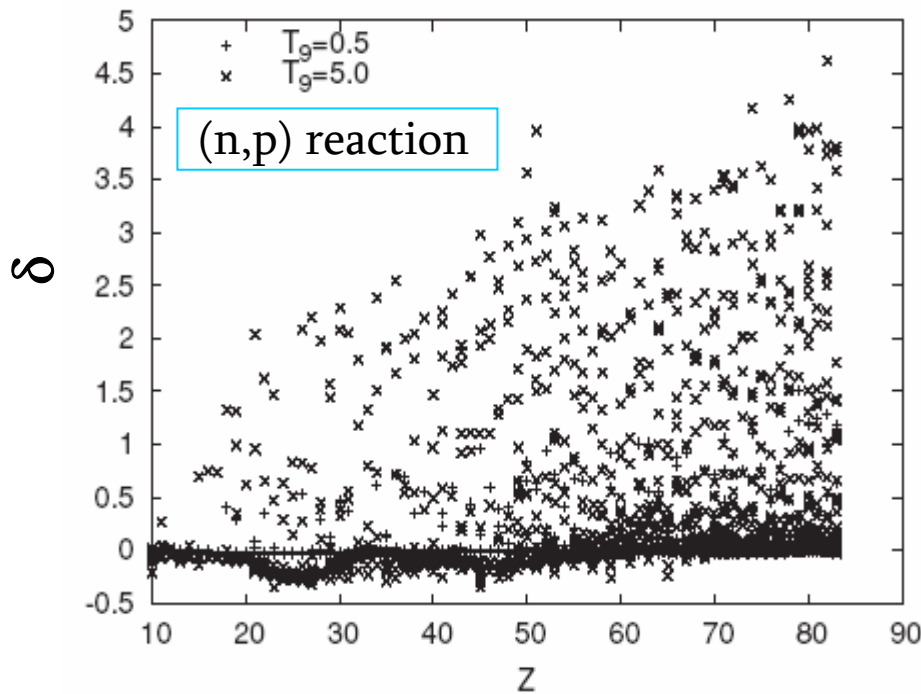


图13. $T_9=0.5$ 和 5.0 条件下, (n,p) 和 (n,α) 反应率被积函数最大值处的能量 \tilde{E}_0 相对MB分布峰值能量 E_{MB} 的变化 δ (MeV) 与靶核原子序数的关系. $T_9=0.5$ 时几乎无变化, $T_9=5.0$ 时程度不同地上移.

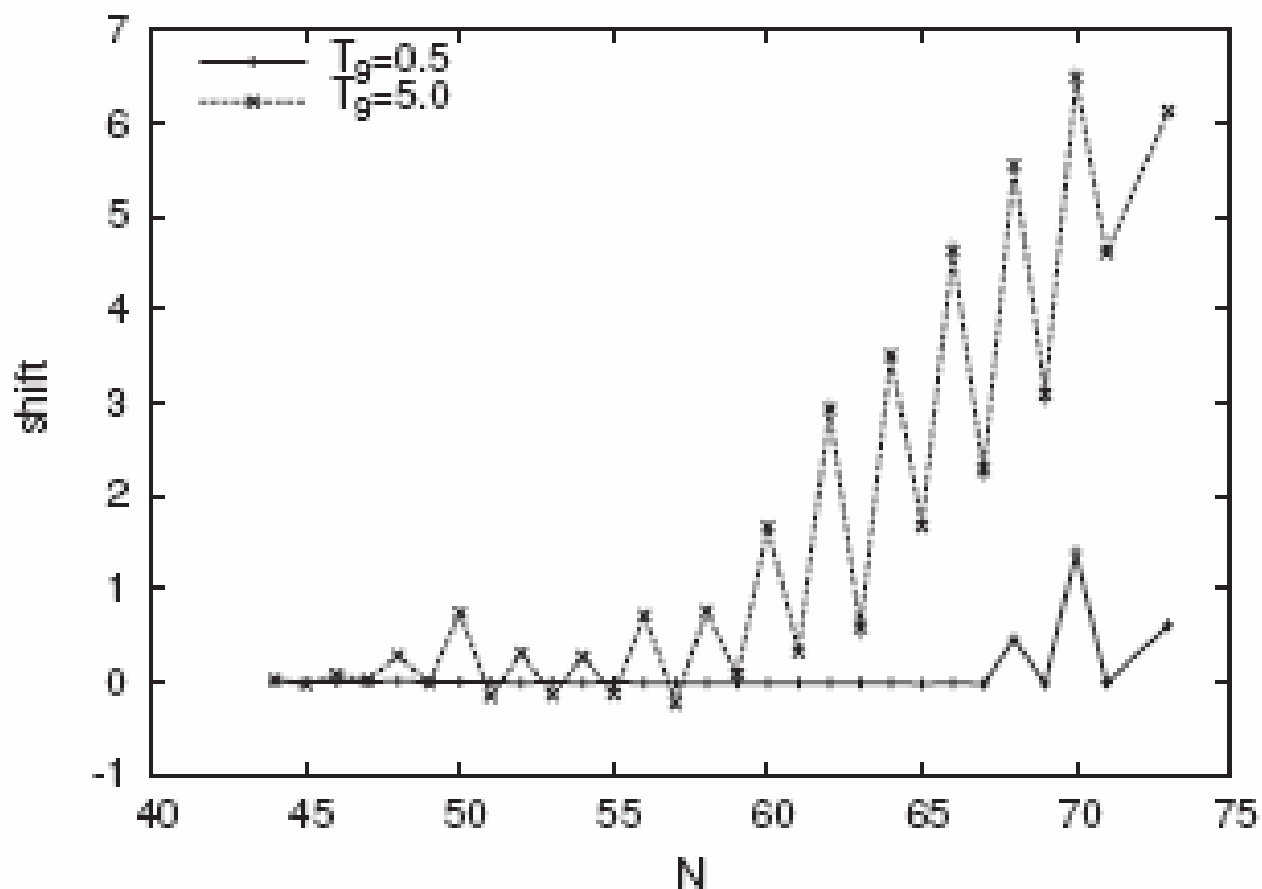


图14. 在两个温度下Sn 同位素的(n, α) 反应被积函数极大值处能量相对MB分布峰值能量 E_{MB} 的移动随靶核中子数的变化. $T_g=0.5$ 时几乎看不出移动; 对于丰中子同位素的低Q 值反应, $T_g=5.0$ 时显著向高能移动.

结 语

天体物理反应率是核天体物理学中一个关键的物理量, 表征核反应运作的快慢, 直接影响核反应演进的路径和核合成的结果.

Newton 和 Rauscher等人的研究工作对于进一步从理论上改进反应率, 特别是大质量恒星演化晚期阶段中及恒星爆发性事件中大多数热核反应率的计算和实验能区的恰当选择有重要参考价值.

欢迎指正, 谢 谢!