Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems 学习指南

Igor Chueshov 著
沈卓洋 编

编译日期: 2021-10-4

任何建议及错误信息请发送至邮箱

shenzhy2020@lzu.edu.cn

前　言

本书主要将Igor Chueshov所著的Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems翻译成中文，修正了部分勘误，补充了书内习题的证明。

原作前言

本书主要将Igor Chueshov所著的Dynamics of Quasi-Stable Dissipative Systems翻译成中文，修正了部分勘误，补充了书内习题的证明。

目　录

介　绍

动力系统的一般理论起源于常微分方程，其基础由H. Poincaré(1854–1912)和A.M. Lyapunov(1857–1918)奠定。G.D. Birkhoff(1884–1944)对该理论作出了重要贡献，他是“动力系统”一词的提出者，并且利用了拓扑的方法，在抽象的层次很大程度的发展了动力系统理论。动力系统的概念是一般的科学上的演化(依赖于时间)过程概念的数学化，这些过程可以是相当不同的自然现象。动力系统自然地诞生于对物理、化学、生物、生态、经济，甚至社会现象的研究。动力系统的概念包括一个可能的状态的集合(相空间)，以及状态关于时间的演化法则。因此，“动力系统”这一概念覆盖了相当多模型的种类，只要这些模型也许能描述任意对象关于时间的演化和依赖于时间的过程。例如，这些对象和过程包括由在连续介质力学和数学物理中产生的非线性演化偏微分方程生成的模型。这些模型需要无穷维空间用以表示各种可能的状态。在本书中，我们专注于(无穷维)系统，这些系统展示了各种类型的能量迁移和耗散。似乎(见，例如[10],[21],[26]中的讨论)这些作用在[15]的文章中被严格定义，该文章以现代(数学)的形式介绍了(动力学的)耗散性的概念；也可见[3],[9],[20],[19]。耗散性意味着动力学行为在相空间中被局部化。这可以被表达为关于有界吸收集存在性的陈述。在具有有限自由度的系统的情形中，这种局部化允许我们选择限制性对象，例如吸引子，它含有关于系统稳定性的重要信息。无穷维系统的情况会变得非常不同。为了挑选出相应的限制机制，我们需要额外的演化的紧致性条件。这使得无穷维的理论变得更加复杂。尽管如此，到目前为止，集中关注不同类型的PDE模型，无穷维动力系统理论的几个重要的方面已经得到了发展(见，例如这些专著[2],[16],[4],[7],[6],[10],[13],[23],[24],[26]，以及这些研究[1],[17],[21])。

本书聚焦于无穷维耗散动力系统。为了将理论的一般化达到合理的程度，我们的考虑是相对抽象的，并且协调了各种在抽象空间上定义的一般的演化方程。我们的目标是介绍与基本的动力系统长时间行为有关性质的一般方法和抽象结果。我们的主要工具是基于耗散系统相关的拟稳定性质。粗略的讲，拟稳定性意味着我们可以通过将两条轨道的差异分解为收敛部分和紧致部分来控制轨道的发散。

本书的主要特点(相较其他书籍)有以下几个方面：

- 我们展示、发展和阐述了一种基于相对较新的观察的动力系统紧性的方法，它在[12]被提出(亦可见[6]和[7])，并且已经被证明在临界非线性问题的研究中非

常有效。这种方法在势能的辅助下，作为二阶演化方程的补偿紧性方法出现，并且已经被应用到许多其他情形中。事实上，这种方法展示了一种拟稳定性的弱形式。

- 为了研究关于有限维吸引子和它的光滑性的问题，我们促成和发展了一种关于一些二阶演化方程拟稳定性的全新方法，它最初在[5]中被介绍(亦可见[6]和[7]以及最近的研究[8])。这种方法的主要优势是可以将对动力系统的初始的光滑性的要求降到最低。
- 在本书中，我们非常注重将理论应用于无限维系统，这些系统源自于连续介质力学和数学物理。然而，为了使抽象方案更加透明并呈现复杂行为的不同可能场景，我们集中使用了低维的ODE作为例子，其中一些是真实世界PDE模型的低程度的近似。
- 我们提供了适用于无穷维(局部紧)情形的现代形式的动力系统理论的基本概念，部分素材我们以练习题的形式给出。其中一部分练习题提供了有关所考虑对象的额外信息，这使得文本更加集中，事实上，许多练习题可以以“练习”的标题替换成例如“容易见得”这样的文本。但是，我们更倾向于使他们保持“量化”的形式，并且我们相信，这会使得内容更加友好。

本书的组织方式如下：

基本概念

本章收集了一般的动力系统理论中的基本定义、概念和最简单的说明性陈述。我们还描述了所有1维和2维连续动力系统的可能场景，并通过例子讨论了主要的分歧图像。我们后半部分叙述的主要目的是，给读者以低维(1或2维)的连续时间演化算子会产生什么样动力学行为的感觉。

我们主要遵循[18]和[25]的表述方式，并且依赖经典的常微分材料；见[9]，[11]，[14]以及[14]和[22]。

1.1 演化算子和动力系统

如同介绍中已经提及的，动力系统的概念包括可能出现的状态的集合(相空间)和状态关于时间的演化法则。在之后的叙述中，我们选取完备的度量空间作为相空间，记$\mathbb{T}_+$为$\mathbb{T}$上的非负元素用以代表时间，其中$\mathbb{T}$为$\mathbb{R}$或$\mathbb{Z}$。

定义 1.1.1 演化算子

设X是完备的度量空间，$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$或$\mathbb{R}$，对任意$t \in \mathbb{T}$，$S_t : X \to X$是连续映射，并且满足半群性质，即：

$$S_0 = id_X, \quad S_{t+\tau} = S_t \circ S_\tau, \quad \forall t, \tau \in \mathbb{T}^+,$$

则称$\{S_t\}_{t\in\mathbb{T}^+}$为演化算子(或演化半群、半流)。 ♣

在$\mathbb{T} = \mathbb{R}$的情形中，我们额外假设映射$t :\to S_t x$是$\mathbb{R}_+$到X上关于x的连续映射。我们称(X, S_t)为相空间为X、演化算子为S_t的**动力系统**。

在$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$时，演化算子(以及动力系统)被称为离散(或关于离散时间)的。如果$\mathbb{T} = \mathbb{R}$，则S_t(同理，(X, S_t))被称为关于时间连续的演化算子(动力系统)。如果相空间可以被定义维数(例如，当X为线性空间时)，则$\dim X$被称为动力系统的维数。

接下来以一个例子来说明定义 1.1.1。

例 1.1.2 **(常微分方程)** 设$F:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$为(非线性)映射。考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=F(u(t)),\quad t\geqslant 0,\quad u(0)=u_0\in\mathbb{R}^d. \tag{1.1}$$

如果对任意初始点$u_0\in\mathbb{R}^d$，这个问题都有依赖于u_0的唯一解，则它在$X=\mathbb{R}^d$上，以$S_tu_0=u(t,u_0)$的形式生成了一个演化半群，其中$u(t,u_0)$是问题1.1的解。于是，我们得到了相空间$X=\mathbb{R}^d$上的动力系统$(X,\mathbb{R}^d)$。

例 1.1.3 **(映射)** 设X是完备的度量空间。考虑映射$F:X\to X$。令$n\in\mathbb{Z}_+$，则F的n重复合$S_n\cong F\circ\cdots\cdots F$形成了一个演化算子序列$\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$。如果$F$是连续映射，则我们得到了一个离散的动力系统$(X,S_n)$。于是，$(X,F)$完全地决定了这个(离散)动力系统。这就是为什么由空间X和映射F组成的(X,F)也经常被称为动力系统。

接下来的例子展示了如何通过单个映射来生成一个连续时间的动力系统。

习题 1.1.4. 设$\alpha,\beta>0$并且$\alpha,\beta\neq 1$

证明. tmp □

参考文献

[1] A. Babin. *Global Attractors in PDE*. 编者为 B. Hasselblatt and A. Katok. Vol. 1B. Handbook of Dynamical Systems. Amsterdam: Elsevier, 2006.

[2] A. Babin and M. Vishik. *Attractors of Evolution Equations*. Amsterdam: North-Holland, 1992.

[3] J. Billoti and J. LaSalle. "Periodic dissipative processes". 刊于: *Bulletin of the American Mathematical Society* 6 (1971), pp. 1082–1089.

[4] I. Chueshov. *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems*. in Russian. English translation: Acta, Kharkov, 2002. Kharkov: Acta, 1999. URL: http://www.emis.de/monographs/Chueshov/.

[5] I. Chueshov and I. Lasiecka. "Attractors for second order evolution equations". 刊于: *J. Dynam. Diff. Eqs.* 16 (2004), pp. 469–512.

[6] I. Chueshov and I. Lasiecka. *Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping*. Vol. 195. Memoirs of AMS 912. Providence, RI: AMS, 2008.

[7] I. Chueshov and I. Lasiecka. *Von Karman Evolution Equations*. New York: Springer, 2010.

[8] I. Chueshov and I. Lasiecka. "Well-posedness and long time behavior in nonlinear dissipative hyperbolic-like evolutions with critical exponents". 刊于: *HCDTE Lecture Notes. Part I. Nonlinear Hyperbolic PDEs, Dispersive and Transport Equations*. 编者为 G. Alberti etal. Vol. 6. AIMS on Applied Mathematics. Springfield: AIMS, 2013, pp. 1–96.

[9] E.A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1955.

[10] J.K. Hale. *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*. Providence, RI: AMS, 1988.

[11] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. 2nd ed. Philadelphia: SIAM, 2002.

[12] A.K. Khanmamedov. "Global attractors for von Karman equations with nonlinear dissipation". 刊于: *J. Math. Anal. Appl.* 318 (2006), pp. 92–101.

[13] O. Ladyzhenskaya. *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1991.

[14] S. Lefschetz. *Differential Equations: Geometric Theory*. New York: Dover, 1977.

[15] N. Levinson. "Transformation theory of non-linear differential equations of the second order". 刊于: *Annals of Mathematics* 45 (1944), pp. 723–737.

[16] V.V. Chepyzho vand M.I. Vishik. *Attractors for Equations of Mathematical Physics*. Providence, RI: AMS, 2002.

[17] A. Miranville and S. Zelik. *Attractors for dissipative partial differential equations in bounded and unbounded domains*. 编者为 C.M. Dafermos and M. Pokorny. Vol. 4. Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations. Amsterdam: Elsevier, 2008.

[18] V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov. *Qualitative Theory of Differential Equations*. NJ: Princeton University Press, 1960.

[19] V.A. Pliss. *Integral Sets of Periodic Systems of Differential Equations*. in Russian. Moscow: Nauka, 1977.

[20] V.A. Pliss. *Nonlocal Problems of the Theory of Oscillations*. New York: Academic Press, 1966.

[21] G. Raugel. *Global attractors in partial differential equations*. 编者为 B. Fiedler. Vol. 2. Handbook of Dynamical Systems, Amsterdam: Elsevier, 2002, pp. 885–982.

[22] R. Reissing, G. Sansone, and R. Conti. *Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*. in Russian. Moscow: Nauka, 1974.

[23] J. Robinson. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001.

[24] G.R. Sell and Y. You. *Dynamics of Evolutionary Equations*. New York: Springer, 2002.

[25] K.S. Sibirsky. *Introduction to Topological Dynamics*. Leyden: Noordhoff, 1975.

[26] R. Temam. *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. 2nd ed. New York: Springer, 1997.

名词索引