理论力学 A-第一次习题课讲义

shenzhu

2024/9/20

本讲义分为三部分：第一部分为对老师上课内容的简要回顾；第二部分为近期作业批改中发现问题较多的题目；第三部分为一些补充知识，目的是使大家对老师上课内容的动机与脉络有更清晰的认识。其中第一、二部分是包括在考试要求范围内的，建议大家掌握。

1 内容回顾

科大的物理类课程、特别是理论物理类课程（指理论力学、电动力学、量子力学和热力学与统计物理等课程）以数学基础作为第一章的开始似乎是一种传统。在某种意义上，可以给物理一个粗略的定义：物理即使用数学的形式语言对客观现象进行描述的一门学问。因此，数学之于物理，就如同文字之于文章。在力学课中，我们的数学主要是微积分和矢量代数，但其不涉及很深刻的线性代数。在电磁学中，我们用到了一些较为深刻的矢量分析，建立了场的概念。在热学中，我们大量使用了多变量微积分。在后面的课程中，我们将会将这些工具组合使用：比如电动力学中我们需要的是更复杂的矢量和张量分析，量子力学中我们需要有限和无穷维的线性代数，热力学和统计物理中我们需要更复杂的多变量微积分和概率论。

那么，我们在理论力学中需要使用的数学工具是什么呢？我们后续还会学到如变分法、外微分、辛几何等数学工具，但第一章我们主要学习的数学工具、也是一个较为基础但重要的工具，是张量代数。

1.1 张量代数: first encounter

你可能会发现，老师自始至终都没有给张量一个严格的定义。老师在第一次课上曾经提到，张量在发明之初被称作多线性代数，我们将在第三部分的补充中对其进行说明，并给出张量在数学中严格的定义。相反，老师说“张量是矩阵的推广”。对于理解二阶张量，这就够了，但是对于高阶张量和一些更深刻或复杂的性质，或许我们需要的是一个更为抽象但更为严格的定义。如果你希望将这门课的学习局限于考试范围以内，可以只学习此节的内容。

首先，在理解张量是什么以前，我们需要先复习一点线性代数的知识：什么是矢量（或向量）？我们在线性代数中学习过线性空间的定义：

定义 1.1 实数 $\mathbb{R}$ 上的线性空间是一个集合 V 和其上的加法 $+$ 和数乘 $\cdot$（注意不是内积的点乘），其中加法满足：$\forall \mathbf{a} \in V, \mathbf{b} \in V \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b} \in V$，数乘满足 $\forall \mathbf{a} \in V, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \in V$，并且加法满足交换律和结合律，乘法满足交换律和结合律，加法和乘法相容满足分配律。线性空间有时被记作 $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$。

当然，定义中的实数 $\mathbb{R}$ 可以换成其他的数域，如复数域 $\mathbb{C}$，这在量子力学中更为常见。在本课程中，我们讨论的线性空间在不加说明的情况下都指在实数域上的。在有了线性空间的概念后，我们可以定义矢量为：

定义 1.2 矢量（又称向量，*vector*）是线性空间中的元素。

我们立刻得到一些实数上线性空间和矢量的例子，比如：

例 1.1 实数 $\mathbb{R}$ 是一个（实数域 $\mathbb{R}$）上的线性空间。

进一步地，我们有：

例 1.2 $n(n \in \mathbb{N}^+)$ 维空间 $\mathbb{R}^n$ 是一个（实数域 $\mathbb{R}$）上的线性空间，其加法和数乘按分量理解。特别地，$\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^4$ 是线性空间。

因此，我们在高中学到的“空间中有方向有大小的箭头”确实是矢量，但是线性空间和矢量的范围远远大于此。在今后的物理和数学学习中，我们将采取这种形式的对矢量的定义。第一个不那么平凡的例子是：

例 1.3 实数域 $\mathbb{R}$ 上任意 $m \times n$ 阶的矩阵是一个线性空间。加法和数乘按分量理解。

这正是是老师讲义中提到“2 阶张量是矢量”这种看似是打错了的话的原因，现在我们理解了其含义。

那么，如何理解我们在线性代数中学到的“n 维矢量是一行 n 个数或一列 n 个数”? 事实上，这和“二阶张量是一个矩阵”有同样的内涵：这在数学上被称为一种“表示”（representation）。首先，我们需要回顾一个线性空间中的定理：

定理 1.3 任何有限维的线性空间 V 有有限的维数 $\dim(V) = n$，这是指 V 中线性无关矢量组的长度最长为 n，则存在一组矢量 $\{\mathbf{a}^i\}, i = 1, 2, 3, ..., n$ 使得任意 $\mathbf{x} \in V$ 可以被唯一表示为：

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}^1 + x_2\mathbf{a}^2 + ... + x_n\mathbf{a}^n$$

我们称数组 $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ 为矢量 $\mathbf{x}$ 的一个表示。

今后，我们使用带箭头的 $\vec{a}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的矢量，而黑体 $\mathbf{a}$ 表示一般线性空间中的矢量（在部分数学系或物理系中的书中也采取这样的记号）。因此，尽管我们赋予了矢量抽象的定义，但是对于有限维的矢量，我们仍然可以使用数组、或是说标准 $\mathbb{R}^n$ 空间对其进行理解。但请注意，我们强调 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 这组数是矢量的表示而不是矢量本身，这种区分对于物理人是有益的（尽管数学人经常认为同构与相等没有任何区别，但是物理人常常谈论实体）。

对于上面提到的例子：

例 1.4 作为线性空间的实数 $\mathbb{R}^n$ 的维数为 n。

例 1.5 实数域 $\mathbb{R}$ 上 $m \times n$ 阶的矩阵构成的线性空间维数为 mn。

另一件值得指出的事是：我们以上的论述全部来自于线性空间的性质本身，目前为止我们没有赋予其任何内积结构。因此，我们不会使用内积与投影的方式定义分量。和我们在线性代数中学到的一样，一个线性空间不必然是一个内积空间，内积结构是我们在其上定义的。我们在第三节中将看到，在同时考虑一个线性空间及其对偶空间时，我们自然地得到了一个内积结构。

我们将在第三节中严格地讨论所有张量。在那之前，我们首先考虑一个特例，即 2 阶张量，因为这是唯一我们可以只使用线性代数的知识来直接理解的。我们将会在第一节给出 2 阶张量的一个例子：$(1,1)-$ 型张量的构造，并看到老师说“二阶张量是矩阵”或“二阶张量是两个矢量放在一起”的原因。在第三节中，我们将看到更普遍的 2 阶张量的定义。

在此后的所有讨论中，当我们提到 V 而不加说明时，其指的是一个 $\mathbb{R}$ 上的有限维线性空间。我们使用 $n=\dim(V)$ 代表其维数。因此，你总是可以使用作为线性空间（而不是内积空间）$\mathbb{R}^3$ 为一个直观的例子，此时 $n=3$。

为了方便起见，我们引入 Einstein 求和约定：当一个乘法式中出现一对相同的上下标时（不管是两个数相乘还是实数和矢量的数乘），我们默认其对 $1,2,...,n$ 求和。

定义 1.4 *以 V 为底空间的 $(1,1)-$ 型张量是一个其上（满秩）的线性变换，记作 T。*

回忆线性代数中的定义：线性变换 T 是一个映射：

$$T:V\to V,\mathbf{a}\mapsto T(\mathbf{a})$$

其“线性性”是指：

$$\forall \mathbf{a},\mathbf{b}\in V,\lambda,\mu\in\mathbb{R},T(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$$

我们在线性代数中学过，对于任何一个 V 上的线性变换 T，如果 V 中指定了一组基 $\{\mathbf{a}^i\}$，并指定了基的变换规则 $\mathbf{a}^i\mapsto\mathbf{a}'^i$，则由于线性性其对任意 V 中矢量 $\mathbf{x}=x_i\mathbf{a}^i$ 的作用被唯一确定为：

$$T(\mathbf{x})=x_i\mathbf{a}'^i$$

将其按原基展开：

$$T(\mathbf{x})=x_i\mathbf{a}'^i={x'}_i\mathbf{a}^i$$

我们称这样的一个线性映射 T 是一个 $(1,1)$-型张量。那么如何理解“其是一个矩阵”就很显然了，既然我们已经在 V 中指定了一组基，则线性变换即可以被表示为一个 $n\times n=\dim(V)\times\dim(V)$ 阶的矩阵 (T_{ij})（此处请区分：T 是一个线性变换，而 T_{ij} 是其矩阵表示的分量，是一个实数）。当我们考虑线性变换前后的矢量都被以表示的形式写出时，线性变换矩阵即是这两个表示数列的矩阵乘法，这也是老师说“2 阶张量是两个矢量放在一起”的理解方式。以上操作在线性代数中非常常见，建议不熟悉的同学回顾此部分的内容。

此处我们进行一点引申的说明：有同学问如何理解老师关于赝矢量和赝张量定义。事实上，赝矢量和赝张量的定义都依赖于空间反射操作 P 的定义，和一般的 T 类似，我们考虑矢量和张量、赝矢量和赝张量在 P 下的变换规则，从而对其进行定义。上述规则被称为“线性变换的

主动视角”，即对于一个线性空间的矢量，其被映为了另一个矢量。但是老师讲义中提到的变换使用的是“被动视角”，即对于一个线性空间 V，我们最初取定了一组基 $\{\mathbf{a}^i\}$，而后我们选择了一组新基 $\{\mathbf{a}'^i\}$，考虑同一个矢量 $\mathbf{x}$ 在此两组基下的展开：

$$\mathbf{x} = x_i\mathbf{a}^i = x'_i\mathbf{a}'^i$$

因此，其也构成对线性变换的一个理解，被称为“线性变换的被动视角”。由于我们总是考虑满秩的线性变换，因此其总是可逆的，故线性变换的这两种视角是完全等价的（可以自行验证，在线性代数教材中也有）。但是对于赝张量，这两种变换并不等价，这也是我们说“赝张量不是张量”的原因。此时，我们讨论空间反射时必须使用主动视角，因此必须定义空间反射算子 P。此处朱老师略去了较多的内容，较为详细的内容将会在量子力学或高等量子力学课程中被讨论，我们考试不会涉及。

1.2　内积和矢量叉乘

一个线性空间在不加任何说明的情况下时没有内积的，我们可以赋予其内积结构。

定义 1.5 线性空间 V 上的内积是一个映射：

$$g: V \times V \to \mathbb{R}$$

满足：
正定性：$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0, g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{b}$
对称性：$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g(\mathbf{b}, \mathbf{a})$
双线性性：$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, g(\mathbf{a}, \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2) = \lambda_1 g(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) + \lambda_2 g(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2)$
一个线性空间和其上的内积函数整体被称为内积空间，有时记作 (V, g)。

于是，我们立刻得到了一个我们非常熟悉的结论。

例 1.6 $\mathbb{R}^n$ 有一个自然的内积：

$$\forall \vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n), \vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n, g(\vec{a}, \vec{b}) := \sum_{i=1,2,...,n} a_i b_i$$

配有标准内积的 $\mathbb{R}^n$ 被称为 *Euclid* 空间。

通过使用 Kronecker 符号，其可以写成：

$$g(\vec{a}, \vec{b}) = \delta^{ij} a_i b_j$$

这里使用上标的原因将在第 3 节中被讨论。

类似地，一个线性空间上也是天然就有叉乘结构的，叉乘也是我们所赋予的。但是与内积结构不同的是，叉乘并不普遍地存在于所有线性空间中。对于 $\mathbb{R}^3$，我们有：

定义 1.6 线性空间 $\mathbb{R}^3$ 上的叉乘 $\times$ 是一个映射：

$$\times:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,(\vec{a},\vec{b})\mapsto\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b},c_k=\epsilon_{ijk}a^ib^j$$

其中 $\epsilon_{ijk}\in\mathbb{R}$ 为 *Levi-Civita* 记号。请注意区分此处的卡氏积和叉乘，其使用了同一个符号。

在数学上，叉乘结构被称为一个 Lie 括号，我们后面会在 Hamilton 力学和正则变换中接触到更多类似的结构。

1.3 场和场的公式

在电磁学中，我们已经初步接触了场的概念，但是根据答疑与作业的情况，我们发现存在数量可观的同学对场的概念仍不清楚，这不是同学的问题，因为事实上直到电动力学甚至是广义相对论，我们才会对场下一个严格的定义。为了理解讲义中出现的场，我们将介绍最简单的场：$\mathbb{R}^3$ 上的矢量场和标量场。我们将在电动力学中接触到 $\mathbb{R}^4$ 上的标量、矢量和张量场，在广义相对论中接触到更复杂的底空间上更复杂的场。

在数学中，场定义为*流形上的丛的截面*。这是对的，但是我们都看不懂这样奇怪的语言。对于物理人来说，我们对场的定义是*空间中每个点指定一个数或矢量*。那么第一个问题就是：这里所谓的空间，或者说 $\mathbb{R}^3$，是什么东西？或许电磁学老师会告诉你，其就是 Euclid 空间，这是错误的。另一方面，其也不是作为线性空间的 $\mathbb{R}^3$。在电动力学或广义相对论中，我们称其为"作为流形的 $\mathbb{R}^3$"，在此我们不去深究这种说法的意义，但是需要注意的是：这个 $\mathbb{R}^3$ 没有线性结构，更没有内积结构。朱老师上课给出的定义是正确是：场是时空的函数，而时空本身没有线性结构的。当我们不考虑时间上的变化时，其就是 $\mathbb{R}^3$。为了区分，我们记这个没有线性结构的 $\mathbb{R}^3$ 记作 $M=\mathbb{R}^3$。

我们可以定义 M 上的场：

定义 1.7 M 上的标量场是一个映射：$\phi:M\to\mathbb{R},(x,y,z)\mapsto\phi(x,y,z)\in\mathbb{R}$

这意味这 M 中的任何一个点都被赋予了一个实数。这看起来像是画蛇添足（实际上差不多也是），因为这个定义和多变量函数没有任何区别。但是，这个定义是便于推广的。

定义 1.8 M 上的 n 维矢量场是一个映射：$\mathbf{v}:M\to V,(x,y,z)\mapsto\mathbf{v}(x,y,z)\in V$

可以看到，事实上 $M=\mathbb{R}^3$ 上的矢量场不一定是三维的，只要在每个点指定了一个矢量，其都是场。但是，我们一般处理的情况都是 $V=\mathbb{R}^3$，此处的 $\mathbb{R}^3$ 是一个线性空间。这个现象事实上非常深刻而且并不显然，有兴趣的同学可以思考一下为何如此。

为什么我们要采取这样的定义方式呢？首先，这种定义可以自然地推广到任意阶的张量的场。其次，场的底空间 M 不是线性空间这件事在物理上有两个十分深刻的影响：第一，在经典力学中，其指向了 Lagrange 函数中位置参量和速度参量的独立性。第二，在经典场论（即电动力学和狭义相对论）中，其指向了物理过程必须是局域的，即不能存在超距作用。在此我们不对其做过多物理上的探讨，但是其有一个表现是显而易见的：正如同微积分中一点的导数只与其附近的点有关，场的微积分也只与其附近的点有关。

我们考虑 M 上的三维的矢量场。依定义，我们在每一个点 (x,y,z) 均指定了一个 V 中的矢量 $\mathbf{v}(x,y,z)$。当我们取定了 V 中的一组基 $\{\mathbf{a}^i\}$ 时，我们对场 $\mathbf{v}$ 逐点地展开为 $\mathbf{v}(x,y,z)=v_i(x,y,z)\mathbf{a}^i$，其中每一个分量 $v_i(x,y,z)$ 是一个标量场。因此，我们说矢量场的分量是标量场，就是在取定了基的情况下逐点定义的。为什么我们要用 Kronecker 符号和 Levi-Civita 符号来写矢量和矢量场？正是因为矢量是不好处理的，但标量是好处理的，因此相较于直接处理矢量，我们更倾向于处理作为标量场的其分量。

2 作业题目

前期的作业比较简单，同学们得分普遍较高。但是，仍然存在一些较为普遍的错误，我们将选取其中一些进行讲解。由于朱老师的要求，发给同学们的讲义中的此块内容将会被注释掉，有需要的同学请前往习题课听课。

3 补充内容

此节为补充内容，不在考试范围内，同学们可按需了解。此处补充的内容可能会对这些以后的课程有帮助：电动力学、量子力学、广义相对论与宇宙学和近代数学物理方法等。

3.1 张量代数: second encounter

在此节中，我们将重新认识张量（tensor）这一重要而无处不在的数学对象。我们将尝试回答几个问题：为什么我们需要张量？什么是张量？什么是协变和逆变？

3.1.1 why tensor?

正如老师第一节课中所说，张量在物理学和数学中无处不在。我们说，这是因为线性性在数学和物理中无处不在。张量的普遍性，正是因为其“保持了线性结构”。我们在前面花了那么大的力气理解线性空间和线性映射，正是因为在此我们将使用其来引出张量的概念。

回忆我们在前面谈到的线性变换 T 的定义：

$$T:V\to V,\mathbf{a}\mapsto T(\mathbf{a})$$

其“线性性”是指：

$$\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in V,\lambda,\mu\in\mathbb{R},T(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$$

只需将映射的定义域和值域改为为不同的两个线性空间，我们就得到了线性映射的定义：

定义 3.1 从线性空间 X 到线性空间 Z 的线性映射是一个映射：

$$T:X\to Z,\mathbf{a}\mapsto T(\mathbf{a})$$

满足线性性:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, T(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$$

这个定义是非常自然的。因此，线性函数和线性变换都可以视作线性映射的特例。

在此，我们请同学们先停一下，思考一个问题：数学是什么？我们给出一个在数学系比较普遍被认同的定义：*数学即研究一些带结构的对象，及对象间保持结构的映射的一门学问*。举例来说，数学分析的对象是实数 $\mathbb{R}$，结构是拓扑结构或可微结构（拓扑带来了连续性的定义，而可微带来了导数），而对象间的映射是连续函数或光滑函数。那么线性代数呢？线性代数的老师可能告诉过你，线性代数研究的是线性空间间的线性映射，此时对象是线性空间（即带有线性结构的集合），保持结构的映射是线性映射。因此，我们总是希望处理有线性结构的对象和线性映射。那么这是自然成立的吗？我们将会看到，很可惜不是。

考虑 X, Y 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，其卡氏积空间 $X \times Y(i.e. \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y, pair(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y)$ 上的映射 $f : X \times Y \to Z$ 被称为双线性的，若 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y} \in Y, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \mu f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$$

$$f(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}_1 + \mu\mathbf{y}_2) = \lambda f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \mu f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$$

那么，这个双线性映射是一个线性映射吗？很遗憾，不是的，因为对于 $X \times Y$ 上可能的线性结构:

$$\lambda \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y})$$

$$f(\lambda \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y})) \neq \lambda f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

直观上，这来自于如上这种给卡氏积空间构造线性结构的方式没有什么道理：虽然我们在 $\mathbb{R}^n$ 中就是这么做的，但这并不总是有效。我们想要线性映射，这给了我们定义张量的动机。由于此处出现的矢量过多，我们使用一般的字体而非黑体表示矢量，请同学们注意区分。

3.1.2 what is a tensor?

定义 3.2 *线性空间 X 和 Y 的张量积是一个线性空间 $X \otimes Y$ 和一个双线性映射 $t : X \times Y \to X \otimes Y$，使得任意线性空间 Z 和任意从 $X \times Y$ 到 Z 的双线性映射 $f : X \times Y$，存在唯一一个线性映射 $f' : X \otimes Y \to Z$ 使得 f 可以写为映射的复合:*

$$f = f' \circ t$$

$X \otimes Y$ 被称为 X 和 Y 的张量积空间，$X \otimes Y$ 中的元素被称为张量。对于 $x \in X, y \in Y$，其张量积 $x \otimes y$ 是 $X \otimes Y$ 中的元素。

这个定义看起来非常抽象，但是我们可以品味一下其中的意义：我们想要线性映射，但是卡氏积空间并不总能给我们好的线性映射，因此我们就直接定义一个新的空间，使得对于任何一个我们想要的映射，其上都有一个线性的版本。因此，其符合我们“想要线性映射”的要求。

尽管如此，这个定义可能还是比较抽象。为了体会其意义，最好的办法是举一些例子。我们将重新考虑前面提到的线性变换的例子，为此，我们需要介绍对偶空间的概念。和前面一样，我们仍然记 V 为一个线性空间而 n 为其维数。

定义 3.3 线性空间 V 的对偶空间 V^* 是其上所有线性函数构成的线性空间。

线性函数 $v \in V^*$ 是指：

$$v : V \to \mathbb{R}, \forall u_1, u_2 \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda v(u_1) + \mu v(u_2)$$

如何理解 V 上所有线性函数的集合构成一个线性空间？可以检验，$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in V^*$，$\alpha v_1 + \beta v_2$ 也是一个线性函数。而且，这个线性空间的维数和 V 相同：因为对于任何一个线性函数 $v \in V^*$，我们可以取定一组 V 中的基 $\{e_i\}$，从而通过指定 $v(e_i)$ 的值来确定 V 中任意元素的值。根据这个思路，我们可以取 V^* 中的一组基 $\{e^{*i}\}$，使得原空间基的函数值为：

$$e^{*i}(e_j) = \delta^i{}_j$$

则任意 $v \in V^*$ 可以分解为：

$$v = v_i e^{*i}$$

这样一组 V^* 中的基 $\{e^{*i}\}$ 被称为 V 中基 $\{e_i\}$ 的对偶基。对于任意的线性空间 V，我们称其中的基 $\{e_i\}$ 为一组逆变基矢量，而其对偶空间的对偶基 $\{e^{*i}\}$ 为一组协变基矢量。这个名字是因为当我们考虑在矢量在基的展开下的坐标分量在线性变化下的变换规则时，协变矢量的变换规则与线性代数中的定义一致，而逆变差一个矩阵的逆。另一方面，我们也可以基于此理解线性空间对偶空间的对偶空间是线性空间本身。

在有了对偶空间的概念后，我们可以给出前面所说的张量积空间描述性定义的一个构造。我们可以由其直接给出一个构造：$X^* \times Y^*$ 上的所有双线性函数 $f : X^* \times Y^* \to \mathbb{R}$ 是一个张量积空间 $X \otimes Y$。注意“是一个”意味着其不是唯一的一个，事实上满足如上定义空间很多，但是其彼此同构。

现在，我们可以考虑前面说的“$(1,1)-$ 型 2 阶张量是线性变换”的概念。我们现在有张量积空间 $V \otimes V$，$V \otimes V^*$ 和 $V^* \otimes V^*$，其分别被称为 $(2,0)$，$(1,1)$ 和 $(0,2)-$ 型张量。我们可以直接将其推广到 $(k,l)-$ 型张量，并直接给出一个 $(k,l)-$ 型张量的构造：

命题 3.4 所有 $(k+l)$-多线性函数

$$f : \underbrace{V^* \times V^* \times ... \times V^*}_{k} \times \underbrace{V \times V \times ... \times V}_{l} \to \mathbb{R}$$

构成张量积空间 $\underbrace{V \otimes V \otimes ... \otimes V}_{k} \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes ... \otimes V^*}_{l}$ 的一个构造。

$(k,l)-$ 型张量被称为 $(k+l)$ 阶张量。

我们将看到，所有线性变换 $T : V \to V$ 构成张量积空间 $V \otimes V^*$，或者说其和双线性映射 $f : V^* \times V \to \mathbb{R}$ 构成的空间是一样的。

考虑线性变换对于 $x = x^i e_i$

$$T(x) = x^i e'_i$$

将其按原基展开：

$$T(x) = x^i e'_i = x'^i e_i$$

则可以看到，按被动观点理解的线性变换即对于每个 V 中的矢量（等价于考虑基矢量），我们有一个线性函数。同时，我们可以考虑关于基的展开：可以验证，$e_i \otimes e^{*j}$ 构成 $V \otimes V^*$ 的一组基，则 T 按这组基展开为：

$$T = T^i{}_j e_i \otimes e^{*j}$$

其对于任意一个矢量 $x = x^k e_k$ 的作用为：

$$T(x) = T^i{}_j e_i \otimes e^{*j}(x^k e_k) = x^k T^i{}_j e_i \otimes e^{*j}(e_k) = x^k T^i{}_j e_i \delta^j{}_k = T^i{}_j x^j e_i$$

可以发现，按照这样定义的线性变化的系数正好就是矩阵乘法，这与前面的计算是相吻合的。至此，我们真正理解了“二阶张量是矩阵”的第一个解释：线性变换。$(T^i{}_j)$ 构成了张量的一个表示。有同学问张量指标与矩阵元素之间得到对应关系，那我们现在也可以看到了：这事实上取决于向量的表示的写法，张量表示是由向量的写法唯一确定的。

紧接着，我们可以考虑第二种常见的二阶张量：$(0,2)-$ 型张量的一个特例：内积张量。由我们前面的定义，$(0,2)-$ 型张量 $g \in V^* \otimes V^*$ 可以理解一个双线性函数 $g : V \times V \to \mathbb{R}$。特别地，内积 g 也是一个双线性函数，其用张量的语言可以理解为：

$$g = g_{ij} e^{*i} e^{*j}$$

对于 $x = x^k e_k$，$y = y^l e_l$，其作用为：

$$g(x,y) = g_{ij} e^{*i} \otimes e^{*j}(x^k e_k, y^l e_l) = g_{ij} x^k y^l e^{*i}(e_k) e^{*j}(e_l) = g_{ij} x^i y^j$$

因此，内积（有时被称为度规）也是一个 2 阶张量，其是一个 $(0,2)-$ 型的 2 阶张量。

不仅如此，对于 $g : V \times V \to \mathbb{R}$，我们既可以将其看作输入两个 V 中元素输出一个数的映射，也可以只向其输入一个 V 中元素 v，得到一个 $g(v,\cdot)$ 的映射，这个映射是在 V^* 中的。因此，g 也可以理解为 $g : V \to V^*$ 的一个映射，这个映射是一个线性映射（由内积的性质），同时也是双射。用分量的形式理解：

$$g(x,\cdot) = g_{ij} e^{*i} \otimes e^{*j}(x^k e_k, \cdot) = g_{ij} x^k e^{*i}(e_k) e^{*j} = g_{ij} x^i e^{*j}$$

是一个 V^* 中的元素。因此，对于任意一个 V 中的元素 x，存在唯一一个与其对偶的 V^* 中的元素 $x' \in V^*$ 与之对应，$x' = x'_j e^{*j} = g_{ij} x^i e^{*j}$，因此：

$$x'_j = g_{ij} x^j$$

这就是老师说的“降指标”操作：通过度规将 V 中元素映为 V^* 中的元素，在坐标分量下

体现为上指标降为了下指标。同样的，一个内积的逆是一个 $(2,0)-$ 型的张量：

$$g^{-1}: V^* \times V^* \to \mathbb{R}$$

其是对偶空间 V^* 上的一个内积，坐标分量为：

$$g^{-1}(\cdot,\cdot) = (g^{-1})^{ij} e_i e_j$$

其中 $(g^{-1})^{ij}$ 和 g_{ij} 互为逆矩阵：

$$(g^{-1})^{ij} g_{jk} = \delta^i{}_k$$

由于符号过于混乱，我们使用 g 替代 g^{-1}，用指标的上下来区分张量及其逆。类似地，我们有时也称与 $a \in V$ 对偶的矢量 a' 同样为 a，但请注意它们事实上不是同一个矢量，而是通过内积（度规）进行了一一对应的认同，这种行为在数学中被称为同构认同。

与前面类似地，度规的逆可以被理解为一个 V^* 到 V 的映射，且这个映射刚好就是度规作为一个映射的逆映射，我们可以使用其对对偶空间中的矢量进行升指标。

由于内积（或度规）的多样性，我们有各种各样的 g，而老师所说的 "Descartes 张量"，事实上取了 V 为三维 Euclid 空间 $\mathbb{E}$ 和其上的标准内积。此时，

$$(g_{ij}) = \mathbb{I}_{3\times 3} = (\delta_{ij})$$

此时我们考虑指标升降：

$$x'_j = \delta_{ij} x^j = x^j$$

因此一个矢量在逆变基矢量下的分量和其对应的对偶矢量的协变基矢量的分量相等，朱老师的记号是记 $x' = x$（同构认同），因此可以得到不区分上下标的结果。这种记法是否合适，请同学们自行斟酌，但值得指出的是，在量子场论的大部分著作中（因为量子场论只能在平直时空考虑），其不区分上下指标；而在广义相对论、偏数学的经典力学著作乃至微分几何的教材中涉及度规并非单位变换的地方，区分指标显然是更有利的。

3.2 经典物理与几何初步

事实上，要真正理解经典力学，流形的概念是必不可少的。为什么呢？

提纲挈领地说，理论力学最后到底讲了什么？简单说，对于一个有 n 个质点的系统，其位形空间是一个高维 $\mathbb{R}^{3n}$ 空间的嵌入子流形 M，其维数为 m，而约束个数即 $3n-m$。我们要学的东西本质上就是这个子流形丛上的场方程，其在物理中被称为运动方程：对于 Lagrange 力学，是 M 切丛 TM 上的场方程，也就是 Lagrange 方程；对于 Hamilton 力学，是 M 余切丛 T^*M 上的场方程，也就是 Hamilton 方程。联系二者的，是 Legendre 变换（就是数分 B2 中的那个 Legendre 变换）。而由于理论力学是一个可以被写在流形上的物理理论，其也被称为是一个几何的理论。

如果以上内容你已经全部了解了，那么恭喜你，你可以说自己已经完全掌握理论力学这门

课了（当然这是个充分条件）。当然，我也不敢说上面的这些我都熟练掌握了，但是到了学期末，你至少对于其中的每个部分，都应当大概知道它是在说啥。但是，对理论力学的学习绝不仅限于这门 4 学分的课（虽然朱老师讲的内容像是 10 学分的），张量代数、流形、变分这些语言是现代物理学的基石，下到 Newton 定律，上到广义相对论和弦论，我们都可以将其用最小作用量原理和变分法表示出来。正因如此，我们说理论力学不只是小球轻杆陀螺，它是现代物理的语言。

请同学们加油!

参考文献

[1] 朱界杰. 理论力学讲义.

[2] J. E. Marsden, T. S. Ratiu. 力学与对称性导论.

[3] 知乎-埃格先生, 微分流形与分析力学初步.

[4] 梁灿彬, 周彬, 微分几何入门与广义相对论, 2nd, Ed. 北京: 科学出版社, 2006.

[5] 李炯生, 查建国, 王新茂, 线性代数（第 2 版）.