Notes on Tensor

shenzhu

2025.5.14

由于这是理论力学课程习题课讲义的一部分，因此其作为一篇单独的文章可能会有些奇怪，因此在阅读时请略去一些缺乏上下文的部分。

在此节中，我们将重新认识张量（tensor）这一重要而无处不在的数学对象。我们将尝试回答几个问题：为什么我们需要张量？什么是张量？什么是协变和逆变？

1 why tensor?

正如老师第一节课中所说，张量在物理学和数学中无处不在。我们说，这是因为线性性在数学和物理中无处不在。张量的普遍性，正是因为其"保持了线性结构"。我们在前面花了那么大的力气理解线性空间和线性映射，正是因为在此我们将使用其来引出张量的概念。

回忆我们在前面谈到的线性变换 T 的定义：

$$T : V \to V, \mathbf{a} \mapsto T(\mathbf{a})$$

其"线性性"是指：

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, T(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$$

只需将映射的定义域和值域改为为不同的两个线性空间，我们就得到了线性映射的定义：

定义 1.1 *从线性空间 X 到线性空间 Z 的线性映射是一个映射：*

$$T : X \to Z, \mathbf{a} \mapsto T(\mathbf{a})$$

满足线性性：

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, T(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$$

这个定义是非常自然的。因此，线性函数和线性变换都可以视作线性映射的特例。

在此，我们请同学们先停一下，思考一个问题：数学是什么？我们给出一个在数学系比较普遍被认同的定义：*数学即研究一些带结构的对象，及对象间保持结构的映射的一门学问。*举例来说，数学分析的对象是实数 $\mathbb{R}$，结构是拓扑结构或可微结构（拓扑带来了连续性的定义，而可微带来了导数），而对象间的映射是连续函数或光滑函数。那么线性代数呢？线性代数的

老师可能告诉过你，线性代数研究的是线性空间间的线性映射，此时对象是线性空间（即带有线性结构的集合），保持结构的映射是线性映射。因此，我们总是希望处理有线性结构的对象和线性映射。那么这是自然成立的吗？我们将会看到，很可惜不是。

考虑 X, Y 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，其卡氏积空间 $X \times Y (i.e. \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y, pair(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y)$ 上的映射 $f : X \times Y \to Z$ 被称为双线性的，若 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y} \in Y, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \mu f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$$

$$f(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}_1 + \mu \mathbf{y}_2) = \lambda f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \mu f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$$

那么，这个双线性映射是一个线性映射吗？很遗憾，不是的，因为对于 $X \times Y$ 上可能的线性结构：

$$\lambda \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y})$$

$$f(\lambda \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y})) \neq \lambda f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

直观上，这来自于如上这种给卡氏积空间构造线性结构的方式没有什么道理：虽然我们在 $\mathbb{R}^n$ 中就是这么做的，但这并不总是有效。我们想要线性映射，这给了我们定义张量的动机。由于此处出现的矢量过多，我们使用一般的字体而非黑体表示矢量，请同学们注意区分。

2 what is a tensor?

定义 2.1 线性空间 X 和 Y 的张量积是一个线性空间 $X \otimes Y$ 和一个双线性映射 $t : X \times Y \to X \otimes Y$，使得任意线性空间 Z 和任意从 $X \times Y$ 到 Z 的双线性映射 $f : X \times Y$，存在唯一一个线性映射 $f' : X \otimes Y \to Z$ 使得 f 可以写为映射的复合：

$$f = f' \circ t$$

$X \otimes Y$ 被称为 X 和 Y 的张量积空间，$X \otimes Y$ 中的元素被称为张量。对于 $x \in X, y \in Y$，其张量积 $x \otimes y$ 是 $X \otimes Y$ 中的元素。

这个定义看起来非常抽象，但是我们可以品味一下其中的意义：我们想要线性映射，但是卡氏积空间并不总能给我们好的线性映射，因此我们就直接定义一个新的空间，使得对于任何一个我们想要的映射，其上都有一个线性的版本。因此，其符合我们“想要线性映射”的要求。

尽管如此，这个定义可能还是比较抽象。为了体会其意义，最好的办法是举一些例子。我们将重新考虑前面提到的线性变换的例子，为此，我们需要介绍对偶空间的概念。和前面一样，我们仍然记 V 为一个线性空间而 n 为其维数。

定义 2.2 线性空间 V 的对偶空间 V^* 是其上所有线性函数构成的线性空间。

线性函数 $v \in V^*$ 是指：

$$v : V \to \mathbb{R}, \forall u_1, u_2 \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda v(u_1) + \mu v(u_2)$$

如何理解 V 上所有线性函数的集合构成一个线性空间？可以检验，$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},v_1,v_2\in V^*$，$\alpha v_1+\beta v_2$ 也是一个线性函数。而且，这个线性空间的维数和 V 相同：因为对于任何一个线性函数 $v\in V^*$，我们可以取定一组 V 中的基 $\{e_i\}$，从而通过指定 $v(e_i)$ 的值来确定 V 中任意元素的值。根据这个思路，我们可以取 V^* 中的一组基 $\{e^{*i}\}$，使得原空间基的函数值为：

$$e^{*i}(e_j)=\delta^i{}_j$$

则任意 $v\in V^*$ 可以分解为：

$$v=v_ie^{*i}$$

这样一组 V^* 中的基 $\{e^{*i}\}$ 被称为 V 中基 $\{e_i\}$ 的对偶基。对于任意的线性空间 V，我们称其中的基 $\{e_i\}$ 为一组逆变基矢量，而其对偶空间的对偶基 $\{e^{*i}\}$ 为一组协变基矢量。这个名字是因为当我们考虑在矢量在基的展开下的坐标分量在线性变化下的变换规则时，协变矢量的变换规则与线性代数中的定义一致，而逆变差一个矩阵的逆。另一方面，我们也可以基于此理解线性空间对偶空间的对偶空间是线性空间本身。

在有了对偶空间的概念后，我们可以给出前面所说的张量积空间描述性定义的一个构造。我们可以由其直接给出一个构造：$X^*\times Y^*$ 上的所有双线性函数 $f:X^*\times Y^*\to\mathbb{R}$ 是一个张量积空间 $X\otimes Y$。注意“是一个”意味着其不是唯一的一个，事实上满足如上定义空间很多，但是其彼此同构。

现在，我们可以考虑前面说的“$(1,1)-$ 型 2 阶张量是线性变换”的概念。我们现在有张量积空间 $V\otimes V$，$V\otimes V^*$ 和 $V^*\otimes V^*$，其分别被称为 $(2,0)$，$(1,1)$ 和 $(0,2)-$ 型张量。我们可以直接将其推广到 $(k,l)-$ 型张量，并直接给出一个 $(k,l)-$ 型张量的构造：

命题 2.3 *所有 $(k+l)$-多线性函数*

$$f:\underbrace{V^*\times V^*\times\ldots\times V^*}_{k}\times\underbrace{V\times V\times\ldots\times V}_{l}\to\mathbb{R}$$

构成张量积空间 $\underbrace{V\otimes V\otimes\ldots\otimes V}_{k}\otimes\underbrace{V^*\otimes V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{l}$ *的一个构造。*

$(k,l)-$ 型张量被称为 $(k+l)$ 阶张量。

我们将看到，所有线性变换 $T:V\to V$ 构成张量积空间 $V\otimes V^*$，或者说其和双线性映射 $f:V^*\times V\to\mathbb{R}$ 构成的空间是一样的。

考虑线性变换对于 $x=x^ie_i$

$$T(x)=x^ie_i'$$

将其按原基展开：

$$T(x)=x^ie_i'=x'^ie_i$$

则可以看到，按被动观点理解的线性变换即对于每个 V 中的矢量（等价于考虑基矢量），我们有一个线性函数。同时，我们可以考虑关于基的展开：可以验证，$e_i\otimes e^{*j}$ 构成 $V\otimes V^*$ 的一组基，则 T 按这组基展开为：

$$T=T^i{}_je_i\otimes e^{*j}$$

其对于任意一个矢量 $x = x^k e_k$ 的作用为:

$$T(x) = T^i{}_j e_i \otimes e^{*j}(x^k e_k) = x^k T^i{}_j e_i \otimes e^{*j}(e_k) = x^k T^i{}_j e_i \delta^j{}_k = T^i{}_j x^j e_i$$

可以发现，按照这样定义的线性变化的系数正好就是矩阵乘法，这与前面的计算是相吻合的。至此，我们真正理解了“二阶张量是矩阵”的第一个解释：线性变换。$(T^i{}_j)$ 构成了张量的一个表示。有同学问张量指标与矩阵元素之间得到对应关系，那我们现在也可以看到了：这事实上取决于向量的表示的写法，张量表示是由向量的写法唯一确定的。

紧接着，我们可以考虑第二种常见的二阶张量：$(0,2)-$ 型张量的一个特例：内积张量。由我们前面的定义，$(0,2)-$ 型张量 $g \in V^* \otimes V^*$ 可以理解一个双线性函数 $g : V \times V \to \mathbb{R}$。特别地，内积 g 也是一个双线性函数，其用张量的语言可以理解为:

$$g = g_{ij} e^{*i} e^{*j}$$

对于 $x = x^k e_k$，$y = y^l e_l$，其作用为:

$$g(x, y) = g_{ij} e^{*i} \otimes e^{*j}(x^k e_k, y^l e_l) = g_{ij} x^k y^l e^{*i}(e_k) e^{*j}(e_l) = g_{ij} x^i y^j$$

因此，内积（有时被称为度规）也是一个 2 阶张量，其是一个 $(0,2)-$ 型的 2 阶张量。

不仅如此，对于 $g : V \times V \to \mathbb{R}$，我们既可以将其看作输入两个 V 中元素输出一个数的映射，也可以只向其输入一个 V 中元素 v，得到一个 $g(v, \cdot)$ 的映射，这个映射是在 V^* 中的。因此，g 也可以理解为 $g : V \to V^*$ 的一个映射，这个映射是一个线性映射（由内积的性质），同时也是双射。用分量的形式理解:

$$g(x, \cdot) = g_{ij} e^{*i} \otimes e^{*j}(x^k e_k, \cdot) = g_{ij} x^k e^{*i}(e_k) e^{*j} = g_{ij} x^i e^{*j}$$

是一个 V^* 中的元素。因此，对于任意一个 V 中的元素 x，存在唯一一个与其对偶的 V^* 中的元素 $x' \in V^*$ 与之对应，$x' = x'_j e^{*j} = g_{ij} x^i e^{*j}$，因此:

$$x'_j = g_{ij} x^j$$

这就是老师说的“降指标”操作：通过度规将 V 中元素映为 V^* 中的元素，在坐标分量下体现为上指标降为了下指标。同样的，一个内积的逆是一个 $(2,0)-$ 型的张量:

$$g^{-1} : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$$

其是对偶空间 V^* 上的一个内积，坐标分量为:

$$g^{-1}(\cdot, \cdot) = (g^{-1})^{ij} e_i e_j$$

其中 $(g^{-1})^{ij}$ 和 g_{ij} 互为逆矩阵：

$$(g^{-1})^{ij}g_{jk} = \delta^i{}_k$$

由于符号过于混乱，我们使用 g 替代 g^{-1}，用指标的上下来区分张量及其逆。类似地，我们有时也称与 $a \in V$ 对偶的矢量 a' 同样为 a，但请注意它们事实上不是同一个矢量，而是通过内积（度规）进行了一一对应的认同，这种行为在数学中被称为同构认同。

与前面类似地，度规的逆可以被理解为一个 V^* 到 V 的映射，且这个映射刚好就是度规作为一个映射的逆映射，我们可以使用其对对偶空间中的矢量进行升指标。

由于内积（或度规）的多样性，我们有各种各样的 g，而老师所说的 “Descartes 张量”，事实上取了 V 为三维 Euclid 空间 $\mathbb{E}$ 和其上的标准内积。此时，

$$(g_{ij}) = \mathbb{I}_{3\times3} = (\delta_{ij})$$

此时我们考虑指标升降：

$$x'_j = \delta_{ij}x^j = x^j$$

因此一个矢量在逆变基矢量下的分量和其对应的对偶矢量的协变基矢量的分量相等，朱老师的记号是记 $x' = x$（同构认同），因此可以得到不区分上下标的结果。这种记法是否合适，请同学们自行斟酌，但值得指出的是，在量子场论的大部分著作中（因为量子场论只能在平直时空考虑），其不区分上下指标；而在广义相对论、偏数学的经典力学著作乃至微分几何的教材中涉及度规并非单位变换的地方，区分指标显然是更有利的。

3 an example: trace

作为一个例子，我们用上述张量的语言来看线性代数中矩阵的迹这个概念。本部分为本人某课程的大作业的一部分，因此为英文的，请谅解。

We consider the algebraic aspect of trace. Hitherto we regard a n by n matrix as an element in $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$, i.e. as a linear transformation:

$$A : V \to V \tag{3.1}$$

However, since there is a canonical isomorphism, one could also take:

$$A \in V \otimes V^* \tag{3.2}$$

where $V^* := \mathcal{L}(V, \mathbb{C})$ is the dual space of V. Now since trace satisfies the property of:

$$\mathrm{Tr}(\mu A + \eta B) = \mu\mathrm{Tr}(A) + \eta\mathrm{Tr}(B), \forall \mu, \eta \in \mathbb{C} \tag{3.3}$$

One could regard trace as a linear functional on $V \otimes V^*$:

$$\text{Tr} : V \otimes V^* \to \mathbb{C}, (v, u^*) \mapsto u^*(v) \tag{3.4}$$

i.e. the functional of action. That is the algebraic interpretation of trace: the action functional.

Notice that the tensor product action is associative, with which one could rewrite the matrix multiplication: a n by n matrix acts on a n-vector could be regarded as:

$$A \cdot v : \text{End}(V) \otimes V = V \otimes V^* \otimes V \to V, (A, v) \mapsto Av \tag{3.5}$$

which is:

$$A \cdot v \iff V \otimes \text{Tr}(V \otimes V^*) \tag{3.6}$$

and the multiplication of n by n matrices is as:

$$A \cdot B : \text{End}(V) \otimes \text{End}(V) = V \otimes V^* \otimes V \otimes V^* \to \text{End}(V) = V \otimes V^* \otimes V, (A, B) \mapsto AB \tag{3.7}$$

which is:

$$A \cdot B \iff V \otimes \text{Tr}(V \otimes V^*) \otimes V^* \tag{3.8}$$

In addition, one could easily prove that:

$$\text{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \tag{3.9}$$

where λ_i are the eigenvalues of A. With that one could actually show that any unitary invariants can be characterized by traces. As a example, in statistical mechanics, if given a system with Hamiltonian H (which is finite-dimensional, but could be non-trivially extended to infinite-dimensional cases), the partition function is written as:

$$Z := \sum_{i=1}^{n} e^{-\beta E_i} \tag{3.10}$$

where E_i are the eigenvalues of H. With trace that is exactly:

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}) \tag{3.11}$$

Actually that is the reason why the action of taking trace is everywhere in the path integral format of quantum field theory. Somehow taking trace is like the concept of average and expectation.