Tarea 4

Métodos Numéricos

Nombre: Eliseo Mera

Tarea 4.3: Considere una variable aleatoria $x \in (0,\ \infty)$ distribuida de acuerdo a una distribución exponencial $\rho(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

1. **Calcule la función característica $\tilde{\rho}(k)$.**
2. **Calcule los primeros cuatro cumulantes de esta distribución.**
3. **Basado en el punto anterior, compare con la distribución gaussiana.**

Para calcular la función característica hay que ver la transformada de fourier de la distribución:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\rho}(k) &= \int_0^\infty dx\ e^{-ikx}\rho(x) \\
&= \int_0^\infty dx\ e^{-ikx}\lambda e^{-\lambda x} \\
&= \lambda \int_0^\infty dx\ e^{-ikx-\lambda x} \\
&= \lambda \int_0^\infty dx\ e^{-x(\lambda+ik)} \\
&= \lambda \left(\frac{e^{-x(\lambda+ik)}}{-(\lambda+ik)} \right) \Bigg|_0^\infty \\
&= \lambda \left(\frac{1}{\lambda+ik} \right) \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+ik}
\end{aligned}
$$

Para obtener los cumulantes se calcula el logaritmo natural de la función característica:

$$
\begin{aligned}
\ln(\tilde{\rho}(k)) &= \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda+ik}\right) \\
&= -\ln\left(\frac{\lambda+ik}{\lambda}\right) \\
&= -\ln\left(1+\frac{ik}{\lambda}\right)
\end{aligned}
$$

El logaritmo natural se expande en serie, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
-\ln\left(1+\frac{ik}{\lambda}\right) &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(\frac{ik}{\lambda})^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(\frac{ik}{\lambda})^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{ik}{\lambda})^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ik)^n}{n}\cdot\frac{1}{\lambda^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ik)^n}{n\cdot(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ik)^n}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{\lambda^n}
\end{aligned}$$

Por lo tanto los cumulantes están definidos como:

$$\langle x^n\rangle_c = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}$$

Con esto se calculan los primeros cuatro cumulantes:

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle_c &= \frac{1}{\lambda} \\
\langle x^2\rangle_c &= \frac{1}{\lambda^2} \\
\langle x^3\rangle_c &= \frac{2}{\lambda^3} \\
\langle x^4\rangle_c &= \frac{6}{\lambda^4}
\end{aligned}$$

Esto es distinto a la distribución gaussiana, ya que, en la distribución gaussiana todos los cumulantes son cero excepto los primeros dos, y en esta distribución los cumulantes no pueden ser cero.