构造主义是一种人道主义

shenzhu

2024.12.28

1 引言

或许你听过一个数学笑话：

von Neumann 死后上了天堂，上帝说因为你实在是个伟大的人，我允许你问一个问题。*von Neumann* 问：*Riemann Hypothesis* 是对的吗？上帝低下了头，貌似在思考。数秒之后说到：对啊，是正确的。*von Neumann* 激动地继续问：太好了！怎么证明的呢？上帝面露疑惑：证明？什么意思？我能看见所有的零点啊。

事实上，与这个笑话有关的思考比其表面上看上去的要多得多。我知道“解释笑话”是世界上最可怕与无趣的事情之一，因为任何被解释了的笑话都失去了其最核心的魅力。尽管如此，我尝试使用一些文字来解释我对这个笑话、以及对其他一些与之有关的观点的看法，涉及到的人包括一些数学家，如 L. E. J. Brouwer，就是 Brouwer 不动点定理的那个人；可能还会有一些哲学家，比如 Jean-Paul Sartre。总之，我想谈一谈构造主义数学（Constructivism，有时也被翻译为构成主义），或许还可以聊聊有关的物理与哲学。在人工智能如此热门的今天，我认为或许这会是一点有趣想法。

现在我在这里插入一段话：这篇文章最初的动机来自火老师上课时的一小段介绍，本来的计划是介绍基本的集合论与构造主义数学，但是写到一半我发现了两件事：第一，我跑题了。第二，我对一些问题的思考是错误的，我需要重新开始。但是后来，我发现这篇文章开始的时间刚好是我二十岁前的最后一个月，而且其内容也很适合作为一个过去一年我一些思考的总结。有人说，一个数学家如果在二十岁之前还没有成名，那么他大概率一事无成。我认为我在数学造诣、决斗水平甚至抽象程度上都比不过 Galois 先生，不过我只要努力再多活六个月，就可以在寿命上超过他了，这实在是令人欣慰。

2 什么是构造主义？

或许你听说过构造主义，比如在火老师的拓扑课上。在黄金的 20 世纪，数学哲学（或者说一切形而上的东西）重新闯入人们的视野，对其的思考重新变得热门，一直到今天并深刻影响了现代数学（甚至是定义了现代数学）。比如，只要你是数学系的学生，一定听过 Bourbaki 的大名，与那句著名的“数学即研究带结构的对象，与对象间保持结构的态射”。而在其中，构造主义似乎是一股小众的反叛思潮，似乎也不是那么重要。

那么，什么是构造主义呢？如果用一句话总结，那构造主义的核心思想就是：“*存在等于可以被构造*。”什么意思？和一切数学课一样，我们从一个例子开始。考虑一个著名的的命题：

命题 2.1 *素数有无穷多个。*

据传，这个“命题”最初是由 Euclid 证明的，而其证明也很精妙：

证明. 我们采用反证法。假设只有有限个素数，将其标记为：

$$\{p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}, n \in \mathbb{N}$$

但是注意到 $p_1p_2...p_n + 1$ 也是一个素数，故矛盾。 ∎

这个证明看上取天衣无缝，但是我们将其与如下的另一个稍显复杂的证明做一下对比：

证明. 取任意素数构成一个集合 $P_n := \{p_1, p_2, ..., p_n\}$。考虑如下的集合：

$$P_{n+1} := P_n \cup \{p_1p_2...p_n + 1\}$$

由类似的论证，P_{n+1} 也是一个由素数构成的集合，且 P_n 真包含于 P_{n+1}，故任意有限集合，存在一个从其到素数集的单射，从而素数集是无穷集。 ∎

这两个证明看起来核心思想别无二致，甚至第一个更简洁与漂亮一点。但是，其涉及到了一个重要的数学思想：反证法。我们无意像“数学思维培训”一样讨论“反证法的重要意义”，相反，我们想说的是，反证法真的有那么重要吗？我们已经看到了，有些命题是不“真的”依赖反证法的，如上面的命题使用构造的手段依然可以证明。那么我们是否真的需要反证法呢？

首先，反证法形式语言的严格表述是什么？其实，就是著名的排中律：

定义 2.2 (*排中律*)

一个形式逻辑体系被称为是满足排中律的，若其中的任意命题 A *满足* $A \vee \neg A$ *成立。*

即，一个命题与其否命题总有一个是成立的。对于一个满足排中律的逻辑体系，我们希望证明命题 A 为真，则只需要证明其否命题为假。如果排中律不成立，那么反证法的逻辑也不成立。此时，当我们要证明一个命题 A，比如 A 为“存在一个事物 a”，我们必须构造出一个 a。基于此，Brouwer 提出了构造主义数学：存在即是可被构造。

那么，代价是什么呢？对于一些并不复杂的命题，如上面讨论的素数无穷，是否承认排中律并不重要（至少在有无穷公理的集合体系的语境下）。所以 Bourwer 为什么要费尽心机地构造一套不需要排中律的逻辑体系呢？简单地说，就是在集合论的基本形式逻辑中，我们无法简单地引入排中律作为一条基本公理；排中律是作为一个推论存在的，而其对应的基本公理……就是著名的选择公理。我们将在后面讨论有关选择公理的事情，但是简单地讲，就是选择公理很好，很多重要的结果，不论是分析上的或是代数上的，都依赖于对选择公理的承认；但是选择公理也很坏，其会导出很多我们不想承认的结果。

我们可以简要地讨论其在另一些领域的问题：计算机。根据计算机的定义，任何 Turing 机在有限时间内只能进行有限的操作。数学家 Per Martin-Löf 证明了任何 Turing 机等价于一个直觉主义形式框架。

由于笔者是物理系而非计算机系的学生，在此只是指出以上计算机问题的存在性；事实上，任何计算科学的教材一般都会讨论如上问题，但是计算机系的同学似乎并不是很关心理论计算机科学，对此笔者感到疑惑。但是，我们还是来看看我更熟悉的领域吧。

3 存在与虚无

我想将讨论的核心问题是：在数学、在物理或是在一切地方，我们要如何看待存在？我们是否可以、应当如何去问“为什么”？

我们所有的叙述，不管是物理学、数学或是其他的任何哲学中，全部建立在一定的形式框架中，而我们的叙述等价于“某一个命题为真”。我们假定这个命题是良定的，从而开始我们的论述。在自然语言中，我们习惯于因果叙述，即“之所以什么，是因为什么”、“因为什么，所以什么”，我们称该行为为论证。自然语言不是良定的，其目的可以被简化为传递信息；因此在接受信息得以被传递的情况下，我们不讨论语言学的效果，讨论哲学层面的因果。正因如此，虽然我的观点是“因果是不存在的”，但仍然在本文中大量使用因果叙事，因为这是用自然语言而非写就的；类似的情况也曾出现在《纯粹理性批判》中。

我想首先指出在数学中，是不存在因果的。我们考虑一个最简单的数学体系，如果我们要求其满足排中律，那么对于任何命题，其要么真、要么假。如果我们要求任何命题不同时为真且为假，则此时所有真命题等价，所有伪命题等价。当我们要证明某命题 A 为真，我们只需要证明由真命题 B 可以推出 A，即证明了 A 为真；即，数学证明是用有限的语言写出一个逻辑链条。请注意我们不是说“因为 B 所以 A”，而是“B 蕴含 A”；再次强调，数学是没有因果的。对于更复杂的数学体系，有时我们承认不可以被有限逻辑链条表述的证明，此时我们承认归纳法。比如 ZF 公理体系承认无穷公理，进而存在满足 Dedekind-Peano 结构的自然数。

所以，所谓数学证明，即是通过有限的逻辑语言联系两个命题。知乎有个问题“为什么大学数学中少见‘因为’‘所以’记号?”，我认为正是由于我们在形式语言中需要避免对因果的叙述：逻辑是不依赖因果的。否则，我们可以说“因为‘1+1=2’是真的，所以 Fermat 大定理是真的”；也可以说“因为‘1+1=3’是假的，所以 Hilbert 第十问题是假的”。如果因果意味着可推出，这二者在逻辑上都构成因果，但并不是数学证明。

我们想问的第一个问题是：形式逻辑是存在之物吗？现代数学认为只要我们选择一个足够弱的逻辑框架，就不需要去考虑其存在性。可以参照 Gödel 完备与不完备定理有关的讨论，在此我们不予展开（事实上此处我写了大段对其的讨论，但是由于我发现其可读性堪比 Kierkegaard 的哲学著作，我决定将其全部删去。或许我们会在集合论的笔记中重新展现它们）。

什么叫逻辑是否存在？想象一个全知全能的上帝，其可以判断任何命题的真伪。那么，是否存在这样的上帝呢？请注意这是哲学讨论而非政治辩论，我们无意如此。如果存在这样的上帝，那么意味着我们选取的逻辑体系过弱，我们不应当将排中律纳入基本的逻辑条件。回忆开头的笑话：上帝说其能看见所有的零点，而不是从逻辑上推导出所有零点。这就是构造主义的核心思想：存在即是可被构造。在解决逻辑是否存在之前，我们当且仅当一个事物存在时说其存在，这是构造主义的核心思想。

一个事物存在当且仅当其可被构造，这似乎是一个再正常不过的判断，那么问题出在哪呢？

或许大部分接受过高等数学教育的人都知道，大学数学的一个、可能也是唯一一个与初等数学的区别就是：我们接受无穷的存在，并尝试处理无穷。而这一切，等价于自然数的存在，而自然数是无穷多。自然数的无穷贯穿现代数学的全部，从 $\epsilon-\delta$ 语言，到选择公理，再到 Gödel 不完备定理（足够大即指包括自然数），人们一次又一次看到无穷，就像直面房间中的大象。

我们将在后面的章节中讨论为什么无穷如此重要，但此处我们指出，我们与上帝的唯一区别就是我们只能看见有限，但我们相信存在无穷。

我们重新看最初的问题：什么是存在？我们可以问很多问题，这个世界存不存在？上帝存不存在？描述这个世界的规律存不存在？观测这个世界的观测者存不存在？我存不存在？这看上去像一些哲学问题，但这其实是物理问题。为什么？因为这其实等于在问第二个问题：我们应当如何问为什么？或者说，我们如何解构这个世界？

从古希腊开始，或许是从人类第一次仰望星空开始，无数先贤开始探究那个曾经被认为是人类终极问题的命题：世界的本质是什么？一般哲学书或哲学史从此开始便会列举人类历史上出现的各种闪耀的光辉思想、先贤们对这个问题的探讨；我们不会这样做，那是科学史的工作，比如 Thomas S. Kuhn 著名的《科学革命的结构》便是其中的佼佼者。我们接下来的论述，或许不能被称为论述而是“给出很多论断”，将会是极其武断并缺乏论据的，但我不在乎，因为这正是我们的核心观点：这个世界是无法被公理化的，人的灵魂也是。存在先于本质，而一切使用数学语言的物理都只是描述，是现象学分析，而与世界的本质毫无关系。

从 Newton 开始，人类花了百余年发明了一套使用数学工具描述世界的手段，直到 Hilbert 在 23 问题中，问出了那个人类最终希望做到的事：公理化物理，也就是公理化这个世界，当时的物理学家们意气风发。可是，人们失败了，人们一次又一次地失败了，人们发现解构似乎是永无止境的，本质和公理似乎越来越远。量子场论取得了前所未有的成功，但是渐渐地，人们走不下去了，人们发现自己回到了“本轮-均轮”的循环。人们开始迷茫：物理学不存在了？最后，P. W. Anderson 写出了 *More is Different*，人类走入了唯象物理学的时代。

公元二世纪，古希腊知乎本轮均轮如此繁琐的根源是什么？雅典学堂 *candidate* 们锐评：

-托勒密模型本身很简单，只不过应用到实际情况要破缺掉很多对称性罢了 -我们只研究 *N=4 super* 均轮，它的性质足够好，还是可积的，它的数学价值很大。

-没有人真正理解托勒密模型，但是我们发现计算结果不依赖于本轮 *renormalization scheme*，这足够让我们相信它，只不过我们数学还没有发展到严格描述托勒密模型而已。

-托勒密模型是一个非常精确的模型，百年的天文观测数据和它吻合到小数点后 *xx* 位，这难道不够令人叹为观止吗，目前工作的前沿是 *next to next to next leading* 本轮，目前两重本轮计算和实验还是全部吻合吻合在 3σ 以内。

-我们学习的泥板都不够好，只告诉我们怎么算更多轮子，显得好像托勒密模型就是算轮子，但是它背后的数学是非常精妙的，不理解轮子丛上同调的人就没有真正理解托勒密。

-还是大卫默尔敏修斯那句话 *shut up and calculate more epicycles*。

-你说的是托勒密 *gauge* 还是喜帕恰斯 *gauge*？

-题主显然是外行，还停留在读泥板上轮子图的阶段，给你展示一下我们开发的 *FeynCalc*，哦不，*Antikythera* 机，可惜现在的铁都被拿去造炉炼丹或者打仗了，不然我们早就算到下一个本轮 *level* 了。

-费恩曼修斯有个梗，其实所有本轮都是一个轮。

-现实世界自由度这么多，却都能总结成 xx 个轮子画在一张泥板上，多厉害啊

我们来做一些解释。我再次强调，我不是要“证明”我的观点，我只是在更详细地诠释我的观点，因为既然存在先于本质，我们无法通过“证明”一些观点来使得另一个自由的灵魂屈服而不得不相信它，任何观点都是暴论，而灵魂得以从中自由地选择。只有形式逻辑可以被证明，这正是我们要谈的事情。

我们来看一个简单的例子：一个苹果掉在了地上。一个极朴素但仍然可以被接受为科学的看法是，“因为据我们观察，所有地面上类似苹果的物体都会落向地面而非飞向天空”。接着问“为什么?”，那么作为接受过义务教育的现代人，即使是小学生，可能也会（也许是从科普中知道）说“因为存在重力”。从这里开始，我们有了数学的描述：

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

接着我们继续问，那为什么有重力呢？中学物理告诉我们，均匀的重力场是万有引力在小尺度范围内的一阶近似：

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$$

所以，这就是这个苹果的本质吗？注意到我们观测到的全部事实是一个苹果加速下落，这里面没有力被观测到。换句话说，所谓“力”，是一种数学的描述，而其不是必须的，我们有数学上等价的东西来代替它，而可能更能满足我们关于基本假设美学的追求。换句话说，在力学里，可观测量是位置和时间，而非力。如果你进入大学并选择了理工类专业，分析力学中的 Lagrange 方程将是你会学到的：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, L(t, q, \dot{q}) = T - V$$

而如果你（不幸）选择了物理专业，那么你将学到更加物理（或是数学）的分析力学，我们喜欢将其称为经典力学或理论力学，那时我们将可以借助作用量和变分法回答 Lagrange 方程为什么是这样的，也就是我们称之为最小作用量原理的东西：

$$\delta S = 0$$

此时，你会发现你可以说你学到的物理已经超过世界上大部分的人了，而且不夸张地说是绝大部分。你会发现你得到的东西需要用越来越多的数学来描述，但是其形式越来越简洁。但是不必骄傲，因为你事实上还是无法回答最初的那个“为什么苹果下落”，因为我仍然可以不满足于此：为什么最小作用量原理是对的呢？或者，我们可以问，Lagrange 量中两项的质量似乎发挥了不同的作用，一项作为运动的载体，一项受到引力，它们为什么可以被加到一起呢？又或者你还可以问，Lagrange 力学是建立在位形空间的流形上的，它似乎没有很好地声明底流形的性质，那么我们建立的这些数学结构是否都是恰当的呢？你可能需要学习广义相对论来帮助你更好地理解这些问题，相应地，你可能需要学习微分流形的语言，你改造了经典作用量并得到了 Einstein 场方程：

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}$$

停一下，让我们来看看我们目前为止都干了些什么吧。最初我们认为“因为这个世界上像苹果的东西古往今来都是落向地面的”，这是纯粹的实验结论，完全无可指摘。后来我们学习了朴素的几何学与矢量分析，我们拥有了 Newton 力学，称之为逻辑起点并由实验检验的东西叫做 Newton 三定律。而后我们有了分析力学并抛弃了力，这个过程中我们需要学习简单的微积分。进一步，当我们学习了变分法和微分几何，我们有了最小作用量原理，其甚至可以在广义相对论中描述这个现象。还有量子化，弦论，这个世界无穷无尽。退相干的弦论给出广义相对论，局域广义相对论给出狭义相对论，无穷光速狭义相对论给出 Newton 力学，一切环环相扣，这就是数学。

但是请注意，自始至终我们描述的物理事实没有变：一个苹果加速落向了地面。我想指出的是，所有以上的物理，都是在帮助我们“更好地描述我们观察到的物理现象”，其与本质无关。而数学，恰恰就是这个过程中我们使用的工具。从最初的基本假设到推导出对某现象的描述，这是物理学在做的事；做出更简洁、富有更多对称性、或是简单地说更美的假设，是我们为了自己而追求。但是，数学从不解释这个世界，数学只是描述，这是现代物理的基石。

我们唯一清楚知道的，就是当一个苹果从树上落下时，世界完成了它的计算。或许世界本来就不需要计算，就像上帝不需要数学。现代物理学家遭受了太多打击，以至于大家无法说出当初 Hilbert 那样铿锵有力的发言：

We must know. We will know.

而现在，我们只能说：

We don’t know.

我们不能描述的事情实在太多。我们只举一个最简单的例子：什么是时间？你会发现我们言尽于此。在经典力学里，我们知道时间是运动的参数，是“万物的尺度”；在相对论里，时间是 Minkowski 几何里负的那一维；量子力学里，时间是参数，不是可观测量。但是，这有意义吗？事实上，我们只能说：时间是一种现象，是你感受到的正在流逝的似水年华。当然，我们可以建立各种各样复杂的数学模型来描述时间，但是它们都无法解释为什么我们能感受到时间的流逝。对于 Zeno 的飞矢不动和 Parmenides 静止存在论，我们无法给出一个令人信服的答案。

很多物理学家总是刻意在自己的理论中回避如上看上去完全不严谨、甚至说一点都不像物理的表述的，但是我们指出，这是不对的，你必须要面对一个深刻的问题，就是如何建立起你的理论与这个真实的世界之间的关系，也就是说，你凭什么说你的理论是对这个世界的描述，而非一种单纯的数学游戏。举个简单的例子，广义相对论中有个很出名的实验叫双生子实验，现代的做法是将两个原子钟放到火箭上，沿不同的轨迹发射、然后会合，对比二者测得的时间是否相同。我们知道广相给出的结论是测地线线长最长，因此只受引力的那一个原子钟测得的时间应该是最长的。但是问题是：我们无法使用一个自洽的理论描述量子引力，原子钟是量子效应，那么我们为什么可以在一个检验引力理论的实验中使用原子钟呢？我认为合理的解释是：不管是量子力学还是广义相对论，其中定义的物理量时间都是一致的，它们是两个不同的理论对同一种现象的描述，因此或许这两个理论并不兼容，但是这两个理论都可以对同一个现象进行描述，我们可以现象学地比较这种描述的结果，而不必要求这两个理论兼容。

那么问题在哪？1960 年，Wigner 写下著名的文章 *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*；三年以后，其因在粒子物理的工作而获诺贝尔奖。在文章中，其表达了一些观点，我们引用其原文：

How do we know that, if we made a theory which focuses its attention on phenomena we disregard and disregards some of the phenomena now commanding our attention, that we could not build another theory which has little in common with the present one but which, nevertheless, explains just as many phenomena as the present theory?

... ...

The first point is that the enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and that there is no rational explanation for it. Second, it is just this uncanny usefulness of mathematical concepts that raises the question of the uniqueness of our physical theories. In order to establish the first point, that mathematics plays an unreasonably important role in physics, it will be useful to say a few words on the question, "What is mathematics?" , then, "What is physics?" , then, how mathematics enters physical theories, and last, why the success of mathematics in its role in physics appears so baffling. Much less will be said on the second point: the uniqueness of the theories of physics. A proper answer to this question would require elaborate experimental and theoretical work which has not been undertaken to date.

事实上，这是困扰无数当代物理学家的问题：物理是否必须使用数学为语言？当然，如果你将物理定义为"使用数学语言对现象进行描述"，这个问题不存在；但显然这是由于自然语言的局限。由于我是数学物理系的学生，自然，我还会问更多：不同的数学形式框架是不等价的，那么其对同一现象的描述是否是不等价的？

举个简单的例子：即使在承认 ZFC 集合论、构造了有理数域的基础上，我们依然无法唯一确定物理理论的数学形式。有理数的完备化存在不同的形式，没有任何理由说明实数 $\mathbb{R}$ 值得被我们青睐：为什么不是 p 进数？当然，这些问题肯定被人考虑过，例如在建立 p 进数上的分析后，有人已经建立了 p 进数上的量子力学框架。很多人会问（我已经被问了不下十次）：这样做的意义是什么？我想，我会忍住脱口而出的"那请问别的一切物理的意义是什么"，而是给出另一个更容易被接受的回答：如果它们不等价呢？这是一个完美的回答：只要证明了这两套理论不等价，就可以用实验检验哪个是正确的；只要证明了这两个理论等价，人们就应当思考为什么既然它们等价，我们仍然要偏袒实数？因为学习实数的人超过百分之四十吗？

在更深层次的意义上，我们甚至可以问更多：为什么有有理数？我们重复开头的观点：人类是无法观测到无穷的，任何观测都是有限观测，任何实验数据都是"有限"+"误差"，人类是看不到任何无穷的，那为什么可以假定我们的理论本身是无穷的、而所有有限只是其不同的有限的侧面？这个问题似乎与缸中之脑的思考没什么不同，但事实上并非如此：在量子领域，无限给我们带来的问题或许正在超过其方便。对于无限，我们需要重整化，而这不一定是一件好事。

正因如此，我希望重新遇见无限。并详细思考其意义。从我们第一次见面开始：自然数。

4 从一到无穷大

至少在 Euclid 以前，人们就认识到了自然数的存在，甚至应当远远早于其。由于 Euclid 没上过 lmx 助教的几何学基础习题课，他不知道什么是公理体系、什么是命题，其陈述与论证高度依赖自然语言。在此基础上，自然数是一些"东西"，被记 $0, 1, 2, \ldots$；而素数是一些特殊的自然数。

这样论述东西太累了，而且你无法确认自己说的话是否真的传递了自己的想法，因此，我们还是采用一些比较现代的语言，以使得命题良定。通过引入一些集合论公理体系，我们得以使用集合的语言。我们稍晚再谈论什么是集合，在此之前，请使用你的直觉：你认为集合该是什么样子的，那它就是了；你认为它是良定的，那它就是良定的。需要强调的是，或许有的同学学过 ZF 公理体系，但是我们这里讨论的是广义的集合，并不局限于某一种具体的公理。

那么，如何定义自然数？最初，当第一个人类仰望星空时，人类便学会了数数；而"0"的概念要到很晚才出现。对于现代人，我们可以说自然数是一个集合，记为 $\mathbb{N}$，其满足一些公理。

定义 4.1（*Dedekind-Peano* 结构）

我们称一个三元组 (A, x_0, f) 是一个 Dedekind-Peano 结构，若其满足：

1. A 是一个集合，$x_0 \in A$ 是其中的一个元素，$f : A \to A$ 是一个映射。

2. x_0 的原像为空集。

3. f 是一个单射。

4. 对于任意子集 $B \subset A$，若 $x_0 \in B$ 且 $f(B) \subset B$，则 $B = A$。

对于直觉上的自然数，我们取 x_0 为"0"，f 为"下一个"，则可以检查 $(0, \mathbb{N}, +1)$ 是一个 Dedekind-Peano 结构；在历史上，数学家们当然也是先考察了这一点才做出的定义。但是，由于公理化数学是形式科学而非现象学，此时的逻辑应该是：

公理 4.2（*Peano* 公理）

存在一个集合公理体系，使得其中存在一个集合满足 Dedekind-Peano 公理。

注意在形式逻辑中，是我们"承认" Peano 公理成立，此时存在一些这样的集合；而不是我们先验地拥有一个集合，然后令其满足某些公理。请记住这一点，这将贯穿我们的讨论。数学不是物理，物理也不是数学。

基于此，可以重新考察那个著名的法兰西笑话：

我问我六岁的儿子："2+3 等于几？"，他说："我不知道 2+3 等于几，但是我知道 2+3 等于 3+2，因为整数在加法下构成 Abel 群。"

这个小朋友显然没学过 Peano 公理，因为其必须先定义并论证 $2 + 3$ 是自然数。当我们做任何操作时，我们要么使得我们的操作在原公理下是良定的，要么引入新的公理。

我们再次强调：公理是独立的基本假设。Peano 公理是假定存在一个公理体系，而不是在考虑某一个已经公理化的集合体系。Peano 对自然数的讨论不依赖 ZF 集合体系。在 ZF 集合公理体系中，可以考虑如下的构造：

例 4.1（*von Neumann* 构造）

考虑如下的一族集合：

$$0 := \varnothing$$

$$1 := 0 \cup \{0\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

$$2 := 1 \cup \{1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

$$\dots\dots$$

则 $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$ 构成自然数的一个构造。

因此，在 ZF 公理体系中 Peano 公理并不成为一个独立的公理，而是自然数的定义。总之，在我们此时的集合体系中，自然数是存在的，我们不妨仍然将其记为 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$。作为一个集合，其上现在只有一个如前定义的自然运算 f，其被称为后继，有时会被记为：

$$0' = 1, 1' = 2, 2' = 3...$$

或是更令人愉悦的形式：

$$0 + 1 = 1, 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, ...$$

无论是 $'$ 还是 $+1$，都只是对自然映射 f 的一种记号而非有代数意义上的加法，而我们现在来定义加法。

定义 4.3（自然数的加法）

自然数的加法定义如下：

1. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 + n := n$

2. $\forall n, m \in \mathbb{N}, m' + n := (m + n)'$

该定义仅依赖集合操作，定义了一个映射：

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

类似地，乘法可以被定义为：

定义 4.4（自然数的乘法）

自然数的乘法定义如下：

1. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \cdot n := n$

2. $\forall n, m \in \mathbb{N}, m' \cdot n := m \cdot n + n$

其也给出了一个映射：

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

加法和乘法被称为代数运算，其在 Peano 公理给出的三元组上是良定的而不依赖于新的公理。像这样定义的数学对象被称为“结构”。除了代数结构，Peano 公理也给出序结构（注意序结构的定义并不一定要先定义代数结构，但这样比较方便）。

定义 4.5（自然数的序）

对于 $\forall n, m \in \mathbb{N}$，$m$ 被称为小于等于 n，若 $\exists a \in \mathbb{N}$ 使得 $n = m + a$，记作 $m \leq n$。

序结构给出了一个子集：

$$\leq \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

其否命题构成了大于的定义：

$$n > m := \neg(m \leq n)$$

基于这两个定义，小于、大于等于也是良定的。

看上去，我们已经建立了一套关于自然数的数学模型：我们用集合描述了数数这个行为，我们还可以比较数的大小，一切很符合直觉，这很好……吗？等一下，为什么我们的定义里出现了省略号 ... ... 这样的东西？我们省略了什么？如果只是省略了一些冗长但可书写的过程，即，只是省略了一些可以由一阶逻辑连接的东西，那么这样的省略是良定的且无可怀疑。请注意，1、2025、1054571817 或 2005012820050612 这些数都是有限，无穷不是“很大很大的有限”，无穷是需要被定义的。

逻辑上，我们无法推导出无穷的存在，无法想象无穷的样子，也无法观测无穷的现象。因此，如果我们要讨论无穷，必须在公理中假定无穷的存在性。引用华罗庚先生的评价：“当你学数学时，你应当先把书读厚，再把书读薄。”比如“分析研究不等号，而代数研究等号”，此时，或许你也可以感受到为何很多集合论书籍都会告诉你“集合论是无穷的艺术”。当然，我们还没有谈论什么是高阶无穷。

另一个问题是：我们希望我们的形式逻辑是纯粹理性的，一切仅依赖逻辑。一个常见的误解是：我们先验地有一些元素，把这些元素放在一起就成为集合。那么，为什么在构造自然数时不使用“数数”的方式呢？因为“我们有一些元素”不是纯逻辑的命题，而依赖于这些元素；这种东西叫类型（class），而不是集合（set）。集合论的重点就是：一切都是集合，元素不是先验地被给出的，集合才是，否则你就需要在定义集合前先定义元素。这是现代数学的 ZF 公理与 Cantor 的朴素集合论的核心区别。在记号上，这体现为我们使用小写字母表示一切集合论中的对象，而不像以往那样表示“元素”。当然，对于特定的分支，我们往往也会这样做：比如在拓扑中使用小写字母表示点，使用大写字母表示点构成的集合，使用花体字母表示集合族。

公理 4.6（*Zermelo-Fraenkel* 集合公理）

1. 外延公理：如果两个集合 x 与 y 包含一样的元素，则 $x = y$。

$$\forall x, \forall y(x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))$$

2. 内涵公理：我们可以从原集合构造更小的新集合。

$$\forall s, \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in s \vee p(x))$$

3. 无序对公理：我们可以从两个集合构造新集合。

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$$

4. 并集公理：集合可以取并。

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \exists t \in a (x \in t))$$

5. 幂集公理：集合幂集存在。

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \subset a)$$

6. 无限公理：归纳公理成立。

$$\exists s (\varnothing \in s \wedge \forall x (x \in s \to x' \in s))$$

我们要求公理是相互独立的，可以由公理推导出的命题被称为定理，比如一些常见的“公理”：

定理 4.7（空集公理）
存在空集。

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

在 ZF 公理中，这不成为公理，因为其是内涵公理的推论。但是，在一些别的集合论中，这可能是公理。同样地，在 ZF 公理中 Peano 公理也不是公理，因为无限公理可以推导出 Peano 公理。

基于此，我们可以作很多操作，定义很多代数结构，虽然这里仍然存在很多问题，比如在 ZF 中我们无法证明一个环存在极大理想，其需要选择公理。但总之，我们已经建立了一套可用、甚至是十分好用的集合理论了，我们得以描述无穷。让我们再来看一看 von Neumann 构造：$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$，其中：

$$0 := \varnothing$$

$$1 := 0 \cup \{0\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

$$2 := 1 \cup \{1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

$$... ...$$

$$n + 1 := n \cup \{n\}$$

与前面不同的是，此处的省略号省略的是有限的一阶逻辑推断，从而是良定的；然后，由归纳公理，$\mathbb{N}$ 是一个良定的无穷集。特别地，此处我们可以发现自然数的自然偏序等价于：

$$a \leq b \leftrightarrow a \subset b$$

等一等，我们构造出了无穷？我们在数学分析中不是被反复教育，无穷是一个过程，而非

一个实体吗？为此，我们需要使用 $\epsilon - \delta$ 的极限语言来描述无穷的过程。此时，自然数是无穷的一般可以表述为：

命题 4.8（自然数无穷的分析表述）

$$\forall a \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N}(a < b)$$

与之相对的，可以考虑构造主义的定义：

命题 4.9（自然数无穷的构造主义表述）
对于任何有限集 a，存在一个从 a 到 $\mathbb{N}$ 的单射。

这两者是等价的。为什么？我们需要考虑量词 $\exists$ 的含义。当我们考虑如上证明时，我们需要证明存在某物，我们总是可以通过构造出它来证明。此时，存在即是可被构造是平凡的。但是问题出在哪呢？我们可以由自然数构造整数，由整数构造有理数，有理数构成域，这些过程都是平凡的。一切有理数范围内的命题，其无限都来自自然数的无限性，换句话说，有理数是可数的。这一切很好，直到我们想要构造实数。我们发现，对于与实数有关的很多命题，我们想要证明某物存在，竟然无法构造出它。我们只能通过（by contradiction）“假设其不存在，推导出如下矛盾，因此其存在”。回忆我们最初的讨论，这意味着我们需要承认排中律，即需要在公理中加入选择定则，ZFC 登上舞台。

5 选择，或是不选择，这是一个问题

Nous sommes des enfants, mais des enfants progressifs, pleins de force et de courage.

你是否想过：为什么我们需要实数？前现代的很多观点认为数学是客观存在的，我们是对“存在之物”进行分析，因此实数是客观存在的，我们像分析一切存在的对象那样分析实数。但是，如前所述，这种思路在遇到无穷时行不通了，我们无法用直觉来定义无穷集合，必须用集合来定义集合。从自然数到有理数的扩充是有显而易见的动机的：我们希望定义闭的代数运算，即我们希望我们的运算在集合意义上是良定的。这个思路在解释自然数半群到整数加法群、整数环到有理数域的扩充时都有效，甚至可以被理解为实数域到复数域的扩张，因为复数域是代数闭的。但是，其唯独无法被用来解释有理数到实数的过程。当然，在近世代数中我们都学过，所有这些域都是代数闭的复数域 $\mathbb{C}$ 的一个子域，但这并不构成解释，因为我们在前面已经讨论过了，p 进数域这种东西时刻提醒着我们实数并不是唯一的。

我们回忆一个在初高中反复出现、但在大学被抛弃的概念：实数轴。或许老师会告诉你：实数轴是客观存在的，拿一把尺子，有理数在其中留下了很多“空隙”，那是物理数，而整把尺子就是实数。另一个著名的故事是你永远无法找到一个有理数来表示一个两条直角边都为 1 的三角形的协边长。所有这些故事都不甚合理，因为其先验地假设实数的存在性，但是其富有启发意义：或许我们不应当拘泥于代数，而是应该看看分析与几何。我们考虑实数的经典构造。

首先，我们来看看有理数的分析。

定义 5.1 我们将自然数半群记为 $\mathbb{N}$，整数环记为 $\mathbb{Z}$，有理数域记为 $\mathbb{Q}$。由 *ZF* 公理，整数和有理数不难被定义其作为集合的性质及其上的代数运算，在此我们不多赘述。

定义 5.2（点列）

考虑 X 是一个集合，其中的一个点列定义为一个映射：

$$a:\mathbb{N}_+\to X, n\mapsto a_n$$

特别地，若 X 上有一些代数结构，其被称为一个数列（也有某些人对数的定义为复数的子集，我认为这样不好），如整数列、有理数列等。

我们希望定义数列的收敛，这需要拓扑；特别地，此处我们希望定义数列的收敛，一般我们认为这是度量空间的度量拓扑……吗？很抱歉，一般意义上的度量：

定义 5.3（度量）

集合 X 上的度量是满足三条度量性质的一个映射：

$$d:X\times X\to\mathbb{R}$$

为什么这儿还有实数！这很不好。我们不能采用这样的定义。取而代之地，我们应当考虑一个特殊的"度量"：

定义 5.4（有理度量）

考虑映射：

$$d_{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},(q,p)\mapsto d_{\mathbb{Q}}(q,p):=|q-p|$$

我们想指出如下的逻辑是不对的：为什么要定义实数？因为有理数作为一个度量空间不是完备的，而实数是其完备化。这是循环定义：因为度量空间的定义中需要用的实数。如果你修过数分 B3，你会意识到：序列收敛是个拓扑概念，度量空间可以诱导拓扑，所以我们自然而然地在考虑有理数拓扑时会考虑其作为实数子集子空间度量诱导的拓扑。但是这不对，因为我们没有定义实数。因此，数分 B3 课本上此处专门强调了我们定义有理数列收敛、有理数列 Cauchy 列时不应将其视为实数的一个子集，而是当作某种由自然数构造的对象。换句话说，我们不应使用 $\forall\epsilon\in\mathbb{R}_+$ 这种东西，而是应该使用 $\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}_+$ 取而代之。换言之，我们不应使用度量拓扑，而是考虑：

定义 5.5 考虑如下的集族 $\mathcal{B}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{Q}))$：

$$\mathcal{B}:=\{B(q,a)|q\in\mathbb{Q},a\in\mathbb{Q}_+\},B(q,a):=\{p\in\mathbb{Q}|d_{\mathbb{Q}}(q,p)\leq a\}$$

可以检验，这是 $\mathbb{Q}$ 上的一个拓扑基。

由这组基生成的拓扑记为 $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$。或许你会发现：如果我们已经定义了实数，那这个拓扑和上面我们说的度量拓扑是一致的。但是，我们再次强调：在 ZF 公理体系里，我们并没有定义实数，因此此时这样的论证没有意义。

此时，我们获得了有理数 $\mathbb{Q}$ 上的一个拓扑，其是 (T2) 的。由于我们有拓扑空间点列的收敛：

定义 5.6（拓扑空间中的收敛）

考虑 $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间，$\{a_n\}$ 是其中的一个点列，其被称为收敛于 $a_0 \in X$ 若任意邻域 $U \in \mathcal{T} \cap \mathcal{N}(a_0)$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得任意 $n > N$：

$$a_n \in U$$

记为：

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a_0$$

若任意 $a \in X$ 有 $\{a_n\}$ 不收敛于 a，则称 a_n 在 X 中发散。

由于 $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{\mathbb{Q}})$ 是 (T2) 的，其中的数列极限若存在必唯一。使用定义可以证明（使用排中律是容易证明的，但事实上不需要排中律）：

命题 5.7 在拓扑空间 $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{\mathbb{Q}})$ 中，任意给定的数列 $\{q_n\}$ 与数 q_0 有：

$$\lim_{n \to \infty} q_n = q_0 \leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} (\forall m > N (|q_m - q_0| < \frac{1}{n}))$$

另外，我们可以考虑 Cauchy 列（无关实数）的定义：

定义 5.8（有理 *Cauchy* 列）

考虑一个有理数列 $\{q_n\}$，其被称为一个 *Cauchy* 列，若任意有理数 $a > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}_+$ 使得任意 $n, m > N$ 有：

$$|q_n - q_m| < a$$

Cauchy 列即“最终靠得足够近的那些数列”。为什么在分析与几何中 Cauchy 列被称为“基本列”？因为注意到判断一个数列“是否收敛”需要整个空间的信息，而判断其“是否基本”则只需要其中的元素。因此，我们称一个空间是分析完备的，当其中的所有 Cauchy 列均收敛：这意味着任意数列内部包含足够的信息使得我们判断其是否收敛。请注意这里的 Cauchy 列与完备性的定义都与度量空间不同，但是我们在构造出实数以后，可以由有理数在其中的稠密性推导出以上命题与其在度量空间（实数度量）中对应命题的等价性。

此时，我们终于有了一个扩充有理数的合理理由：有理数不完备。

例 5.1（不收敛的有理 *Cauchy* 列）

$$a_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}$$

可以证明，其是一个有理 Cauchy 列，但其在有理数域内发散。因此，我们希望定义一个集合，使得有理数可以被“等距”地嵌入其中，且在新集合中还是“稠密”的。当然，“等距”、“稠密”这些词都是度量概念，但我们可以将其使用有理数重新定义。最终，我们可以考虑：

定义 5.9（实数构造）

考虑集合：

$$\mathfrak{R} := \{\{q_n\} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} | \{q_n\} \, is\ a\ Cauchy\ sequence.\}$$

考虑其中的等价关系：

$$\{q_n\} \sim \{p_n\} \leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(q_n - p_n) = 0$$

则实数定义为：

$$\mathbb{R} := \mathfrak{R}/\sim$$

我们立刻得到一个映射：

$$\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, q \mapsto \iota(q) := [\{q_n\}], q_n \equiv q$$

可以证明这是一个双射。

我们希望实数是一个域，这只要证明其代数操作不依赖代表元即可，在此略过。特别地，域的加法零元有代表元 $\{0\}$，我们称之为实数零。我们可以定义实数的正负：

定义 5.10（实数的正负）

一个实数被称为是正的，若其中存在一个代表元 $\{q_n\}$ 使得存在 $a \in \mathbb{Q}_+$，$N \in \mathbb{N}_+$ 有：

$$n > N(q_n > a)$$

类似地，可以定义负实数。

重要的是有三歧性：

命题 5.11（实数的三歧性）

一个实数是且仅是下列三种情况之一：正的，要么是负的，要么是实数零。

此时，我们可以定义实数的正负：

定义 5.12（实数的序）

任意 $a, b \in \mathbb{Q}$，我们称 a 小于 b，若 $a - b$ 是负的；称 a 大于 b，若 $a - b$ 是正的。大于等于、小于等于由逆命题定义。

我们立刻注意到实数序和有理数兼容：

命题 5.13 任意 $q, p \in \mathbb{Q}$，其作为有理数的序和作为自然数的序等价：

$$q < p \leftrightarrow \iota(q) < \iota(p)$$

这里我必须突兀的插入一件事，其导致了开头的那段话：本来，我认为上式可以导出“实数序与有理数相容等价于选择公理”，进而开始谈论有关构造主义对该命题的处理云云，因为我之前学的集合论教材就是这样指出的。但是这里面存在一些问题，比如该命题似乎并不能推出“任意集合上都有一个良序”。为了不留下过大的错误（虽然我认为前面可能已经错漏百出），我决定搁置这个命题，等我在春节期间进行一个恶补之后再议。因此，我决定此处进行一个 Kierkegaard 式的处理：胡言乱语一堆奇怪的东西然后直接转向下一个命题。

6 非此即彼

本来，我认为讨论到这里我会有比较丰富的例子，但很可惜事与愿违。无妨，我们仍然继续之前关于存在性的讨论。至少，我认为我已经阐述了（并非证明）一件事：使用数学描述这个事情不是直觉的，是教育令我们对其习以为常。我们的核心观点是：所有的物理都是存在主义现象学分析，而不涉及世界的本质。这一切都很好，而且事实上几乎已经是当今物理学界的共识（well，实际上我们指的物理学界是高能理论、宇宙学、凝聚态等“传统物理学”人，搞数学物理的并不在其列）。举例来说，最出名的文章可能是凝聚态的 *More is Different*。

但是，最后我们还有一个小小的问题：那我们呢？我们的位置在哪里？事实上，存在主义的核心思想不是关于我们如何认识这个世界，而是人的意识的特殊位置。我们引用 在《地下室手记》的一段话：

> 世界是复杂的，并不像二二得四那样简单，因此，某些人“仅仅根据科学和理性的原则”拟定的“幸福体系”，只是空想，是实现不了的。人也是复杂的，不是单凭教育就能改造好的，因为人有个性，有自己的独立人格，每个人的行为都受自己的“自由意愿”支配，有时还有逆反心理，明知不好，对自己不利，却故意为之，以此显示自己的独立存在。

我想指出一件事：对意识的讨论是一个物理学问题。首先，我认为哲学和物理学没有本质区别，即使有，也只是数学浓度的高低。其次，即使按照“学科”的划分，对人的意识的讨论也是有物理学意义的，我曾经在《量子力学中的测量》中详细讨论了这件事。对于这篇文章，我想讲一个故事：由于我在同一个学期选修了原子物理和量子力学课程，而量子力学课程并没有大作业，所以我就将这篇文章用作了原子物理大作业。在答辩现场，我几次被某老师问到“这东西有什么意义”之类的鬼话，我想要不是因为我的文章中的大量数学公式（虽然它们显然不是文章的重点），某老师一定会把那句忍住的“你这东西真不是民科吗”问出来。在最终的颁奖大会，我不出意料地获得了最低分那档。但有趣得是：颁奖现场当天，课程组请了一位德高望重的老教师来作报告。开头的内容乏善可陈，大概就是“我们组做了什么什么实验”、“欢迎有兴趣的同学来我们组”之类的话，但最后一节，那位老教授开始讲他本人最近感兴趣的东西，题目赫然写着“量子力学中的测量”，与我的别无二致。而其内容，大概是说其在经历了几十年的科研生涯之后，逐渐认识到了测量问题应当是量子力学中的一个核心问题，并在思考这方面的一些前景。With respect，我认为其水平不会比我的那篇文章高多少，大概也就是一点点 EPR 原始文献的程度。不过，令我欣慰的是，那位质疑我的老师并没有对权力曲意逢迎，他在台下仍旧是频频摇头，不过这次的区别是没有他的打分环节了。我其实倒不是很在乎是否被别人赞同，因为我已经习惯了；但是这令我想到了我现在的指导老师王兵老师，他曾经某次在汇报后语重心长地对我说，他本科时就对一些问题感兴趣，但是思考那些问题并不能为其找到教职；现在他已经功成名就了，终于有资源来思考那些问题了，却发现自己已经老了（不是原话）。因此，他只能找一些像我这样不思进取的本科生，和他一起来思考那些被尘封了二十几年的问题了。我觉得这或许才是一种体制性的残酷，终于能理解 Andrew Wiles 在证明 Fermat 大定理后对 Riemann 猜想的评价：

> 请忘掉“黎曼猜想”。像普通人一样去学习、去研究、去拓宽视野、去发表文章、去获得高等学位、去一所好的大学找到一个理想的职位、去成家、去经营好自己的家庭、去攒足够的钱。当有一天，你不再需要通过“黎曼猜想”来验证你人生的价值时，你就有资格挑战它了。

总之，我认为对意识的思考会是当代物理学的一个核心问题。如果从偏向哲学叙事（指数学成分少）的角度看，物理学终将会对自己的存在感到恶心，就像我们感受到自身的意识一样。物理学尝试描述的是整个世界，那必然会涉及人本身，包括意识的存在，乃至人与人之间的爱情，还有很多人之间的道德。如果从偏向物理叙事（指数学成分多）的角度看，我们必须回答量子化是什么的问题。为什么经典的理论总是几何的？所有量子理论都可以看成某个经典理论的几何量子化吗？我们如何理解退相干？非微扰是怎么回事？我们如何重整无穷的无穷？很显然，我只能靠研究第二个方面的问题来养活自己（当然也可能靠研究第二个方面的问题来饿死自己），比如我的大研就是尝试用几何分析中的热核分析处理量子引力中的发散。但是我仍然相信，对这两方面的研究是对同一个客体的不同方面，因为世界就在那里。

最后，希望明年的这个时候我们还在！

在隆冬，我终于知道，我身上有一个不可战胜的夏天。