1 Kerr-Newman 解的导出

由于黑洞的物质分布和奇点均在视界之内，我们确实可以使用 Einstein 方程的真空解来描述黑洞区域之外的引力场，这也是研究 Einstein 方程真空解的意义。

Einstein 方程所有真空解、或者说解的唯一性问题至今没有得到完全解决。阶段性的重要成果包括 Birkhoff 定理。

定理 1.1 (*Birkhoff* 定理) 球对称真空爱因斯坦方程的解必定具有 *Schwarzchild* 解的形式。

这说明了球对称黑洞外的度规一定具有 Schwarzchild 解的形式，即其只由一个参数描述，一般选择为其质量。关于黑洞质量如何定义，我们将在下一节中详细阐述。对于非球对称的黑洞，Wheeler 在 1971 提出了著名的黑洞无毛猜想。

命题 1.2 (黑洞无毛猜想) 对应稳态黑洞事件视界外的真空 *Einstein* 方程解一定具有 *Kerr-Newman* 解的形式。

Kerr-Newman 解较 Schwarzchild 解非常复杂，其包含三个独立的参数，一般选择为黑洞质量、角动量与电荷量，这被称为黑洞的"三根毛"。黑洞无毛猜想即认为黑洞的引力场不依赖除此之外的其他任何参数，经典黑洞热力学一般是在承认黑洞无毛猜想的基础上进行的研究。值得说明的是，现代物理学认为有可观的证据指出黑洞无毛猜想可能并不正确。

我们将导出 Newman 求解 Kerr-Newman 解的过程。首先，我们强调：在 Newman 导出 Kerr-Newman 解时，其事实上是进行了形式的运算而非像 Schwarzchild 解那样求解了 Einstein 场方程，因此其解的导出往往被称为"Newman 的魔术"。但是，随着 Penrose 等人对解的进一步诠释，现在一般认为该过程是可以被理解的。

1.1 时空上的电磁场和 Reissner-Nordstrom 黑洞

Schwarzchild 解描述的是 Einstein 方程的球对称真空解。对于有背景电磁场的时空，此时能动张量不为零，因此时空度规的 Einstein 张量不为零。描述了带背景电磁场的球对称黑洞解被称为 Reissner-Nordstorm 黑洞。

此处我们考虑的电磁相互作用均为经典的电磁场论，即不涉及量子效应。经典的电磁相互作用由一个被称为电磁张量的 2-形式场 F_{ab} 和电磁荷密度场 J_a 描述。记外微分算子为：

$$d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$$

Hodge$*$ 算子为：

$$* : \Omega^p(M) \to \Omega^{4-p}(M), d^* := * \circ d \circ *$$

则 Maxwell 方程为：

$$(dF)_{abc} = 0, (d^*F)_a = J_a$$

在时空流形 M 的 de Rham 上同调群为平凡群时，F_{ab} 是一个恰当形式，则存在一个整体的 1-形式场 A_a 使得：

$$F_{ab} = (dA)_{ab}$$

在一般的流形上没有这个结论。由于 Poincare 引理指出：对于任何 $1 \leq q \leq n$：

$$H^q_{dR}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$$

因此，在任何局域坐标（一般取 Riemann 法坐标系或 Fermi 法坐标系）中均存在局域的电磁势 A_i 使得在该图中：

$$F_{ij} = (dA)_{ij}$$

我们考虑只存在电磁场而不存在粒子的情况，即在可能的量子化之后只存在 boson 而不存在 fermion。此时的 Maxwell 方程为：

$$dF_{ab} = 0, d^* F_{ab} = 0$$

电磁场的 Lagrangian 密度为：

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} F_{ab} F^{ab}$$

能动张量为：

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_{EM}}{\delta g^{ab}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} (\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{ab}} (\frac{1}{16\pi} F^2) - \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \frac{\delta(F_{mn} F_{pq} g^{mp} g^{nq})}{\delta g^{ab}})$$

故：

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}(g^{cd} F_{ac} F_{bd} - \frac{1}{4} g_{ab} F^{cd} F_{cd})$$

我们考虑黑洞视界外没有除电磁场外的任何物质分布。理论上，我们应当直接求解如上方程，这是一个流形上的度规场方程。但是，由于我们仍然有球对称和渐近平坦的假设，可以取时空度规在 Schwarzchild 时空坐标下的分量为：

$$g = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

其中：

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

该坐标中 $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$。由于球对称的假设，只有 F_{10} 项非零，带入 Maxwell 方程：

$$\frac{\partial(\sqrt{-g} F_{10})}{\partial r} = 0$$

将上面的度规表达式代入：

$$\sqrt{-g} = \sqrt{e^{\mu+\lambda} r^4 \sin^2\theta}$$

积分得到：

$$F_{10} = e^{-(\mu+\lambda)/2} \frac{Q}{r^2}$$

其中 Q 为积分参数，在局域观测中被解释为黑洞电荷量。代入能动张量的表达式：

$$T_{00} = \frac{Q^2}{8\pi r^4} e^{-mu}$$

其余项为 0。

另一方面，我们有 Einstein 张量：$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$
代入 $g = -e^{\nu} dt^2 + e^{\lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2$：

$$G_{00} = e^{-\lambda}(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r}) - \frac{1}{r^2}$$

$$G_{01} = G_{10} = \frac{e^{-\lambda}}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r}$$

$$G_{11} = e^{-\lambda}(\frac{1}{r}\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2}) - \frac{1}{r^2}$$

$$G_{22} = G_{33} = \frac{1}{2}e^{-\nu}(\frac{\partial^2\nu}{\partial r^2} + \frac{1}{2}(\frac{\partial\nu}{\partial r})^2 + \frac{1}{r}(\frac{\partial\nu}{\partial r} - \frac{\partial\lambda}{\partial r})) - \frac{1}{2}e^{-\lambda}(\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + \frac{1}{2}(\frac{\partial\lambda}{\partial t})^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial t}\frac{\partial\nu}{\partial t})$$

代入 Einstein 方程：

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}$$

对比两侧系数，解得：

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$$

则解得 Reissner-Nordstrom 度规为：

$$g = -(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})dt^2 + (1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

其中 M 为积分常数，这样取的目的是在 $Q = 0$ 时上式退化为 Schwarzchild 度规。与 Schwarzchild 度规不同的是，Scwarzchild 度规的奇异行为是一个一次方程，此时时空的奇异行为由一个二次方程描述。即：

$$r^2 - 2Mr + Q^2 = 0$$

宇宙监督者原理要求时空中不能存在裸露的奇点，则对于物理的黑洞，上式应当有 $M^2 - Q^2 \geq 0$。此时黑洞有两个不连通的视界，半径分别为：

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$$

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$$

分别被称为 Reissner-Nordstrom 黑洞的外、内视界。

1.2 Newman-Penrose 形式

历史上，Kerr-Newman 黑洞最初由 Kerr 通过复杂的方法解出。在此之后，Newman 采用了被称为“Newman 魔术”的技巧从 Reissner-Nordstrom 黑洞变换得到了 Kerr-Newman 解。

我们在此阐述 Newman 求解的方法。为此，我们先讨论 Newman-Penrose 形式，这是一种求解 Einstein 方程的技巧性技术。

Newman-Penrose 标架的核心思想是将实流形上的实标架延拓为复标架。回忆向量丛的定义：

定义 1.3 考虑 E 和 M 是实微分流形，$\pi : E \to M$ 是一个光滑满射。若存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和微分同胚 $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ 且满足：

$a.\psi_\alpha(\pi^{-1}(p)) = \{p\} \times \mathbb{R}^k, \forall p \in M$

$b.$ 对于任意的 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，存在光滑映射 $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ 使得：

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, g_{\alpha\beta}(p)v), \forall v \in \mathbb{R}^k$$

此时称 E 是 M 的一个秩为 k 的向量丛，π 为丛投影。

特别地，切丛是向量丛：

定义 1.4 流形 M 的切丛定义为：

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

类似地余切丛：

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$$

则切丛和余切丛均是 $2n$ 维的向量丛。

我们希望将切矢量和余切矢量延拓为复向量空间中的元素，为此，我们希望复化切丛和余切丛。首先，我们可以定义实向量空间的复化。

定义 1.5 $\mathbb{R}$ 上向量空间 V 的复化是一个 $\mathbb{C}$ 上的向量空间：$V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$。

类似实对偶空间地，$V^* \otimes \mathbb{C}$ 是 V 上复泛函全体。我们可以定义复化向量空间的典范投影和典范嵌入：

定义 1.6 由于 $V \otimes \mathbb{C} = V \oplus iV$，对于任意 $u = u_1 + iu_2 \in V \otimes \mathbb{C}, u_1, U_2 \in V$，我们定义 $\mathrm{Re}(u) = u_1, \mathrm{Im}(u) = u_2$。特别地，$\mathbb{P} = \mathrm{Re} : V \otimes \mathbb{C} \to V$ 被称为典范投影。

定义 1.7 我们称 $\mathbb{E} : V \to V \otimes \mathbb{C}$ 为一个典范嵌入，若 $\mathbb{P} \circ \mathbb{E} = \mathrm{Id}$。一般，我们取典范嵌入使得任意 $u \in V$，$\mathrm{Im}(\mathbb{E}(u)) = 0$

这里的核心思想是：在考虑复数的拓扑时，我们均取 $\mathbb{C}^n$ 的拓扑为 $\mathbb{R}^{2n}$ 的拓扑。在考虑复数上的线性空间时，我们均考虑 $\mathbb{C} \cong \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(1, i)$。则我们有：

定义 1.8 流形 M 的复化切丛和复化余切丛定义为：

$$CTM = \bigcup_{p \in M} T_p M \otimes \mathbb{C}$$

$$CT^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M \otimes \mathbb{C}$$

则复化切丛和复化余切丛均是 $3n$ 维的向量丛。

注意复切丛不是复流形的切丛，而且实流形切丛的复化。复切丛的截面全体 $\Gamma(M, CT^*M)$ 为 M 上的复余切向量场，但并不是复流形上的向量场，因为不是任意实流形都有标准的复结构。类似地，对于流形上的张量丛 $\bigotimes^{r,s} TM$，我们可以定义复化张量丛 $\bigotimes^{r,s} CTM$。

由于在局部上我们定义了典范投影和典范嵌入，我们可以定义余切矢量场的典范投影和典范嵌入：

定义 1.9 典范投影是一个丛同态：

$$\mathbb{P} : \Gamma(M, C\bigotimes^{r,s} TM) \to \Gamma(M, \bigotimes^{r,s} TM), T(p) \mapsto \mathbb{P}(T(p)), \forall T \in \Gamma(M, C\bigotimes^{r,s} TM) p \in M$$

其将一个复余切矢量场映为余切矢量场。相反，典范嵌入：

$$\mathbb{E} : \Gamma(M, \bigotimes^{r,s} TM) \to \Gamma(M, C\bigotimes^{r,s} TM), T(p) \mapsto \mathbb{E}(T(p)), \forall T \in \Gamma(M, \bigotimes^{r,s} TM), p \in M$$

在有了复化余切丛的概念以后，我们可以考虑 Newman-Penrose 标架。对于时空流形 M 和其上的一个图 U，在坐标域内我们可以定义坐标余切矢量场 $\{dx^i\}$，其中 x^i 是坐标函数，d 是外微分，$dx^i \in \Gamma(U, T^*U)$。所以，当我们考虑该坐标下张量的分解时，事实上是在考虑张量在 $\{dx^i\}$ 下的分解。当我们将 $T_pM \otimes \mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{C}$ 上的一个线性空间时，$\{\mathbb{E}(dx^i)|_p\}$ 也构成了 $T_pM \otimes \mathbb{C}$ 的一组基。相反，对于任何 s 形式 $T \in \Gamma(M, \bigotimes^{0,s} TM)$，我们可以考虑 $\mathbb{E}(T) \in \Gamma(M, C\bigotimes^{0,s} TM)$ 从而使用 $\{\mathbb{E}(dx^i)\}$ 在 U 上对其进行分解，对于任何一组基都是如此。因此，我们可以考虑那些不是由流形坐标函数外微分诱导的基，特别地，我们允许其虚部不为零。这是我们引入 Newman-Penrose 标架合法性的保障。

定义 1.10 *Newman-Penrose* 标架是 U 上的一组复化余切矢量场 $\{l_a, n_a, m_a, \overline{m}_a\}$，其中 l_a，n_a 是实的，$\overline{m}_a$ 是 m_a 的复共轭，使得在任意 $p \in U$ 其构成 CT^*M 的一组基，且满足归一化条件：

$$l^a n_a = -1, m^a \overline{m}_a = 1, l^a l_a = m^a m_a = n^a n_a = 0$$

Newman-Penrose 标架在处理一些与光子运动有关的问题很方便。一般，我们可以通过 U 的坐标标架构造 Newman-Penrose 标架。一般，Newman-Penrose 标架下的 Riemann 曲率张量系数被称为旋量，这个名字与量子场论中的旋量场一样，均来自 Lie 群表示论。

在量子场论中，实物粒子（静止质量不为零的粒子）的自旋是半整数，其场是一个旋量场。在广义相对论中，Newman-Penrose 标架是一种描述这种粒子的方式。

1.3 Kerr-Newman 黑洞的 Newman 求解方法

我们给出 Newman 求解 Kerr-Newman 解的方式。首先，回忆 Reissner-Nordstrom 黑洞在 Schwarzchild 坐标下的形式：

$$g = -(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})dt^2 + (1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$g^{-1} = -(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})^{-1}(\frac{\partial}{\partial t})^2 + (1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})(\frac{\partial}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}((\frac{\partial}{\partial\theta})^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}(\frac{\partial}{\partial\phi})^2)$$

$\{dt, dr, d\theta, d\phi\}$ 构成了一组标架，我们基于此构造一个 Newman-Penrose 标架：

$$l^a = (1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})^{-1}(\frac{\partial}{\partial t})^a + (\frac{\partial}{\partial r})^a$$

$$n^a = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t})^a - \frac{1}{2}(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})(\frac{\partial}{\partial r})^a$$

$$m^a = \frac{\sqrt{2}}{2r}(\frac{\partial}{\partial\theta})^a + i\frac{\sqrt{2}}{2r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\phi})^a$$

$$\overline{m}^a = \frac{\sqrt{2}}{2r}(\frac{\partial}{\partial\theta})^a - i\frac{\sqrt{2}}{2r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\phi})^a$$

其对偶矢量场为：

$$l_a = -(dt)_a + (1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})^{-1}(dr)_a$$

$$n_a = -\frac{1}{2}(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})(dt)_a - \frac{1}{2}(dr)_a$$

$$m_a = \frac{\sqrt{2}}{2}r(d\theta)_a + i\frac{\sqrt{2}}{2}r\sin\theta(d\phi)_a$$

$$\overline{m}_a = \frac{\sqrt{2}}{2}r(d\theta)_a - i\frac{\sqrt{2}}{2}r\sin\theta(d\phi)_a$$

可以验证，其确实是一个 Newman-Penrose 标架，即除 $l_a n^a = -1$，$m_a \overline{m}^a = 1$ 以外基矢量间内积均为 0。反解出原标架在新标架下分解：

$$(dr)_a = \frac{1}{2}(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})l_a - n_a$$

$$(dt)_a = -\frac{1}{2}l_a - (1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2})^{-1}n_a$$

$$(d\theta)_a = \frac{\sqrt{2}}{2r}(m_a + \overline{m}_a)$$

$$(d\phi)_a = -\frac{\sqrt{2}i}{2r\sin\theta}(m_a + \overline{m}_a)$$

回代得到度规在这个标架下的形式为：

$$g_{ab} = -l_a n_b - n_a l_b + m_a \overline{m}_b + \overline{m}_a m_b$$

$$g^{ab}=-l^a n^b-n^a l^b+m^a\overline{m}^b+\overline{m}^a m^b$$

我们开始考虑 Newman 解方程的行为。首先，其将 r 复化为一个复坐标，因此其模长变为 $r\overline{r}$。由于系数仍然应当是实的，其形式应当变为：

$$1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\to 1-\frac{M(r+\overline{r})-Q^2}{r\overline{r}}$$

复化后的标架变为（为避免冗杂，我们不改变记号）：

$$l_a=-(dt)_a+(1-\frac{M(r+\overline{r})-Q^2}{r\overline{r}})^{-1}(dr)_a$$

$$n_a=-\frac{1}{2}(1-\frac{M(r+\overline{r})-Q^2}{r\overline{r}})(dt)_a-\frac{1}{2}(dr)_a$$

$$m_a=\frac{\sqrt{2}}{2}r(d\theta)_a+i\frac{\sqrt{2}}{2}r\sin\theta(d\phi)_a$$

$$\overline{m}_a=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{r}(d\theta)_a-i\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{r}\sin\theta(d\phi)_a$$

$$l^a=(1-\frac{M(r+\overline{r})-Q^2}{r\overline{r}})^{-1}(\frac{\partial}{\partial t})^a+(\frac{\partial}{\partial r})^a$$

$$n^a=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t})^a-\frac{1}{2}(1-\frac{M(r+\overline{r})-Q^2}{r\overline{r}})(\frac{\partial}{\partial r})^a$$

$$m^a=\frac{\sqrt{2}}{2r}(\frac{\partial}{\partial\theta})^a+i\frac{\sqrt{2}}{2r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\phi})^a$$

$$\overline{m}^a=\frac{\sqrt{2}}{2\overline{r}}(\frac{\partial}{\partial\theta})^a-i\frac{\sqrt{2}}{2\overline{r}\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\phi})^a$$

然后，我们引入椭球坐标。我们的目的是从球对称的解导出柱对称的解，因此我们希望得到一个坐标变换，使得任何球对称的解在该坐标变换下的新解是一个柱对称的解。取：

$$r=r'+ia\cos\theta$$

$$t=r'-ia\cos\theta$$

这导致 m^a 的变为：

$$m^a=\frac{\sqrt{2}}{2(r+ia\cos\theta)}(-\frac{ia\sin\theta}{1-\frac{M(r+\overline{r})-Q^2}{r\overline{r}}}(\frac{\partial}{\partial t})^a-2ia\sin\theta(\frac{\partial}{\partial r})^a)+\frac{\sqrt{2}}{2(r+ia\cos\theta)}(\frac{\partial}{\partial\theta})^a$$

$$+i\frac{\sqrt{2}}{2(r+ia\cos\theta)\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\phi})^a$$

这里的新的项 a 有单位质量角动量的物理意义。取 $\rho^2=r^2+a^2\cos^2\theta$，$\Delta=r^2+a^2+Q^2-2Mr$，将上式代入度规：

$$g_{ab}=-l_a n_b-n_a l_b+m_a\overline{m}_b+\overline{m}_a m_b$$

即得到 Kerr-Newman 解：

$$g_{ab} = -(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2})(dt)_a(dt)_b + \frac{\rho^2}{\Delta}(dr)_a(dr)_b + \rho^2(d\theta)_a(d\theta)_b$$

$$+\frac{((r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta)\sin^2\theta}{\rho^2}(d\phi)_a(d\phi)_b - \frac{a(2Mr - Q^2)\sin^2\theta}{\rho^2}((dt)_a(d\phi)_b + (dt)_b(d\phi)_a)$$

该坐标系类似 Schwarzchild 解的 Schwarzchild 坐标系，被称为 Boyer-Lindquist 坐标系。需要强调的是，上述复化-坐标转换的过程是否具有物理意义是一个尚无定论的问题，有些物理学家认为上述做法可以普遍地从球对称时空导出柱对称时空，而有些人认为这毫无意义。我们在此给出了其形式上合理的解释，而不去讨论其背后的原因。另外，Kerr-Newman 度规对应的时空不是一个静态时空，而是一个稳态时空，这可以通过计算其旋系数导出。其带电，时空具有背景电磁场。当 $a = 0$ 时，其退化为 Reissner-Nordstorm 度规；当 $a = Q = 0$ 时，该度规退化为 Schwarzchild 度规。

通过计算 Kerr-Newman 黑洞的能动张量，在 Boyer-Lindquist 坐标系中可以写出其对应的电磁势：

$$A_a = -\frac{Qr}{\rho^2}((dt)_a - a\sin^2\theta(d\phi)_a)$$

1.4 Kerr-Newman 解的另一种导出方式

通过对 Kerr-Newman 解的分析，我们可以得到黑洞热力学基本定律。但是在此之前，由于上述“物理学家导出解”的方式或许在数学家看来不甚理想，我们简要阐述另一种导出 Kerr-Newman 解的方式，但不做具体计算。

Birkhoff 定理指出：

定理 1.11 球对称、渐近平直的度规必有形式：

$$g = -e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

该定理有一个推广的版本：

定理 1.12 稳态轴对称的渐近平直度规必能写为形式：

$$g = -e^{\nu}dt^2 + e^{\psi}(d\phi - \omega dt)^2 + e^{\mu_2}(dx^2)^2 + e^{\mu_3}(dx^3)^2$$

在证明了上述定理的前提下，我们可以完全重复 Reissner-Nordstorm 黑洞解的过程，从而得到 Kerr-Newman 解。

2 Kerr-Newman 解的分析

2.1 Kerr-Newman 解的守恒量

回忆 Kerr-Newman 解在 Boyer-Lindquist 坐标系中的形式：

$$g_{ab} = -(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2})(dt)_a(dt)_b + \frac{\rho^2}{\Delta}(dr)_a(dr)_b + \rho^2(d\theta)_a(d\theta)_b$$

$$+\frac{((r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta)\sin^2\theta}{\rho^2}(d\phi)_a(d\phi)_b - \frac{a(2Mr-Q^2)\sin^2\theta}{\rho^2}((dt)_a(d\phi)_b + (dt)_b(d\phi)_a)$$

其中：$\rho^2 = r^2 + a^2\sin^2\theta$，$\Delta = r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr$

首先考虑奇异行为。类似 Reissner-Nordstorm 黑洞地，我们承认宇宙监督者原理，则要求不存在裸露于视界外的奇点：

$$M^2 \geq a^2 + Q^2$$

则事件视界：

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$$

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$$

这与 Reissner-Nordstorm 黑洞完全类似。

另一个奇异行为出现于洛伦兹变换中。由于洛伦兹变换中需要计算 $\sqrt{-g_{00}}$，因此在 $g_{00} = 0$ 处会出现无限红移的现象，被称为无限红移面或静界。对于球对称黑洞，无限红移面和事件视界重合。Kerr-Newman 黑洞的无限红移面解为：

$$r_+^s = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta - Q^2}$$

$$r_-^s = M - \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta - Q^2}$$

因此在 $\theta = 0, \pi$ 时二者重合，这在物理上的意义为在转轴附近黑洞转动的速度为 0，不存在引力拖曳现象，表现为 Reissner-Nordstorm 黑洞。由此也可以证明（也可以直接解），Kerr-Newman 解的本性奇异点与 Reissner-Nordstorm 黑洞一致为 $r = 0$。

我们计算 Kerr-Newman 黑洞的角速度：

$$\Omega_+ = \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{03}}{g_{33}} = \frac{a(2Mr - Q^2)\sin^2\theta}{((r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta)\sin^2\theta} = \frac{a^2}{r_+^2 + a^2}$$

由此，构建拖曳坐标和 Killing 场：

$$\xi_a\xi^a = g_{00} = -(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2})$$

表面引力为：

$$\kappa_+ = \sqrt{-\frac{1}{2}g^{ab}\nabla_a\xi^c\nabla_b\xi_c} = \frac{r_+ - r_-}{2(r^2 + a^2)}$$

注意到 $\Delta = (r-r_-)(r-r_+)$，用该式改写外视界超曲面子流形度规：

$$\sigma = (d\rho)^2 + \frac{(r_+^2+a^2)^2\sin^2\theta}{\rho^2}(d\phi)^2$$

该超曲面是类空的，上述子流形度规是正定的，因此有外视界面积：

$$A_+ = \int \sqrt{\sigma} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(r_+^2+a^2)d\theta d\phi = 4\pi(r_+^2+a^2)$$

一般，其被称为黑洞的面积。

由于 Kerr-Newman 黑洞在轴向有球对称的性质，我们可以在该方向积分从而很方便地得到电势。回忆四维电磁势：

$$A_a = -\frac{Qr}{\rho^2}((dt)_a - a\sin^2\theta(d\phi)_a)$$

三维电场：

$$E^a = \frac{Q}{r^2\sin^2\theta}(\frac{\partial}{\partial r})^a$$

积分得到外视界上的电势：

$$V_0 = \frac{Qr_+}{r_+^2+a^2}$$

2.2 Penrose 过程

为了将黑洞视为一个热力学对象进行研究，首先，我们考虑黑洞的非热辐射，即著名的 Penrose 辐射。需要注意的是，对于广义相对论中粒子自旋的讨论需要用到旋量联络与 Newman-Penrose 标架，我们在此先不予讨论。我们考虑外事件视界附近附近自旋为 s，磁量子数为 m、带电荷量 q 粒子的能量：

$$E = m\Omega_+ + qV_+$$

此处磁量子数的取值为：

$$m = -s, -s+1, ..., s$$

特别地电子自旋为 $\frac{1}{2}$，磁量子数为 $m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$，电荷量为 $-e$，对应能量为：

$$E_{-e,-}- = -\frac{1}{2}\Omega_+ - eV_+$$

$$E_{-e,+} = \frac{1}{2}\Omega_+ - eV_+$$

正电子自旋为 $\frac{1}{2}$，磁量子数为 $m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$，电荷量为 e，对应能量为：

$$E_{+e,-} = -\frac{1}{2}\Omega_+ + eV_+$$

$$E_{+e,+} = \frac{1}{2}\Omega_+ + eV_+$$

当一个正能量的光子进入了黑洞的事件视界，而后涨落为了一个负电子和一个正电子，自

旋方向与黑洞相同的正电子通过量子隧穿效应穿越黑洞事件视界，则出现了出射粒子比入射粒子能量高的现象。由于进入黑洞的是自旋方向与其相反的粒子，此时黑洞角动量降低，质量也降低，即：

$$\frac{\partial M}{\partial a} > 0$$

这个过程整体上体现为黑洞的非热辐射，被称为 Penrose 过程。这个过程中实际上降低的是黑洞的转动动能。为了更清楚地考虑这个过程，我们定义黑洞的不可减质量为：

$$\hat{M} = \sqrt{\frac{M(M - \frac{2M}{Q^2} + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2})}{2}}$$

则在 Penrose 过程中，不可减质量变化：

$$\frac{\partial \hat{M}}{\partial a} < 0$$

则在 Penrose 过程中不可减质量始终上升，而质量始终下降。当 $a = 0$ 时，两个质量相等，Kerr-Newman 黑洞也退化为不旋转的黑洞，故这个定义的物理意义明确。因此，对于质量为 M、角动量为 a 的黑洞，其能辐射出的最大能量为：

$$M - \hat{M} = M - \sqrt{\frac{M(M - \frac{2M}{Q^2} + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2})}{2}}$$

注意到我们前面积分得到了黑洞外视界的面积：

$$A_+ = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 16\pi\hat{M}^2$$

因此，我们有上式等价为在任意的黑洞辐射过程中：

$$\delta A_+ \geq 0$$

上式被称为黑洞面积不减定律或黑洞热力学第二定律，因为这启发了 Bekenstein 定义黑洞的热力学量。

3 黑洞热力学四定律

回忆 Kerr-Newman 黑洞的参数与我们在前面计算出的 Kerr-Newman 黑洞守恒量，它们是：

黑洞质量 M、单位质量角动量 a、电荷量 Q。角动量为 $J = aM$。

外事件视界半径：

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$$

黑洞面积：

$$A_+ = 4\pi(r_+^2 + a^2)$$

角速度:

$$\Omega_+ = \frac{a^2}{r_+^2 + a^2}$$

表面引力:

$$\kappa_+ = \frac{r_+ - r_-}{2(r^2 + a^2)}$$

注意到 κ_+ 不含 θ。因此,其在外事件视界上是常数。对应于热力学中的第零定律:平衡态热力学体系存在一个处处相等的量,被称为温度。对于主能量条件成立的稳态黑洞解,我们有:

定理 3.1 (黑洞热力学第零定律) *稳态黑洞事件视界上的表面引力为常数。*

整理可得 Bekenstein-Smarr 公式:

$$M = \frac{1}{4\pi}\kappa_+ A_+ + 2\Omega_+ J + V_+ Q$$

上式在形式上很像热力学中的 Euler 关系。考虑转动动能和电势能的热力学系统的 Euler 关系为:

$$U = TS + \Omega J + VQ$$

同时,我们知道面积有类似熵的方程。这启发我们对 Bekenstein-Smarr 公式取外微分。注意到由定义,有:

$$\frac{1}{4\pi} A_+ d\kappa_+ + 2Jd\Omega_+ + QdA_+ = -dM + V_+ dQ$$

这类似热力学中的 Gibbs-Duhem 关系。代入,我们得到了黑洞热力学第一定律:

定理 3.2 (黑洞热力学第一定律) *Kerr-Newman 黑洞的各守恒量之间有关系:*

$$dM = \frac{1}{8\pi}\kappa_+ dA_+ + \Omega_+ dJ + V_+ dQ$$

我们在上面已经讨论了面积不减定律,这对应于热力学第二定律:孤立体系的熵不会减少。

定理 3.3 (黑洞热力学第二定律) *稳态黑洞的面积不会减少。*

但是注意到一般的广义相对论取自然单位制 $G = \hbar = 1$,但是没有取 $k_B = 1$(量子场论的自然单位制会这样取),因此此处的量纲中面积量纲与熵会差一个 Boltzmann 常数,Hawking 将其取为:

$$S_{BH} = \frac{k_B}{4} A_+, T_{BH} = \frac{\kappa_+}{2\pi k_B}$$

这被称为 Bekenstein-Hawking 熵。则此时黑洞热力学第二定律改为黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵不会减少,第一定律改为:

$$dM = T_{BH} dS_{BH} + \Omega_+ dJ + V_+ dQ$$

热力学第三定律的表述有很多,其描述在热力学体系在绝对零度附近的行为。其中,Plank 表述为:不可能通过有限步将一个热力学系统的温度变为绝对零度。类似地,我们有一个 Kerr-Newman 黑洞在 $M^2 = a^2 + Q^2$ 时,存在裸露的奇点,即违反宇宙监督者原理,$\kappa_+ = 0$,进而 $T_{BH} = 0$。所以,我们有黑洞热力学第三定律:

定理 3.4 (黑洞热力学第三定律) 不可能通过有限步将一个稳态黑洞的表面引力或温度降为 0。

这等价于承认宇宙监督者原理。至此，我们建立了经典黑洞热力学的四大基本定律。这里指出，黑洞热力学中黑洞稳态的要求对应于热力学中的可逆，因此经典黑洞热力学对应于可逆热力学。