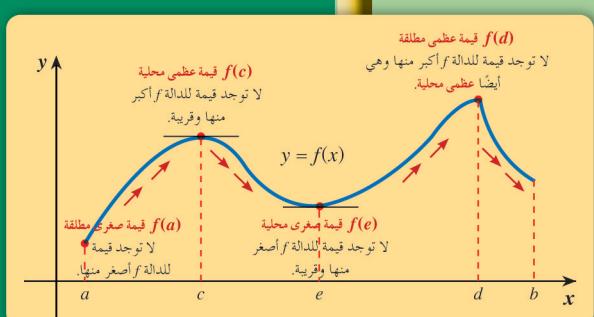


# الرياضيات

## كتاب الطالب



الصف الثاني عشر علمي  
الفصل الدراسي الأول

# الرياضيات

الصف الثاني عشر علمي  
الفصل الدراسي الأول

## كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيساً)

أ. فتحية محمود أبو زور

أ. حصة يونس محمد علي

الطبعة الثانية

١٤٣٧ - ١٤٣٨ هـ  
٢٠١٦ - ٢٠١٧ م

**لجنة دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الثاني عشر علمي**

**أ. حسن نوح علي المها (رئيساً)**

**أ. شيخة فلاح مبارك الحجرف**

**أ. صديقة أحمد صالح الانصارى**

**أ. يحيى عبد السلام خالد عقل**

**أ. مجدى محمد يس دراز**

**أ. وضاح ابراهيم مزعل الدوسري**

**دار التَّرْبِيَّون House of Education ش.م.م . وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٤**

© جَمِيعُ الْحَقُوقِ مَحْفُوظَةً : لَا يَجُوزُ نُشُرُ أَيِّ جُزْءٍ مِّنْ هَذَا الْكِتَابِ أَوْ تَصْوِيرِهِ أَوْ تَخْزِينِهِ أَوْ تَسْجِيلِهِ بِأَيِّ وَسِيلَةٍ دُونْ مُوَافَقَةِ خَطِيَّةٍ مِّنَ النَّاشرِ.

**الطبعة الأولى ٢٠١٤**

**الطبعة الثانية ٢٠١٦**



حضره صاحب السمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح  
أمير دولة الكويت

**H.H. Sheikh Nawaf AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah**  
**The Amir Of The State Of Kuwait**





سمو الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح  
ولي عهد دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad AL-Jaber AL-Sabah  
The Crown Prince Of The State Of Kuwait



## مقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلوة والسلام على سيد المرسلين، محمد بن عبد الله وصحبه أجمعين.

عندما شرعت وزارة التربية في عملية تطوير المناهج. استندت في ذلك إلى جملة من الأسس والمرتكزات العلمية والفنية والمهنية، حيث راعت متطلبات الدولة وارتباط ذلك بسوق العمل، وحاجات المتعلمين والتطور المعرفي والعلمي، بالإضافة إلى جملة من التحديات التي تمثلت بالتحدي القيمي والاجتماعي والاقتصادي والتكنولوجي وغيرها، وإن كان ندرك أن هذه الجوانب لها صلة وثيقة بالنظام التعليمي بشكل عام وليس المناهج بشكل خاص.

وما يجب التأكيد عليه، أن المنهج عبارة عن كم الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدم للمتعلم، وهذا يرتبط أيضًا بعمليات التخطيط والتنفيذ، والتي في محصلتها النهاية تأتي لتحقيق الأهداف التربوية، وعليه أصبحت عملية بناء المناهج الدراسية من أهم مكونات النظام التعليمي، لأنها تأتي في جانبين مهمين لقياس كفاءة النظام التعليمي، فهي من جهة تمثل أحد المدخلات الأساسية ومقياسًا أو معيارًا من معايير كفائه من جهة أخرى، عدا أن المناهج تدخل في عملية إماء شخصية المتعلم في جميع جوانبها الجسمية والعقلية والوجدانية والروحية والاجتماعية.

من جانب آخر، فنحن في قطاع البحوث التربوية والمناهج، عندما نبدأ في عملية تطوير المناهج الدراسية، ننطلق من كل الأسس والمرتكزات التي سبق ذكرها، بل إننا نراها محفزات واقعية تدفعنا لبذل قصارى جهدنا والمضي قدماً في البحث في المستجدات التربوية سواء في شكل المناهج أم في مضامينها، وهذا ما قام به القطاع خلال السنوات الماضية، حيث البحث عن أفضل ما توصلت إليه عملية صناعة المناهج الدراسية، ومن ثم إعدادها وتأليفها وفق معايير عالمية استعداداً لتطبيقها في البيئة التعليمية.

ولقد كانت مناهج العلوم والرياضيات من أول المناهج التي بدأنا بها عملية التطوير، إيماناً بأهميتها وانطلاقاً من أنها ذات صفة عالمية، مع الأخذ بالحسبان خصوصية المجتمع الكويتي وببيئته المحلية. وعندما أدركنا أنها تتضمن جوانب عملية التعلم ونعني بذلك المعرفة والقيم والمهارات، قمنا بدراستها وجعلها تتوافق مع نظام التعليم في دولة الكويت، مركزين ليس فقط على الكتاب المقرر ولكن شمل ذلك طرائق وأساليب التدريس والبيئة التعليمية دور التعلم، مؤكدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم.

وفي ضوء ما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب ذات الصفة التعليمية والتربوية تم اختيار سلسلة مناهج العلوم والرياضيات التي أكملناها بشكل وووقت مناسبين، ولنحقق نقلة نوعية في مناهج تلك المواد، وهذا كله تزامن مع عملية التقويم والقياس للأثر الذي تركته تلك المناهج، ومن ثم عمليات التعديل التي طرأت أثناء وبعد تنفيذها، مع التأكيد على الاستمرار في القياس المستمر والمتابعة الدائمة حتى تكون مناهجنا أكثر تفاعلية.

**د. سعود هلال الحريبي**

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

# المحتويات

<b>الوحدة الأولى: النهايات والاتصال</b>	
10	1 - النهايات .....
12	2 - نهايات تشتمل على $\infty$ .....
27	3 - صيغ غير معينة .....
36	4 - نهايات بعض الدوال المثلثية .....
42	5 - الاتصال .....
48	6 - نظريات الاتصال .....
54	7 - الاتصال على فترة .....
61	
<b>الوحدة الثانية: الاشتراق</b>	
72	1 - معدلات التغير وخطوط المماس .....
74	2 - المشتقة .....
79	3 - قواعد الاشتراق .....
90	4 - مشتقات الدوال المثلثية .....
100	5 - قاعدة السلسلة .....
103	6 - المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني .....
108	
<b>الوحدة الثالثة: تطبيقات على الاشتراق</b>	
120	1 - 3 القيم القصوى (العظمى / الصغرى) للدوال .....
122	2 - تزايد وتناقص الدوال .....
131	3 - ربط المشتقة الأولى $f'$ والمشتقة الثانية $f''$ بمنحنى الدالة $f$ .....
138	4 - رسم بيان دوال كثيرات الحدود .....
147	5 - تطبيقات على القيم القصوى .....
155	
<b>الوحدة الرابعة: الإحصاء</b>	
166	1 - 4 التقدير .....
168	2 - اختبارات الفروض الإحصائية .....
177	3 - الارتباط والانحدار .....
182	

# الوحدة الأولى

## النهايات والاتصال

### Limits and Continuity

#### مشروع الوحدة: السرعة اللحظية

**1 مقدمة المشروع:** تسقط صخرة من مرتفع. يمكن ضبط زمن السقوط وحساب السرعة المتوسطة لسقوط الصخرة بسهولة، ولكن في لحظة ما أثناء السقوط ما هي سرعة الصخرة؟

**2 الهدف:** معرفة سرعة الصخرة عند اللحظة  $s = 2$ .

**3 اللوازم:** أوراق رسم، آلة حاسبة علمية، حاسوب، جهاز عرض.

**4 أسئلة حول التطبيق:**

تسقط الصخرة وفق العلاقة (قانون غاليليو للسقوط الحر):  $d(t) = 4.9t^2$  ، حيث:

$d(t)$  المسافة التي تقطعها الصخرة بالأمتار (m)،  $t$  الزمن بالثواني (s)

**a** احسب السرعة المتوسطة  $\frac{\Delta d}{\Delta t}$  خلال أول ثانيتين من السقوط.

**b** أكمل الجدول التالي الذي يمثل السرعة المتوسطة للصخرة في الفترة الزمنية من اللحظة  $t = 2$  إلى اللحظة  $t = 2 + h$  ، حيث  $\Delta t = h$  هو الفارق في الزمن.

مدة الفترة الزمنية $h$ بالثانية	السرعة المتوسطة $\frac{\Delta d}{\Delta t}$
0.4	
0.1	
0.05	
0.01	
0.001	
0.0001	

**c** ما الذي تلاحظه بالنسبة إلى معدل السرعة عندما تقترب  $h$  كثيراً من الصفر؟

**d** ما تقريرياً سرعة الصخرة عند  $t = 2$ ؟

**5 التقرير:** ضع تقريراً مفصلاً يبيّن النتائج التي حصلت عليها مشيراً إلى المعطيات من دروس الوحدة التي استفدت منها.

دعّم تقريرك بملخص أو عرض على جهاز العرض.

#### دروس الوحدة

النهايات	نهايات تشتمل على $+\infty$ ، $-\infty$	صيغ غير معينة	نهايات بعض الدوال المثلثية	الاتصال	نظريات الاتصال	الاتصال على فترة
1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	1-7

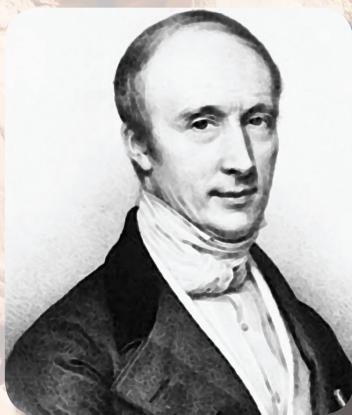
# الوحدة الأولى

## أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

### أضف إلى معلوماتك

في النصف الثاني من القرن الثامن عشر، كان الباحثون في الرياضيات قد أدركوا أنه بدون أساس منطقية، سيكون حساب التكامل والتفاضل محدوداً. طور أوغسطين لويس كوشي (Augustin-Louis Cauchy) نظرية في النهايات، فألغى معظم الشكوك حول صحة منطق حساب التكامل والتفاضل.

وصف المؤرخ هوارد إيف (Howard Eves) كوشي بأنه إضافة إلى كونه عالماً رياضياً من الطراز الأول قدم الكثير لعالم الرياضيات فقد كان أيضاً محامياً (مارس المهنة لمدة أربعة عشر عاماً)، ومتسلق جبال، ورسام (استخدم الألوان المائية). ومن صفات كوشي التي ميزته عن معاصريه احترامه للبيئة ودفاعه عنها.



أوغسطين لويس كوشي  
(Augustin-Louis Cauchy)

- رسمت بيان الدالة التربيعية.
- رسمت بيانات دوال القوى.
- وصفت منحنيات كثيرات الحدود.
- أوجدت أصفار دالة كثيرة الحدود.
- تعلمت الكثير من المتطابقات المثلثية.
- رسمت بيانات بعض الدوال.

### ماذا سوف تتعلم؟

- تعرف مفهوم نهاية دالة عند نقطة.
- حساب نهايات بعض الدوال.
- استخدام نظريات النهايات.
- إلغاء العامل الصفرى (صيغة غير معينة  $\frac{0}{0}$ ).
- نهايات تشمل على  $\infty, -\infty$ .
- صيغ غير معينة.
- نهايات بعض الدوال المثلثية.
- نظرية الإحاطة.
- استخدام نظرية الإحاطة لإيجاد بعض النهايات.
- تعرف اتصال دالة عند نقطة ودراسة الاتصال.
- تعرف بعض نظريات الاتصال الأساسية.
- بحث اتصال دالة ناتجة من تركيب دالتين.
- فهم معنى دالة متصلة على فترة.
- تعرف اتصال دالة على فترة.

### المصطلحات الأساسية

نهاية دالة عند نقطة – النهاية من الجهتين – النهاية من جهة واحدة – العامل الصفرى – صيغ غير معينة – نظرية الإحاطة – خط مقارب (محاذى) رأسي – خط مقارب (محاذى) أفقى – الالانهاية – اتصال دالة عند نقطة – نقاط الاتصال ونقاط الانفصال – التخلص من الانفصال – دالة مركبة – اتصال دالة على فترة .

## النهايات

### Limits

#### عمل تعاوني

أولاً: أكمل الجدول التالي كما في ① :

بعد العدد عن طرف في الفترة	صورة أخرى للفترة المفتوحة	التمثيل على خط الأعداد	العدد في منتصف الفترة	الفترة المفتوحة	رقم
1	$(4 - 1, 4 + 1)$		4	$(3, 5)$	1
				$\left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$	2
				$\left(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$	3
				$(0, 1)$	4
				$(2.9, 3.1)$	5
				$(6.8, 7.2)$	6

ثانياً: اكتب الفترة المفتوحة التي يبعد طرفاها بمقدار  $\frac{1}{5}$  عن العدد الحقيقي 3.

ثالثاً: اكتب فترة مفتوحة يبعد طرفاها بمقدار  $a$  عن العدد الحقيقي  $c$ .

من «العمل التعاوني» السابق، الفترة المفتوحة  $(c - a, c + a)$  تسمى جواراً للعدد  $c$  وفقاً للمعيار  $a$  حيث  $a > 0$ .

فمثلاً: الفترة المفتوحة  $(3, 5)$  هي جوار للعدد 4 وفقاً للمعيار 1.

والفترة  $\left(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$  هي جوار للعدد 2 وفقاً للمعيار  $\frac{1}{4}$ .

وكذلك الفترة  $\left(2\frac{1}{100}, 1\frac{99}{100}\right)$  هي جوار للعدد 2 وفقاً للمعيار  $\frac{1}{100}$ .

وعليه يمكننا تحديد جوار لأي عدد باختيارنا معياراً مناسباً.

إذا كانت لدينا دالة معرفة على فترة مفتوحة  $I$  من الأعداد الحقيقة وتحوي العدد  $c$  فإننا نقول إن هذه الدالة معرفة في جوار للعدد  $c$  (أي  $I$  تحوي جواراً للعدد  $c$ ).

أما إذا كانت الدالة معرفة عند جميع عناصر الفترة  $I$  ولكنها غير معرفة عند العدد  $c$  نفسه فإن الدالة تكون معرفة في جوار ناقص للعدد  $c$ .

#### تعريف (1)

لتكن  $x$  كمية متغيرة،  $c$  عدداً حقيقياً.

نقول إن  $x$  تقترب من  $c$  باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية  $|c - x|$  أصغر من أي عدد حقيقي موجب.

#### سوف تعلم

- النهاية عند النقطة.
- حساب النهايات من التمثيلات البيانية.
- حساب النهايات باستخدام النظريات.
- النهاية من جهة واحدة فقط أو من الجهتين.
- صيغة غير معينة  $\frac{0}{0}$ .

#### المفردات والمصطلحات:

- جوار Neighbourhood
- المعيار Norm
- جوار ناقص Punctured
- جوار Neighbourhood
- النهاية من جهة واحدة One-Sided Limit
- النهاية من الجهتين Two-Sided Limits
- صيغة غير معينة  $\frac{0}{0}$
- Indeterminate Form  $\frac{0}{0}$



## نشاط

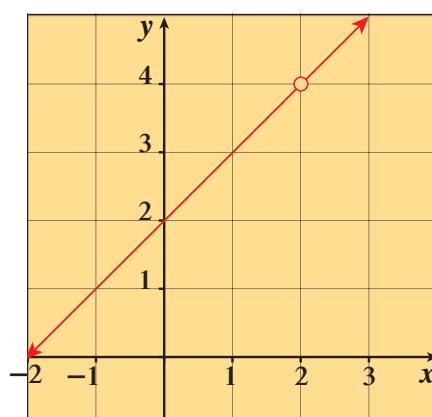
أولاً: لنكن الدالة  $f$  :  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

أوجد مجال الدالة  $f$ .

هل يمكن إيجاد  $f(2)$ ؟

أكمل الجدول التالي:

$x$	...	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\rightarrow$	2	$\leftarrow$ ...	2.0001	2.001	2.01	2.1	
$f(x)$							غير معروف						



d ماذا تلاحظ على قيم  $x$ ؟

(هل تقترب من عدد محدد؟)

e ماذا تلاحظ على قيم  $f(x)$ ؟

(هل تقترب من عدد محدد؟)

الشكل المقابل يمثل بيان  $f$

ثانياً:

a هل يمكن تبسيط الدالة السابقة  $f$ ؟ كيف؟

b ارسم بيان الدالة  $g$  حيث  $g(x) = x + 2$

ثالثاً: قارن بين الدالتين  $f$ ,  $g$ .

من النشاط السابق وجدت أن قيمة  $f(x)$  تقترب من العدد 4 كلما كانت  $x$  قريبة جدًا من العدد 2 سواء من اليمين أو اليسار. يسمى العدد 4 نهاية الدالة  $f$  عندما  $x$  تؤول إلى العدد 2. (تقرب باطراد من العدد 2 ،  $x \neq 2$ ) ويعبر عن ذلك بالصورة التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

وتقرأ كالتالي: نهاية  $f(x)$  عندما  $x$  تؤول إلى 2 تساوي 4.

The limit of  $f(x)$  as  $x$  approaches 2 equals 4

تعطينا النهايات لغة لوصف سلوك الدالة عندما تقترب مدخلات الدالة من قيمة معينة.

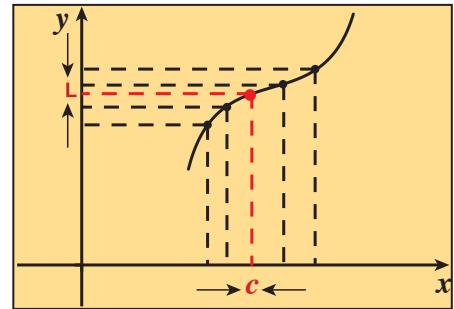
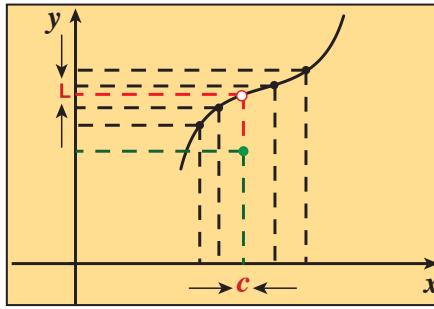
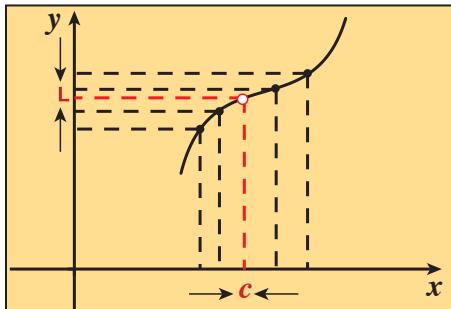
## تعريف (2)

ليكن  $L$  ،  $c$  عددين حقيقيين،  $f$  دالة حقيقة معروفة في جوار أو جوار ناقص للعدد  $c$

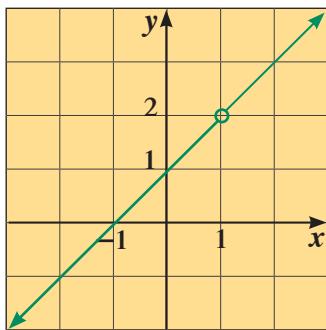
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

وتعني أنه عندما تقترب  $x$  من  $c$  باطراد،  $f(x)$  فإن قيمة  $f(x)$  تقترب باطراد من  $L$ .

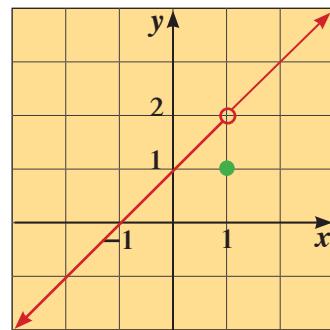
تبين الأشكال أدناه حقيقة وجود نهاية لـ  $x \rightarrow c$  حيث لا تعتمد على كون الدالة معروفة أو غير معروفة عند  $c$ .



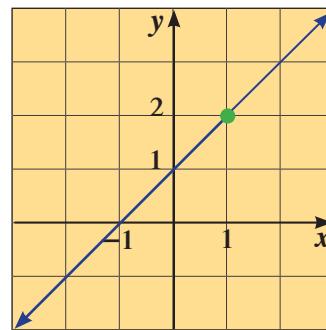
فعلى سبيل المثال في الدوال التالية:



a)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$



b)  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & : x \neq 1 \\ 1 & : x = 1 \end{cases}$



c)  $q(x) = x + 1$

الدالة  $f$  لها نهاية تساوي 2 عندما  $x \rightarrow 1$  على الرغم من أن  $f$  ليست معروفة عند  $x = 1$

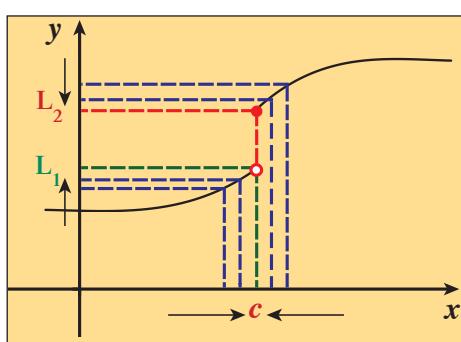
الدالة  $g$  لها نهاية تساوي 2 عندما  $x \rightarrow 1$  على الرغم من أن  $g(1) \neq 2$

الدالة  $q$  لها نهاية تساوي 2 عندما  $x \rightarrow 1$  ،  $x \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} q(x) = 2$$

## One-Sided Limit and Two-Sided Limits

## النهاية من جهة واحدة أو من جهتين



شكل (1)

أحياناً تؤول قيم الدالة  $f$  لقيم مختلفة عندما تقترب  $x$  من العدد  $c$  من الجهةين.

إذا كانت  $f(x)$  تؤول إلى العدد  $L_1$  عندما  $x \rightarrow c$  من جهة اليسار

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L_1$$

فإننا نعبر عن ذلك بالصورة التالية:

وتشتهر **النهاية من جهة اليسار**.

وإذا كانت  $f(x)$  تؤول إلى العدد  $L_2$  عندما  $x \rightarrow c$  من جهة اليمين فإننا نعبر

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L_2$$

عن ذلك بالصورة التالية:

وتشتهر **النهاية من جهة اليمين**.

نلاحظ في الشكل (1):

$L_1 \neq L_2$  أي أن:

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$

غير موجودة (ولذا نقول أن:

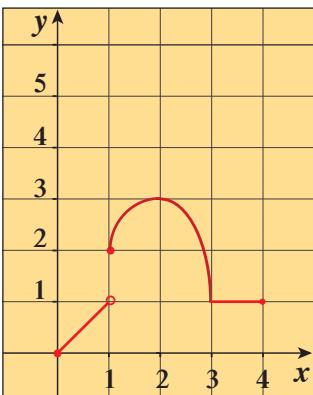
### نظيرية (1)

يفرض أن  $c, L$  عددين حقيقيين

يكون للدالة  $f$  نهاية عندما تقترب  $x$  من  $c$  إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

ويعبر عن ذلك:



### تدريب (1)

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة:  $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

أكمل ما يلي:

1  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \dots$

2  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \dots$

3  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \dots$

4  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \dots$

5  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \dots$

6  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \dots$

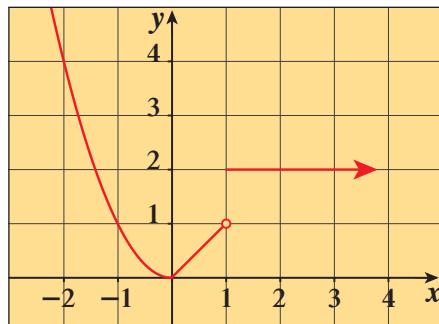
7  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \dots$

8  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \dots$

9  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots$

10  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \dots$

11  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \dots$



### مثال (1)

الشكل المقابل، يمثل بيان الدالة  $f$ .

أوجد إن أمكن:

1  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

3  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

4  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

الحل:

1  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

2  $\because \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 , \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \implies \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$   
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  غير موجودة

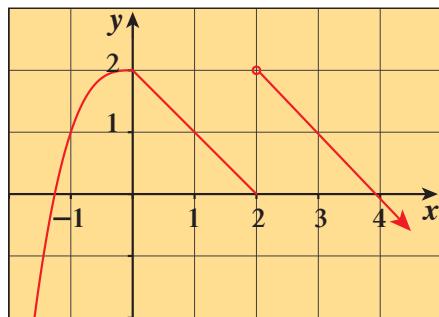
3  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$

4  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$

حاول أن تحل

1 يمثل الشكل المقابل بيان الدالة  $f$ .

أوجد إن أمكن:



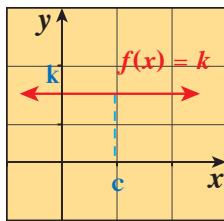
- a  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- c  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

- b  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- d  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

## Calculation of Limits

## حساب النهايات

يمكّنا حساب النهايات لبعض الدوال باستخدام النظريات التالية:

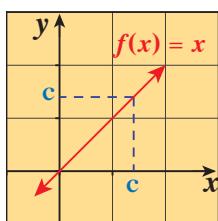


شكل (2)

نظريّة (2)

إذا كانت  $f$  دالة:  $f(x) = k$  و كان  $c$  عدداً حقيقياً فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} k = k$$



شكل (3)

نظريّة (3)

إذا كانت  $f$  دالة:  $f(x) = x$  و كان  $c$  عدداً حقيقياً فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = c$$

نظريّة (4)

إذا كانت  $k, c, M, L$  أعداداً حقيقية، فإن:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$$

a قاعدة الجمع:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M$$

b قاعدة الطرح:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$$

c قاعدة الضرب:

$$\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \cdot L$$

d قاعدة الضرب في ثابت:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$$

e قاعدة القسمة:

مثال (2)

بفرض أن  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$  ،  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$   
أوجد:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)}{g(x)}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 4}{f(x) \cdot g(x)}$

الحل:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$   
 $= -2 - 5$   
 $= -7$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$  ،  $5 \neq 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 2f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} \\ &= \frac{2(-2)}{5} \\ &= \frac{-4}{5} \\ &= -0.8\end{aligned}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$   
 $= -2 \times 5$   
 $= -10$  ،  $-10 \neq 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 4}{f(x) \cdot g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (g(x) + 4)}{\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} g(x) + \lim_{x \rightarrow 1} 4}{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} g(x)} \\ &= \frac{5 + 4}{-10} \\ &= -\frac{9}{10} \\ &= -0.9\end{aligned}$$

حاول أن تحل

بفرض أن  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$  ،  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3$  2  
أوجد:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) \cdot g(x))$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{8f(x) \cdot g(x)}{f(x) + g(x)} \right)$

## نظريه (5): دوال كثيرات الحدود ودوال الحدوبيات النسبية

### Polynomial and Rational Functions

إذا كانت دالة كثيرة الحدود،  $c$  عدداً حقيقياً، فإن:  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  a

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$  إذا كانت  $f(x), g(x)$  كثيرتي حدود،  $c$  عدداً حقيقياً، فإن: b

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$  ،  $g(c) \neq 0$

**ملاحظة:** يمكن تطبيق نظرية a على الدوال التي على الصورة  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  ومجالها مجموعه جزئية من  $\mathbb{R}$

مثال (3)

أوجد:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^4 - 2x^3 + 5)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2(2-x))$

الحل:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^4 - 2x^3 + 5) = (-1)^4 - 2(-1)^3 + 5$   
 $= 1 + 2 + 5$   
 $= 8$

نظرية (5)

b)  $g(x) = x + 2$

$g(2) = 2 + 2 = 4$  ،  $4 \neq 0$

تحقق من أن المقام  $\neq 0$

أي أن المقام  $\neq$  صفر

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \frac{(2)^2 + 2(2) + 4}{2 + 2}$   
 $= \frac{4 + 4 + 4}{4}$   
 $= \frac{12}{4}$   
 $= 3$

نظرية (5)

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2(2-x)) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x^3)$   
 $= 2(3)^2 - (3)^3$   
 $= 18 - 27$   
 $= -9$

نظرية (5)

حاول أن تحل

a) هل يمكن حل c في المثال (3) بطريقة أخرى؟ 3

b) أوجد:

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$

2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

نظريات حساب النهايات صحيحة عند حساب النهاية من جهة واحدة.

#### مثال (4)

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & : x < 1 \\ 5 & : x = 1 \\ \frac{5}{x} & : x > 1 \end{cases}$$

إذا كانت الدالة  $f$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x + 2) = 3(1) + 2 = 5$$

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5}{x} = \frac{5}{1} = 5$$

النهاية من جهة اليمين

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5$$

(يمكن التتحقق من أن نهاية المقام  $\neq 0$ )

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

حاول أن تحل

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & : x < 2 \\ x - 1 & : x > 2 \end{cases}$$

إذا كانت الدالة  $f$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

#### مثال (5)

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & : x \leq 0 \\ 1 - 2x & : x > 0 \end{cases}$$

إذا كانت الدالة  $g$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 2) = -2$$

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2x) = 1$$

النهاية من جهة اليمين

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  غير موجودة

حاول أن تحل

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x > 1 \\ \frac{x}{x^2 + 1} & : x \leq 1 \end{cases}$$

إذا كانت الدالة  $g$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

الحل:

تذكرة:

$$|x - a| = \begin{cases} x - a : x \geq a \\ -x + a : x < a \end{cases}$$

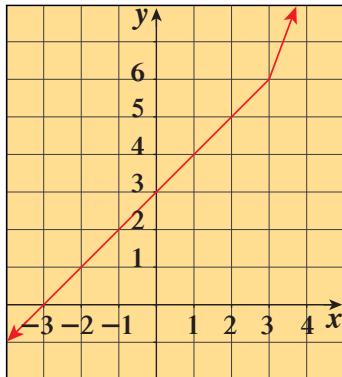
## تدريب (2)

$$\text{لتكن } f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \quad \text{حيث } x \neq 1$$

a) اكتب  $f(x)$  بدون استخدام رمز القيمة المطلقة. (بإعادة تعريف المطلق)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{أوجد} \quad b)$$

c) هل للدالة  $f$  نهاية عندما  $x \rightarrow 1$ ? فسر.



### مثال (6)

لتكن:  $f(x) = |x-3| + 2x$  الممثلة بالشكل.

a) اكتب  $f(x)$  دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \quad \text{أوجد} \quad b)$$

c) هل للدالة  $f$  نهاية عندما  $x \rightarrow 3$ ? فسر.

الحل:

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= \begin{cases} x-3+2x & : x \geq 3 \\ -x+3+2x & : x < 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3x-3 & : x \geq 3 \\ x+3 & : x < 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x-3) = 3(3)-3 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+3) = 3+3 = 6$$

$$c) \quad \because \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

. للدالة  $f$  نهاية عندما  $x \rightarrow 3$  وهذه النهاية تساوي 6.

حاول أن تحل

$$f(x) = x^2 - |x+2| : \quad \text{لتكن } f \quad 6$$

a) اكتب  $f(x)$  دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \quad \text{أوجد:} \quad b)$$

c) هل للدالة  $f$  نهاية عندما  $x \rightarrow -2$ ? فسر.

### الربط بالحياة:

يقدر الباحثون عدد الحيوانات المهددة بالانقراض باستخدام علاقات وضعوها من خلال مراقباتهم. ويستخدمون النهايات لتقدير عدد هذه الحيوانات في الأمد البعيد.



## قاعدة القوة

تعلمت مما سبق أن

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 2+1=3$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)^2 &= \lim_{x \rightarrow 2} ((x+1) \cdot (x+1)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = (3)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)^3 &= \lim_{x \rightarrow 2} ((x+1)^2 \cdot (x+1)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+1)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = (3)^2 \cdot 3 = 3^3\end{aligned}$$

وبالمثل يمكن إيجاد قيمة  $(x+1)^n$  حيث  $n$  عددًا صحيحًا موجّهاً وهي تساوي  $(3)^n$ .

## نظيرية (6)

بفرض أن  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  موجودة وكانت  $n$  عددًا صحيحًا موجّهاً فإن:

a)  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow c} f(x))^n$

(في حالة  $n$  عددًا زوجيًّا يشترط أن يكون  $0 < c$ )

b)  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$

(في حالة  $n$  عددًا زوجيًّا يشترط أن تكون  $0 < \lim_{x \rightarrow c} f(x) < \infty$ )

c)  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$

**ملاحظة:** سنكتفي بدراسة حالات الجذور التربيعية والتكمعية للدوال فقط.

## مثال (7)

أوجد:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x - 1)^5$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x-3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x-2}$

الحل:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x - 1)^5 = (\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x - 1))^5 = 3^5 = 243$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 2} (x-3)} = \sqrt[3]{2-3} = \sqrt[3]{-1} = -1$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x-2}$

$\lim_{x \rightarrow 3} (x-2) = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$

$\lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 - 2) = 25 \quad , \quad 25 > 0$

$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x^2 - 2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 - 2)} = \sqrt{25} = 5$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x^2 - 2}}{\lim_{x \rightarrow 3} (x-2)}$

$= \frac{5}{1} = 5$

تحقق أن نهاية المقام  $\neq 0$

تحقق أن نهاية ما تحت الجذر  $< 0$

حاول أن تحل

أوجد: 7

a)  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 5}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 4} (x + \sqrt{x})^4$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$

### إلغاء العامل الصفرى في المقام

### Eliminating Zero Factor of the Denominator

إذا كان لدينا دالة نسبية وكانت نهاية مقام هذه الدالة النسبية لا تساوى الصفر عندما  $x \rightarrow c$  فإننا نطبق نظرية (4) فرع e لإيجاد نهاية هذه الدالة. أما إذا ساوت نهاية المقام الصفر، فإننا نقوم باختصار العامل الصفرى المشترك بين البسط والمقام، إن وجد، ثم نستخدم الصيغة المبسطة لإيجاد النهاية.

ملاحظات:

1) عند التعويض المباشر لقيمة  $x$  في كل من البسط والمقام وحصلنا على  $\frac{0}{0}$  فإنها تسمى صيغة غير معينة (Indeterminate Form).

2) يمكن استخدام التحليل أو القسمة أو الضرب بالمرافق أو غيرها لإيجاد الصيغة المبسطة.

تذكرة:

مرافق العدد الجذري هو عدد جذري بحيث يكون ناتج ضرب العددين عدداً نسبياً.

أمثلة:

$$\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1 \bullet$$

متراافقان

$$\sqrt{3} - \sqrt{2}, \sqrt{3} + \sqrt{2} \bullet$$

متراافقان

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \bullet$$

متراافقان

$$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} \bullet$$

متراافقان

$$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} \bullet$$

متراافقان

مثال (8)

أوجد إن أمكن:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2 - 1}$

الحل:

a) عند التعويض المباشر عن  $x = 1$  في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}$  عامل صفرى مشترك بين البسط والمقام.

$$= \frac{x+2}{x}, \quad x \neq 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x}$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} x = 1, \quad 1 \neq 0$$

عَرْض عن  $x$  بـ 1

تذكرة:

إذا كان  $a$  صفر للدالة  $f(x)$  فإن  $(x-a)$  عامل من عوامل  $f(x)$ .

تذكرة:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

b) عند التعويض المباشر عن  $x = 0$  في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$\frac{(2+x)^3 - 8}{x} = \frac{(2+x-2)((2+x)^2 + 2(2+x) + (2)^2)}{x}$$

$$= \frac{x^1(4+4x+x^2+4+2x+4)}{x^1}$$

$$= x^2 + 6x + 12 , \quad x \neq 0$$

x عامل صفرى مشترك بين البسط والمقام

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 6x + 12) = 12$$

استخدم الصيغة المبسطة

c) عند التعويض المباشر عن  $x = 1$  في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$\frac{|x-1|}{x^2-1} = \begin{cases} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} & : x > 1 \\ \frac{1-x}{(x-1)(x+1)} & : x < 1, x \neq -1 \end{cases}$$

اكتب البسط دون استخدام رمز القيمة المطلقة وحلل المقام إلى عوامل  
(x-1) عامل صفرى مشترك بين البسط والمقام

$$= \begin{cases} \frac{1}{x+1} & : x > 1 \\ \frac{-1}{(x+1)} & : x < 1, x \neq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-1}$$

لإيجاد

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 , \quad 2 \neq 0$$

نتحقق من نهاية المقام  $\neq 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

استخدم الصيغة المبسطة وعوض عن  $x = 1$   
(النهاية من جهة اليمين)

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -(1+1) = -2 , \quad -2 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(x+1)} = \frac{-1}{(1+1)} = -\frac{1}{2}$$

استخدم الصيغة المبسطة وعوض عن  $x = 1$   
(النهاية من جهة اليسار)

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x^2-1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-1}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-1} \text{ غير موجودة}$$

حاول أن تحل

أوجد إن أمكن:

8

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x+2|-7}{x^2 - 25}$

مثال (9)

**a**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$       **b**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}}$       **c**  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

أوجد:

الحل:

**a**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

عند التعويض المباشر عن  $x = 2$  في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

اضرب البسط والمقام في مراافق البسط

$$\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} = \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} \times \frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$= \frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)} \quad (\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b) = a-b^2$$

$$= \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)} \quad (x-2) \text{ عامل مشترك بين البسط والمقام}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}, \quad x \neq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x-3) = 1; \quad 1 > 0$$

تحقق أن نهاية ما تحت الجذر أكبر من 0

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x-3}+1) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x-3} + \lim_{x \rightarrow 2} 1$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)} + 1 = 1 + 1 = 2, \quad 2 \neq 0 \quad \text{تحقق من أن نهاية المقام } 0 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3}+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 2}{\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{2}{2} = 1$$

**b**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}}$

عند التعويض المباشر عن  $x = 1$  في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{(\sqrt[3]{x-1})^2(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x-1})^3} \quad \text{حلل البسط: الفرق بين مكعبين}$$

$$= \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1, \quad x \neq 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1) \quad \text{استخدم الصيغة المبسطة}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x^2} + \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x} + \lim_{x \rightarrow 1} 1$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1} x^2} + \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1} x} + 1$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

عوض عن  $x$  بـ 1

معلومة:

$$\begin{aligned} x-a &= (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a}) \\ x \geq 0, \quad a \geq 0 &\quad \text{حيث} \\ x-a &= (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}) \\ (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xa} + \sqrt[3]{a^2}) & \\ x+a &= (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}) \\ (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xa} + \sqrt[3]{a^2}) & \end{aligned}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt[3]{x+2}}$

عند التعويض عن  $x = -2$  – في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 4}{\sqrt[3]{x+2}} &= \frac{(x^2 - 4)}{\sqrt[3]{x+2}} \times \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} \\ &= \frac{(x^2 - 4) \times \sqrt[3]{(x+2)^2}}{x+2} \\ &= \frac{\cancel{(x+2)}^1 (x-2) \sqrt[3]{(x+2)^2}}{\cancel{(x+2)}^1}\end{aligned}$$

$\sqrt[3]{a^2}$  هو  $\sqrt[3]{a}$

$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} = a$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$= (x-2) \sqrt[3]{(x+2)^2}, \quad x \neq -2$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt[3]{x+2}} &= \lim_{x \rightarrow -2} ((x-2) \sqrt[3]{(x+2)^2}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) \cdot \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{(x+2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) \cdot \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -2} (x+2)^2} \\ &= (-2-2) \cdot \sqrt[3]{(-2+2)^2} \\ &= (-4) \times (0) = 0\end{aligned}$$

استخدم الصيغة المبسطة

حاول أن تحل

أو جد إن أمكن: 9

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{3 - \sqrt{x}}$

مثال (10)

أوجد:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x+1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 32}{x+2}$

الحل:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x+1}$

عند التعويض عن  $x = -1$  – في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$\begin{array}{r} -1 \\ \hline 1 & 6 & 2 & -3 \\ & -1 & -5 & 3 \\ \hline 1 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

أقسم البسط على المقام ونوجد الناتج باستخدام القسمة التربيعية

الناتج:  $x^2 + 5x - 3$  والباقي صفر

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x + 1} = x^2 + 5x - 3, \quad x \neq -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 5x - 3) \\ &= (-1)^2 + 5(-1) - 3 \\ &= -7 \end{aligned}$$

عوّض عن  $x$  ب  $-1$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$

عند التعويض عن  $x$  ب  $-2$  – في كل البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$x^5 + 32 = x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 32$$

$$\begin{array}{r} -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ \hline 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & 0 \end{array}$$

أقسم البسط على المقام وأوجد الناتج باستخدام القسمة التربيعية

الناتج:  $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$  والباقي صفر

$$\frac{x^5 + 32}{x + 2} = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16, \quad x \neq -2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2} (x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16) \\ &= (-2)^4 - 2(-2)^3 + 4(-2)^2 - 8(-2) + 16 \\ &= 16 + 16 + 16 + 16 + 16 \\ &= 80 \end{aligned}$$

بسط

حاول أن تحل

أوجد إن أمكن: 10

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$

# نهايات تشتمل على $-\infty$ ، $\infty$

## Limits Involving $-\infty$ , $\infty$

### سوف تعلم

- نهايات محددة عندما  $x \rightarrow \pm\infty$
- نهايات غير محددة عندما  $x \rightarrow a$
- الخطوط المقارب الرأسية والأفقية.

### المفردات والمصطلحات:

- نهاية محددة
- Finite Limit
- خط مقارب أفقي
- Horizontal Asymptote
- خط مقارب رأسي
- Vertical Asymptote



### دعنا نفك ونتناقش

لتكن الدوال التالية:  $f(x) = \frac{1}{x}$  ،  $g(x) = x^2 + 1$

a أكمل الجدول التالي:

$x$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = x^2 + 1$
-100		
-3 000		
-60 000		
100		
3 000		
60 000		

b استنتج قيم الدوال الواردة أعلاه عندما تأخذ  $x$  قيمةً موجبة كبيرة جدًا وعندما تأخذ  $x$  قيمةً سالبة صغيرة جدًا.

### Finite Limits as $x \rightarrow \pm\infty$

### أولاً: نهايات محددة عندما $x \rightarrow \pm\infty$

إذا كانت  $x$  تأخذ قيمةً كبيرة جدًا أي أن قيمة  $x$  تكبر بلا حدود (تحريك مبتعدة كثيراً جهة اليمين على خط الأعداد) فإننا نقول  $x \rightarrow \infty$ .

وإذا كانت  $x$  تأخذ قيمةً صغيرة جدًا أي أن قيمة  $x$  تصغر بلا حدود (تحريك مبتعدة كثيراً جهة اليسار على خط الأعداد) فإننا نقول  $x \rightarrow -\infty$ .

### معلومات:

- من الأزل إلى الأبد
- الأزل: استمرار الوجود في أزمنة غير متناهية من الماضي.
- الأبد: استمرار الوجود في أزمنة غير متناهية في المستقبل.



### تعريف (3)

لتكن  $f$  دالة معروفة في الفترة  $(a, \infty)$  فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

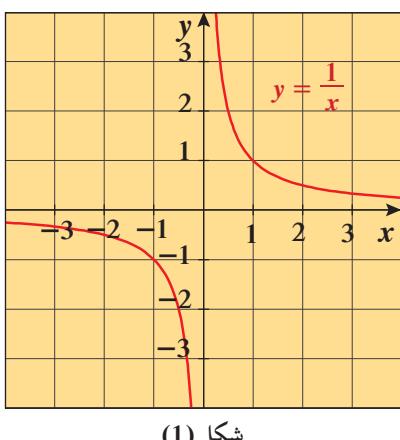
يعني أن قيمة  $f(x)$  تقترب باطراد من  $L$  عندما  $x$  تؤول إلى  $\infty$ .

### تعريف (4)

لتكن  $f$  دالة معروفة في الفترة  $(-\infty, a)$  فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

يعني أن قيمة  $f(x)$  تقترب باطراد من  $L$  عندما  $x$  تؤول إلى  $-\infty$ .



شكل (1)

في الشكل (1) من بيان الدالة  $f$  :  $f(x) = \frac{1}{x}$   
نجد أن:

عندما  $x \rightarrow \infty$  فإن  $f(x) \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{ونعبر عن ذلك رياضيًّا:}$$

وعندما  $x \rightarrow -\infty$  فإن  $f(x) \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{ونعبر عن ذلك رياضيًّا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{1}{x} \right) = 0 \quad \text{أي أنه :}$$

### نظريَّة (7)

لتكن  $f(x) = \frac{1}{x}$  :  $f$

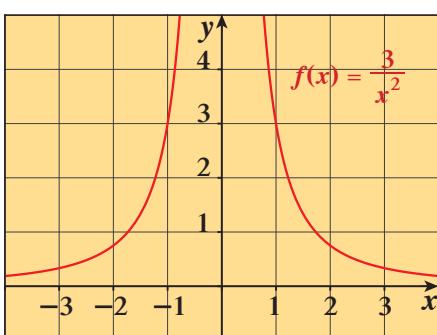
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

### تدريب

الشكل يمثل بيان الدالة  $f$  :  $f(x) = \frac{3}{x^2}$   
أكمل ما يلي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} = \dots \dots \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2} = \dots \dots \dots$$



### نظريَّة (8)

لتكن  $f(x) = \frac{k}{x^n}$  ،  $n \in \mathbb{Z}^+$  ،  $k \in \mathbb{R}$  :  $f$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{x^3} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^4} = 0 \quad , \quad \dots \quad \text{فمثلاً:}$$

تبقى النظريات (1), (2), (4), (6 a), (6 c) صحيحة عند إيجاد  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  وكذلك عند إيجاد  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

مثال (1)

أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+4}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+5}{x^2+25}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3}{5-7x^3}$

الحل:

a)  $\frac{1}{x+4} = \frac{1}{x(1+\frac{4}{x})} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{x}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x} = 1 + 0 = 1 , \quad 1 \neq 0$$

تحقق من أن نهاية المقام  $\neq 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{4}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{x} \right)}$$

$$= 0 \times \frac{1}{1+0} = 0$$

b)  $\frac{x+5}{x^2+25} = \frac{\cancel{x} \left( 1 + \frac{5}{x} \right)}{\cancel{x}^2 \left( 1 + \frac{25}{x^2} \right)} = \frac{1 + \frac{5}{x}}{x \left( 1 + \frac{25}{x^2} \right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{25}{x^2}} , \quad x \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+5}{x^2+25} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} \cdot \left( \frac{1 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{25}{x^2}} \right) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{25}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{25}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{25}{x^2} = 1 + 0 = 1 , \quad 1 \neq 0 \quad \text{تحقق أن نهاية المقام } 0 \neq 0 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{25}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+5}{x^2+25} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{5}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{25}{x^2} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{5}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = 1 + 0 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+5}{x^2+25} = 0 \times \frac{1}{1} = 0$$

c)  $\frac{6x^3}{5-7x^3} = \frac{6x^3 \cancel{1}}{\cancel{x^3} \left( \frac{5}{x^3} - 7 \right)} = \frac{6}{\frac{5}{x^3} - 7} , \quad x \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3}{5-7x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\frac{5}{x^3} - 7}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{x^3} - 7 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3} - \lim_{x \rightarrow \infty} 7 = 0 - 7 = -7 , \quad -7 \neq 0 \quad \text{تحقق من أن نهاية المقام } 0 \neq 0 , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3} = 0$$

نظريّة (4)

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\frac{5}{x^3} - 7} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 6}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{x^3} - 7 \right)} \\ = \frac{6}{-\frac{5}{0}} = -\frac{6}{7}$$

حاول أن تحل

أوجد النهايات التالية إن أمكن: 1

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x^2+9}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-3x+1}{x^3+5}$

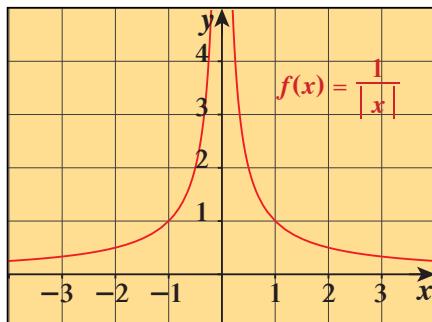
## Infinite Limits as $x \rightarrow c$

ثانيًا: نهايات غير محددة ( $\pm \infty$ ) عندما  $x \rightarrow c$

نعتبر على سبيل المثال الدالتين:

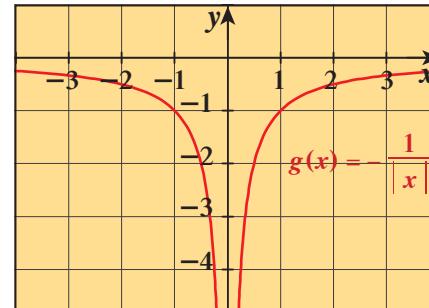
$$f(x) = \frac{1}{|x|}, \quad g(x) = \frac{-1}{|x|}$$

والممثلتين بيانياً بالمنحنين المرسومين



شكل (2)

$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$



شكل (3)

$$g(x) = \frac{-1}{|x|}$$

نلاحظ من الشكل (2) أن قيم  $f(x)$  ترداد بلا حدود كلما اقتربت قيمة  $x$  من الصفر سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار لذلك فإن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  غير موجودة لأنها تزايده بلا حدود.

ونعبر عن ذلك رياضيًّا بالصيغة:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$$

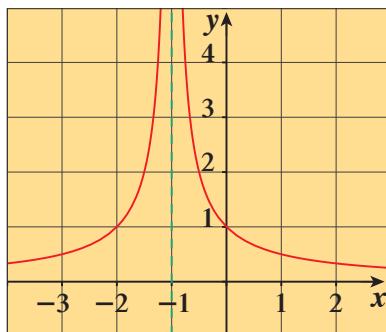
ويجب أن ندرك أن الرمز  $\infty$  لا يعني قيمة معينة. (لا يمثل عدًّا حقيقيًّا).

وإنما يفيد أن الدالة  $f$  تزايده بلا حدود عندما  $x \rightarrow 0$  :

وبالمثل نرى أن الدالة  $g$  الممثلة بيانياً بالشكل (3) تتناقص بلا حدود كلما اقتربت قيمة  $x$  من الصفر سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار أي عندما  $x \rightarrow 0$  ، أي أن  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  غير موجودة لأنها تتناقص بلا حدود.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty$$

ونعبر عن ذلك رياضيًّا بالصيغة:

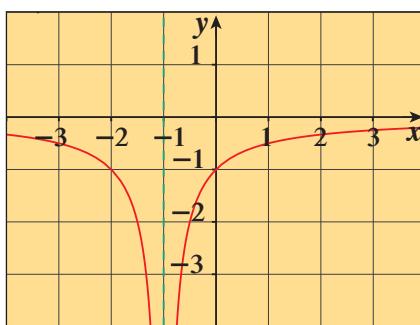


شكل (4)

$$f(x) = \frac{1}{|x+1|}$$

من شكل (4) قيم  $f(x)$  تتزايد بلا حدود عندما  $x \rightarrow -1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{|x+1|} = \dots$$



شكل (5)

$$g(x) = \frac{-1}{|x+1|}$$

من شكل (5) قيم  $g(x)$  تتناقص بلا حدود عندما  $x \rightarrow -1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{|x+1|} = \dots$$

### تعريف (5)

إذا كانت قيم  $f(x)$  تتزايد بلا حدود عندما تؤول  $x$  إلى  $c$  فإننا نعبر عن ذلك رياضيًّا بال التالي:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

إذا كانت قيم  $f(x)$  تتناقص بلا حدود عندما تؤول  $x$  إلى  $c$  فإننا نعبر عن ذلك رياضيًّا بال التالي:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

### نظرية (9)

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \iff (\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty \iff (\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty)$$

### ملاحظات

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + b] = \pm \infty$$

إذا كان  $b$  عدد حقيقي فإن:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty$  1

$$\lim_{x \rightarrow c} [b \cdot f(x)] = \pm \infty$$

إذا كان  $b$  عدد حقيقي موجب فإن:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty$  2

$$\lim_{x \rightarrow c} [b \cdot f(x)] = \mp \infty$$

إذا كان  $b$  عدد حقيقي سالب فإن:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \mp \infty$  3

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$$

إذا كان  $f(x) = \infty$  ،  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$  ،  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$  4

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \infty$$

إذا كان  $f(x) = -\infty$  ،  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$  ،  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -\infty$  5

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$$

إذا كان  $f(x) = -\infty$  ،  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$  ،  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$

### نظرية (10)

إذا كان  $n$  عدد صحيح زوجي موجب فإن:

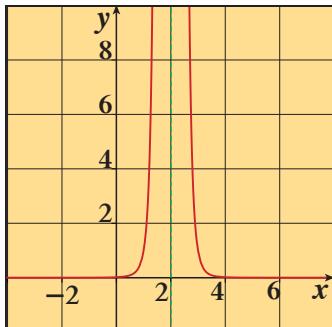
$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{(x - c)^n} = \infty$$

إذا كان  $n$  عدد صحيح فردي موجب فإن:

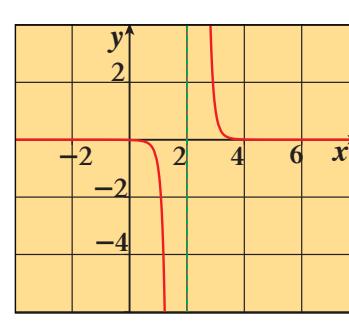
$$1 \quad \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{1}{(x - c)^n} = \infty$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{1}{(x - c)^n} = -\infty$$

حيث  $c \in \mathbb{R}$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^6} = \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^7} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^7} = -\infty$$

### مثال (2)

$$\text{أو جد إن أمكن: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x-2|}$$

الحل:

$$\frac{1}{|x-2|} = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & : x > 2 \\ \frac{-1}{x-2} & : x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad (1)$$

نظرية

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( -1 \cdot \frac{1}{x-2} \right)$$

$$\begin{aligned} & \because \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)} = -\infty, \quad -1 < 0 \\ & \therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( -1 \cdot \frac{1}{x-2} \right) = \infty \quad (2) \\ & \text{من (1) ، من (2)} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x-2|} = \infty$$

حاول أن تحل

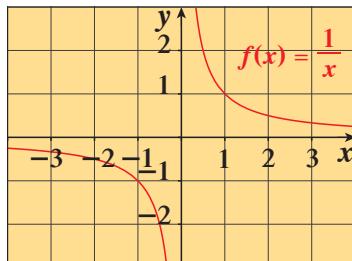
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3}{|x+1|} \quad (2)$$

### Definition of Horizontal Asymptote

تعريف (6): الخط المقارب (المحاذي) الأفقي

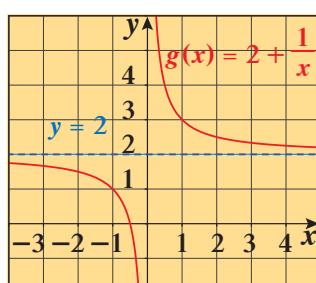
الخط  $b = y$  يسمى خط مقارب أفقي لمنحنى الدالة  $f(x) = y$  إذا توفر أحد الشرطين التاليين أو كلاهما:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$



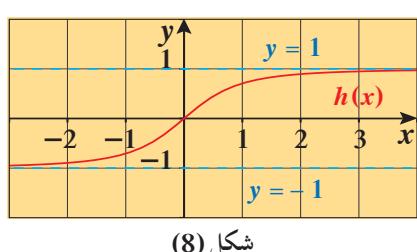
شكل (6)

بالنظر إلى بيان الدالة  $f(x) = \frac{1}{x}$  نلاحظ أن:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$   
ونقول إن الخط المستقيم  $y = 0$  هو خط مقارب أفقي (أو محاذي أفقي)  
لمنحنى الدالة  $f$ . (الشكل (6))



شكل (7)

وكذلك بالنظر إلى بيان الدالة  $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$  نلاحظ أن:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{x} \right) = 2$  ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2 + \frac{1}{x} \right) = 2$   
ونقول إن الخط المستقيم  $y = 2$  هو خط مقارب أفقي لمنحنى الدالة  $g$ . (الشكل (7))  
ونلاحظ أنه إذا كان  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = b$  فإن الخط المقارب الأفقي وحيد وهو  $y = b$ .  
قد يكون لمنحنى الدالة أكثر من خط مقارب أفقي.  
فمثلاً:



شكل (8)

لمنحنى الدالة  $h$ :  $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  في الشكل المقابل خطان مقاربان أفقيان هما:

$$y = -1 \quad \text{و} \quad y = 1$$

$$\text{لاحظ أن: } h(x) = \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \quad (\text{الشكل (8)})$$

ملاحظة:

ستقتصر دراستنا على المحاذيات الأفقية لدوال الحدوبيات النسبية.

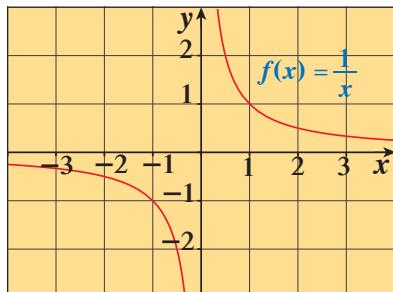
## Definition of Vertical Asymptote

تعريف (7): الخط المقارب (المحاذي) الرأسي

الخط  $x = a$  يسمى خط مقارب رأسي لمنحنى الدالة  $f(x) = y$  إذا توفر على الأقل أحد الشروط التالية:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

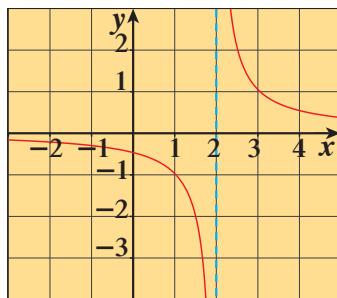


شكل (9)

بالنظر إلى بيان الدالة  $f(x) = \frac{1}{x}$  نلاحظ أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

ونقول إن الخط المستقيم  $x = 0$  هو خط مقارب (محاذي) رأسي لمنحنى الدالة  $f$ .  
(الشكل (9))



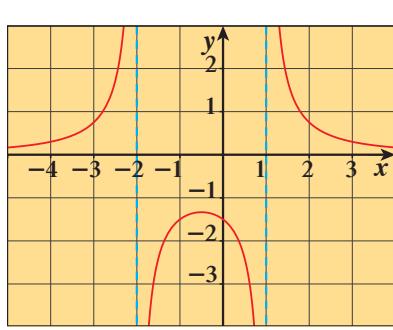
شكل (10)

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

بالنظر إلى بيان الدالة  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  نلاحظ أن:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{1}{x-2} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{1}{x-2} \right) = +\infty$$

ونقول إن الخط المستقيم  $x = 2$  هو خط مقارب رأسي لمنحنى الدالة  $f$ .  
(الشكل (10))  
نلاحظ أن  $x = 2$  هو صفر المقام.



شكل (11)

$$f(x) = \frac{3}{(x+2)(x-1)}$$

بالنظر إلى بيان الدالة  $f(x) = \frac{3}{(x+2)(x-1)}$  :

نلاحظ أن:  $x = -2, x = 1$  هما مقاربان (محاذيان) رأسيان لمنحنى الدالة  $f$ .

((الشكل (11)))

ونلاحظ أيضًا أن  $1, -2$  هما صفر المقام.

ملاحظة:

إذا كانت الدالة  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  حيث  $h$  كثيرتي حدود وليس بينهما عوامل مشتركة، فإن لكل صفر  $c$  لدالة المقام  $h$  يكون المستقيم  $x = c$  خطًا مقاربًا رأسيًا (أو محاذياً رأسيًا).

أما في حالة وجود عوامل مشتركة بين  $h, g$  فيكون المحاذي الرأسي عند صفر (أصفار) المقام بعد التبسيط.

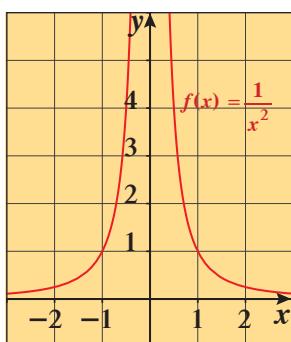
**مثال (3)**

أو جد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية والخطوط المقاربة الأفقيّة لكل مما يلي:

a)  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

b)  $h(x) = \frac{x-1}{x^2 - 3x + 2}$

الحل:



$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

a)

صفر المقام هما:  $x = -2, x = 2$  ، وليس أصفاراً للبسط.

$\therefore$  المستقيمان  $x = -2, x = 2$  هما المقاربان الرأسيان لمنحنى الدالة  $g$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1) - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2}} \\ &= \frac{0}{1 - 0} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore$  المستقيم  $y = 0$  هو خط مقارب أفقي لمنحنى  $g$ .

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

b)

$$h(x) = \frac{x-1}{x^2 - 3x + 2}$$

نضع  $h(x)$  في أبسط صورة

$$= \frac{x-1}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{1}{x-2}, \quad x \neq 1$$

صفر للمقام وليس من أصفار البسط

$\therefore$  المستقيم  $x = 2$  خط مقارب رأسى لمنحنى  $h$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}} \\ &= \frac{0}{1 - 0} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore$  المستقيم  $y = 0$  هو خط مقارب أفقي لمنحنى  $h$ .

حاول أن تحل

أو جد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية والخطوط المقاربة الأفقيّة لمنحنيات الدوال التالية: 3

a)  $f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 9}$

b)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

c)  $f(x) = \frac{2x}{x-3}$

## صيغ غير معينة

### Indeterminate Forms

#### سوف تعلم

- صيغ غير معينة

$\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{\infty}$ ,  $\frac{\infty}{-\infty}$

$\frac{-\infty}{-\infty}$ ,  $\infty - \infty$

#### المفردات والمصطلحات:

- صيغة غير معينة

#### Indeterminate Form

#### تذكر:

إذا كانت:

$$f(x) = ax^n$$

$n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a \neq 0$

فإن:

درجة الدالة هي  $n$  ومعاملها الرئيسي  $a$ .

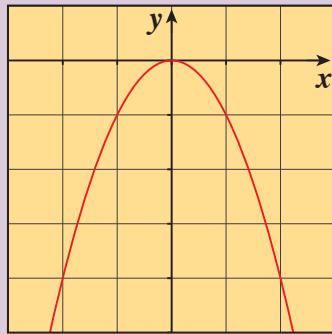
#### معلومة:

أنواع من الصيغ غير المعينة:

$$\frac{0}{0}, (0)^0$$

$$(\infty)^0, (0 \times \infty)$$

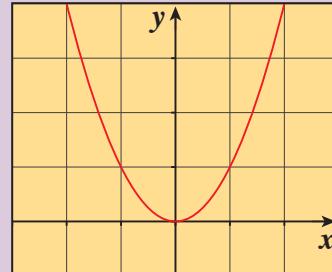
$a < 0$  عددًا زوجيًّا ,  $n$  ②



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$$

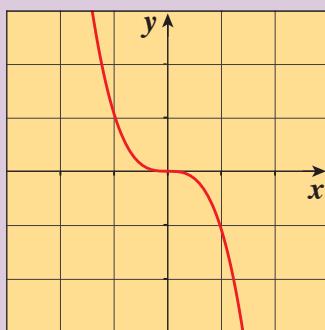
$a > 0$  عددًا زوجيًّا ,  $n$  ①



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$$

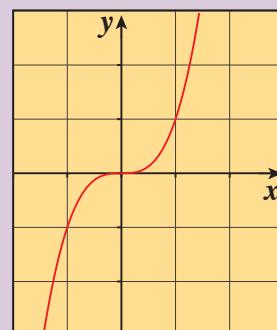
$a < 0$  عددًا فرديًّا ,  $n$  ④



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$$

$a > 0$  عددًا فرديًّا ,  $n$  ③



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$$

من فقرة «دعا نفك ونناقش» نجد أن:

لتكن:  $f(x) = ax^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : a > 0 \\ -\infty & : a < 0 \end{cases}$$

(1) إذا كان  $n$  عدد زوجي فإن:  
(2) إذا كان  $n$  عدد فردي فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : a > 0 \\ -\infty & : a < 0 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & : a > 0 \\ \infty & : a < 0 \end{cases}$$

فمثلاً:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^5) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^7) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-4x^4) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{3} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^4) = -\infty$$

**ملاحظة:** إذا كانت  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ,  $a_n \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

أحياناً نحتاج لحساب نهاية دالة على الصورة:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm \infty$$

في هذه الحالة نحصل على إحدى الصور التالية:  
ونسميها **صيغة غير معينة**.

كذلك إذا حسبنا  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$  وحصلنا على الصورة  $(\infty - \infty)$

فهي تسمى **صيغة غير معينة**.

في الحالات السابقة نلجأ لبعض الأساليب الجبرية لحساب قيمة هذه النهايات والأمثلة والنظريات التالية ستوضح كيفية حساب مثل هذه النهايات.

**مثال (1)**

أوجد:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 3x + 1)$   
الحل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 = \infty$$

بالتعويض المباشر

**حاول أن تحل**

أوجد:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2 + 2x - 4)$  1

### مثال تمهيدي

أوجد:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x}{4x^2 + 5}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - 7}{3x^4 - 2x}$

الحل:

a) لو حسبنا نهاية دالة البسط على نهاية دالة المقام لحصلنا على صيغة غير معينة لذا سنلجم للحل التالي:

$$\frac{3x^2 - 2x}{4x^2 + 5} = \frac{3 - \frac{2}{x}}{4 + \frac{5}{x^2}} \quad x \neq 0$$

أقسم كلاً من البسط والمقام على  $x^2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 4 + \frac{5}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 4 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = 4 + 0 = 4 \quad , \quad 4 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 3 - 0 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x}{4x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{4 + \frac{5}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{2}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 4 + \frac{5}{x^2} \right)}$$

$$= \frac{3}{4}$$

b) لو حسبنا نهاية دالة البسط على نهاية دالة المقام لحصلنا على صيغة غير معينة لذلك نقسم كلاً من البسط والمقام على  $x^4$  (أكبر قوة لـ  $x$ ).

$$\frac{5x^3 + 2x^2 - 7}{3x^4 - 2x} = \frac{\frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{7}{x^4}}{3 - \frac{2}{x^3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{2}{x^2} \right) = 3 - 0 = 3 \quad , \quad 3 \neq 0$$

التحقق من أن نهاية المقام  $\neq 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - 7}{3x^4 - 2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{7}{x^4}}{3 - \frac{2}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3}} \\ &= \frac{0 + 0 - 0}{3 - 0} = 0 \end{aligned}$$

نلاحظ من المثال التمهيدي a) أن درجة الحدودية في البسط تساوي درجة الحدودية في المقام تساوي 2 وأن نهاية الدالة النسبية تساوي  $\frac{3}{4}$

وهو ناتج قسمة معامل  $x$  بأكبر قوة في البسط على معامل  $x$  بأكبر قوة في المقام.

ونلاحظ في المثال التمهيدي b) أن درجة الحدودية في البسط أصغر من درجة الحدودية في المقام وأن نهاية الدالة النسبية تساوي 0

نستطيع تعميم ذلك من خلال النظرية التالية:

### نظرية (11)

إذا كانت كل من  $f$  ،  $g$  دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} : n = m$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 : n < m$

**ملاحظة:** تبقى النظرية صحيحة عندما  $x \rightarrow -\infty$

### مثال (2)

استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 3x^3}{2x^3 + 5}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^4 - x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 1}{7 - 2x^4}$

الحل:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 3x^3}{2x^3 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 4}{2x^3 + 5} = \frac{-3}{2}$

نظريّة:  $n = m = 3$  (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^4 - x} = 0$

(نظريّة:  $n = 2$  ،  $m = 4$  ،  $n < m$ )

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 1}{7 - 2x^4} = -\frac{1}{2}$

نظريّة:  $n = m = 4$  (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)

حاول أن تحل

2) استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{4x^3 - 2x + 3}$

### مثال (3)

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{2x + 5} = 3$

فأوجد قيمة كل من الثابتين  $a$  ،  $b$

الحل:

$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{2x + 5} = 3$  ،  $3 \neq 0$

∴ درجة الحدودية في البسط يجب أن تكون متساوية لدرجة الحدودية في المقام أي أن الحدودية في البسط يجب أن تكون من الدرجة الأولى.

$$ax^2 = 0 \implies a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{2x + 5} \quad \text{ومنه}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx + 3}{2x + 5}$$

$$= \frac{b}{2}$$

**نظريّة  $m = n = 1$**

$$\therefore \frac{b}{2} = 3 \implies b = 6$$

**حاول أن تحل**

أوجد قيمة كل من الثابتين  $a$ ,  $b$  إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{ax^2 + bx - 3} = -1$  (3)

**مثال (4)**

أوجد:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x - 4}}$

الحل:

$$f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x - 4}} = \frac{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{\cancel{x}^1 \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}^1 \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}}$$

عندما  $x > 0$  يكون  $|x| = x$

$x \neq 0$  بشرط

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2}$$

$$= 1 + 0 - 0 = 1 \quad , \quad 1 > 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right)} = \sqrt{1} = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}$$

$$= 1 - 0 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

حاول أن تحل

أوجد: 4

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x + 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 9}}$

## نهايات بعض الدوال المثلثية

### Limits of Some Trigonometric Functions

#### سوف تعلم

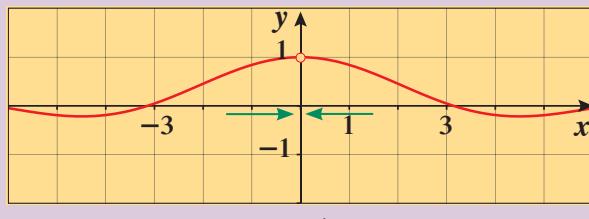
- نهايات بعض الدوال المثلثية.
- نظرية الإحاطة.
- استخدام نظرية الإحاطة.

#### المفردات والمصطلحات:

- نهاية دالة مثلثية a Trigonometric Function

- نظرية الإحاطة

#### Sandwich Theorem



شكل (1)

$x$	$y$
-0.3	0.98507
-0.2	0.99335
-0.1	0.99833
-0.01	0.9998
0	ERROR
0.01	0.9998
0.1	0.99833
0.2	0.99335
0.3	0.98507
$y = \frac{\sin x}{x}$	

يبين الشكل (1) الرسم البياني للدالة  $f$  كما يعطي الجدول أعلاه قيمةً للدالة موضحاً أنّ نهاية  $f(x)$  تساوي 1 عندما تقترب  $x$  من الصفر.

من فقرة «دعنا نفك ونتناقش» نجد أن:

#### نظرية (12)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \quad \text{حيث } x \text{ بالراديان}$$

#### نتيجة (1)

إذا كان  $a$  ،  $b$  عددين حقيقيين،  $a \neq 0$  ،  $b \neq 0$  فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

#### معلومة:

في دراستنا للدوال المثلثية يكون قياس الزوايا بالراديان.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5} \quad \text{فمثلاً:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$$

وبتطبيق تعريف النهاية على الدوال المثلثية الأساسية نجد أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$$

ويمكننا تطبيق نظريات النهايات من البنود السابقة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية. يمكننا استنتاج أن:  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos ax = 1, \quad a \in R$

مثال (1)

أوجد:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{\cos x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

الحل:

a) 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2} \\ &= 1 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

نظريّة (قاعدة الضرب)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{\cos x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, \quad 1 \neq 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{\cos x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x-3)}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} \\ &= \frac{-3}{1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

نظريّة

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$

اضرب البسط والمقام في  $1 + \cos x$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{(1-\cos x)(1+\cos x)} \cdot (1+\cos x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{1-\cos^2 x} \cdot (1+\cos x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot (1+\cos x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \left( \frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot (1+\cos x) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \left( \frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1+\cos x) \right) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1) + \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \right) \\ &= (1)^2 \times (1+1) \\ &= 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

حاول أن تحل

a) هل يمكنك حل c) في المثال (1) بطريقة أخرى؟

b) أوجد النهاية:

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x}$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$

مثال (2)

أوجد:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan x - 3 \sin x}{4x}$

الحل:

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, 1 \neq 0$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$

$= 1 \times \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$

قاعدة الضرب، توزيع النهاية

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \neq 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan x - 3 \sin x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{5 \tan x}{4x} - \frac{3 \sin x}{4x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan x}{4x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{4x}$

$= \frac{5}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} - \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

$= \frac{5}{4} \times 1 - \frac{3}{4} \times 1$

$= \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

نظرية (قاعدة الطرح)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

بسط

حاول أن تحل

أوجد: 2

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \tan x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x + x^2 \cos x}{5x}$

نتيجة (2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

نتيجة (3)

إذا كان  $a, b \in \mathbb{R}^*$  فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

مثال (3)

أوجد:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + \sin x}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x}$

الحل:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{5x + \sin x}{x} &= \frac{5x}{x} + \frac{\sin x}{x} \\ &= 5 + \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

قسمة البسط على المقام

بسط:  $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + \sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} 5 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\ &= 5 + 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

نظرية (قاعدة الجمع)

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{3} \cdot \frac{\tan x}{x} - \frac{2}{3} \cos x \right)$$

قسمة البسط على المقام

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \cos x \\ &= \frac{1}{3} \times 1 - \frac{2}{3} \times 1 \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

بسط

حاول أن تحل

أوجد: 3

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - x^2}{3x^2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x + 3x \cos 4x}{5x}$$

## Sandwich Theorem

## نظرية الإحاطة

إذا لم يكن ممكناً إيجاد قيمة النهاية بطريقة مباشرة، فبإمكاننا إيجادها بطريقة غير مباشرة باستخدام نظرية الإحاطة.

تعلق هذه النظرية بدلالة  $f$  قيمتها بين قيم دالتين آخرين  $g$ ,  $h$ ، حيث إذا كان للدالتين  $g$ ,  $h$  النهاية نفسها عندما  $x \rightarrow c$  فإن للدلالة  $f$  حينها النهاية نفسها عندما  $x \rightarrow c$

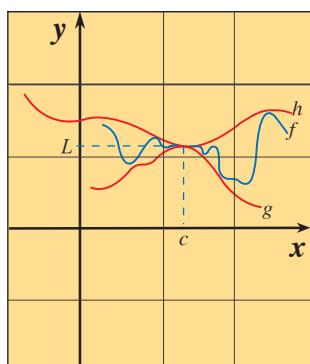
معلومة:

تسمى نظرية الإحاطة أحياناً

Squeeze Theorem

Sandwich Theorem

or Pinching Theorem



## نظرية (13): نظرية الإحاطة

### Sandwich Theorem

ليكن  $L$ ,  $c$  عددين حقيقيين

فإذا كان  $x \neq c$  ،  $c$  في جوار  $x$  لـ  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L \quad \text{وكان}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{فإن:}$$

مثال (4)

أوجد:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \sin(\frac{1}{x}))$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (4 - x^2 \sin \frac{1}{x})$

الحل:

نعلم أن قيمة دالة الجيب تنتمي إلى الفترة  $[-1, 1]$

a)  $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \sin \frac{1}{x}) = 0$$

اضرب في  $x^2$

ومن نظرية الإحاطة

b)  $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \implies 1 \geq -\sin \frac{1}{x} \geq -1$

قيمة دالة الجيب تنتمي إلى الفترة  $[1, -1]$

$$\therefore -1 \leq -\sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$-x^2 \leq -x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$4 - x^2 \leq 4 - x^2 \sin \frac{1}{x} \leq 4 + x^2$$

اضف 4

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (4 - x^2) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (4 + x^2) = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (4 - x^2 \sin \frac{1}{x}) = 4$$

نظرية الإحاطة

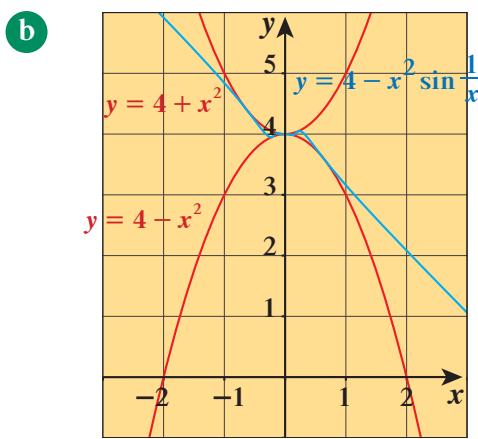
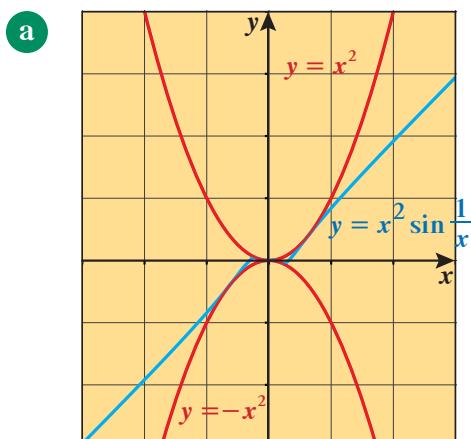
حاول أن تحل

أوجد: 4

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cos \frac{1}{x^2})$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 + x^2 \sin \frac{1}{2x})$

. 4 الأشكال التالية تتحقق بيانياً المثال



كذلك يمكننا استخدام نظرية الإحاطة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية عندما  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**مثال (5)**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

أوجد:  
الحل:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

نعلم أن:

$$\forall x > 0, \quad -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

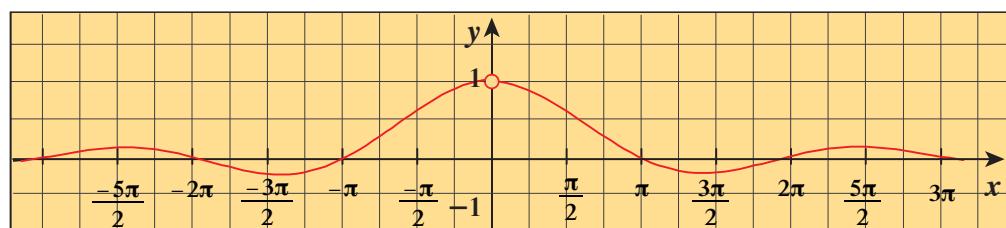
نظرية الإحاطة

حاول أن تحل

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$$

أوجد: 5

ويمكننا التأكد من صحة حل المثال السابق بيانياً كالتالي:



الرسم البياني للدالة  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  يتذبذب حول محور السينات، وسعة التذبذب تتناقص للصفر عندما  $x \rightarrow \pm\infty$ .

يبين جدول قيم الدالة  $f$  أن  $0 \rightarrow f(x) \rightarrow \infty$  عندما  $x \rightarrow \pm\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

ويمكن استنتاج

كذلك يمكن استنتاج

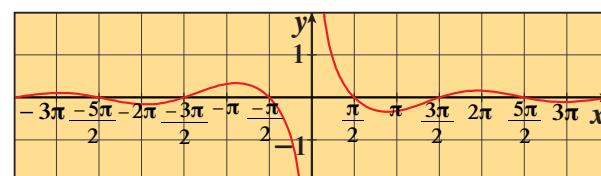
$x$ (rad)	$y = \frac{\sin x}{x}$
$\frac{7\pi}{2}$	-0.091
$\frac{37\pi}{7}$	0.0224
150	-0.00477
240	0.00394
300	-0.00333
600	0.000074

الرسم البياني للدالة  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$  يذبذب حول محور السينات وسعة التذبذب تتناقص للصفر عندما  $x \rightarrow \pm\infty$  ويمكن استنتاج

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

أن

$x$ (rad)	$y = \frac{\cos x}{x}$
$3\pi$	-0.106
$4\pi$	0.0795
100	-0.00862
200	0.002435
300	-0.0000736
450	0.00162256

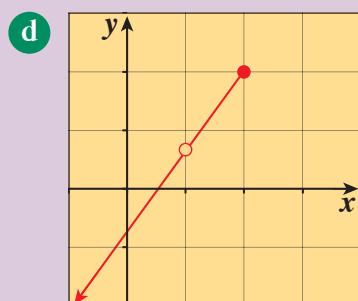
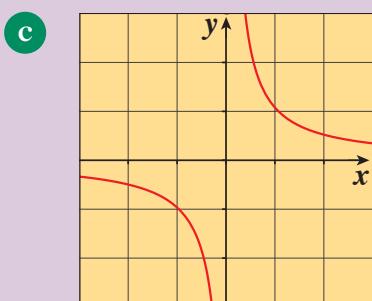
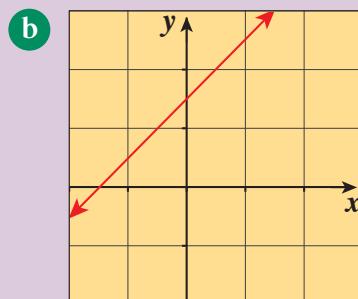
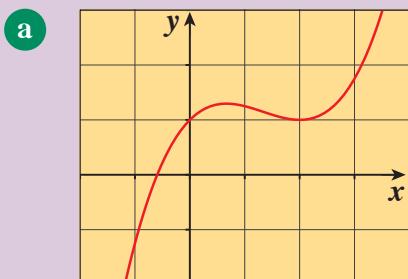


## الاتصال

### Continuity

#### دعنا نفك ونناقش

البيانات التالية توضح منحنيات دوال مختلفة:



أي من المنحنيات أمكن رسمه دون رفع سن القلم؟ وأيها لزم رفع سن القلم؟

#### Continuity at a Point

#### الاتصال عند نقطة

1 المنحنيات في البيانات a , b .

نقول عنها أن ليس بها نقاط انفصال «متصلة عند كل نقطة من نقاطها».

2 المنحنيات في البيانات c , d .

نقول إن هذه المنحنيات لها نقاط انفصال.



شكل (2)

يستخدم الأطباء مبدأ الاتصال لدراسة منحنى تخطيط القلب.  
يبين الشكل (1) تخطيطاً متصلًا بينما يبين الشكل (2) تخطيطاً به نقاط انفصال.



شكل (1)

#### سوف تعلم

- الاتصال عند نقطة.
- الانفصال عند نقطة.
- أنواع الانفصال.
- التخلص من الانفصال.

#### المفردات والمصطلحات:

**Continuity** • الاتصال  
• اتصال من الجهتين

**Two-Side Continuity** • اتصال من جهة اليمين

**Continuity From the Right** • اتصال من جهة اليسار

**Continuity From the Left** • الاتصال عند نقطة

**Continuity at a Point** • انفصال

**Discontinuity** • انفصال يمكن التخلص منه

**Removable Discontinuity** • انفصال نتيجة قفرة

**Jump Discontinuity** • انفصال لا نهائي

**Infinite Discontinuity**

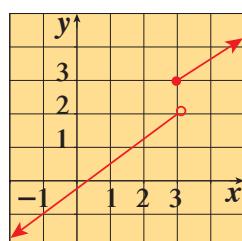
#### معلومة:

بيان تخطيط القلب يعبر بوضوح عن الاتصال إذا كان القلب سليماً ومعافى، وعن الانفصال إذا كان يوجد انسداد في الشرايين.



## تدريب

1

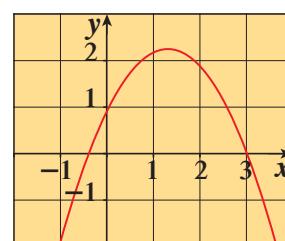


$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots$$

$$f(3) \dots$$

ماذا تلاحظ؟

2

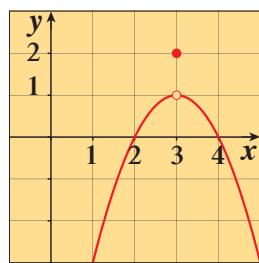


$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots$$

$$f(3) \dots$$

ماذا تلاحظ؟

3

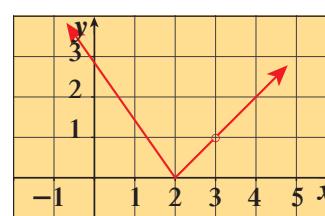


$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots$$

$$f(3) \dots$$

ماذا تلاحظ؟

4



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \dots$$

$$f(3) \dots$$

ماذا تلاحظ؟

**تعريف (8): الاتصال عند نقطة**

تكون الدالة  $f$  متصلة عند  $x = c$  في مجالها إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

من التعريف السابق نجد أنه لتكون  $f$  متصلة عند  $c$  يجب أن تتوافر الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة  $f$  معرفة عند  $x = c$  أي  $f(c)$  موجودة.

2.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  موجودة

3.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أيٌ شرط من الشروط السابقة فنقول إن  $f$  منفصلة (ليست متصلة) عند  $x = c$ .

**مثال (1)**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : x \geq 1 \\ 5x - 1 & : x < 1 \end{cases} \quad \text{لتكن } f :$$

ابحث اتصال الدالة  $f$  عند  $x = 1$

الحل:

$$f(1) = (1)^2 + 3(1) = 1 + 3 = 4 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (5x - 1) = 5(1) - 1 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 3x) = (1)^2 + 3(1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

من (1) و (2)

$x = 1$  متصلة عند  $f$  ∴

حاول أن تحل

ابحث اتصال  $f$  عند  $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x : x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1} : x > 0 \end{cases} \quad 1 \text{ لتكن الدالة } f$$

مثال (2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} : x > 3 \\ 7 : x \leq 3 \end{cases} \quad \text{لتكن } f$$

ابحث اتصال الدالة  $f$  عند  $x = 3$

الحل:

$$f(3) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 7 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+3) = 3+3 = 6$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

ليست موجودة  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

∴ الدالة  $f$  ليست متصلة عند  $x = 3$

حاول أن تحل

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 : x < 2 \\ 1 : x = 2 \\ x^2 + 1 : x > 2 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة  $f$  عند  $x = 2$  حيث

في المثال السابق نجد أن  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = 7$  في هذه الحالة تكون الدالة  $f$  متصلة عند  $x = 3$  من جهة اليسار وسوف تتطرق لذلك لاحقاً.

**مثال (3)**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} & : x \neq 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة  $f$  عند  $x = 2$  حيث  $x = 2$  هي  
الحل:

$$\frac{x-2}{|x-2|} = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2} & : x > 2 \\ \frac{-x+2}{x-2} & : x < 2 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & : x > 2 \\ -x+2 & : x < 2 \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 1 & : x > 2 \\ -1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

ليست موجودة

$\therefore$  الدالة  $f$  ليست متصلة عند  $x = 2$ .

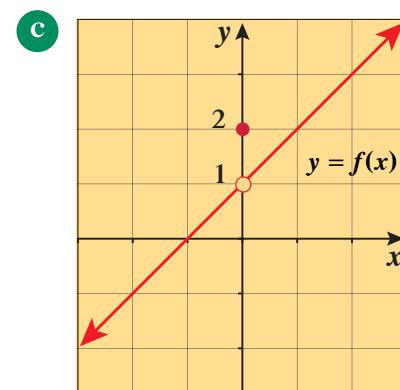
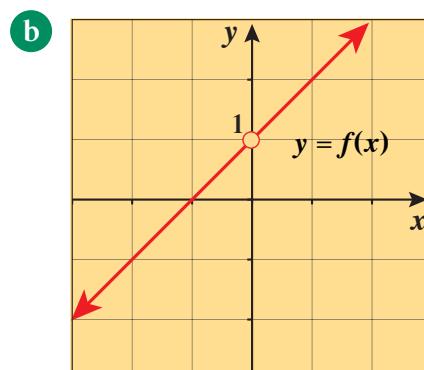
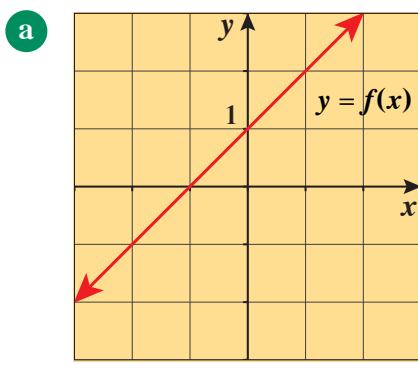
**حاول أن تحل**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x+1} - 2x & : x \neq -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$$

3 ابحث اتصال الدالة  $f$  عند  $x = -1$  حيث  $x = -1$  هي

**ملاحظة:** في المثال السابق الدالة  $f$  متصلة عند  $x = 2$  من جهة اليمين. لماذا؟

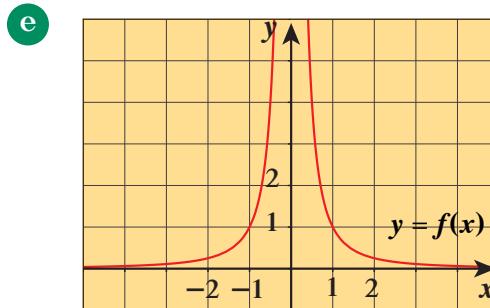
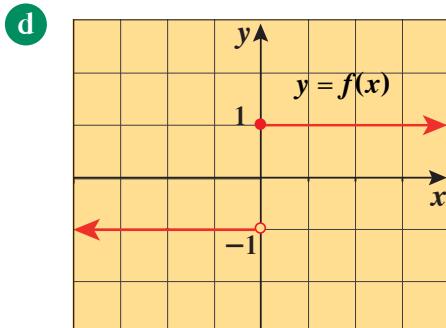
يبين الشكلان **a**, **b** أدناه أمثلة توضيحية لبعض الأنواع المختلفة للانفصال:



فالدالة الموضحة في الشكل **a** متصلة عند  $x = 0$  ولكن تكون متصلة يقتضي أن تكون  $f(0) = 1$ . الدالة الموضحة في الشكل **b** ليست متصلة عند  $x = 0$  ولكن تكون متصلة يقتضي أن تكون  $f(0) = 1$  مساوية لـ 1 بدلاً من 2.

الانفصال في **c** هو انفصال يمكن التخلص منه من خلال إعادة تعريف الدالة عند  $x = 0$  وذلك بوضع  $f(0) = 1$ .

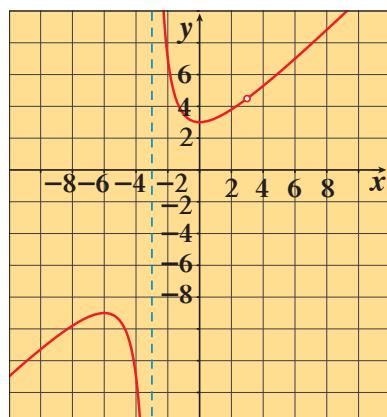
والأشكال التالية أمثلة أخرى لدوال منفصلة:



وإذا نظرنا إلى الانفصال في d ، e حيث  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  غير موجودة ولا توجد طريقة لإصلاح ذلك الوضع بتغيير  $f$  عند الصفر. للدالة في d لها انفصال نتيجة قفرة؛ وال نهايات ذات الجانب الواحد موجودة لكن لها قيم مختلفة. (نهاية الدالة من جهة اليمين  $\neq$  نهاية الدالة من جهة اليسار).  
والدالة  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  في e لها انفصال لا نهائي. (النهاية غير موجودة).

## The Removal of Discontinuity

### التخلص من الانفصال



لتكن الدالة  $f$  :

لاحظ أن مجال  $f$  هو  $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$$f(x) = \frac{(x+3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2+3x+9}{x+3}, \quad x \neq 3$$

ومن الرسم البياني للدالة  $f$  نلاحظ أن لبيان  $f$  انفصال عند  $x = 3$  يمكن التخلص منه لأن النهاية موجودة بينما الانفصال عند  $x = -3$  لا يمكن التخلص منه لأن النهاية غير موجودة.

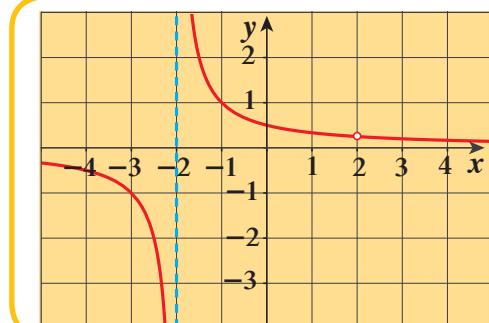
للتخلص من الانفصال نعرف  $f$  عند  $x = 3$  بـ  $x = 3$  بحيث نجعل  $f(3) = f(3)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3}$$

$$= \frac{9 + 9 + 9}{3 + 3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} & : x \neq 3, x \neq -3 \\ \frac{9}{2} & : x = 3 \end{cases}$$

نسمي الدالة  $g$  بعد إعادة تعريفها:



مثال (4)

لتكن الدالة :  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$  الموضح بيانها بالشكل

a) بين أن  $f(x)$  غير متصلة عند  $x = 2, x = -2$

b) أعد تعريف الدالة  $f$  بحيث تصبح متصلة عند  $x = 2$

الحل:

a)  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$

$$= \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2} , \quad x \neq 2$$

حل المقام إلى عوامل

$$D = \mathbb{R} - \{-2, 2\} : f$$

مجال  $f$  غير متصلة عند  $x = 2$  ،  $x = -2$  لأنها غير معروفة عند هما.

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

$\therefore$  يمكن إعادة تعريف  $f$  عند  $x = 2$  لأن  $x = 2$  لأن

نعيد تعريف الدالة  $f$  ونسمى الدالة بـ  $g$ .

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} & : x \neq 2, x \neq -2 \\ \frac{1}{4} & : x = 2 \end{cases}$$

حاول أن تحل

4 أعد تعريف الدالة  $f$  :  $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x-1}$  لتصبح دالة متصلة عند  $x = 1$

## نظريات الاتصال

### Continuous Theorems

#### دعنا نفك ونناقش

لتكن الدالة  $f$  :  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

والدالة  $g$  :  $g(x) = |x - 2|$

والدالة  $q$  :  $q(x) = x^2 - 5$

ابحث اتصال كل من  $f, g$  عند  $x = 2$  ①

ابحث اتصال كل من  $f+q, f \cdot q$  عند  $x = 2$  ②

لتكن  $h$  :  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  ③

اكتب  $h$  دون استخدام رمز القيمة المطلقة ④ a

هل الدالة  $h$  متصلة عند  $x = 2$  ولماذا؟ ④ b

#### سوف تعلم

- نظريات الاتصال.
- دوال متصلة.
- الدوال المركبة.
- اتصال الدوال المركبة.

#### المفردات والمصطلحات:

- دالة متصلة Continuous Function
- دالة مركبة Composite Function

#### نظرية (14): خواص الدوال المتصلة

### Properties of Continuous Functions

إذا كانت  $f, g$  دالتين متصلتين عند  $x = c$ ، فإن الدوال التالية هي دوال متصلة عند  $x = c$

1  $f+g$  : الجمع

2  $f-g$  : الطرح

3  $k \cdot f$  ،  $k \in \mathbb{R}$  : الضرب في ثابت

4  $f \cdot g$  : الضرب

5  $\frac{f}{g}$  ،  $g(c) \neq 0$  : القسمة

#### معلومة:

تمثل الأفعوانية خطًا متصلًا  
لمسار العربة.



### Continuous Functions

### دوال متصلة

1 الدالة  $f(x) = k$  حيث  $k$  ثابت متصلة عند كل  $c \in \mathbb{R}$ .

2 الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل  $c \in \mathbb{R}$ .

3 الدالة الحدودية النسبية  $\frac{f}{g}$  متصلة عند كل عدد حقيقي  $c$  في مجالها أي  $c \in D$ .

4 الدالة  $f(x) = |x|$  متصلة عند كل  $c \in \mathbb{R}$ .

5 الدالة المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي  $c$  في مجالها أي  $c \in D$ .

**مثال (1)**

ابحث اتصال الدالة  $f$  في كل مما يلي:

a)  $f(x) = x^2 + |x|$ ,  $c = -1$

b)  $f(x) = \sin x - \cos x$ ,  $c = \frac{\pi}{2}$

الحل:

a) لتكن الدالة  $g$  :  $g(x) = x^2$

الدالة  $h$  :  $h(x) = |x|$

الدالة  $g$  دالة كثيرة حدود متصلة عند  $x = -1$

الدالة  $h$  دالة مطلق  $x$  متصلة عند  $x = -1$

∴ دالة الجمع  $f$  حيث  $f(x) = g(x) + h(x)$  هي دالة متصلة عند  $x = -1$ .

b) لتكن الدالة  $g$  :  $g(x) = \sin x$

الدالة  $h$  :  $h(x) = \cos x$

الدالة  $g$  دالة مثلثية متصلة عند  $x = \frac{\pi}{2}$

الدالة  $h$  دالة مثلثية متصلة عند  $x = \frac{\pi}{2}$

∴ دالة  $f$  حيث  $f(x) = g(x) - h(x)$  متصلة عند  $x = \frac{\pi}{2}$ .

حاول أن تحل

1) ابحث اتصال الدالة  $f$  في كل مما يلي:

a)  $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|$ ,  $c = 3$

b)  $f(x) = \frac{\tan x}{x+1}$ ,  $c = \frac{\pi}{4}$

**مثال (2)**

ابحث اتصال الدالة  $f$  :  $f(x) = \frac{x-2}{x^2+9} - \frac{1}{x}$

الحل:

لتكن الدالة  $g$  :  $g(x) = \frac{x-2}{x^2+9}$

الدالة  $h$  :  $h(x) = \frac{1}{x}$

الدالة  $g$  دالة حدودية نسبية متصلة عند  $x = 3$  (لأن المقام لا يساوي الصفر عند  $x = 3$ ).

الدالة  $h$  دالة حدودية نسبية متصلة عند  $x = 3$  (لأن المقام لا يساوي الصفر عند  $x = 3$ ).

∴ دالة الطرح  $f$  حيث  $f(x) = g(x) - h(x)$  هي دالة متصلة عند  $x = 3$ .

حاول أن تحل

2) ابحث اتصال الدالة  $f$  :  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2x}{x-2}$

## اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

### نظريّة (15)

**a** الدالة الجذرية  $y = \sqrt[n]{x}$  متصلة عند كل  $x = c : c \in \mathbb{R}^+$  عدد صحيح زوجي موجب، ومتصلة عند كل  $x = c : c \in \mathbb{R}$  عدد صحيح فردي أكبر من 1.

**b** إذا كانت  $g$  دالة متصلة عند  $c = x$  وكانت  $g(c) > 0$  فإن الدالة:  $f(x) = \sqrt{g(x)}$  متصلة عند  $x = c$

### مثال (3)

ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند العدد المبيّن:

**a**  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1}, \quad x = 1$

**b**  $f(x) = \sqrt{x+3}, \quad x = -1$

الحل:

**a** لكن الدالة  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  :  $g$  دالة جذرية حيث  $n = 3$  (عدد صحيح فردي) متصلة عند  $x = 1$

$h(x) = x^2 + 1$  :  $h$  دالة كثيرة حدود متصلة عند  $x = 1$

وحيث إن  $h(1) = 2, 2 \neq 0$

$\therefore$  الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  متصلة عند  $x = 1$

**b** نفرض أن  $g(x) = x + 3$  حيث  $3 \geq -x$

$g$  دالة متصلة عند  $x = -1$

وحيث إن  $g(-1) = 2, 2 > 0$

$\therefore$  الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+3}$

حاول أن تحل

3 ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند  $-2$

**a**  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 4}$

**b**  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

## Composite Function

## الدالة المركبة

إذا كانت كل من  $g, f$  دالة حقيقية فإننا سترى من خلال بعض الأمثلة أننا نستطيع تعين دالة جديدة تنتج من تركيب الدالتين  $g, f$  إذا توفرت بعض الشروط.

لأخذ على سبيل المثال الدالتين الحقيقيتين:

$$f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x - 1 \quad \text{حيث:}$$

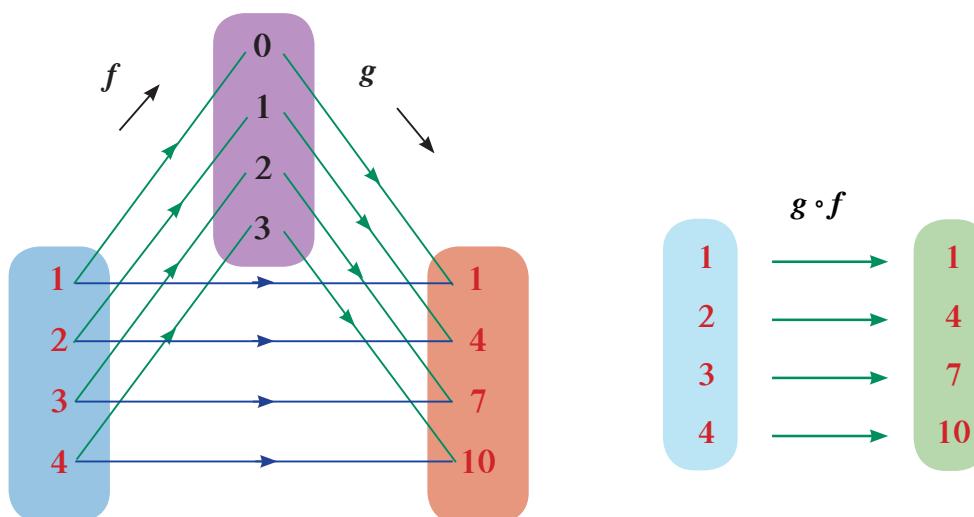
$$g: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = 3x + 1$$

واضح أن:

تحت تأثير الدالة الأولى $f$	تحت تأثير الدالة الثانية $g$
$1 \longrightarrow 1 - 1 = 0$	$0 \longrightarrow 3 \times 0 + 1 = 1$
$2 \longrightarrow 2 - 1 = 1$	$1 \longrightarrow 3 \times 1 + 1 = 4$
$3 \longrightarrow 3 - 1 = 2$	$2 \longrightarrow 3 \times 2 + 1 = 7$
$4 \longrightarrow 4 - 1 = 3$	$3 \longrightarrow 3 \times 3 + 1 = 10$

وإذا فرضنا دالة ثالثة تعمل عمل الدالتين  $g$  ،  $f$  معًا ( $f \circ g$ ) لوجدنا أنه تحت تأثير هذه الدالة الجديدة:



نرمز للدالة الجديدة بالرمز  $(g \circ f)$  وتقرأ  $g$  بعد  $f$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = 1$$

ويكون:

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 4$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(2) = 7$$

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(3) = 10$$

لاحظ أن: مدى الدالة الأولى  $f$  هو مجال الدالة الثانية  $g$  وإلا لما أمكن تعريف  $(g \circ f)$ .

وعموماً:

إذا كانت كل من  $g$  ،  $f$  دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة  $f$  مجموعه جزئية من مجال الدالة  $g$  فإنه يتعين دالة مركبة  $h$ :

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب.

**مثال (4)**

الدالتان  $f$ ,  $g$  معروفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي: أوجد:  $f(x) = 1 + x$ ,  $g(x) = x^2 - 1$

a)  $(g \circ f)(x)$

b)  $(g \circ f)(2)$

c)  $(f \circ g)(x)$

d)  $(f \circ g)(2)$

الحل:

a)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (1 + x)^2 - 1 = x^2 + 2x$

حل آخر

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 + x) = (1 + x)^2 - 1 = 1 + 2x + x^2 - 1 = x^2 + 2x$$

b)  $(g \circ f)(2) = (2)^2 + 2(2) = 8$

c)  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + g(x) = 1 + x^2 - 1 = x^2$

حل آخر

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 1 + x^2 - 1 = x^2$$

d)  $(f \circ g)(2) = (2)^2 = 4$

حاول أن تحل

إذا كانت  $f$ ,  $g$  معروفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي: 4 أوجد:  $f(x) = 2x + 3$ ,  $g(x) = x^2 + 3$

a)  $(g \circ f)(x)$

b)  $(g \circ f)(-1)$

c)  $(f \circ g)(x)$

d)  $(f \circ g)(-1)$

نستنتج من مثال (4) أن:

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

إلا في بعض الحالات الخاصة.

**مثال (5)**

لتكن:  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = x^4 + 2$

أوجد:

a)  $(f \circ g)(x)$

b)  $(f \circ g)(0)$

c)  $(g \circ f)(x)$

d)  $(g \circ f)(0)$

الحل:

a)  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^4 + 2}$

لاحظ أن مجال  $f$  هو  $[0, \infty)$

b)  $(f \circ g)(0) = \sqrt{(0)^4 + 2} = \sqrt{2}$

وأن مدى  $g$  هو  $[2, \infty)$  وهو مجموعة جزئية من مجال  $f$

c)  $(g \circ f)(x) = (f(x))^4 + 2 = (\sqrt{x})^4 + 2 = x^2 + 2$

مجال  $g$  هو  $\mathbb{R}$

d)  $(g \circ f)(0) = (0)^2 + 2 = 2$

مدى  $f$  هو مجموعة جزئية منه  $\therefore$

حاول أن تحل

أوجد:  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  ،  $g(x) = \frac{3}{x^2+4}$  لتكن: 5

a)  $(f \circ g)(x)$

b)  $(g \circ f)(\sqrt{3})$

## Continuity of Composite Functions at a Point

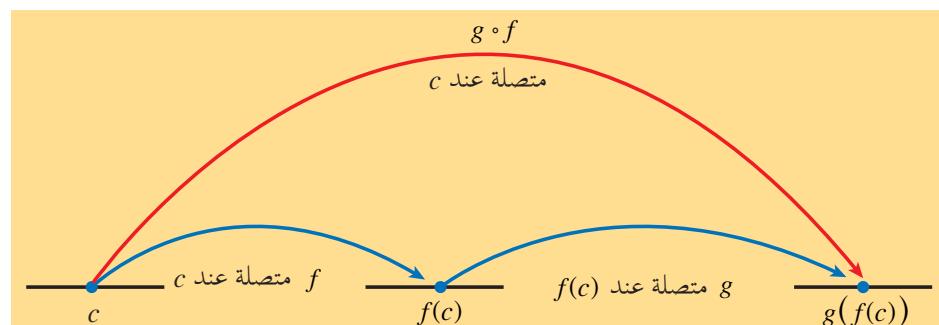
## اتصال الدوال المركبة عند نقطة

### نظرية (16): اتصال الدوال المركبة

إذا كانت  $f$  متصلة عند  $c$  ، و  $g$  متصلة عند  $f(c)$  فإن الدالة المركبة  $g \circ f$  متصلة عند  $c$ .

أي أن نهاية  $(g(f(x)))$  عندما  $x \rightarrow c$  هي  $g(f(c))$  بمعنى

$$\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = g(f(c))$$



مثال (6)

لتكن:  $x = -2$ . ابحث اتصال الدالة  $g \circ f$  عند  $x = -2$

الحل:

(1)  $x = -2$  دالة متصلة عند  $f$

$f(-2) = 9$

$x \in \mathbb{R}^+$  دالة متصلة عند كل  $g$

$\therefore g$  دالة متصلة عند  $9$

(2)  $x = f(-2) = 9$  دالة متصلة عند  $g$

من (2) ، (1) نجد أن  $g \circ f$  متصلة عند  $x = -2$

حاول أن تحل

لتكن: 6  $x = 1$  ابحث اتصال الدالة  $f \circ g$  عند  $x = 1$ .  $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$  ،  $g(x) = 2x + 3$

مثال (7)

لتكن: 7 ابحث اتصال الدالة  $f$  عند  $x = 2$   $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

الحل:

نفرض أن:  $g(x) = |x|$  ،  $h(x) = x^2 - 5x + 6$

فنجده أن:  $f(x) = (g \circ h)(x)$

$$g(h(x)) = |x^2 - 5x + 6|$$

(1) دالة متصلة عند  $x = 2$   $h$

$$h(2) = 4 - 10 + 6 = 0$$

$x = 0$  دالة متصلة عند

(2) أي أن  $g$  دالة متصلة عند  $x = h(2)$

من (2) ، (1) نجد أن  $g \circ h$  متصلة عند  $x = 2$

$\therefore$  الدالة  $f$  متصلة عند  $x = 2$ .

حاول أن تحل

لتكن: 7  $x = 0$  ابحث اتصال الدالة  $f$  عند  $x = 0$   $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

## الاتصال على فترة

### Continuity on an Interval

سوف تعلم

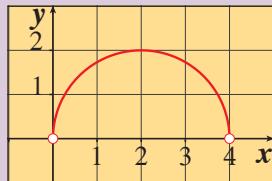
- الاتصال على فترة.
- ناتج تركيب دالتين متصلتين.

المفردات والمصطلحات:

- الاتصال على فترة
- Continuity on an Interval

#### دعنا نفك ونتناقش

لتكن الدالة  $f$  معرفة على الفترة  $(0, 4)$ :  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$



a) ابحث اتصال  $f$  عند  $x = 1, x = 2$

b) هل  $f$  متصلة عند  $x = 0$  من جهة اليمين؟

c) هل  $f$  متصلة عند  $x = 4$  من جهة اليسار؟

d) هل توجد نقاط تنتهي إلى الفترة  $(0, 4)$  لا تكون فيها الدالة  $f$  متصلة؟

### Continuity on an Interval

### الاتصال على فترة

**تعريف (9) الاتصال على فترة مفتوحة:**

لتكن الدالة  $f$  معرفة على الفترة  $(a, b)$  فإننا نقول أن الدالة  $f$  متصلة على الفترة المفتوحة  $(a, b)$

إذا كانت  $f$  متصلة عند كل  $x$  تنتهي إلى الفترة  $(a, b)$

**تعريف (10) الاتصال على فترة مغلقة:**

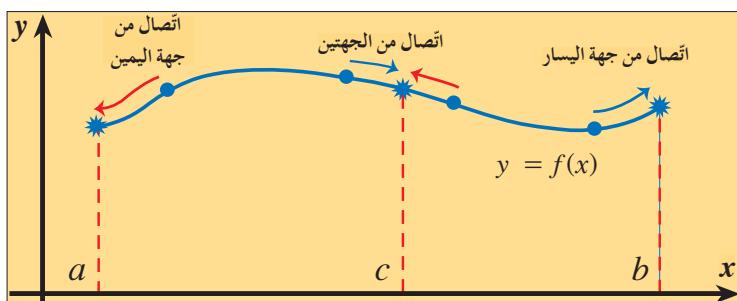
لتكن الدالة  $f$  معرفة على الفترة  $[a, b]$  فإننا نقول أن الدالة  $f$  متصلة على الفترة المغلقة  $[a, b]$  إذا

تحقق الشرط الثلاثة التالية:

1) الدالة  $f$  متصلة على الفترة المفتوحة  $(a, b)$

2) الدالة  $f$  متصلة عند  $x = a$  من جهة اليمين أي أن:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

3) الدالة  $f$  متصلة عند  $x = b$  من جهة اليسار أي أن:  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$



الاتصال عند النقاط  $a, b, c$  للدالة  $y = f(x)$  على الفترة  $[a, b]$ .

**مثال (1)**

ادرس اتصال الدالة  $f$  على  $[1, 3]$  حيث:  
الحل:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & : x = 1 \\ x^2 - 3 & : 1 < x < 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = x^2 - 3 \quad : \quad x \in (1, 3)$$

$$\forall c \in (1, 3)$$

$$f(c) = c^2 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} (x^2 - 3) = c^2 - 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad \forall c \in (1, 3)$$

(1)

الدالة  $f$  متصلة على  $(1, 3)$

ندرس اتصال الدالة  $f$  عند  $x = 1$  من جهة اليمين.

$$f(1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3) = -2$$

$$\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

(2)

الدالة  $f$  متصلة عند  $x = 1$  من جهة اليمين.

ندرس اتصال الدالة  $f$  عند  $x = 3$  من جهة اليسار.

$$f(3) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 3) = 6$$

$$\therefore f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

(3)

الدالة  $f$  متصلة عند  $x = 3$  من جهة اليسار.

من (1), (2), (3)

الدالة  $f$  متصلة على  $[1, 3]$

حاول أن تحل

1

ادرس اتصال الدالة  $f$  على  $[1, 5]$  حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & : x = 1 \\ \frac{x^2 + 1}{x} & : 1 < x < 5 \\ \frac{26}{5} & : x = 5 \end{cases}$$

**ملاحظات:**

أولاً: إذا تحقق الشرطان 1 و 2 من التعريف (10) نقول إن الدالة  $f$  متصلة على  $[a, b]$ .

ثانياً: إذا تحقق الشرطان 1 و 3 من التعريف (10) نقول إن الدالة  $f$  متصلة على  $(a, b]$ .

ثالثاً: تبقى النظرية (14) صحيحة إذا استبدلنا النقطة بفترة بحيث تكون هذه الفترة مجموعة جزئية من مجال الدالة.

رابعاً: إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها.

خامساً: إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين  $[a, c]$ ,  $[c, b]$  فإن الدالة متصلة على  $[a, b]$ .

سادساً: يبقى التعريف (10) صحيحاً في حالة الفترات على الصورة  $(-\infty, b]$ ,  $[a, \infty)$ .

مثال (2)

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة:

a)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  ,  $[-1, 5]$

b)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$  ,  $[0, 5]$

الحل:

$f$  دالة حدودية نسبية ، a

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$$

$f$  متصلة على  $\mathbb{R}$  ∴

$$\therefore [-1, 5] \subseteq \mathbb{R}$$

$f$  متصلة على  $[-1, 5]$  ∴

b)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

$$x^2 - 4 = 0 \quad \forall x \in \{-2, 2\}$$

$f$  دالة حدودية نسبية متصلة ∵

$2 \in [0, 5]$  ،  $x = 2$  ∵  $f$  ليست متصلة عند 2

∴ الدالة  $f$  متصلة  $\forall x \in [0, 5] - \{2\}$

أي أنها متصلة على كل من  $[0, 2)$ ,  $(2, 5]$ .

حاول أن تحل

ادرس اتصال  $f$  على الفترة المبينة: 2

a)  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$  ,  $[0, 3]$

b)  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$  ,  $[0, 2]$

مثال (3)

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & : x \leq -1 \\ \frac{4}{x+3} & : x > -1 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة  $f$  على مجالها حيث:

الحل:

مجال الدالة  $f$  هو:  $D_f = (-\infty, -1] \cup (-1, \infty) = \mathbb{R}$

ندرس اتصال الدالة  $f$  على مجالها.

نفرض:

$g$  دالة كثيرة حدود متصلة على  $\mathbb{R}$ .

$$g(x) = x + 3$$

$$\therefore f(x) = g(x) \quad \forall x \in (-\infty, -1]$$

$\therefore f$  دالة متصلة على  $(-\infty, -1]$ .

$$(1) \quad h(x) = \frac{4}{x+3}$$

$$x \in \mathbb{R} - \{-3\}$$

نفرض:

$h$  دالة حدودية نسبية متصلة لكل

$$\therefore f(x) = h(x) \quad \forall x \in (-1, \infty)$$

$\therefore f$  متصلة على  $(-1, \infty)$ .

ندرس اتصال الدالة  $f$  عند  $x = -1$  من جهة اليمين.

$$f(-1) = 2$$

حيث نهاية المقام  $0 \neq$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4}{x+3} = 2$$

$$\therefore f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

$\therefore$  الدالة  $f$  متصلة عند  $x = -1$  من جهة اليمين.

من (1), (2), (3).

$\therefore$  الدالة  $f$  متصلة على الفترة  $(-\infty, \infty)$ .

$\therefore f$  متصلة على  $\mathbb{R}$ .

حاول أن تحل

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \quad x < 1 \\ -x+2 & , \quad 1 \leq x < 3 \\ 1 & , \quad x \geq 3 \end{cases} \quad : f \text{ لـ } 3$$

ادرس اتصال الدالة  $f$  على مجالها.

مثال (4)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & : \quad x < 0 \\ 2 & : \quad x = 0 \\ ax + b & : \quad x > 0 \end{cases} \quad : f \text{ لـ } 4$$

أوجد قيمة الثابتين  $a, b$

الحل:

$\therefore f$  دالة متصلة على مجالها  $\mathbb{R}$ .  $\therefore f$  متصلة عند  $x = 0$ .

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$f(0) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - a) = -a$$

$$\therefore -a = 2 \implies a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b$$

$$\therefore b = 2$$

حاول أن تحل

$$f(x) = \begin{cases} 5 & : x = 1 \\ ax + b & : 1 < x < 4 \\ b + 8 & : x = 4 \end{cases} \quad \text{لتكن الدالة } f \quad 4$$

متصلة على  $[1, 4]$ . أوجد قيم الثابتين  $a, b$ .

تعلمنا دراسة اتصال الدالة  $f(x) = \sqrt{g(x)}$  عند  $x = c$  وكذلك يمكننا دراسة اتصال الدالة  $f$  على فترة ما باستخدام التعميم التالي:

تعميم:

إذا كانت الدالة  $g$  متصلة على فترة ما،  $0 \geq g(x) \geq 0$  في هذه الفترة فإن الدالة  $f(x) = \sqrt{g(x)}$  متصلة على هذه الفترة.

مثال (5)

لتكن  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

أوجد  $D_f$  (مجال الدالة  $f$ ) ثم ادرس اتصال الدالة  $f$  على  $[-5, 0]$ .

الحل: نفرض أن  $f(x) = \sqrt{g(x)}$  ،  $g(x) = x^2 - 2x$

$$\therefore D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$$

$$x^2 - 2x \geq 0$$

$$x^2 - 2x = 0 \quad \text{المعادلة المنشورة:}$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0, x = 2$$



$\therefore$  مجال الدالة  $f$  هو  $(0, 2)$ .

لدراسة اتصال الدالة  $f$  على  $[-5, 0]$  حيث  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - (0, 2)$$

$\mathbb{R} - (0, 2)$  مجموعة جزئية من  $[-5, 0]$   $\therefore$

$$\therefore g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-5, 0] \quad (1)$$

معلومات:

إشارة الحدودية ( $f(x)$ ) تكون ثابتة لا تتغير في الفترة  $(a, b)$  إذا كانت هذه الفترة لا تحتوي على صفر من أصفار الحدودية ( $f(x)$ ). ولتعين إشارة الحدودية في هذه الفترة نعرض عن  $x$  بأي قيمة  $c \in (a, b)$ .

(2)  $g(x) = x^2 - 2x$  دالة متصلة على  $[-5, 0]$   
من (1), (2)  
 $f$  متصلة على  $[-5, 0]$

حاول أن تحل

5 . $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$  لكن  
أوجد  $D_f$  (مجال الدالة  $f$ ) ثم ادرس اتصال الدالة  $f$  على  $[6, 10]$ .

مثال (6)

$$D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$$

$$9 - x^2 \geq 0$$

$$9 - x^2 = 0 \quad \text{المعادلة الم対اظرة:}$$

$$(3 - x)(3 + x) = 0$$

$$x = 3, x = -3$$



$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-3, 3] \quad (1)$$

. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$  حيث  $[-3, 3]$  هو مجال الدالة  $f$   
لدراسة اتصال الدالة  $f$  على  $[-3, 3]$

$f$  متصلة على  $[-3, 3]$

حاول أن تحل

6 . $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$  لكن  
ادرس اتصال الدالة  $f$  على  $[1, 3]$ .

ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منها متصلة على  $\mathbb{R}$  هو دالة متصلة على  $\mathbb{R}$ .

مثال (7)

لتكن:  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$ . ادرس اتصال الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

الحل:

نفرض أن:  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  ،  $h(x) = x^2 - 5x + 4$

$$f(x) = (g \circ h)(x)$$

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$$

$$= g(x^2 - 5x + 4)$$

$$= \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$$

$\therefore$  الدالة  $h$  متصلة على  $\mathbb{R}$ .

$\therefore$  الدالة  $g$  متصلة على  $\mathbb{R}$ .

$\therefore$  الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$  لأنها عبارة عن تركيب دالتين كل منهما متصلة على  $\mathbb{R}$ .

حاول أن تحل

7. لتكن:  $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$ . ادرس اتصال الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

المرشد لحل المسائل

لتكن الدالة:  $f(x) = \frac{x^3 + kx^2 + 3x - 2}{x^2 - x - 2}$  حيث  $k$  عدد صحيح.

أوجد مجال الدالة  $f$  a

**b** أوجد قيمة  $k$  التي تجعل من الممكن إعادة تعريف الدالة  $f$  لتصبح متصلة عند  $x = 2$ ، ثم أعد تعريف الدالة.

## الحل:

$$x^2 - x - 2 \neq 0$$

$$(x + 1)(x - 2) \neq 0$$

$$x \neq -1, x \neq 2$$

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$$

المقام لا يساوى صفر a

تحليل المقام

مجال الدالة:

۵

$$x^3 + kx^2 + 3x - 2 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

## أعداد حقيقة $a, b, c$

$$x^3 + kx^2 + 3x - 2 = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$$

نحو سع

A graph of a parabola opening upwards on a Cartesian coordinate system. The vertex of the parabola is at (2, 0), which is marked with an open circle. The x-axis is labeled with integers from -5 to 6, and the y-axis is labeled with integers from -8 to 5. The parabola passes through the points (-1, 8), (0, 3), (1, 0), (3, 0), and (4, 3).

**بمقارنة المعاملات نجد أن:**

$$k = b - 2a = -1 - 2(1) = -3 \quad \text{فنسنتج أن:}$$

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

تصبح معادلة الدالة:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = \frac{3}{3} = 1$$

عندما يمكن إعادة تعريف الدالة وسميتها بـ  $g$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{x^2 - x - 2} & , \quad x \neq 2, \quad x \neq -1 \\ 1 & , \quad x = 2 \end{cases}$$

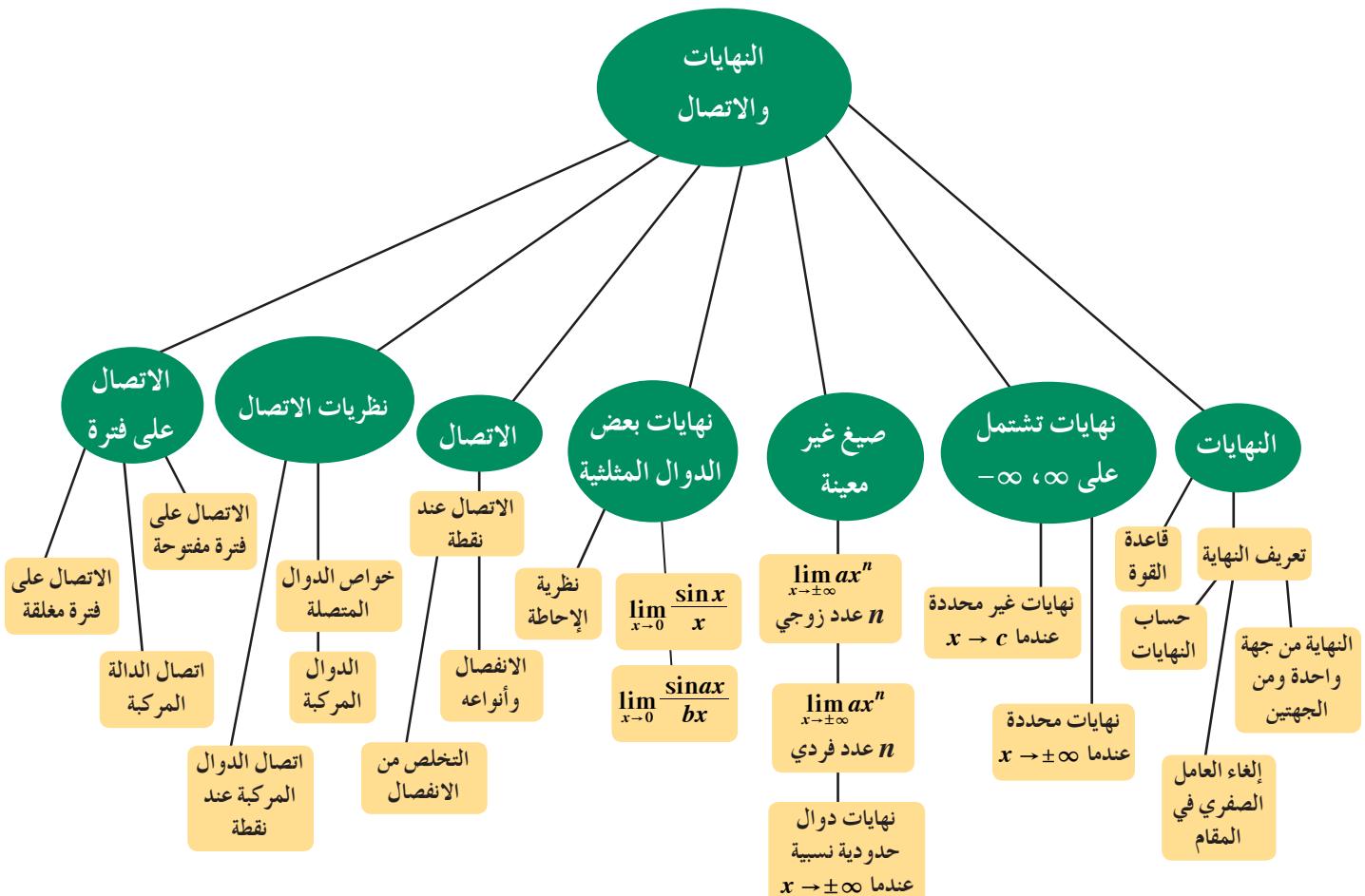
مسألة إضافية

$$\text{لتكن الدالة } f(x) = \frac{x^4 + kx^3 - 15x^2 + 2x - 8}{x^2 - 3x - 10} \text{ حيث } k \text{ عدد صحيح.}$$

أوجد مجال الدالة  $f$  a

**b** أعد تعريف الدالة  $f$  بحيث تكون منفصلة عند  $x = -2$  فقط.

# مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



## ملخص

- لتكن  $x$  كمية متغيرة،  $c$  عدداً حقيقياً، نقول إن  $x$  تقترب من  $c$  باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية  $|x - c|$  أصغر من أي عدد حقيقي موجب.
- ليكن  $c, L$  عددين حقيقين،  $f$  دالة حقيقة معروفة في جوار أو جوار ناقص للعدد  $c$  نكتب:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  وتعني أنه عندما تقترب  $x$  من  $c$  باطراد،  $f(x) \neq c$  فإن قيمة  $f(x)$  تقترب باطراد من  $L$ .
- بفرض أن  $c, L$  عددين حقيقين يكون للدالة  $f$  نهاية عندما تقترب  $x$  من  $c$  إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار ويعبر عن ذلك:
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$
- إذا كانت  $f : x \mapsto k$  وكان  $k$  أعداداً حقيقة، ثابت فإن:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} k = k$
- إذا كانت  $f(x) = x$  حيث  $c$  عدداً حقيقياً، فإن:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = c$
- إذا كانت  $f(x) = g(x)$  أعداداً حقيقة، فإن:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$
- قاعدة الجمع:  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$  a
- قاعدة الطرح:  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$  b

**c** قاعدة الضرب:  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

**d** قاعدة الضرب في ثابت:  $\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

**e** قاعدة القسمة:  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$

• إذا كانت  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  دالة كثيرة الحدود،  $c$  عدد حقيقي، فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

• إذا كانت  $f(x)$  ،  $g(x)$  كثيرتي حدود،  $c$  عدد حقيقي، فإن:  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}, g(c) \neq 0$

• إذا كانت  $n$  عدداً صحيحاً موجباً وكانت  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  موجودة فإن:

**a**  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow c} f(x))^n$

**b**  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c} \quad (c > 0)$

**c**  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0)$

• لتكن  $f$  دالة معروفة في الفترة  $(a, \infty)$  فإن:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  يعني أن قيم  $f(x)$  تقترب باطراد من  $L$  عندما  $x$  تؤول إلى  $\infty$ .

• لتكن  $f$  دالة معروفة في الفترة  $(-\infty, a)$  فإن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  يعني أن قيم  $f(x)$  تقترب باطراد من  $L$  عندما  $x$  تؤول إلى  $-\infty$ .

• لتكن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, f(x) = \frac{1}{x}$

• لتكن:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad f(x) = \frac{k}{x^n}, n \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{R}$

• إذا كان  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm b] = \pm \infty$  وكان  $b$  عدد حقيقي فإن:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$

• إذا كان  $\lim_{x \rightarrow a} [b \cdot f(x)] = \pm \infty$  وكان  $b$  عدد حقيقي موجب فإن:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$

وإذا كان  $b$  عدد حقيقي سالب  $\lim_{x \rightarrow a} [b \cdot f(x)] = \mp \infty$

• إذا كان  $n$  عدد صحيح موجب وزوجي فإن:  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$

• إذا كان  $n$  عدد صحيح موجب وفردي فإن:

**1**  $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$

**2**  $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{1}{(x-c)^n} = -\infty$

• إذا كانت قيم  $f(x)$  تتزايد بلا حدود عندما تؤول  $x$  إلى  $c$  فإننا نعبر عن ذلك رياضياً وبالتالي:

• إذا كانت  $f(x)$  تتناقص بلا حدود عندما تؤول  $x$  إلى  $c$  فإننا نعبر عن ذلك رياضياً وبالتالي:

•  $(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty)$  إذا وفقط إذا  $(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty)$

•  $(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty)$  إذا وفقط إذا  $(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty)$

• الخط  $y = b$  يسمى خط مقارب أفقى لمنحنى الدالة  $y = f(x)$  إذا توفر أحد الشرطين التاليين أو كلاهما:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

• الخط  $x = a$  يسمى خط مقارب رأسى لمنحنى الدالة  $y = f(x)$  إذا توافر على الأقل أحد الشروط التالية:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

- لتكن:  $f(x) = ax^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ 

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : a > 0 \\ -\infty & : a < 0 \end{cases}$$
1 إذا كان  $n$  عدد زوجي فإن:
 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : a > 0 \\ \infty & : a < 0 \end{cases}$$
2 إذا كان  $n$  عدد فردي فإن:
 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & : a > 0 \\ \infty & : a < 0 \end{cases}$$
- إذا كانت كل من  $f$ ,  $g$  دالة حدودية حيث:
 
$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} : n = m$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 : n < m$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{حيث } x \text{ بالراديان.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
- إذا كان  $a, b$  عددين حقيقيين،  $a \neq 0, b \neq 0$  فإن:
 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$
- ليكن  $L, c$  عددين حقيقيين، إذا كان  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  لكل  $x \neq c$  في حوار  $c$ , وكان  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$  فإن:
 
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$
- تكون الدالة  $y = f(x)$  متصلة عند نقطة  $c$  في مجالها إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$
- تكون  $f$  متصلة عند  $c$  يجب أن تتوفر الشروط الثلاثة التالية:
  - 1 الدالة معرفة عند  $c$  أي  $f(c)$  موجودة.
  - 2  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  موجودة
  - 3  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$
- وإذا لم يتحقق أي شرط من الشروط السابقة فنقول إن  $f$  ليست متصلة (منفصلة) عند  $c$ .
- إذا كانت  $f, g$  دالتين متصلتين عند  $c = x$ , فإن الدوال التالية هي دوال متصلة عند  $c$ .
  - 1  $f + g$
  - 2  $f - g$
  - 3  $k \cdot f$  حيث  $k$  أي عدد حقيقي ثابت.
  - 4  $f \cdot g$
  - 5  $\frac{f}{g}$ ,  $g(c) \neq 0$
- الدالة الجذرية  $y = \sqrt[n]{x}$  متصلة عند كل  $x = c : c \in \mathbb{R}^+$  حيث  $n$  عدد صحيح زوجي موجب، ومتصلة عند كل  $x = c : c \in \mathbb{R}$  حيث  $n$  عدد صحيح فردي أكبر من 1.
- إذا كانت  $g$  دالة متصلة عند  $c = x$  وكانت  $x = c$  :  $c \in \mathbb{R}$  حيث  $f(x) = \sqrt[g(x)]{c}$  فإن الدالة  $f$  متصلة عند  $c$ .
- إذا كانت كل من  $f, g$  دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة  $f$  مجموعة جزئية من مجال الدالة  $g$  فإنه يتعين دالة مركبة  $h$ :  $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$
- إذا كانت  $f$  متصلة عند  $c$  و  $g$  متصلة عند  $(c)$  فإن الدالة المركبة  $g \circ f$  متصلة عند  $c$ .
- إذا كانت الدالة  $f$  معرفة على الفترة  $[a, b]$  فإن:
  - 1 الدالة  $f$  متصلة على الفترة المفتوحة  $(a, b)$ , إذا كانت  $f$  متصلة عند كل  $x$  في الفترة  $(a, b)$
  - 2 الدالة  $f$  متصلة عند  $a$  من جهة اليمين إذا كان:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
  - 3 الدالة  $f$  متصلة عند  $b$  من جهة اليسار إذا كان:  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$
- وإذا تحقق الشروط الثلاثة، فإن الدالة تكون متصلة على الفترة المغلقة  $[a, b]$
- إذا كانت الدالة  $g$  متصلة على فترة ما،  $0 \leq g(x) \leq f(x) = \sqrt[g(x)]{c}$  متصلة على هذه الفترة.

## الوحدة الثانية

### الاشتقاق

### The Derivatives

#### مشروع الوحدة: تأثير الضغط على الغطاس

1 مقدمة المشروع: يساعد جهاز التنفس الذي يستخدم في الغطس، علماء البحار على استكشاف أعماق المياه إلى أبعد حدود ممكنة، بالإضافة إلى كون الغطس أيضاً رياضة شعبية. ولكن، للغطس بأمان، يتوجب على الغطاسين فهم ضغط الماء في الأعماق لأنّه يصبح خطيراً إذا تخطى  $12\text{ m}$ .

تسمح أجهزة التنفس الحديثة للغطاسين بالبقاء لأوقات طويلة تحت الماء. ولكن عمق الغطس ومدّته يقيان محدودين ويتأثران في الضغط الذي يسمح جسم الإنسان بتحمله. سوف تستخدم الرياضيات لاكتشاف الأمان في كيفية استخدام أجهزة التنفس للغطس ثم سوف تصمم ملصقاً عن هذا الجهاز.

2 الهدف: إيجاد العلاقة بين معدل الهواء الذي يستخدمه الغطاس وعدد عوامل مثل: العمق، سعة رئتيه، عمر الغطاس....

3 اللوازم: ورق رسم بياني - آلة حاسبة - حاسوب.

4 أسئلة حول التطبيق:

تعطيك أجهزة التنفس للغطس كمية الضغط تحت الماء. عند سطح الماء يكون ضغط الهواء واحداً (ضغط جوي) ( $P = 1\text{ atm}$ ). يتزايد الضغط كلّما غطسنا أكثر تحت الماء.

وحدة قياس الضغط  $P(\text{atm})$  تتغيّر مع العمق  $d$  (بالمتر) بحسب المعادلة:  $1 + \frac{d}{13} = P$ . ومن المعروف، بحسب قانون بويل، أنّ حجم الهواء  $V$  يتغيّر عكسياً مع الضغط  $P$  أي أن  $\frac{12}{P} = V$  حيث  $V$  تفاس بالكوارت (qt).

a) أوجد الضغط على سطح الماء.

b) أوجد الضغط على عمق  $5\text{ m}$ ، من ثم أوجد حجم الهواء في رئتيه.

c) ارسم جدولًا تبيّن فيه تغيير الضغط وحجم الهواء نسبة للضغط ( $d < 20\text{ m}$ ).

d) اصنع رسمًا بيانيًا تبيّن فيه تغيير حجم الرئة نسبة إلى العمق.

5 التقرير: أجر بحثاً عن متوسط حجم الرئة لعدة أعمار، من ثم اكتب تقريراً مفصلاً تبيّن فيه متوسط العمق الذي يستطيع النزول إليه كل غطاس بحسب عمره.

#### دروس الوحدة

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني	قاعدة السلسلة	مشتقات الدوال المثلثية	قواعد الاشتقاق	المشتقة	معدلات التغير وخطوط المماس
2-6	2-5	2-4	2-3	2-2	2-1

## أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

### أضف إلى معلوماتك

يعتبر التفاضل Differentiation أحد الفروع المهمة في الرياضيات حيث هو مفاضلة دالة عند نقطة معينة أي مقاييس لمقدار تغير متغير بالنسبة إلى متغير آخر. من المتعارف عليه أن اكتشاف علم التفاضل يعود إلى نيوتن Newton (1642–1727) و لاينتز Leibniz (1646–1716) حيث أصدرتا بشكل منفصل حوالي سنة 1685 1685 منشورات مفصلة عن هذا العلم.



اسحق نيوتن Isaac Newton  
(1642–1727)

ساهم نيوتن في دراسة متسلسلات القوى ونظرية ذات الحدين ووضع طريقة نيوتن لقريب جذور الدوال إضافة إلى تأسيسه لحساب التفاضل والتكامل.



لاينتز Gottfried Wilhelm Leibniz  
(1646–1716)

ينسب إليه رمز التفاضل  $\partial x$  ورمز التكامل

$$\int_{t=x_0}^x f(t) \cdot \partial t$$

- تعلمت نهاية دالة عند نقطة معينة.
- تعلمت اللامانهاية لدالة.
- تعلمت الاتصال لدالة عند نقطة وعلى فترة.
- تعرفت نقاط عدم الاتصال (الانفصال) لدالة.
- تعلمت كيفية التخلص من نقاط الانفصال إذا أمكن ذلك.

### ماذا سوف تتعلم؟

- إدراك مفهوم التغير في الدالة، ومتوسط معدل التغير، و معدّل التغيير.
- حساب السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.
- إيجاد معادلات خط المماس والخط العمودي على المماس عند نقطة معطاة على منحنى الدالة.
- إيجاد الميل والمشتقات باستخدام تعريف المشتقة.
- إيجاد المشتقة من جهة واحدة.
- التعرف على العلاقة بين الاتصال عند نقطة وقابلية الاشتراق.
- التمييز بين الركن والناب والمماس الرئيسي وعدم الاتصال.
- التعرف على العلاقة بين الاشتراق والاتصال.
- إيجاد مشتقات الدوال ومن ضمنها مشتقات الرتب العليا.
- استخدام قواعد الاشتراق للدوال المثلثية.
- إيجاد مشتقة دالة الدالة باستخدام قاعدة السلسلة.
- إيجاد الاشتراق الضمني وتطبيقه.

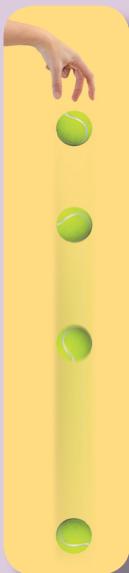
### المصطلحات الأساسية

مشتقة دالة – رمز المشتققة ' $f'$  ،  $\frac{dy}{dx}(f(x))$  – معدل التغير – متوسط معدل التغير – السرعة المتوسطة – السرعة اللحظية – ميل المماس – معادلة المماس – معادلة الخط العمودي (الناظم) – رسم بياني – قابلية الاشتراق – الاشتراق – ركن – ناب – مماس رئيسي – قواعد الاشتراق – قاعدة السلسلة – اشتراق الدوال المثلثية – اشتراق من رتب علية – اشتراق ضمني.

## معدلات التغير وخطوط المماس

### Rates of Change and Tangent Lines

#### دعا نفكّر ونناقش



أظهرت التجارب أن المسافة التي يقطعها جسم سقط سقوطاً حرّاً من السكون نحو سطح الأرض تعطى بالعلاقة:  $d(t) = 4.9t^2$  حيث  $d$  المسافة بالمتر (m)،  $t$  الزمن بالثواني (s) (قانون غاليليو).

إذا سقط جسماً سقوطاً حرّاً من مرتفع، أوجد بعد مرور ثانيتين من السقوط:

a التغيير في الزمن.

b التغيير في المسافة.

c السرعة المتوسطة.

$$\bar{v} = \frac{\text{التغيير في المسافة}}{\text{التغيير في الزمن}} : \quad \text{السرعة المتوسطة}$$

#### سوف تعلم

- إدراك مفهوم التغيير في الدالة ومعدل التغير ومتعدد معدل التغيير.
- حساب السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.
- إيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند نقطة.
- إيجاد معدل التغير للدالة.

#### المفردات والمصطلحات:

- معدل التغيير

#### Rate of Change

- السرعة المتوسطة

#### Average Velocity

- السرعة اللحظية

#### Instantaneous Velocity

- |           |         |
|-----------|---------|
| • الميل   | Slope   |
| • المماس  | Tangent |
| • العمودي | Normal  |

#### معلومات:

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_2 - t_1 \\ t_2 &= t_1 + \Delta t \\ \Delta t &= h \\ \therefore t_2 &= t_1 + h \\ f(t_2) - f(t_1) &= f(t_1 + h) - f(t_1)\end{aligned}$$

#### مثال توضيحي

تسقط كرة من على 50 m، وفق المعادلة  $d(t) = 4.9t^2$ ، حيث  $d$  المسافة التي يقطعها الكرة بالأمتار (m)،  $t$  الزمن بالثواني (s).

a ما السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية من الثانية الأولى إلى الثانية الثالثة؟

b أوجد سرعة الكرة عند اللحظة  $t = 3$

**ملاحظة:**

$$\begin{aligned} & \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h} \end{aligned}$$

الحل:

a

$$\therefore d(t) = 4.9t^2$$

$d_1 = d(1) = 4.9(1)^2 = 4.9$  في الثانية الأولى، المسافة التي قطعتها الكرة هي:

$d_2 = d(3) = 4.9(3)^2 = 44.1$  في الثانية الثالثة، المسافة التي قطعتها الكرة هي:

$\bar{v} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$  السرعة المتوسطة بين الثانية الأولى والثالثة هي:

$$\bar{v} = \frac{44.1 - 4.9}{3 - 1} = \frac{39.2}{2} = 19.6$$

السرعة المتوسطة لسقوط الكرة هي:  $19.6 \text{ m/s}$

b يمكننا حساب السرعة المتوسطة للجسم على الفترة الزمنية من اللحظة  $3 = t_1$  إلى اللحظة

$t_2 = 3 + h$  حيث  $\Delta t = h$  هو الفارق الزمني بين اللحظتين

تمثل السرعة المتوسطة على الفترة الزمنية  $[3 + h, 3]$  التي مدتها  $\Delta t = h$

ولا نستطيع استخدام تلك القاعدة لحساب السرعة بالضبط عند اللحظة  $3 = t$  أي  $h = 0$  لأنه لا يمكن القسمة على صفر.

وعلى ذلك فإنه يمكنناأخذ فكرة جيدة لما يحدث عند  $t = 3$  وذلك بحساب قيمة الصيغة التي حصلنا عليها بجعل  $h$  تقترب من الصفر، وإذا فعلنا ذلك فإننا نجد نمطاً واضحًا كما في الجدول، يظهر هذا النمط أن السرعة المتوسطة تقترب من القيمة  $29.4 \text{ m/s}$  عندما تقترب  $h$  من الصفر، مما يسمح

بالقول إن السرعة اللحظية للكرة عند  $t = 3$  تساوي  $29.4 \text{ m/s}$

مدة الفترة الزمنية $h$ بالثانية	السرعة المتوسطة على الفترة $(\frac{\Delta d}{\Delta t})$ (m/s)
1	34.3
0.1	29.89
0.01	29.449
0.001	29.4049
0.0001	29.40049

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{4.9(3+h)^2 - 4.9(3)^2}{h}$$

$$= \frac{4.9(9+6h+h^2) - 44.1}{h}$$

$$= \frac{29.4h + 4.9h^2}{h} = \frac{h(29.4 + 4.9h)}{h}$$

$$= 29.4 + 4.9h \quad , \quad h \neq 0$$

أكّد جريأً:

نفك البسط في المعادلة ونبسط:

لقيم  $h$  الموجبة الصغيرة جدًا السرعة المتوسطة تساوي  $(29.4 + 4.9h) \text{ m/s}$

وتكون  $4.9h$  صغيرة جدًا أي قريبة من الصفر.

ونعبر عن ذلك كالتالي:

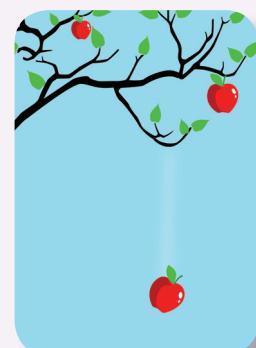
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta d}{\Delta t} = \lim_{h \rightarrow 0} (29.4 + 4.9h)$$

$$= 29.4$$

**الربط بالحياة:**

السقوط الحر

عندما تسقط الأجسام سقوطًا حرًّا في مكان ما، على افتراض أنه فارغ من الهواء، فإنها تصل جميعها إلى سطح الأرض في فترة زمنية مشتركة وإن اختلفت كتلها. من ناحية ثانية إذا سقطت هذه الأجسام في مكان ما يملؤه الهواء فالوضع يختلف تماماً إذ نجد أن حجرًا صغيرًا يصل إلى سطح الأرض في زمن أقل من ورقة علمًا أنها متسقطة في اللحظة نفسها.



وفي هذه الحالة نقول إنّ نهاية السرعة المتوسطة هي 29.4 عندما تقترب  $h$  من الصفر ولا تساويه ونقول إنّها السرعة اللحظية عند اللحظة  $t = 3$ .  
ومنه تكون السرعة اللحظية 29.4 m/s

### معلومات:

عادة ما يرغب علماء الأحياء في معرفة المعدلات التي تنمو فيها الكائنات الموضوعة تحت الملاحظة في شروط مخبرية.

يبين الشكل أدناه كيفية تكاثر مجموعة من ذباب الفاكهة خلال التجارب المخبرية في فترة مدها 50 يوماً وذلك على فترات زمنية منتظمة، وبحسب النقاط يمكن رسم المحنى المبين الذي يمثّل بهذه النقاط. استخدم النقاطين

$P(23, 150)$ ,  $Q(45, 340)$  في الشكل لحساب متوسط معدل التغيير وميل القطاع  $\overleftrightarrow{PQ}$ . ماذا تلاحظ؟

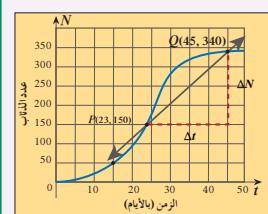
الحل:

بفرض عدد الذباب =  $N$ ،  
وعدد الأيام =  $t$ .  
يوجد 150 ذبابة في اليوم 23، 340 ذبابة في اليوم 45  
متوسط معدل التغيير في عدد الذباب هو:

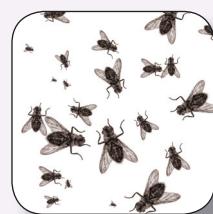
$$\begin{aligned}\frac{\Delta N}{\Delta t} &= \frac{340 - 150}{45 - 23} \\ &= \frac{190}{22} \\ &\approx 8.6\end{aligned}$$

(ذبابة/يوم)

أي حوالي 9 ذبابات كل يوم.



نمو ذباب الفاكهة تحت الشروط المخبرية لمجتمع الذباب



وعموماً لو فرضنا أن جسيم يتتحرك في خط مستقيم خلال فترة زمنية صغيرة جداً مقدارها  $h$  فإنه عندما  $t = t_1$  يكون الجسيم عند الموضع  $d(t_1)$  وعندما  $t = t_1 + h$  يكون الموضع هو  $d(t_1 + h)$  وعليه فإن السرعة المتوسطة للجسيم خلال تلك الفترة تكون:

$$\bar{v} = \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

وعندما تؤول  $h$  إلى الصفر نحصل على السرعة اللحظية.

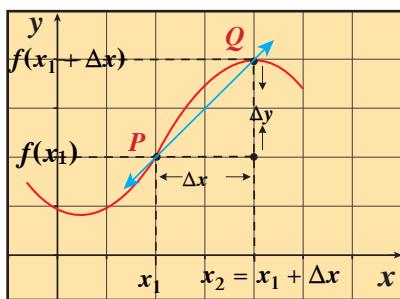
ويمكن أن نعرف السرعة اللحظية  $v$  عند الزمن  $t_1$  كالتالي:

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة.

## متوسط معدل التغيير وميل المماس

### Average Rate of Change and Tangent Slope



شكل (1)

إذا كان لدينا دالة:  $y = f(x)$

فإذا طرأ تغير قدره  $\Delta x$  على قيمة المتغير المستقل  $x$

فإنه يتبع ذلك تغير قدره  $\Delta y$  على قيمة المتغير التابع  $y$  ويكون:

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$= f(x_2) - f(x_1)$$

ويكون متوسط معدل التغيير للدالة  $y$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

وفي الشكل (1)  $\overleftrightarrow{PQ}$  قاطع للمنحنى،

$$m(\overleftrightarrow{PQ}) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ميل القاطع:

والآن، ماذا يحدث لميل القاطع عندما تقترب  $Q$  من  $P$  بإطراد؟

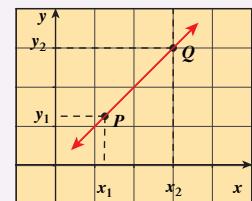
**تذكرة:**

ميل المستقيم المار بال نقطتين:  
 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث

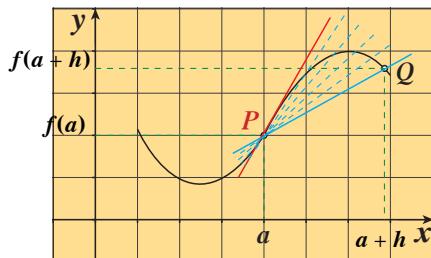
ويمكن أن نعبر عنه بالصيغة  
 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$



يمكنا حساب ميل القاطع للمنحنى  $y = f(x)$  المار بالنقطتين  $P(a, f(a))$ ,  $Q(a+h, f(a+h))$

الموجدين على المنحنى حيث

$$\text{والميل يساوي } \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$



نجد قيمة نهاية ميل القاطع إن وجدت عندما تقترب  $Q$  من  $P$  على المنحنى أي أن  $h$  تقترب من الصفر.

**نحدد ميل المماس للمنحنى عند النقطة  $P(a, f(a))$  إن وجد: 3**

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

معدل التغير لدالة  $f$  عند النقطة  $P(a, f(a))$  إن وجد هو:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

المستقيم العمودي على منحنى عند نقطة تتبعه إلى المنحنى هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة ويسمى الناظم.

**معلومات:**



ببير فيرمات

Pierre de Fermat  
(1601–1665)

عالم رياضيات فرنسي عرف بنظرية الشهيرة (نظرية فيرمات): لا توجد أعداد صحيحة موجبة  $x, y, z$  تحقق المعادلة  $x^n + y^n = z^n$  حيث  $n$  عدد صحيح موجب أكبر من 2.

**مثال (1)**

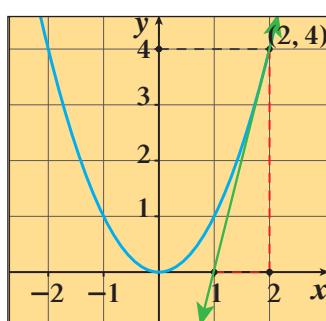
أوجد ميل المماس للقطع المكافئ

عند النقطة  $P(2, 4)$ .

الحل:

نبدأ بميل القاطع للمنحنى بين النقطة  $P(2, 4)$

ونقطة قريبة منها  $(2+h)^2, (2+h)$  على المنحنى.



رسم توضيحي  
ميل المماس للقطع المكافئ  $y = x^2$  عند  $(2, 4)$  هو

$4$

نكتب ميل القاطع ونوجد النهاية للميل عندما تقترب  $Q$  من  $P$

على المنحنى.

**معلومة:**

ميل منحنى عند نقطة يعني  
ميل المماس للمنحنى عند  
هذه النقطة إن وجد.

$$y = f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

يفرض أن:

ميل القاطع عند (2, 4):

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \\ &= \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h} \\ &= \frac{h^2 + 4h}{h} \\ &= h + 4 \quad , \quad h \neq 0\end{aligned}$$

نهاية ميل القاطع عندما تقترب Q من P على المنحنى هي:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4$$

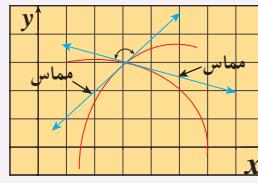
على ذلك يكون ميل المماس للقطع المكافئ عند P يساوي 4

حاول أن تحل

أوجد ميل المماس للقطع المكافئ  $y = (x - 2)^2 + 2$  عند النقطة A(1, 3) 1

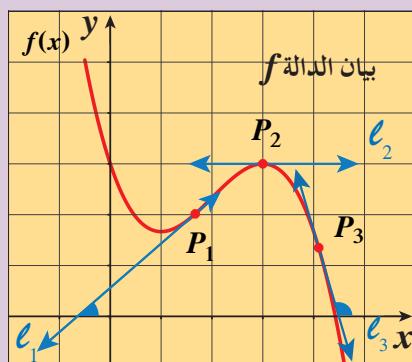
**معلومة:**

في الهندسة، الزاوية التي  
يصنعها مماسان على  
منحنين عند نقطة تقاطعهما  
هي زاوية المنحنين.



## المشتقة

### The Derivative



شكل (1)

#### دعنا نفكّر ونناقش

تعلمت فيما سبق أنه إذا كان  $\ell$  مستقيماً يصنع زاوية  $\theta$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات  $m = \tan \theta$  فإن ميل المستقيم:

الشكل (1) يمثل بيان الدالة  $f$ .

$\ell_1, \ell_2, \ell_3$  مماسات لمنحنى  $f$  عند النقاط  $P_1, P_2, P_3$  على الترتيب.

- 1 ميل المستقيم  $\ell_1$  (المماس لمنحنى الدالة  $f$  عند  $P_1$ ) أكبر من الصفر. لماذا؟
- 2 ميل المماس  $\ell_2$  لمنحنى  $f$  عند  $P_2$  يساوي صفرًا. لماذا؟
- 3 ميل المماس  $\ell_3$  لمنحنى  $f$  عند  $P_3$  أصغر من الصفر. لماذا؟
- 4 إذا أمكن رسم مماسات عند نقاط مختلفة على المحننى، فهل ميل المحننى عند كل نقطة من هذه النقاط يكون قيمة ثابتة أم متغيرة؟

#### سوف تعلم

- إيجاد الميل والمشتقفات باستخدام تعريف المشتقة.
- إيجاد مشتقة الدالة عند نقطة.
- إيجاد المشتقة من جهة واحدة.
- العلاقة بين الاتصال عند نقطة أو على فتره وقابلية الاشتقاق.
- تحديد حالات عدم وجود المشتقة عند نقطة.

#### المفردات والمصطلحات:

- المشتقة عند نقطة

#### Derivative at a Point

- مشتقة دالة

#### Derivative of a Function

- مشتقة من جهة واحدة

#### One-Sided Derivative

- التفاضل

#### Differentiability

#### Corner Point

- نقطة ركن

#### Cusp Point

- نقطة ناب

#### Vertical Tangent

- مماس رأسي

#### Vertical Tangent

- عدم اتصال

#### Discontinuity

### Definition of Derivative

#### تعريف المشتقة

تعلّمت أن ميل منحنى الدالة  $f$  عند نقطة إحداثيها السيني  $x = a$  هو:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

في حال وجود هذه النهاية فإنّها تسمى **مشتقة الدالة  $f$  عند  $a$**

#### Derivative at a Point

#### تعريف: المشتقة عند نقطة

مشتقة الدالة  $f$  عند  $a$  هي  $x = a$  هي  $f'(a)$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

من التعريف السابق يمكننا القول أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x = a$  إذا كانت النهاية موجودة ويرمز لذلك بالرمز:

$$f'(a) \quad \text{أو} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$$

أما إذا كانت النهاية غير موجودة عند  $x = a$  نقول إن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند  $x = a$  (غير موجودة  $f'(a)$ )

مثال (1)

باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة  $f(x) = 2x^2 + 1$  عند  $x = 1$  :

الحل:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$x = 1 \implies a = 1, \quad f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3$$

$$\therefore f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h)^2 + 1 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + 4h + 2h^2 + 1 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4 + 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + 2h)$$

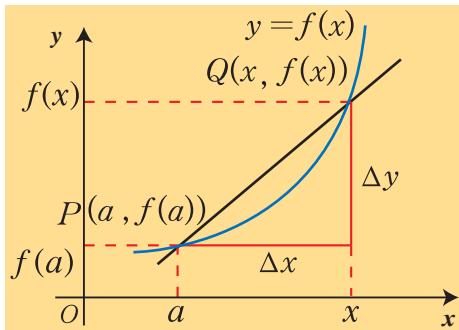
$$= 4 + 0 = 4$$

$\therefore$  مشتقة الدالة  $f$  عند  $x = 1$  هي:  $f'(1) = 4$

حاول أن تحل

1 بـاستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة  $f(x) = 3x^2$  عند  $x = -2$  :

نحصل على مشتقة  $f(x)$  عند  $x = a$  بأخذ النهاية عندما تقترب  $h$  من الصفر ( $h \rightarrow 0$ ) لميل الخطوط القاطعة، كما في الشكل (2)



شكل (2)  
ميل الخط القاطع هو:  
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعريف (بديل): المشتقّة عند نقطة

مشتقّة دالة  $f$  عند  $x = a$  هي :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.

ملاحظة: التعريف البديل للمشتقة هو صورة أخرى لتعريف المشتقّة.

مثال (2)

بـاستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة  $f$  :  $f(x) = \sqrt{x}$  عند  $x = a$  حيث  $a > 0$

الحل:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

عند النقطة  $x = a$  ، (إن وجدت)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

اضرب البسط والمقام بالمرافق  $(\sqrt{x} + \sqrt{a})$

يمكنا الآن إيجاد النهاية

حاول أن تحل

أوجد مشتقة الدالة  $f$  :  $f(x) = \frac{1}{x}$  ،  $b \neq 0$  عند  $x = b$

## One-Sided Derivative

المشتقة من جهة واحدة

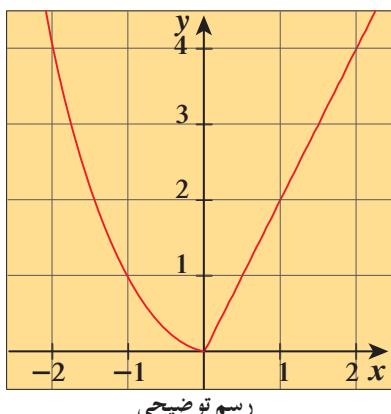
مشتقة الدالة  $f$  من اليمين يرمز لها بالرمز  $f'_+(a)$  وهي:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{إن وجدت})$$

ومشتقة الدالة  $f$  من اليسار يرمز لها بالرمز  $f'_-(a)$  وهي:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{إن وجدت})$$

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساوين عند تلك النقطة.



رسم توضيحي

مثال (3)

بين أن الدالة التالية لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة

اليسار عند  $x = 0$  ، لكن ليس لها مشتقة عند  $0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \leq 0 \\ 2x & : x > 0 \end{cases}$$

الحل:

نتحقق من وجود المشتقة لجهة اليمين:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad (\text{إن وجدت})$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(0+h) - 0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 2 = 2 \quad (1)$$

نتحقق من وجود المشتقة لجهة اليسار:

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad (\text{إن وجدت})$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(0+h)^2 - 0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h = 0 \quad (2)$$

$f'_-(0) \neq f'_+(0)$  من (1) ، (2)

$f'(0)$  ليست موجودة أي أن الدالة ليس لها مشتقّة عند  $x = 0$   $\therefore$

حاول أن تحل

لتكن  $f$  :  $f(x) = |x - 2|$  ، ابحث قابلية الدالة  $f$  للاشتراق عند  $x = 2$ .

مثال (4)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} & : x \leq 1 \\ \sqrt{x} & : x > 1 \end{cases}$$

لتكن الدالة  $f$ :

يبين أن للدالة  $f$  مشتقّة لجهة اليمين مساوية لمشتقّة لجهة اليسار عند  $x = 1$ .

الحل:

نتحقق من وجود المشتقّة لجهة اليسار:

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} && (\text{إن وجدت}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{4}(1+h)^2 + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{4}(1+2h+h^2) + \frac{3}{4} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{4} + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + \frac{3}{4} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{h} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h\right)}{\cancel{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h\right) = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

نتحقق من وجود المشتقّة لجهة اليمين:

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad (\text{إن وجدت})$$

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \times \frac{\sqrt{1+h} + 1}{\sqrt{1+h} + 1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+h} - 1) \cdot (\sqrt{1+h} + 1)}{h \cdot (\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{1+h} + 1)} \end{aligned}$$

ضرب البسط والمقام بمرافق البسط

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0^+} (1+h) = 1 \quad , \quad 1 > 0$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{1+h} = \sqrt{\lim_{h \rightarrow 0^+} (1+h)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (\sqrt{1+h} + 1) = 1 + 1 = 2 \quad , \quad 2 \neq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0^+} 1}{\lim_{h \rightarrow 0^+} (\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) \quad (1)$$

وبالتالي الدالة  $f$  لها مشتقّة لجهة اليمين عند  $x = 1$  مساوية للمشتقة لجهة اليسار.

حاول أن تحل

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & : x \leq -1 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} & : x > -1 \end{cases} \quad 4 \quad \text{لتكن الدالة } f$$

بيان أن للدالة  $f$  مشتقّة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند  $x = -1$ .

### ملاحظات:

■ إذا كانت الدالة  $y = f(x)$  قابلة للاشتقاق عند كل  $x \in (a, b)$  فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة  $(a, b)$ .

■ إذا كانت الدالة  $y = f(x)$  قابلة للاشتقاق عند كل  $x \in (-\infty, \infty)$  فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  مثل كثيرة الحدود.

■ إذا وضعنا  $x$  بدلاً من  $a$  في تعريف المشتقّة عند النقطة نحصل على  $f'(x)$  حيث  $\frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}(f(x)), f'(x), y'$  ويمكن أن نرمز للمشتقة بأحد الرموز التالية:  $y', f'(x), f'(x)$ .

■ لأي دالة  $f$  تكون  $f'$  دالة أخرى مجالها مكون من جميع قيم  $x$  التي يكون للدالة مشتقّة عندها أي  $f'$  دالة مستخلصة من  $f$ .  $(D_f \subseteq D_{f'})$

### مثال (5)

لتكن  $f(x) = x^3$ . أوجد  $f'(x)$  باستخدام تعريف المشتقّة إن وجدت.

الحل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \text{إن وجدت} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\
 &= 3x^2 \\
 \therefore f'(x) &= 3x^2
 \end{aligned}$$

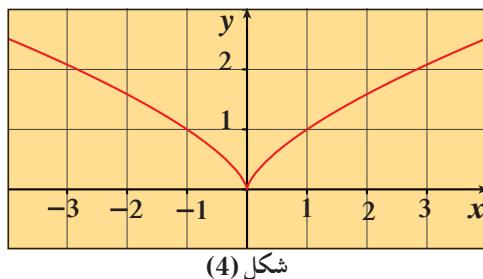
حاول أن تحل

5 لكن  $f'(x) = x^2 + 2$ . أوجد  $f'(a)$  باستخدام تعريف المشتقة.

متى تكون  $f'(a)$  غير موجودة؟

الدالة  $f$  لن يكون لها مشتقة عند نقطة  $P(a, f(a))$  غير موجودة. إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  غير متساوية. وتوضح الأشكال التالية أربع حالات تكون فيها هذه النهاية غير موجودة.

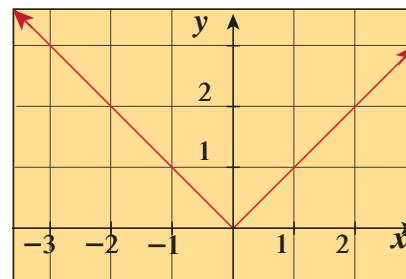
**b** ناباً (Cusp): يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من  $\infty$  في إحدى الجهات ويقترب من  $-\infty$  في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسى عندها. مثال:  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$



شكل (4)

يوجد ناب عند  $x = 0$ ,  $f'(0)$  غير موجودة ويوجد مماس رأسى عندها

**a** ركناً (Corner): تكون المشتقتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقائه الشعاعين غير متساوietin. مثال:  $f(x) = |x|$

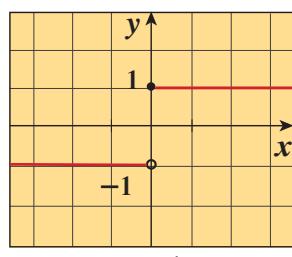


شكل (3)

يوجد ركن عند  $x = 0$ ,  $f'(0)$  غير موجودة

**d** عدم اتصال: تكون المشتقة من جهة واحدة أو كل من الجهازين غير موجودة. مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

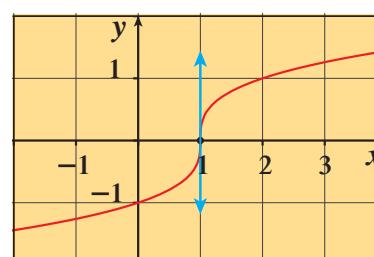


شكل (6)

يوجد عدم اتصال عند  $x = 0$ ,  $f'(0)$  غير موجودة

**c** مماساً رأسياً: يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسياً.

$$f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$$



شكل (5)

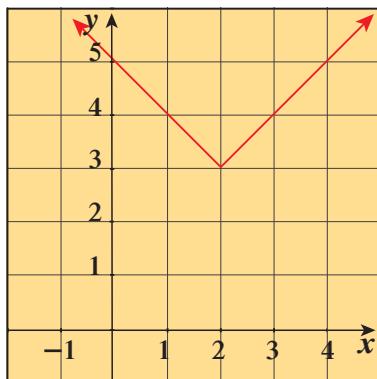
يوجد مماس رأسى عند  $x = 1$ ,  $f'(1)$  غير موجودة

سوف نثبت بعد ذلك، نظرية تقول بأنه ينبغي أن تكون الدالة متصلة عند  $x = a$  كشرط لدراسة قابلية الاشتتقاق عند  $x = a$ . سوف تمدنا هذه النظرية بطريقة سريعة وسهلة للتحقق من أن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتتقاق عند  $x = a$ .

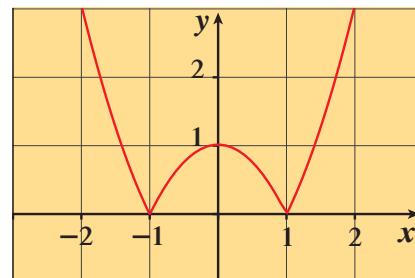
### تدريب

أوجد كل النقاط في مجال الدالة حيث تكون الدالة غير قابلة للاشتراق في كل مما يلي:

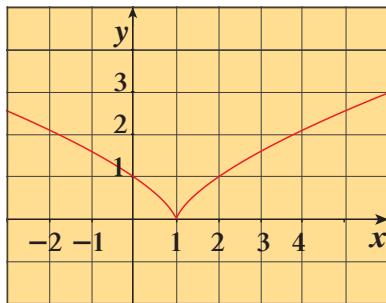
a)  $f(x) = |x - 2| + 3$



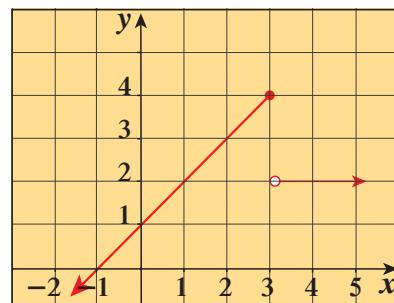
b)  $f(x) = |x^2 - 1|$



c)  $f(x) = (x - 1)^{\frac{2}{3}}$



d)  $f(x) = \begin{cases} 2 : x > 3 \\ x + 1 : x \leq 3 \end{cases}$



معلومة:

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| &= \\ x^2 - 1 &: x \leq -1 \\ 1 - x^2 &: -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 &: x \geq 1 \end{aligned}$$

## Differentiability and Continuity

## الاشتقاق والاتصال

نبدأ هذا الجزء بإلقاء نظرة على الطرائق العادية التي يمكن أن تفشل في أن تكون فيها للدالة مشتقة عند نقطة.

كأحد الأمثلة، قد أظهرنا بيانياً أن عدم اتصال الدالة عند نقطة يسبب عدم وجود مشتقة للدالة عند هذه النقطة.

وعليه إذا كانت الدالة  $f$  ليست متصلة عند نقطة  $(a, f(a))$  فإنها غير قابلة للاشتراق عند هذه النقطة.

### مثال (6)

لتكن  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 2x - 1, & x \geq 2 \end{cases} : f$   
ابحث قابلية الاشتراق للدالة  $f$  عند  $x = 2$ .

الحل:

بحث اتصال الدالة  $f$  عند  $x = 2$

$$f(2) = 2(2) - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = (2)^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 1) = 2(2) - 1 = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

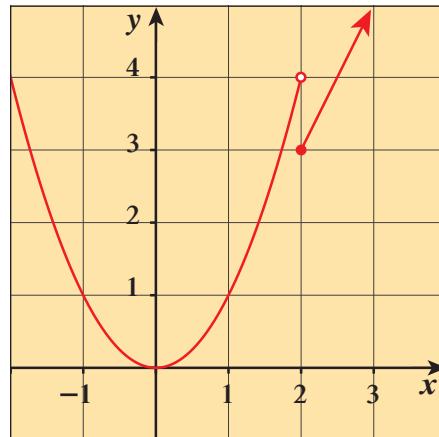
وبالتالي  $f$  ليست متصلة عند  $x = 2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{غير موجودة}$$

$\therefore f$  غير قابلة للاشتراق عند  $x = 2$ .

حاول أن تحل

لكن  $f$  **6** ، ابحث قابلية الاشتراق للدالة  $f$  عند  $x = 2$ .



شكل (7)

الشكل (7) يمثل بيان الدالة في مثال (6).

وفي الحقيقة أن الاتصال شرط جوهري لإمكانية وجود المشتقة، والنظرية التالية تبين العلاقة بين الاشتراق والاتصال.

### نظريّة الاشتراق والاتصال

إذا كانت الدالة  $f$  لها مشتقة عند نقطة، فإنّها تكون متصلة عند هذه النقطة.

البرهان:

لتكن النقطة  $(a, f(a))$  تسمى لبيان الدالة

علينا أن نبيّن أن  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$  أو مكافئاً لذلك أن:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

باستخدام قاعدة حاصل ضرب النهايات (وملاحظة أن  $x - a \neq 0$ )،

نستطيع أن نكتب:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \left[ (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= 0 \cdot f'(a) \quad \text{حيث } f'(a) \text{ موجودة} \\ &= 0 \end{aligned}$$

معكوس النظرية ليس صحيحًا دائمًا كما رأينا سابقًا:

فالدالة المتصلة قد تكون لها ركن أو ناب أو مماس رأسى، ومن ثم لا تكون قابلة للاشتراق عند نقطة معينة.

(مثال 7)

$$f(x) = \begin{cases} 6x - 1 & : x > \frac{1}{2} \\ 2x + 1 & : x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

لتكن  $f$

يَبْيَنُ أَنَّ الدَّالَّةَ  $f$  مَتَّصِلَّةٌ عَنْدَ  $x = \frac{1}{2}$  وَلَكِنَّهَا غَيْرُ قَابِلَةٍ لِلاشْتِرْاقِ عَنْدَهَا.

الحل:

لبحث اتصال الدالة  $f$  عند  $x = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} (6x - 1) = 6\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} (2x + 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$\therefore$  الدالة  $f$  متصلة عند  $x = \frac{1}{2}$ .

نبحث اشتراق الدالة  $f$  عند  $x = \frac{1}{2}$

$$f'_+(\frac{1}{2}) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$$

إن وجدت

$$f'_+(\frac{1}{2}) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{6x - 1 - 2}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{6\cancel{(x - \frac{1}{2})}}{\cancel{x - \frac{1}{2}}} = 6$$

$$f'_-(\frac{1}{2}) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$$

إن وجدت

$$f'_-(\frac{1}{2}) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{2x + 1 - 2}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{2\cancel{(x - \frac{1}{2})}}{\cancel{x - \frac{1}{2}}} = 2$$

$$\therefore f'_-(\frac{1}{2}) \neq f'_+(\frac{1}{2})$$

أي أن  $f$  متصلة عند  $x = \frac{1}{2}$  ولكنها غير قابلة للاشتراق عند  $x = \frac{1}{2}$

حاول أن تحل

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & : x > -\frac{1}{3} \\ 5x + 1 & : x \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

لتكن الدالة  $f$  7

يَبْيَنُ أَنَّ الدَّالَّةَ  $f$  مَتَّصِلَّةٌ وَغَيْرُ قَابِلَةٍ لِلاشْتِرْاقِ عَنْدَ  $x = -\frac{1}{3}$

**مثال (8)**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & : x \leq 2 \\ -x^2 + 7x - 10 & : x > 2 \end{cases}$$

لتكن الدالة  $f$  متصلة عند  $x = 2$  وادرس قابلية الاشتغال عندها.

الحل:

لبحث اتصال الدالة  $f$  عند  $x = 2$

$$f(2) = (2)^2 - (2) - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - x - 2) = 4 - 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 7x - 10) = -4 + 14 - 10 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$\therefore$  الدالة  $f$  متصلة عند  $x = 2$ .

ندرس قابلية الاشتغال عند  $x = 2$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \quad (\text{إن وجدت})$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x - 2 - 0}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+1)(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 2+1 = 3$$

$$\therefore f'_-(2) = 3$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \quad (\text{إن وجدت})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 7x - 10 - 0}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(\cancel{x-2})(x-5)}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} -(x-5) = -(2-5) = 3$$

$$\therefore f'_+(2) = 3$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) = 3$$

$\therefore$  الدالة  $f$  قابلة للاشتغال عند  $x = 2$  و  $f'(2) = 3$ .

أي أن  $f$  متصلة عند  $x = 2$  وقابلة للاشتغال عند هذه النقطة.

**حاول أن تحل**

ادرس اتصال الدالة  $f$  عند  $x = 1$  وقابلية اشتقاها عند هذه النقطة حيث: 8

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2 + 1} & : x \leq 1 \\ 2x - 1 & : x > 1 \end{cases}$$

**معلومات:**

يستخدم علماء الفضاء  
الاشتغال في دراسة سرعة  
دوران الأقمار الصناعية  
على مجالها.



مثال (9)

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & : x \leq 3 \\ x^2 - 1 & : x > 3 \end{cases} \quad \text{لتكن الدالة } f$$

أوجد إن أمكن  $f'(3)$

الحل:

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \quad (\text{إن وجدت})$$

$$\begin{aligned} f'_-(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+5-8}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{x-3} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f'_-(3) = 1$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \quad (\text{إن وجدت})$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 1 - 8}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+3) = 6 \end{aligned}$$

$$\therefore f'_+(3) = 6$$

$$\because f'_-(3) \neq f'_+(3)$$

$\therefore f'(3)$  غير موجودة

حاول أن تحل

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \leq -1 \\ x^2 - x - 2 & : x > -1 \end{cases} \quad \text{لتكن الدالة } f \quad 9$$

أوجد إن أمكن  $f'(-1)$ .

## قواعد الاشتقاق

### Rules of Derivative

#### دُعْنَا نَفَّرْ وَنَتَنَاقِشْ

أُوجِدَ مُشتقَاتُ الدُوالِ التَالِيَةِ بِالنَسْبَةِ إِلَى  $x$  مُسْتَخْدِمًا تَعْرِيفَ المُشتقَةِ.

$$1 \quad g(x) = 7$$

$$2 \quad f(x) = \frac{x}{3}$$

$$3 \quad u(x) = -\frac{2}{x}$$

$$4 \quad v(x) = x^4$$

من فقرة «دُعْنَا نَفَّرْ وَنَتَنَاقِشْ» لاحظنا أن إيجاد مشتقَة الدالة بالتعريف تحتاج إلى مهارات وعمليات حسابية مطولة والقواعد التالية تساعدك في إيجاد مشتقَة بعض الدوال دون استخدام تعريف المشتقَة وذلك لدوال قابلة للاشتقاق.

#### قاعدة (1): مشتقَة دالة ثابتة

إذا كانت  $f(x) = k$  حيث  $k$  عدد ثابت فإن  $f'(x) = 0$  لجميع قيم  $x$  الحقيقية.

يمكننا القول بأن مشتقَة أي دالة ثابتة تساوي صفرًا.

**البرهان:**

إذا كانت  $f(x) = k$  حيث  $k$  ثابت؛ فإن:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\therefore f'(x) = 0$$

#### تدريب (1)

أُوجِدَ مُشتقَةُ  $f(x)$  في الحالات التالية:

a  $f(x) = 5$

b  $f(x) = e^2$

c  $f(x) = \pi^{15}$

#### قاعدة (2): مشتقَة الدالة $f(x) = x$

إذا كانت  $f(x) = x$  فإن  $f'(x) = 1$

لجميع قيم  $x$  الحقيقية

#### سوف تعلم

#### مشتقَات دوال

- القوى الصحيحة الموجبة.
- الضرب في عدد ثابت.
- الجمع والطرح.
- الضرب والقسمة.
- القوى الصحيحة السالبة للمتغير  $x$ .

#### إيجاد معادلة المماس ومعادلة

- الناظم عند نقطة على منحنى دالة.
- قابلية الاشتقاق على فترة.

#### المفردات والمصطلحات:

- قاعدة Rule

- مشتقَة ثابت Derivative of a Constant

- مشتقَة قوى صحيحة موجبة

- Derivative of Postive Integer Powers

- مشتقَة قوى صحيحة سالبة

- Derivative of Negative Integer Powers

- مشتقَة الضرب بعدد ثابت

- Derivative of the Constant Multiple

- مشتقَة الجمع والطرح

- Derivative of the Sum and the Difference

- مشتقَة الضرب والقسمة

- Derivative of the Product and the Quotient

البرهان:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$
$$\therefore f'(x) = 1$$

قاعدة (3): قاعدة القوى للأسس الصحيحة الموجبة للمتغير  $x$

### Power Rule for Positive Integer Powers of $x$

إذا كان  $f(x) = x^n$  حيث  $n$  عدد صحيح موجب  $1 \neq n$  فإن:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$$

أي أن:  $f'(x) = nx^{n-1}$

### تدريب (2)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a)  $f(x) = x^4$

b)  $g(x) = x^{10}$

c)  $h(x) = x^{12}$

### The Constant Multiple Rule

قاعدة (4): قاعدة الضرب بعدد ثابت

إذا كانت  $f$  دالة في  $x$  قابلة للاشتغال وكان  $k$  عدداً ثابتاً فإن:

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k \frac{d}{dx} f(x)$$

( $kf(x)$ )' =  $k f'(x)$       أي أن:

البرهان:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(kf(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(f(x+h) - f(x))}{h} \\ &= k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \frac{d}{dx}(f(x)) \end{aligned}$$

توضّح القاعدة (4) بأنّه

مشتقة ضرب دالة قابلة للاشتغال في ثابت هو مشتقة هذه الدالة مضروبة في الثابت.

القواعدتان (4), (3) تمكّنان من إيجاد مشتقة أي حدّ جبري بسرعة.

مثلاً  $(7x^4)' = 7(x^4)' = 28x^3$

لإيجاد مشتقّات كثيرات الحدود، نحتاج إلى إيجاد مشتقّات مجاميع وفروق حدود جبرية.

نستطيع أن نفعل ذلك بتطبيق قاعدة الجمع والطرح.

## قاعدة (5): قاعدة الجمع والطرح

إذا كانت  $f, g$  دالّتين في  $x$  قابلتين للاشتتاق، فإن مجموعهما والفرق بينهما يكونان قابلين للاشتتاق عند كل نقطة تكون عندها كل من  $f, g$  قابلة للاشتتاق.

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \pm \frac{d}{dx}(g(x))$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

أي أن:

البرهان:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x)) \end{aligned} \quad (\text{إن وجدت})$$

وبالمثل بالنسبة إلى الفرق بين دالّتين.

مثال (1)

$$y = t^3 + 6t^2 - \frac{5}{3}t + 16 \quad \text{حيث } \frac{dy}{dt} \quad \text{أوجد}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3) + \frac{d}{dt}(6t^2) - \frac{d}{dt}\left(\frac{5}{3}t\right) + \frac{d}{dt}(16) \quad \text{قاعدة الجمع والطرح}$$

$$= 3t^2 + 6 \times 2t - \frac{5}{3} + 0 \quad \text{قاعدة الدالة الثابتة وقاعدة القوى}$$

$$= 3t^2 + 12t - \frac{5}{3}$$

حاول أن تحل

$$y = 5x^3 - 4x^2 + 6 \quad \text{حيث } \frac{dy}{dx} \quad \text{أوجد } 1$$

## The Product Rule

## قاعدة (6): اشتتاق ضرب دالّتين

ضرب دالّتين  $f, g$  في  $x$  قابلتين للاشتتاق يكون قابلاً للاشتتاق بحيث:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)) + g(x) \cdot \frac{d}{dx}(f(x))$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

أي أن:

**البرهان:**

نبدأ كالمعتاد بتطبيق التعريف:

(إن وجدت)

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

لتغيير الكسر إلى كسر مكافئ يحتوي على الفرق بين نواتج القسمة لمشتقّات الدالتين  $f$ ,  $g$ , نطرح ونجمع  $f(x+h) \cdot g(x)$  في البسط.

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

عندما تقترب  $h$  من الصفر فإن  $f(x+h)$  تقترب من  $f(x)$  لأن  $f$  تكون متصلة عند  $x$  وقابلة للاشتغال عند  $x$ .

الكسران يقتربان من قيم  $\frac{d}{dx} f(x)$ ,  $\frac{d}{dx} g(x)$  على الترتيب عند  $x$ ، لذلك:

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

يمكّنا القول إن مشتقّة ضرب دالتين = الدالة الأولى × مشتقّة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقّة الدالة الأولى.

**مثال (2)**

$$\text{أوجد } f'(x) \text{ إذا كان } f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$$

**الحل:**

$$u = x^2 + 1, v = x^3 + 3$$

**لتكن:**

بتطبيق قاعدة الضرب نجد أن:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} \\ &= (x^2 + 1)(3x^2) + (x^3 + 3)(2x) \\ &= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x \\ &= 5x^4 + 3x^2 + 6x \end{aligned}$$

**حاول أن تحل**

a 2 هل يمكنك حل مثال 2 بطريقة أخرى؟ فسر إجابتك.

b أوجد  $f'(x)$  إذا كان:

1  $f(x) = (2x + 1)(3x - 2)$

2  $f(x) = 4x^2(x + 6)$

3  $f(x) = (x^3 - 4)^2$

## قاعدة (7): قاعدة القسمة

لتكن  $f, g$  دالتين في  $x$  قابلتين للاشتتقاق حيث  $g(x) \neq 0$  فإن:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{(g(x))^2}$$

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{أي أن:}$$

البرهان:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot f(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \end{aligned} \quad (\text{إن وجدت})$$

لتغيير الكسر إلى كسر مكافئ يحتوي على الفرق بين نواتج القسمة لمشتقات الدالتين  $f, g$  ، نطرح ونجمع  $(g(x) \cdot f(x))$  في البسط.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot f(x+h) - g(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h) \cdot g(x)} \end{aligned}$$

وبأخذ النهايات في البسط والمقام نحصل على قاعدة ناتج القسمة التالية:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{\text{دالة المقام} \times \text{مشتقة دالة البسط} - \text{دالة البسط} \times \text{مشتقة دالة المقام}}{\text{مربع دالة المقام}} = \text{يمكنا القول إن: مشتقة قسمة دالتين}$$

مثال (3)

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{5x^2 + 1} \quad \text{أوجد مشتقة}$$

الحل:

بتطبيق قاعدة القسمة حيث:  $u = x^3 - 1$  ،  $v = 5x^2 + 1$

$$f(x) = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(5x^2 + 1) \cdot (3x^2) - (x^3 - 1) \cdot (10x)}{(5x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{15x^4 + 3x^2 - 10x^4 + 10x}{(5x^2 + 1)^2}$$

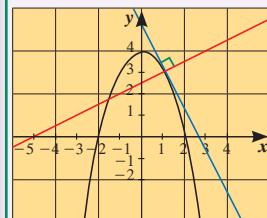
$$= \frac{5x^4 + 3x^2 + 10x}{(5x^2 + 1)^2}$$

حاول أن تحل

$$f(x) = \frac{4x^2 + 2x}{2x^3 + 5} \quad 3$$

تذكرة:

إذا كان مستقيمان متعامدين  
وليس أيّاً منهما أفقياً فإنّ  
ناتج ضرب ميليهما يساوي  
-1.



رسم توضيحي  
العمودي متعامد مع المماس  
عند النقطة (1, 3).

مثال (4)

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة  $\left(1, \frac{2}{3}\right)$  لمنحنى الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2}$ .  
الحل:

نوجد أولاً مشتقة الدالة  $f$  بتطبيق قاعدة القسمة

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2)(x^3 + 1)' - (x^3 + 1)(x^2 + 2)'}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2)(3x^2) - (x^3 + 1)(2x)}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(1^2 + 2)(3(1)^2) - (1^3 + 1)(2(1))}{(1^2 + 2)^2} = \frac{5}{9} \quad \text{ومنه الميل:}$$

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \quad \text{معادلة خط المماس:}$$

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

$$\therefore y - \frac{2}{3} = \frac{5}{9}(x - 1)$$

$$y = \frac{5}{9}x - \frac{5}{9} + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{9}$$

لإيجاد معادلة الناظم عند النقطة  $\left(1, \frac{2}{3}\right)$  على المنحنى نستخدم المعادلة:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

$$\frac{-1}{f'(a)} = -\frac{9}{5} \quad \text{ميل الناظم:}$$

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{9}{5}(x - 1)$$

$$y = -\frac{9}{5}x + \frac{37}{15}$$

حاول أن تحل

(4) أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$  عند النقطة  $(1, 0)$

نتيجة

إذا كانت  $g$  دالة قابلة للاشتغال وكانت  $g(x) \neq 0$  ،  $k$  عددا ثابتا فإن:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{k}{g(x)} \right) = \frac{-k \frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

$$\left( \frac{k}{g(x)} \right)' = \frac{-k \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{أي أن:}$$

البرهان:

$$\therefore \frac{d}{dx}(k) = 0 \quad \text{مشتقة دالة ثابتة}$$

وبتطبيق قاعدة القسمة

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dx} \left( \frac{k}{g(x)} \right) &= \frac{g(x) \times 0 - k \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{-k \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \end{aligned}$$

مثال (5)

أوجد  $f'(x)$  حيث  $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$

الحل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{3}{x^2 + 1} \right) \\ &= \frac{-3 \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-6x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

حاول أن تحل

(5) أوجد  $f'(x)$  حيث  $f(x) = \frac{-4}{x^2 + 2x + 5}$

## Negative Integer Powers of $x$

## قوى $x$ الصحيحة السالبة (الأسس الصحيحة السالبة)

قاعدة اشتقاق قوى  $x$  الصحيحة السالبة هي قاعدة الاشتقاق نفسها في حالة القوى الصحيحة الموجبة كما في القاعدة (3). لذلك نستطيع الآن أن نوسع قاعدة القوى لتشمل القوى الصحيحة السالبة باستخدام قاعدة القسمة.

### قاعدة (8): قاعدة القوى للأسس الصحيحة السالبة للمتغير $x$

#### Power Rule for Negative Integer Powers of $x$

إذا كان  $n$  عددًا صحيحًا موجبًا،  $0 \neq x \neq 0$  فإن:

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -n x^{-n-1}$$

$$(x^{-n})' = -n x^{-n-1} \quad \text{أي أن}$$

البرهان:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^{-n}) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ &= \frac{-1 \times \frac{d}{dx}(x^n)}{(x^n)^2} \\ &= \frac{-1 \times (n x^{n-1})}{(x^n)^2} \\ &= \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -n x^{n-1-2n} \\ &= -n x^{-n-1} \end{aligned}$$

نتيجة

قاعدة (3)

مثال (6)

لتكن:  $x = 1$ . أوجد  $\frac{dy}{dx}$  عند  $y = \frac{x^2 + 3}{2x}$

الحل:

يمكن أن نوجد المشتقة بقاعدة القسمة، لكن من الأيسر أن نبسط أولاً كمجموع قوتين للمتغير  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2x} + \frac{3}{2x}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^{-1}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^{-2} \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^{-2}\right]_{x=1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

حاول أن تحل

$$x = -1 \text{ ، أوجد } \frac{dy}{dx} \text{ عند } y = \frac{3x^2 + 7}{8x^2} \text{ لكن: 6}$$

قاعدة (9)

إذا كان  $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$  حيث  $m, n$  عددين صحيحان مختلفان،  $n \neq 0$  فإن:  $\frac{d}{dx}(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$  لجميع قيم  $x$  التي تكون المشتقة عندها موجودة.

$$(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n}(x)^{\frac{m}{n}-1} \quad \text{أي أن}$$

يمكن استنتاج أن: إذا كانت  $f(x) = \sqrt{x}$  تكون  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال (7)

أوجد مشتقة الدالة  $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$  ،  $x > 0$  : 7

الحل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} \\ &= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad \text{بتطبيق القاعدة}$$

حاول أن تحل

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} \quad \text{أوجد مشتقة الدالة } f \quad : 7$$

مثال (8)

لتكن الدالة  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & : x \leq 1 \\ 2x + 1 & : x > 1 \end{cases}$  دالة متصلة على مجالها.

أوجد  $f'(x)$  إن أمكن

الحل:

$$D_f = (-\infty, 1] \cup (1, \infty) = \mathbb{R} \quad \text{مجال الدالة:}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 1 \\ \text{بحث} & : x = 1 \\ 2 & : x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = (1)^2 + 2 = 3$$

$$\begin{aligned}
 f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} && \text{إن وجدت} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2 - 3}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{(x-1)} \cancel{(x+1)}}{\cancel{x-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) \\
 &= 1 + 1 = 2 && (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} && \text{إن وجدت} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 1 - 3}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 2}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{2(x-1)}}{\cancel{x-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2 && (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'_-(1) &= f'_+(1) = 2 && \text{من (1) و (2)} \\
 \therefore f'(1) &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \begin{cases} 2x & : x < 1 \\ 2 & : x = 1 \\ 2 & : x > 1 \end{cases} && \text{ومنه} \\
 \therefore f'(x) &= \begin{cases} 2x & : x \leq 1 \\ 2 & : x > 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

حاول أن تحل

أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية: 8

a)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x \leq 2 \\ 4x - 3 & : x > 2 \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : x \geq 1 \end{cases}$

## مشتقات الدوال المثلثية

### Derivatives of Trigonometric Functions

#### دعا نفك ونتناقش

أوجد مشتقة الدالة  $f$  :  
 $f(x) = \sin x$   
 مستخدماً تعريف المشتقة.

والقواعد التالية تساعدك في إيجاد مشتقة بعض الدوال المثلثية دون استخدام تعريف المشتقة.

#### أولاً: مشتقات الدوال الجيبية

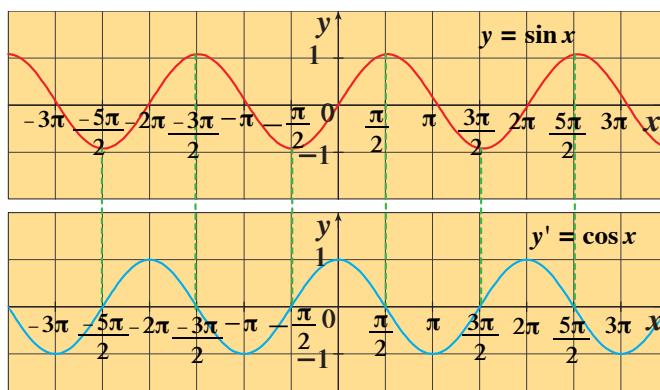
مشتقة دالة الجيب هي موجب دالة جيب التمام 1

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

مشتقة دالة جيب التمام هي سالب دالة الجيب 2

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

قواعد الاشتقاق التي تم دراستها صحيحة للدوال الجيبية.



شكل (1)

لاحظ الشكل (1):

الدالة  $f(x) = \sin x$  لها مماسات أفقية عند كل من القيم  $\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$  وبيان الدالة  $f'(x) = \cos x$  يتقطع مع محور السينيات عند هذه القيم أي أن المشتقة عندها تساوي الصفر.

#### مثال (1)

أوجد المشتقّات للدوال التالية:

a)  $y = x^2 \sin x$

b)  $u = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

c)  $f(x) = \sin^2 x$

#### سوف تعلم

- إيجاد مشتقة دالة الجيب.
- إيجاد مشتقة دالة جيب التمام.
- إيجاد مشتقات الدوال المثلثية الأخرى.

#### المفردات والمصطلحات:

- مشتقة دالة الجيب

#### Derivative of the Sine Function

- مشتقة دالة جيب التمام

#### Derivative of the Cosine Function

- مشتقة دالة الظل

#### Derivative of the Tangent Function

- مشتقة دالة ظل التمام

#### Derivative of the Cotangent Function

- مشتقة دالة القاطع

#### Derivative of sec Function

- مشتقة دالة قاطع التمام

#### Derivative of csc Function

#### تذكرة:

إذا كان  $x$  درجة زاوية  
بالراديان فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

الحل:

a)  $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dx}x^2\right) \cdot \sin x + \left(\frac{d}{dx}\sin x\right) \cdot x^2$   
 $= 2x \sin x + x^2 \cos x$

قاعدة الضرب

b)  $\frac{du}{dx} = \frac{(1 - \sin x) \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \cdot \frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2}$   
 $= \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$   
 $= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2}$   
 $= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2}$   
 $= \frac{1}{1 - \sin x}$

قاعدة القسمة

c)  $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(\sin^2 x)$   
 $= \frac{d}{dx}(\sin x \cdot \sin x)$   
 $= \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$   
 $= \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x$   
 $= 2 \sin x \cos x$

حاول أن تحل

أوجد المشتقات للدوال التالية: 1

a)  $h(x) = \cos^2 x$       b)  $g(x) = \frac{x}{\cos x}$       c)  $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

## ثانيًا: مشتقات الدوال المثلثية الأخرى

الدالتان قابلتان للاشتقاء، لذا فإن الدوال المثلثية التالية:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

هي أيضًا دوال قابلة للاشتقاء عند كل قيمة للمتغير  $x$  تكون معروفة عندها وتعطى مشتقاتها بالقواعد التالية:

1)  $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$

2)  $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$

3)  $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$

4)  $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$

تذكرة:

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

**مثال (2)**

أوجد مشتقات الدوال التالية:

a)  $f(x) = \tan x + \cot x$

b)  $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

c)  $h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

الحل:

a)  $f(x) = \tan x + \cot x$

$$f'(x) = \sec^2 x + (-\csc^2 x) = \sec^2 x - \csc^2 x$$

b)  $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

$$g'(x) = (1 + \sin x)(\sec x \cdot \tan x) + \sec x \cdot \cos x = \sec x \cdot \tan x + \sec x \cdot \tan x \cdot \sin x + 1$$

c)  $h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

$$h'(x) = -\csc x \cdot \cot x + \tan x \cdot \cos x + \sec^2 x \cdot \sin x$$

حاول أن تحل

أوجد مشتقات الدوال التالية: 2

a)  $f(x) = \frac{1 + \tan x}{\tan x}$

b)  $g(x) = \sec x + \csc x$

c)  $h(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$

**مثال (3)**

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة:  $y = \tan x$  عند النقطة  $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

الحل:

نوجد أولاً مشتقة الدالة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sec^2 \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

وعليه ميل المستقيم العمودي للمنحنى عند  $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

$$m_1 = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$$

هي معادلة المستقيمي العمودي:

$$y - 1 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

حاول أن تحل

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة:  $y = \sec x$  عند النقطة  $F\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$  3

## قاعدة السلسلة

### Chain Rule

#### سوف تعلم

- إيجاد مشتقة تركيب دالتين باستخدام قاعدة السلسلة.

#### المفردات والمصطلحات:

- قاعدة السلسلة

#### Chain Rule

- دالة مركبة

#### Composite Function

- قاعدة سلسلة القوى

#### Power Chain Rule

#### دعنا نفك ونناقش

لتكن الدوال التالية:

$$f(x) = 3x^2 + 1 \quad , \quad g(x) = x^2$$

$$h(x) = x^3 \quad , \quad q(x) = x^{10}$$

أكمل ما يلي:

**a**  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 1)$

$$= (3x^2 + 1)^2 = 9x^4 + \dots + \dots$$

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = 36x^3 + \dots + \dots$$

**b**  $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \dots \dots \dots$

$$= \dots \dots \dots = \dots \dots \dots$$

$$(h \circ f)'(x) = \dots \dots \dots$$

**c**  $(q \circ f)(x) = \dots \dots \dots$

هل من السهل إيجاد  $(q \circ f)'$  بنفس الأسلوب السابق؟

من فقرة «دعنا نفك ونناقش» لاحظنا أنه عند إيجاد مشتقة،

$$(q \circ f)(x) = (3x^2 + 1)^{10}$$

سنجد صعوبة في فك هذا المقدار.

تساعدنا القواعد التالية على إيجاد مشتقة مثل هذه الدوال.

### Chain Rule

### قاعدة السلسلة (التسلسل)

إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للاشتغال عند  $x$ ، الدالة  $g$  قابلة للاشتغال عند  $f(x)$ ، فإن الدالة المركبة

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

تكون قابلة للاشتغال عند  $x$ ، ويكون:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

أي يمكننا القول إن مشتقة الدالة المركبة  $(f \circ g)(x)$  هي مشتقة الدالة  $f$  عند  $x$  مضروبة في مشتقة الدالة  $g$  عند  $x$ .

**مثال (1)**

إذا كان  $f(x) = 3x^2 + 1$  ،  $g(x) = x^{10}$  . فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة

( $f \circ g$ )'(x) **a**

( $g \circ f$ )'(-1) **b**

الحل:  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

**a**  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = 6x$  ،  $g'(x) = 10x^9$

$f'(g(x)) = 6(x^{10}) = 6x^{10}$

$\therefore (f \circ g)'(x) = 6x^{10} \cdot 10x^9 = 60x^{19}$

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = 3(x^{10})^2 + 1 = 3x^{20} + 1$

$\therefore (f \circ g)'(x) = 60x^{19}$

حل آخر

**b**  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$= 10(f(x))^9 \cdot 6x$

$= 10(3x^2 + 1)^9 \cdot 6x$

$(g \circ f)'(-1) = -60(4)^9$

$= -15728640$

حاول أن تحل

**a** هل يمكنك حل مثال (1) بطريقة أخرى؟ فسر.

**b** لتكن:  $(g \circ f)'(0)$  ،  $(f \circ g)'(x) = -2x^3 + 4$  أو جد باستخدام قاعدة السلسلة  $f(x) = -2x^3 + 4$  ،  $g(x) = x^{13}$

**مثال (2)**

لتكن:  $f(x) = \frac{2x+1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) ،  $g(x) = x^2 + 1$

أو جد باستخدام قاعدة السلسلة  $(f \circ g)'(x)$

الحل:

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = \frac{2x - (2x+1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$  ،  $g'(x) = 2x$

$f'(g(x)) = f'(x^2 + 1) = \frac{-1}{(x^2 + 1)^2}$

المتغير:  $g(x)$

$\therefore (f \circ g)'(x) = \frac{-1}{(x^2 + 1)^2} \cdot 2x$

قاعدة السلسلة

$= \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

حاول أن تحل

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} , \quad g(x) = \sqrt{x} \quad 2$$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة (1)

وضع عالم الرياضيات لايبنر (Leibniz) صورة أخرى لقاعدة السلسلة.

### صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت  $y = f(u)$  ،  $u = g(x)$  فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند  $u = g(x)$

مثال (3)

إذا كانت:  $y = u^3 - 3u + 1$  ،  $u = 5x^2 + 2$

فأوجد:  $\frac{dy}{dx}$  باستخدام قاعدة التسلسل

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 3$$

مشقة بدلالة  $u$

$$\frac{du}{dx} = 10x$$

مشقة بدلالة  $x$

$$\frac{dy}{dx} = (3u^2 - 3) \times (10x)$$

قاعدة التسلسل

$$\frac{dy}{dx} = (3(5x^2 + 2)^2 - 3) \times (10x)$$

تعويض

$$= 750x^5 + 600x^3 + 90x$$

حاول أن تحل

$$y = u^2 + 4u - 3 , \quad u = 2x^3 + x \quad 3$$

أوجد:  $\frac{dy}{dx}$  باستخدام قاعدة التسلسل.

### الربط بالفيزياء

إذا كانت  $s(t)$  دالة موقع

جسم بعد  $t$  ثانية من حركته

فإن سرعته اللحظية  $v$  هي:

$$v = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$

### ملاحظة:

$v = \frac{ds}{dt}$  تسمى أيضًا  
السرعة المتجهة ويمكن  
أن تكون موجبة أو سالبة  
أو صفر.

### مثال (4)

يتحرك جسيم على محور السينات بحيث إن موضعه عند أي لحظة  $t \geq 0$  يعطى بالدالة:

$$S = \cos(t^2 + 1) . \text{ أوجد السرعة اللحظية للجسيم كدالة في } t.$$

الحل:

$$\text{نعلم أن: } v = \frac{dS}{dt} \text{ هي السرعة اللحظية}$$

في هذه الحالة  $S$  دالة مركبة، حيث:

لدينا:

$$\frac{dS}{du} = -\sin(u)$$

$$S = \cos(u)$$

$$\frac{du}{dt} = 2t$$

$$u = t^2 + 1$$

باستخدام قاعدة السلسلة:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{dS}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= (-\sin(u)) \cdot 2t \\ &= (-\sin(t^2 + 1)) \cdot 2t \\ &= -2t \sin(t^2 + 1)\end{aligned}$$

حاول أن تحل

$$4 . \text{ أوجد مشتقة } y = \sin(x^2 + x) \text{ بالنسبة إلى المتغير } x.$$

من مثال (4) يمكن إيجاد المشتقة باستخدام القاعدة التالية:  
 $\frac{d}{dx}(\cos f(x)) = (-\sin f(x)) \cdot f'(x)$  ويمكن تعميمها على الدوال المثلثية الأخرى.

### مثال (5)

أوجد مشتقة الدالة:  $f(x) = \sin^3 x$  باستخدام قاعدة السلسلة.

الحل:

$$g(x) = \sin x , h(x) = x^3$$

نفرض أن:

$$\therefore f(x) = (h \circ g)(x)$$

$$f'(x) = (h \circ g)'(x)$$

$$= h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= 3(g(x))^2 \cdot \cos x$$

$$= 3 \sin^2 x \cos x$$

حاول أن تحل

$$5 . \text{ أوجد مشتقة الدالة: } f(x) = \cos^5 x \text{ باستخدام قاعدة السلسلة.}$$

## قاعدة سلسلة القوى

### Chain Rule Powers

في كثير من الأحيان نحتاج إلى إيجاد مشتقة دالة ما على الصورة:  $y = [f(x)]^n$  حيث  $n$  عدد نسبي. لذلك نستخدم القاعدة التالية والمسماة بقاعدة سلسلة القوى:

## قاعدة سلسلة القوى

إذا كانت  $f(x)$  قابلة للاشتقاق على مجالها وكان  $n$  عدداً نسبياً فإن:

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

## مثال (6)

لتكن:  $y = \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^3}$  ، أوجد:

الحل:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^3} \\ &= (x^2 + 3x + 5)^{\frac{3}{5}} \\ y' &= \frac{3}{5}(x^2 + 3x + 5)^{\frac{3}{5}-1} \cdot (2x + 3) \\ &= \frac{3}{5}(x^2 + 3x + 5)^{-\frac{2}{5}} \cdot (2x + 3) \\ &= \frac{3(2x + 3)}{5\sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^2}} \end{aligned}$$

حاول أن تحل

6 لكن:  $y = \sqrt[4]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$  ، أوجد:

## مثال (7)

أوجد ميل مماس المنحني  $y = \sin^5 x$  عند  $x = \frac{\pi}{3}$  الحال:

$$\frac{dy}{dx} = 5 \sin^4 x (\sin x)' = 5 \sin^4 x \cdot \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{32}$$

ميل المماس هو:

حاول أن تحل

7 يبين أن ميل أي مماس للمنحني  $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$  دائمًا يكون موجباً حيث

## المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

### Higher Order Derivatives and Implicit Differentiation

#### دعنا نفك ونناقش

لتكن:  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$

أكمل:

$$1 \quad f'(x) = \dots = g(x)$$

$$2 \quad g'(x) = \dots$$

هل  $? g'(x) = (f'(x))'$

#### سوف تعلم

- المشتقات العليا.
- الاشتقاق الضمني.

#### المفردات والمصطلحات:

- مشتقة ذات رتبة عليا

#### Higher Order Derivative

- اشتقاق ضمني

#### Implicit Derivative

#### تذكرة:

$$(a) \quad y = f(x)$$

$$(b) \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

#### ملاحظة:

أحياناً نستخدم قاعدة السلسلة مرتين أو أكثر لإيجاد مشتقة.

#### ملاحظة:

لا يجب الخلط بين رتبة مشتقة الدالة  $y^{(n)}$  و  $y^n$  من قوى  $y$ .

### Higher Order Derivatives

### أولاً: المشتقات ذات الرتب العليا

رمزنا سابقاً لمشتقة دالة على مجالها بالرمز  $\frac{dy}{dx} = y'$  والآن سوف تسمى  $y'$  المشتقة من الرتبة الأولى للدالة  $y$  بدلالة المتغير  $x$ .

والمشتقة الأولى نفسها ( $y'$ ) يمكن أن تكون دالة قابلة للاشتقاق على مجالها بدلالة المتغير  $x$  وبالتالي يمكن كتابتها:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

وهذه تسمى المشتقة من الرتبة الثانية للدالة  $y$  بدلالة  $x$ .

والمشتقة الثانية نفسها يمكن أن تكون دالة قابلة للاشتقاق على مجالها بدلالة المتغير  $x$  وبالتالي يمكن كتابتها:

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

وهذه تسمى المشتقة من الرتبة الثالثة للدالة  $y$  بدلالة المتغير  $x$ .

وبصورة عامة إذا كان  $n$  عددًا صحيحًا حيث  $n > 1$  فإن مشتقة الدالة  $y$  من الرتبة  $n$  بدلالة  $x$  هي على الشكل التالي:

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} (y^{(n-1)}) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

مثال (1)

أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة  $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$  بدلالة المتغير  $x$ .

الحل:

$$y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 14x^6 - 8x + 3 \quad \text{المشتقة من الرتبة الأولى}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 84x^5 - 8 \quad \text{المشتقة من الرتبة الثانية}$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 420x^4 \quad \text{المشتقة من الرتبة الثالثة}$$

$$y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = 1680x^3 \quad \text{المشتقة من الرتبة الرابعة}$$

حاول أن تحل

1 إذا كانت:  $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$

فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

مثال (2)

إذا كانت  $y = \sin x$ . يُبيّن أن  $y^{(4)} = y$ .

الحل:

$$y = \sin x \quad \text{ي دالة معرفة لكل قيمة } x \text{ على } \mathbb{R}$$

$$y' = \cos x \quad \text{مشتقة من الرتبة الأولى}$$

$$y'' = -\sin x \quad \text{مشتقة من الرتبة الثانية}$$

$$y''' = -\cos x \quad \text{مشتقة من الرتبة الثالثة}$$

$$y^{(4)} = \sin x \quad \text{مشتقة من الرتبة الرابعة}$$

$$\therefore y^{(4)} = y$$

حاول أن تحل

2 .  
لتكن الدالة:  $y = \cos x$

.  
يُبيّن أن  $y^{(4)} + y'' = 0$ .

**مثال (3)**

أوجد  $y''$  حيث  $y = \frac{1}{\cos x}$   
الحل:

$$y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$y' = \sec x \tan x$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}(\sec x \tan x) \\ &= \tan x \frac{d}{dx} \sec x + \sec x \frac{d}{dx} \tan x \\ &= \tan x \cdot \sec x \cdot \tan x + \sec x \cdot \sec^2 x \\ &= \sec x \cdot \tan^2 x + \sec^3 x \end{aligned}$$

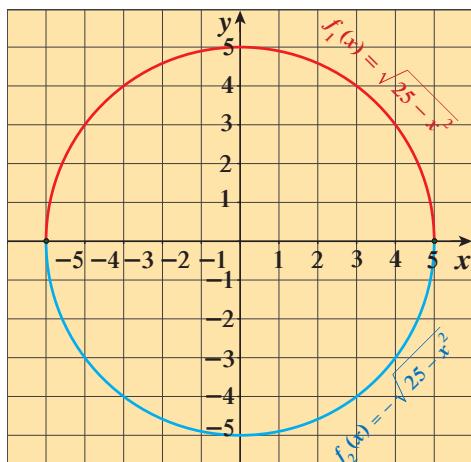
حاول أن تحل

3 أوجد  $y''$  حيث  $y = \frac{1}{\sin x}$

## Implicit Derivative

## ثانياً: الاشتقة الصمني

في دراستنا السابقة يمكننا إيجاد مشتقات بعض الدوال على الصورة  $y = f(x)$  مثل:



$$y = 3x^2 - 2x + 1, \quad y = \sqrt{x^2 + 4}, \dots$$

وبالنظر لمعادلة المحنى

نلاحظ أنه يمكننا كتابتها بالصورة الصريحة  $y = f(x)$  أي  $y = \frac{x}{1-x}$

ومنه يمكننا إيجاد مشتقة هذه الدالة أو ميل منحنى هذه الدالة حيث  $x \neq 1$ .

وبالنسبة لمنحنى  $x^2 + y^2 = 25$  نجد أن ميل المحنى معروف عند جميع نقاطه باستثناء نقطتين  $(5, 0)$  و  $(-5, 0)$ . لماذا؟

ونجد أن المحنى هو اتحاد منحنيي الدالتين

$y_1 = f_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$  ،  $y_2 = f_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$  للاشتقاق عند أي نقطة في مجالها عدا  $-5$  و  $5$ .

ولكن، هل يمكننا إيجاد ميل المحنى إذا كان من غير الممكن التوصل للصورة الصريحة للحصول على الدوال المكونة لها؟

الإجابة عن هذا السؤال تمثل في اعتبار  $y$  دالة قابلة للاشتقة في  $x$  ، واحتقاء طرفي المعادلة بالنسبة إلى  $x$  باستخدام قواعد الاشتقاء التي سبق تعلمها في هذه الوحدة.

وهذا يمكننا من إيجاد صيغة  $\frac{dy}{dx}$  بدالة  $y$  ،  $x$  نحسب منها ميل المحنى عند أي نقطة  $(x, y)$  على المحنى.

تسمى عملية إيجاد المشتقة  $\frac{dy}{dx}$  بهذه الطريقة الاشتقاء الصمني.

### مثال توضيحي

أوجد  $\frac{dy}{dx}$  حيث  $y^3 + 5y^2 - x^3 = 0$   
الحل:

نفرض أن  $y = f(x)$  وبالتعويض في المعادلة:

$$(f(x))^3 + 5(f(x))^2 - x^3 = 0$$

وباستخدام قاعدة السلسلة نجد المشتقة فتكون كالتالي:

$$3(f(x))^2 \cdot f'(x) + 10f(x) \cdot f'(x) - 3x^2 = 0$$

أي أن:

$$3y^2 y' + 10yy' - 3x^2 = 0$$

ومنها نحصل على  $y'$ :

$$y'(3y^2 + 10y) = 3x^2$$

$$\therefore y' = \frac{3x^2}{3y^2 + 10y}$$

باستخدام نفس الخطوات المتتبعة في المثال التوضيحي يمكننا التوصل إلى أن:

$$(y^2)' = 2yy'$$

$$(y^3)' = 3y^2 y'$$

### مثال (4)

أوجد  $y'$  في الحالات التالية:

a)  $y^2 + xy = 7x$

b)  $y = x + x^2 y^5$

الحل:

a) نشتّق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير  $x$  باعتبار أن  $y$  دالة في  $x$  قابلة للاشتتقاق، وتطبيق قاعدة السلسلة هو:

$$\left[ \frac{d}{dx} (f(x))^n = n(f(x))^{n-1} f'(x) \right]$$

$$2yy' + 1xy' + y = 7$$

$$y'(2y + x) = 7 - y$$

$$y' = \frac{7 - y}{2y + x}$$

b)  $y = x + x^2 y^5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} + \frac{d(x^2 y^5)}{dx}$$

$$y' = 1 + y^5 \frac{d(x^2)}{dx} + x^2 \frac{d(y^5)}{dx}$$

$$y' = 1 + 2xy^5 + 5x^2y^4y'$$

$$y' - 5x^2y^4y' = 1 + 2xy^5$$

$$y'(1 - 5x^2y^4) = 1 + 2xy^5$$

$$y' = \frac{1 + 2xy^5}{1 - 5x^2y^4}$$

حاول أن تحل

٤ لكن:  $y' = \frac{dy}{dx}$  ،  $y^2 = x^2 - 2x$

و عموماً، تتم عملية الاشتتقاق الضمني وفق الخطوات التالية على الترتيب:

١ اشتتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير  $x$ .

٢ تجميع الحدود التي تحتوي  $\frac{dy}{dx}$  أو  $y'$  في أحد طرفي المعادلة.

٣ إخراج  $\frac{dy}{dx}$  أو  $y'$  كعامل مشترك.

٤ كتابة المعادلة على الصورة  $\frac{dy}{dx}$  أو  $y'$  بدلالة  $y$  ،  $x$ .

مثال (٥)

أوجد ميل المماس للمنحنى (الدائرة) الذي معادلته  $x^2 + y^2 = 25$  عند النقطة  $(3, -4)$ .

الحل:

يمكنا إيجاد ميل المنحنى عند النقطة  $(3, -4)$  بسهولة باستخدام الاشتتقاق الضمني لالمعادلة الأصلية بالنسبة إلى  $x$ .

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25) \quad (25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = -2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(3,-4)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \quad \text{وبالتعمير بـ } (3, -4)$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = \frac{3}{4}$$

حاول أن تحل

٥ أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته:  $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$  عند  $(1, 1)$

مثال (6)

أوجد ميل المماس  $\left( \frac{dy}{dx} \right)$  للمنحنى الذي معادلته:  $2y = x^2 + \sin y$  عند النقطة  $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$

الحل:

نشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى  $x$ .

$$\frac{d}{dx}(2y) = \frac{d}{dx}(x^2 + \sin y)$$

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin y)$$

$$2\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos y)\frac{dy}{dx}$$

$$2\frac{dy}{dx} - (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(2 - \cos y) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2 - \cos y}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(2\sqrt{\pi}, 2\pi)} = \frac{2(2\sqrt{\pi})}{2 - \cos(2\pi)}$$

$$= \frac{4\sqrt{\pi}}{2 - 1} = 4\sqrt{\pi}$$

ميل المماس للمنحنى عند النقطة  $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$  هو  $4\sqrt{\pi}$

حاول أن تحل

أوجد ميل المماس  $\left( \frac{dy}{dx} \right)$  للمنحنى الذي معادلته:  $1 = x^2 + y^2 - 2xy$  حيث  $y \neq 0$  عند النقطة  $(1, 1)$

مثال (7)

للمنحنى الذي معادلته  $x = 2\sqrt{y} + y$  أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة  $(1, 1)$

الحل:

الاشتقاق الضمني

$$2y^{\frac{1}{2}} + y = x$$

$$2 \cdot \frac{1}{2}(y)^{-\frac{1}{2}}y' + y' = 1$$

$$\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot y' + y' = 1$$

$$y' \left( \frac{1}{\sqrt{y}} + 1 \right) = 1$$

$$\therefore y' = \frac{1}{\sqrt{y} + 1}$$

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}}$$

$$y' = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

و بالتعويض به (3, 1)  
 $\frac{1}{2}$  . ميل المماس =

حاول أن تحل

7 لمنحنى الذي معادلته:  $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$  ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة (1, 1)

مثال (8)

إذا كانت  $yy'' + (y')^2 = 0$  فأثبت أن:  $y = \sqrt{1 - 2x}$   
 الحل:

لتكن  $g(x) = \sqrt{x}$  ،  $h(x) = 1 - 2x$  حيث  $y = (g \circ h)(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} , \quad h'(x) = -2 , \quad g'(h(x)) = \frac{1}{2\sqrt{1-2x}}$$

$$y' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-2x}} \times (-2)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$y'' = \frac{0 \times \sqrt{1-2x} - (-1) \times \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{(\sqrt{1-2x})^2}$$

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$y'' = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{(\sqrt{1-2x})^2}$$

$$= \frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$$

$$yy'' + (y')^2 = \sqrt{1-2x} \times \frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}} + \left( \frac{-1}{\sqrt{1-2x}} \right)^2$$

$$= \frac{-1}{1-2x} + \frac{1}{1-2x} = 0$$

حاول أن تحل

إذا كانت  $y = x \sin x$  فإن

$$y''' + y' + 2 \sin x = 0$$

مثال (9)

$$(1+x^2) f'''(x) + 6x f''(x) + 6 f'(x) = 0 \quad \text{أثبت أن:} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{لتكن}$$

الحل:

نوجد أولاً:

$$f'(x), f''(x), f'''(x)$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-2) - (-2x)(2)(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{\cancel{(1+x^2)}(6x^2 - 2)}{\cancel{(1+x^2)}^3}$$

بسط

$$= \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{(1+x^2)^3(12x) - (6x^2 - 2)(3)(1+x^2)^2(2x)}{(1+x^2)^6}$$

$$= \frac{\cancel{(1+x^2)}^2(-24x^3 + 24x)}{\cancel{(1+x^2)}^4}$$

$$= \frac{-24x^3 + 24x}{(1+x^2)^4}$$

$$(1+x^2) f'''(x) + 6x f''(x) + 6 f'(x)$$

$$= \frac{-24x^3 + 24x}{(1+x^2)^3} + \frac{36x^3 - 12x}{(1+x^2)^3} + \frac{-12x^3 - 12x}{(1+x^2)^3}$$

$$= 0$$

حاول أن تحل

$$f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4} \quad \text{فأثبت أن:}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{لتكن} \quad 9$$

## المرشد لحل المسائل

يتحرّك جسيم ويحدّد موقعه عند اللحظة  $t \geq 0$  بالدالة:  $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$  حيث  $s$  تفاص بالمتر (m) و  $t$  بالثواني (s).

- (a) أوجد مسافة انتقال الجسم في أول 5 s
- (b) أوجد السرعة المتوسطة خلال 5 s
- (c) أوجد السرعة اللحظية المتوجة عند اللحظة  $t = 5$

الحل:

كيف فكر أحمد لحل هذه المسألة:

(a) نوجد  $s(5)$

$$s(5) = 0.6(5)^3 - 1.5(5) - 0.9 = 66.6 \text{ m}$$

المسافة التي انتقلها الجسم هي 66.6 m خلال 5 s

(b) لإيجاد السرعة المتوسطة خلال 5 s:

$$\frac{s(5) - s(0)}{5 - 0} = \frac{66.6 + 0.9}{5} = 13.5 \text{ m/s}$$

(c) نوجد دالة السرعة وهي مشتقة دالة الحركة:

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = 1.8t^2 - 1.5$$

من ثم نحسب  $s'(5)$ :

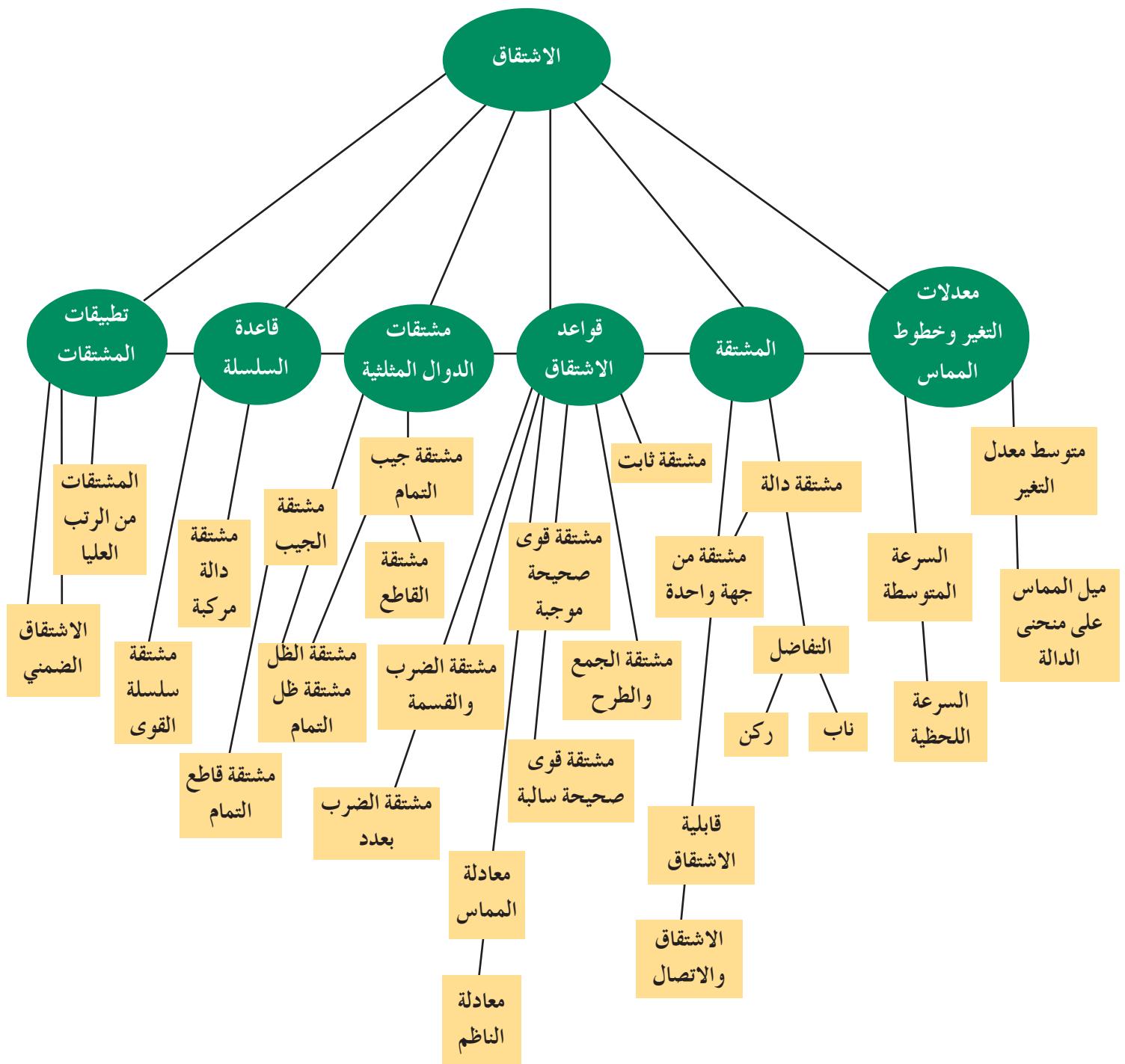
$$s'(5) = 1.8(5)^2 - 1.5 = 43.5 \text{ m/s}$$

### مسألة إضافية

موقع جسم يتحرّك مبيّن في الدالة:  $s(t) = 9t^3 - 7t + 3$  و ذلك بعد  $t$  ثانية حيث  $t \geq 0$ .

- (a) أوجد المسافة التي قطعها الجسم بعد 3 s.
- (b) أوجد الدالة التي تدل على سرعة الجسم بالنسبة إلى الزمن عند اللحظة  $t$ .
- (c) أوجد السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية المتوجة عند  $t = 3$ .

## مخطط تنظيمي للوحدة الثانية



## ملخص

- يعرف متوسط معدل التغير للدالة  $f$  على فترة مغلقة  $[a, b]$  بالقاعدة  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- السرعة المتوسطة بين مدتين من الزمن هي معدل التغير على هذه الفترة.
- السرعة اللحظية هي السرعة التي تعطى خلال لحظة من الزمن وتعطى بالقاعدة:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

حيث  $t$  هي اللحظة من الزمن لإيجاد السرعة اللحظية.

- معدل التغير للدالة  $f$  عند النقطة  $P(a, f(a))$  إن وجد هو:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- ميل المماس لمنحنى عند نقطة محددة يعطى بالقاعدة:  $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  حيث إن  $a$  هي الإحداثي السيني للنقطة على منحنى الدالة  $f$  حيث إن  $y_0$ ،  $x_0$  هما إحداثيا النقطة على المنحنى،  $m$  هي ميل المماس.

- معادلة الناظم على المماس عند نقطة على منحنى تعطى بالقاعدة:  $y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$
- مشتقة الدالة  $f$  عند نقطة إحداثها السيني  $a$  تعطى بالقاعدة:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{أو } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{إذا وجدت.}$$

- نحصل على ركن عندما تكون المشتقات من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقائه الشعاعين غير متساوين.
- نحصل على ناب عندما يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من  $\infty$  في إحدى الجهات ويقترب من  $-\infty$  في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسى عندها.
- نحصل على مماس رأسى عندما يكون المماس للمنحنى عند نقطة رأسى.

- إذا كانت الدالة  $f$  لها مشتقة عند نقطة ، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.
- معكوس النظرية ليس صحيحا دائمًا، الدالة المتصلة قد يكون لها ركن أو ناب أو مماس عمودي ومن ثم لا تكون قابلة للاشتباك عند نقطة معينة.

- إذا كان  $c = f(x)$  فإن:  $f'(x) = 0$  حيث  $c$  قيمة ثابتة.

- إذا كانت  $f(x) = x$  فإن  $f'(x) = 1$

- إذا كان  $f(x) = x^n$  فإن:  $f'(x) = nx^{n-1}$  حيث  $n$  عدد صحيح موجب أو سالب.

- $(kf(x))' = k f'(x)$

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

- $(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad \bullet$$

إذا كان  $f'(x) = \cos x$  فإن  $f(x) = \sin x$   $\bullet$

إذا كان  $f'(x) = -\sin x$  فإن  $f(x) = \cos x$   $\bullet$

إذا كان  $f'(x) = \sec^2 x$  فإن  $f(x) = \tan x$   $\bullet$

إذا كان  $f'(x) = -\csc^2 x$  فإن  $f(x) = \cot x$   $\bullet$

إذا كان  $f'(x) = \sec x \cdot \tan x$  فإن  $f(x) = \sec x$   $\bullet$

إذا كان  $f'(x) = -\csc x \cdot \cot x$  فإن  $f(x) = \csc x$   $\bullet$

إذا كانت الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $(x)$  ، الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق عند  $x$ ، فإن الدالة المركبة

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$  تكون قابلة للاشتقاق عند  $x$  ، ويكون:  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

إذا  $y = f(u)$  حيث إن  $u = g(x)$  فإن  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$   $\bullet$

$\frac{d^n y}{d^n x}$  هي مشتقات الدالة  $y$  من الرتب العليا إذا وجدت في مجال تعريفها.

في الاشتقاق الضمني نوجد مشتقة المتغير المستقل  $x$  ومشتقة المتغير التابع  $y$  ثم نوجد  $\frac{dy}{dx}$ .

# الوحدة الثالثة

## تطبيقات على الاشتقاق

### Applications on Differentiation

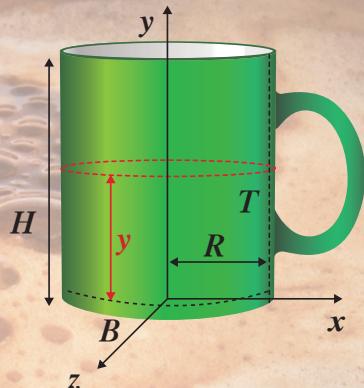
#### مشروع الوحدة:

**1 مقدمة المشروع:** فرضاً أنه لا يوجد مكان مخصص في إحدى السيارات لوضع كوب يحتوي على القهوة، وسوف يوضع بجانب مقعد السائق أثناء القيادة. أظهرت التجربة أن الكوب قابل للانسكاب عندما يكون مليئاً بالكامل. ويصبح أكثر ثباتاً كلما تناقصت منه القهوة.

**2 الهدف:** تحديد أقصى ارتفاع لكمية القهوة كي لا تسكب من الكوب أثناء قيادة السيارة.

**3 اللوازم:** ورق رسم بياني - آلة حاسبة علمية - حاسوب - جهاز إسقاط.

**4 أسئلة حول التطبيق:**



يبين الرسم المقابل أن جزءاً من الكوب يحتوي على القهوة. سوف نفترض أن الكوب يكون أكثر ثباتاً عندما تكون نقطة الارتكاز المشتركة للكوب وكمية القهوة هي في أدنى ارتفاع. نقطة ارتكاز المجسم الأسطواني هي نقطته المركزية الهندسية حيث إن إحداثها الصادي  $\bar{y}$  يمكن أن يعطى بالقاعدة:

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

إذا علمت أن:  $m_1 = \pi\delta(R+T)^2B$  (كتلة قاعدة الكوب) ،  $y_1 = -\frac{B}{2}$  (إحداثي الصادي لنقطة ارتكاز القاعدة).

$m_2 = \pi\delta(R+T)^2H - \pi\delta R^2H$  (إحداثي الصادي لنقطة ارتكاز جوانب الكوب).

$m_3 = \pi\delta R^2 y$  (كتلة القهوة في الكوب) ،  $y_3 = \frac{y}{2}$  (إحداثي الصادي لنقطة ارتكاز القهوة).

**a** احسب قيم  $m_1$  ،  $m_2$  ،  $m_3$  بدلالة  $B$  و  $y$  و  $H$  و  $T$  و  $R$  (إرشاد:  $m = \delta V$  حيث  $\delta$  كثافة مشتركة للقهوة والمادة المصنوع منها الكوب).

**b** أوجد  $\bar{y}$  بدلالة  $B$  و  $y$  و  $H$  و  $T$  و  $R$ .

**c** إذا كان:  $H = 8 \text{ cm}$  ،  $R = 3 \text{ cm}$  ،  $T = 0.5 \text{ cm}$  ،  $B = 1 \text{ cm}$

$$f(y) = \bar{y} = \frac{21.75 + y^2}{8.5 + 2y} ; 0 \leq y \leq 8$$

**d** أثبت أن مشتقة  $f(y)$  هي:

$$f'(y) = \frac{2y^2 + 17y - 43.5}{(2y + 8.5)^2}$$

**5** ما القيمة المحلية الصغرى؟ فسر.

**6** التقرير: اكتب تقريراً يبين نتائج بحثك. أشر إلى كيفية الاستفادة من مفاهيم التفاضل في عملك.

دعّم التقرير بالرسوم البيانية وبعرض على جهاز إسقاط. طبق ما توصلت إليه على كوبك المفضل في احتساء القهوة.

#### دروس الوحدة

تطبيقات على القيم القصوى	رسم بيان دوال كثيرات الحدود	ربط المشتقة الأولى $f'$ والمشتقة الثانية $f''$ بمنحنى الدالة $f$	تضاريد وتناقص الدوال	القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدواال
3-5	3-4	3-3	3-2	3-1

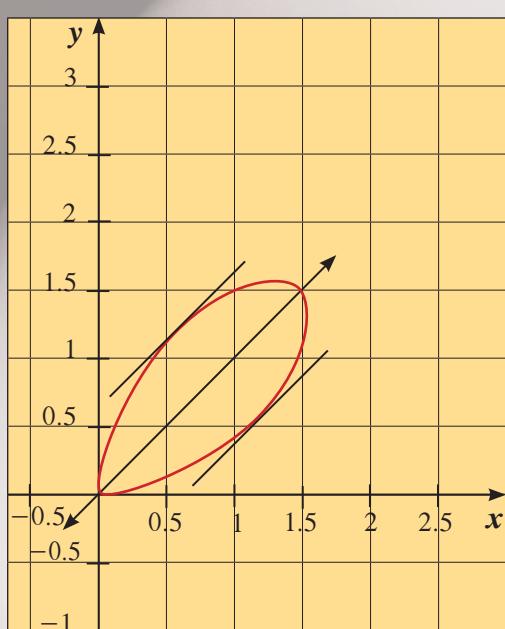
## الوحدة الثالثة

### أضف إلى معلوماتك

«إذا كنت أجرؤ القول فإن مسألة تحديد خط المماس هي المسألة الأكثرفائدة وبالعموم هي أكثر ما أود معرفته».

ديكارت (1596 – 1650)

أدت الأبحاث التي قام بها العلماء في القرن السابع عشر في مختلف المجالات: علم الميكانيك والفلك والبصريات، إلى طرح مسائل المماس وحلها. منها: تحديد خط المماس في نقطة معينة، وتحديد النقطة على المنحني حيث المماس مواز لمستقيم معين. للشكل أدناه محور تناظر. ظهر ديكارت طريقة تسمح بتحديد النقاط حيث المماس مواز لهذا المحور.



### أين أنت الآن؟ (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت الدالة التربيعية: القيمة الصغرى والقيمة العظمى.
- تعرفت الرسوم البيانية لبعض الدوال الأسيّة واللوغاريتميّة.
- مثلت النمو الأسي والتضاؤل الأسيّ.
- تعرفت الرسوم البيانية للدوال المثلثيّة.
- تعرفت الاشتقاق وقواعده.

### ماذا سوف تتعلم؟

- إيجاد القيم القصوى المطلقة والقيم القصوى المحلية.
- تطبيق نظرية القيمة المتوسطة.
- تحديد تزايد وتناقص الدوال.
- اختبار المشتققة الأولى للقيم القصوى المحلية.
- تحديد تغير منحنى الدالة.
- تحديد نقاط الانعطاف.
- اختبار المشتققة الثانية للقيم القصوى المحلية.
- رسم بيان دوال كثيرات الحدود.
- تطبيقات على القيم القصوى.

### المصطلحات الأساسية

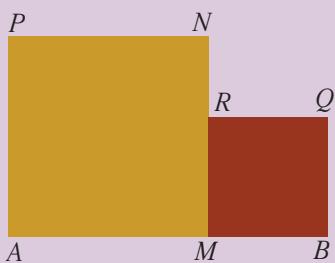
قيم قصوى مطلقة – قيمة عظمى مطلقة – قيمة صغرى مطلقة – نقطة طرفية – نقطة داخلية – قيمة قصوى محلية – نقطة حرجة – نظرية القيمة المتوسطة – الدوال المتزايدة – الدوال المتناقصة – الدالة المطرّدة – اختبار المشتققة الأولى – التغير – نقاط الانعطاف – اختبار المشتققة الثانية – كثيرات الحدود.

## القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

### Extreme Values of Functions

#### دعا نفكّر ونناقش

في الشكل المقابل  $AM = x$  ،  $M \in \overline{AB}$  ،  $AB = 6 \text{ cm}$  مربعان فيهما  $AMNP$  ;  $MBQR$  نريد معرفة موقع  $M$  بحيث يكون مجموع مساحتي المربعين أصغر ما يمكن.



أوجد مساحة كل من المربعين. 1

ما إذا تمثل  $S(x) = 2x^2 - 12x + 36$  2

أكمل الجدول:

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$S(x)$							

لأى قيمة للمتغير  $x$  في الجدول تكون قيمة  $S(x)$  الأصغر؟ 3

أثبت أن  $S(x) - S(3) \geq 0$  لكل قيم  $x$  على الفترة  $(0, 6)$ . 3

استنتج موقع  $M$ .

### Extreme Values

### القيم القصوى

الشكل (1) يمثل بيان الدالة  $S$  من «دعا نفكّر ونناقش».

ويتضح أن للدالة  $S$  قيمة صغرى عند  $x = 3$  وتسمى أيضًا قيمة قصوى وفي هذه الحالة  $S(x) \geq S(3)$  لكل  $x$  تنتهي إلى مجال  $S$ .

في هذا الدرس سنتعرف على القيم القصوى والتي يمكن أن تكون القيمة الأصغر أو القيمة الأكبر للدالة مستعينين بدارسة إشارة مشتقة الدالة.



شكل (2)

#### تعريف (1): القيم القصوى المطلقة

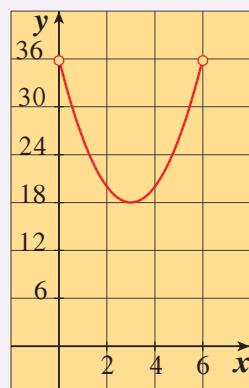
إذا كانت  $f$  دالة مجالها  $D$  ،  $c \in D$  ، فإن  $f(c)$  تسمى:

قيمة عظمى مطلقة للدالة  $f$  على  $D$  عندما: a

$$f(c) \geq f(x) , \quad \forall x \in D_f$$

قيمة صغرى مطلقة للدالة  $f$  على  $D$  عندما: b

$$f(c) \leq f(x) , \quad \forall x \in D_f$$



شكل (1)  
بيان الدالة  $S$

- القيم العظمى المطلقة والقيم الصغرى المطلقة تسمى القيم القصوى المطلقة.
- تسمى القيم القصوى المطلقة بال**قيم القصوى** أي أنها نكتفى بالقول قيمة عظمى أو قيمة صغرى. قد يكون للدالة قيم قصوى مختلفة وذلك بحسب مجالها.

مثال (1)

لتكن الدالة:  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  حيث  $f(x) = x^2$  ، أوجد إن أمكن القيم القصوى للدالة  $f$  مع رسم بيانها عندما:

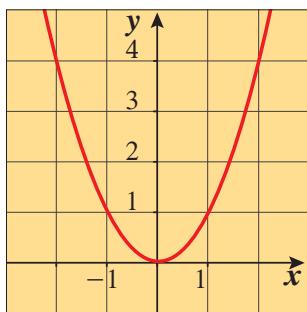
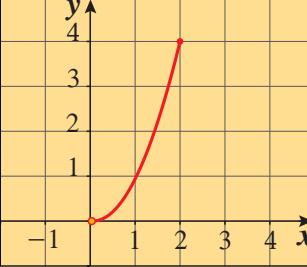
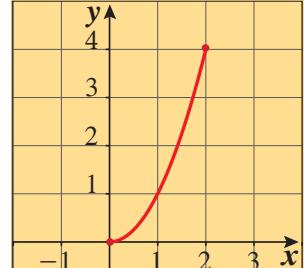
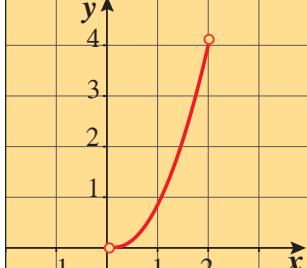
a)  $D = (-\infty, \infty)$

b)  $D = (0, 2]$

c)  $D = [0, 2]$

d)  $D = (0, 2)$

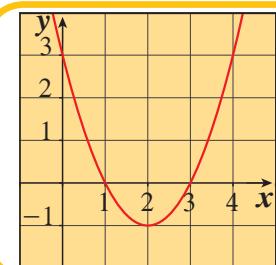
الحل:

a	$f(x) = x^2$ بيان الدالة:	المجال $D$	القيم القصوى المطلقة للدالة $f$ على $D$
a	$y = x^2$ 	$(-\infty, \infty)$	لا توجد قيمة عظمى مطلقة. توجد قيمة صغرى مطلقة تساوى 0 عند $x = 0$
b	$y = x^2$ 	$(0, 2]$	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوى 4 عند $x = 2$ لا توجد قيمة صغرى مطلقة.
c	$y = x^2$ 	$[0, 2]$	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوى 4 عند $x = 2$ قيمة صغرى مطلقة تساوى 0 عند $x = 0$
d	$y = x^2$ 	$(0, 2)$	لا توجد قيم قصوى مطلقة.

حاول أن تحل

الشكل يمثل بيان  $y = x^2 - 4x + 3$ . أوجد القيم القصوى للدالة على المجالات التالية:

- a)  $(-\infty, \infty)$       b)  $[2, 3]$       c)  $(1, 3)$       d)  $[3, 4)$



يتضح مما سبق أن الدالة قد لا تكون لها قيمة عظمى أو قيمة صغرى. وهذا لا يحدث مع الدوال المتصلة على فترات مغلقة.

### نظريّة (1): نظرية القيمة القصوى

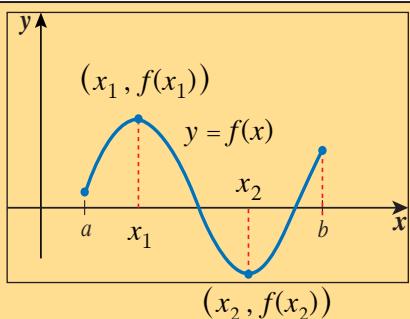
إذا كانت  $f$  دالة متصلة على فترة مغلقة  $[a, b]$  فإن  $f$  تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

**ملاحظة:** لتكن الدالة  $f$  معرفة على  $[a, b]$  ،  $c \in (a, b)$  فإننا نسمى:

$(a, f(a))$  ،  $(b, f(b))$  نقاط طرفية. 1

$(c, f(c))$  نقطة داخلية. 2

الأشكال التالية تمثل بعض الحالات لقيم عظمى وقيم صغرى لدوال متصلة على فترات مغلقة  $[a, b]$ :

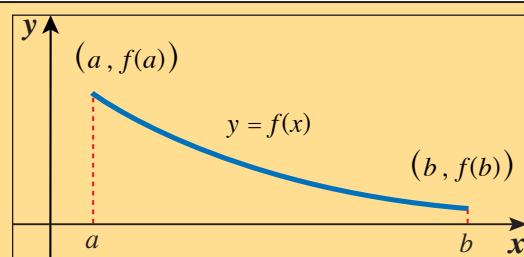


شكل (3)

للدالة قيمة عظمى  $f(x_1)$  عند  $x = x_1$

وللدالة قيمة صغرى  $f(x_2)$  عند  $x = x_2$

وهذه القيم عند نقاط طرفية

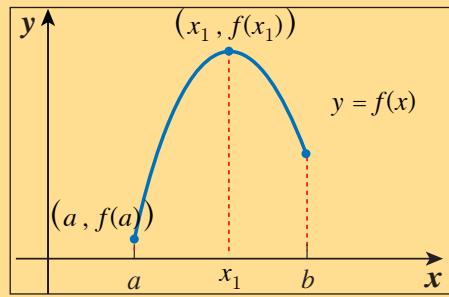


شكل (4)

للدالة قيمة عظمى  $f(a)$  عند  $x = a$

وللدالة قيمة صغرى  $f(b)$  عند  $x = b$

وهذه القيم عند نقاط طرفية



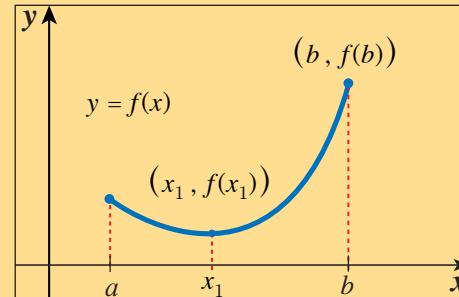
شكل (5)

للدالة قيمة عظمى  $f(x_1)$  عند  $x = x_1$

وللدالة قيمة صغرى  $f(a)$  عند  $x = a$

القيمة العظمى عند نقطة داخلية

والقيمة الصغرى عند نقطة طرفية.



شكل (6)

للدالة قيمة عظمى  $f(b)$  عند  $x = b$

وللدالة قيمة صغرى  $f(x_1)$  عند  $x = x_1$

القيمة العظمى عند نقطة طرفية

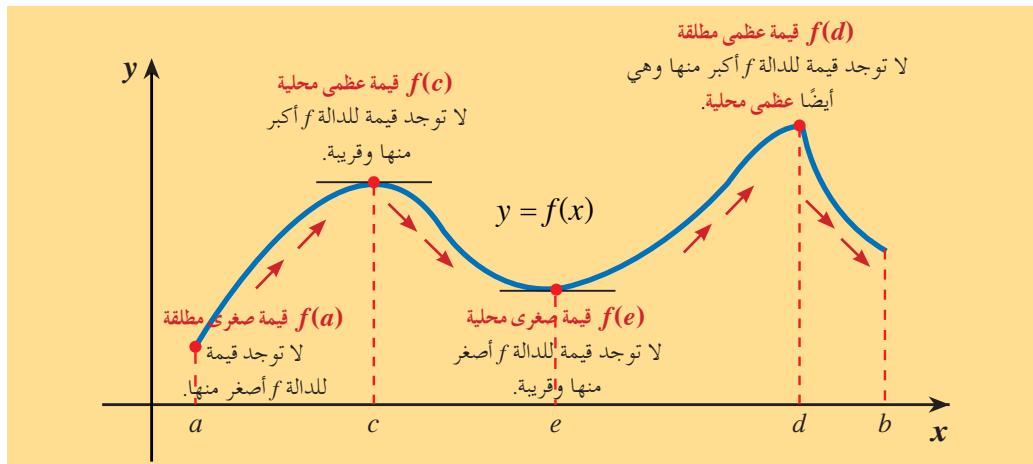
والقيمة الصغرى عند نقطة داخلية.

## تعريف (2): القيم القصوى المحلية

لتكن  $(c, f(c))$  نقطة داخلية للدالة  $f$ ، فترى مفتوحة تحوي  $c$ ، تكون  $(f(c))$  :

$$f(c) \geq f(x) \quad , \quad \forall x \in D \quad \text{قيمة عظمى محلية عند } c \text{ عندما:} \quad \text{أ} \quad (a)$$

$$f(c) \leq f(x) \quad , \quad \forall x \in D \quad \text{قيمة صغرى محلية عند } c \text{ عندما:} \quad \text{ب} \quad (b)$$



شكل (7)

يبين الشكل (7) رسمًا بيانيًا له أربع نقاط حيث الدالة عندها **قيم قصوى على مجالها**  $[a, b]$ .

تقع **القيمة الصغرى المطلقة** للدالة عند  $a$  وهي  $f(a)$ ، في حين أنّ قيمة الدالة عند  $e$  أصغر من أي قيمة قريبة منها سواء من جهة اليمين أو اليسار ولذلك تسمى **قيمة صغرى محلية**.

يرتفع المنحنى ناحية اليسار وينخفض ناحية اليمين حول النقطة  $c$ ، محدثًا **قيمة عظمى محلية** قدرها  $f(c)$  في حين أن الدالة لها **قيمة عظمى مطلقة** عند  $d$ .

نقطات المجال الداخلية التي تكون المشتقة عندها تساوي الصفر أو المشتقة عندها ليست موجودة. سنطلق عليها تسمية خاصة كما في التعريف التالي:

## Critical Point

## تعريف (3): النقطة الحرجة

النقطة الداخلية للدالة  $f$   $(c, f(c))$  تسمى **نقطة حرجة** عندما  $f'(c) = 0$  أو  $f'(c)$  غير موجودة.

**ملاحظة:** يسمى العدد  $c$  العدد الحرج.

## مثال (2)

أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية:

$$\text{أ} \quad g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$$

$$\text{ب} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x < 1 \\ 3x - 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

## معلومة:

الدالة ثابتة على الفترة  $[a, b]$  لها قيمة قصوى مطلقة واحدة فقط. أي أن القيمة العظمى تساوى القيمة الصغرى.

## تذكر:

تكون  $f'(c)$  غير موجودة إذا كان للدالة  $f$  عند  $c$  ركن أو ناب أو مماس رأسى.

الحل:

**a** دالة كثيرة حدود متصلة على  $\mathbb{R}$  وقابلة للاشتراق على  $\mathbb{R}$ .

$$g'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$g'(x) = 0 \quad \text{نضع}$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$x = 0, \quad x = 2$$

$$g(0) = 5, \quad g(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 5 = 1$$

$\therefore$  النقطتان  $(1, 5)$ ,  $(2, 1)$  نقطتان حرجةتان للدالة  $g$  على مجالها

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 1 \\ \text{تحث} & : x = 1 \\ 3 & : x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 3(1) - 1 = 2$$

نبحث الاشتراق عند  $x = 1$

إن وجدت

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 + 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{h}(2+\cancel{h})}{\cancel{h}_1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} (2+h) = 2$$

$$\therefore f'_-(1) = 2$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

إن وجدت

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(1+h) - 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3 + 3h - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{3}\cancel{h}}{\cancel{h}_1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} 3 = 3$$

$$\therefore f'_+(1) = 3$$

$$\therefore f'_-(1) \neq f'_+(1)$$

$f'(1)$  ليس موجودة.

∴ النقطة  $(1, 2)$  نقطة حرجة.

$$f'(x) = 3, \quad x > 1$$

$$\therefore \forall x \in (1, \infty) \Rightarrow f'(x) \neq 0$$

∴ لا توجد نقاط حرجة على هذه الفترة.

$$f'(x) = 2x : x < 1$$

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0 \in (-\infty, 1)$$

للدالة نقطة حرجة عند  $x = 0$

$$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$$

∴ النقطة  $(0, 1)$  نقطة حرجة.

حاول أن تحل

2 أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية:

a)  $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

b)  $f(x) = |x - 5|$

تذكرة:

إذا كانت الدالة  $f$  لها مشتقة  
عند نقطة فإنها تكون متصلة  
عند هذه النقطة.

وبالعودة إلى الشكل (7) السابق نجد أن النقاط الحرجة تكون عند  $x = c, x = e$  لأن المشتقة عند كل منهما تساوي الصفر (لماذا؟)  
وكذلك توجد نقطة حرجة عند  $x = d$  لأن المشتقة عندها ليست موجودة (لماذا؟)

### نظرية (2): القيم القصوى المحلية (Fermat's Theorem)

إذا كانت للدالة  $f$  قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند  $x = c$  فإن  $(c, f(c))$  نقطة حرجة.

إذا كانت  $(c, f(c))$  نقطة حرجة للدالة  $f$  فليس بالضرورة أن تكون  $f(c)$  قيمة قصوى محلية

فمثلاً الدالة  $f(x) = x^3$  لها نقطة حرجة عند  $x = 0$  ولكن  $f(0)$  ليست قيمة قصوى محلية.

### خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة $f$ المتصلة على الفترة $[a, b]$

تعلمت كيفية إيجاد النقاط القصوى المطلقة للدالة  $f$  من خلال التمثيل البياني لها وتطبيق تعريف (1) عليها.

واليآن سنعرض خطوات إيجادها جبرياً على  $[a, b]$ :

1 إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية:  $x = a, x = b$

2 إيجاد النقاط الحرجة للدالة  $f$  في الفترة  $(a, b)$  إن وجدت.

3 أكبر قيمة للدالة في الخطوتين 1، 2 هي قيمة عظمى مطلقة في  $[a, b]$  وأصغر قيمة للدالة هي قيمة صغرى مطلقة في  $[a, b]$ .

مثال (3)

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة  $f : [0, 3]$  في الفترة  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

الحل:

$\therefore$  الدالة  $f$  متصلة على  $[0, 3]$ .

$\therefore$  الدالة  $f$  لها قيمة عظمى مطلقة ولها قيمة صغرى مطلقة في الفترة  $[0, 3]$ .

نوجد قيم الدالة عند النقاط الطرفية  $x = 0$  ،  $x = 3$

$$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 1 = 1$$

$$f(3) = (3)^3 - 3(3) + 1 = 19$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{نضع}$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$\therefore x = 1 , \quad 1 \in (0, 3)$$

$$x = -1 , \quad -1 \notin (0, 3)$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

$\therefore (-1, 1)$  نقطة حرجة.

$x$	0	1	3
$f(x)$	1	-1	19

من الجدول:

أكبر قيمة للدالة  $f$  في الفترة  $[0, 3]$  هي 19

$\therefore$  19 قيمة عظمى مطلقة.

أصغر قيمة للدالة  $f$  في الفترة  $[0, 3]$  هي -1

$\therefore$  -1 قيمة صغرى مطلقة.

حاول أن تحل

3) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة  $f$  في الفترة  $[-2, 1]$   $f(x) = x^3 - 3x + 1$

#### مثال (4)

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة  $f$  :  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  في الفترة  $[ -2, 3 ]$  :

• الدالة  $f$  متصلة على  $[-2, 3]$

$$x = -2 \quad , \quad x = 3$$

$$f(-2) = (-2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4}$$

$\approx 1.587$

$$f(3) = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$

$\approx 2.08$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

لاحظ أن  $f'(x) \neq 0$  ولكن

عند  $x = 0$  المشتقة ليست موجودة،  $f(0) = 0$

نقطة حرجة  $(0, 0)$  .

$x$	-2	0	3
$f(x)$	1.587	0	2.08

من الجدول:

أكبر قيمة للدالة  $f$  في الفترة  $[-2, 3]$  هي  $3^{\frac{2}{3}}$

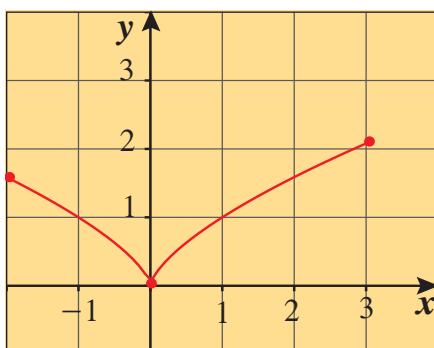
$$\therefore 3^{\frac{2}{3}} \text{ قيمة عظمى مطلقة.}$$

أصغر قيمة للدالة  $f$  في الفترة  $[-2, 3]$  هي 0

∴ 0 قيمة صغرى مطلقة.

حاول أن تحل

**٤** أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  في الفترة  $[1, 3]$



### شکل (8)

الشكل (8) يوضح التمثيل البياني للدالة  $f$  في مثال (4).

نلاحظ أن:

$f$  لها قيمة عظمى مطلقة 2.08 تقريرياً عند  $x = 3$

ولها قيمة صغرى مطلقة هي صفر عند 0

**مثال (5)**

لتكن  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$  ،  $a, b \in \mathbb{R}$  :  $f$

وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من:  $x = 1$  ،  $x = \frac{1}{3}$

أوجد قيمة كل من الثابتين  $a$  ،  $b$

الحل:  $\therefore f$  دالة كثيرة حدود

$\therefore f$  متصلة وقابلة للاشتغال على  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

: للدالة قيم قصوى محلية عند  $x = 1$  ،  $x = \frac{1}{3}$

$\therefore$  توجد نقاط حرجة للدالة عندهما وبالتالي:

$$f'(1) = 0 , f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

نحصل على المعادلين الآتيين:

$$\begin{cases} 3(1)^2 + 2a(1) + b = 0 \\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2a\left(\frac{1}{3}\right) + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ \frac{2}{3}a + b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$a = -2 , b = 1$$

استخدم الآلة الحاسبة

العلمية لإيجاد الحل

حاول أن تحل

5 لتكن  $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$  ،  $a, b \in \mathbb{R}$  :

وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من:  $x = -1$  ،  $x = 2$

أوجد قيمة كل من الثابتين  $a$  ،  $b$

**الربط بالเทคโนโลยيا:**

خطوات الحل المستخدمة  
لحل معادلين آتىتين  
بمتغيرين بالحاسبة.

**Mode** اضغط المفتاح

يظهر على الشاشة

8 خيارات لبرامج مستخدمة،

اختر البرنامج 5:EQN:

فيظهر على الشاشة 4 صيغ

لمعادلات:

اختر الصيغة:

$$1: a_n x + b_n y = c_n$$

فيظهر على الشاشة

المصفوفة:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a & b & c \\ & & \end{bmatrix}$$

اكتب كلاً من المعادلين  
على الشكل التالي:

$$ax + by = c$$

املاً المربعات في السطر

الأول بمعامل  $x$  يليه  $=$  ثم

معامل  $y$  يليه  $=$  ثم قيمة  $c$

يليه  $=$ .

كرر العملية في السطر الثاني.

اضغط الآن على المفتاح

$x =$  تظهر قيمة  $x$

(المجهول الأول)

اضغط ثانية على المفتاح

$y =$  تظهر قيمة  $y$

(المجهول الثاني)



**ملاحظة:**

يمكنك كذلك حل  
المعادلين الآتىتين  
باستخدام طريقة الحذف  
أو طريقة التعويض.

## تزايد وتناقص الدوال

### Increasing and Decreasing Functions

#### سوف تعلم

- نظرية القيمة المتوسطة.
- تزايد وتناقص الدوال.
- الدوال المطردة.
- الدالة الثابتة.

#### المفردات والمصطلحات

- نظرية القيمة المتوسطة

#### Mean Value Theorem

- الدوال المترادفة

#### Increasing Functions

- الدوال المتزايدة

#### Decreasing Functions

- الدالة المطردة

#### Monotonic Function

#### دعا نفك ونتناقش

إذا كانت  $f(x) = x^2 - 1$  فأجب عما يلي:

1 ارسم المستقيم المار بالنقطتين  $A(-1, f(-1))$ ,  $B(2, f(2))$ .

ثم أوجد الميل  $m(\overrightarrow{AB})$ .

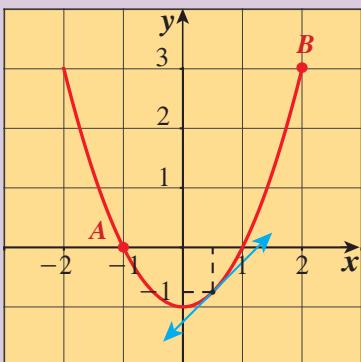
2 هل الدالة  $f$  متصلة على  $[-1, 2]$ ؟

وهل  $f$  قابلة للاشتراق على الفترة  $(-1, 2)$ ؟

3 أوجد ميل المماس لمنحنى  $f$  عند  $x = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2} \in (-1, 2)\right)$

4 استنتج العلاقة بين 1, 3.



### Mean Value Theorem

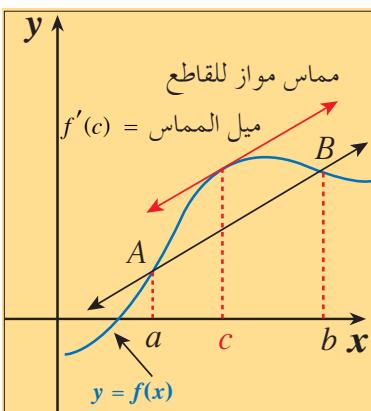
### نظرية القيمة المتوسطة

ترتبط نظرية القيمة المتوسطة بين متوسط معدل تغير دالة على فترة ما، ومعدل التغير للدالة عند نقطة تنتمي إلى هذه الفترة.

تكمن نتائجها القوية في صميم بعض التطبيقات الكثيرة الأهمية في علم حساب التفاضل والتكامل.

تقول النظرية إنّه في مكان ما بين نقطتين  $A$ ,  $B$  على منحنى دالة قابلة للاشتراق، يوجد على الأقل خط مماس واحد يوازي قاطع المنحنى  $\overrightarrow{AB}$  (كما في الشكل (1)).

$$m(\overrightarrow{AB}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



شكل (1)

#### معلومات:

إن تسارع سيارة من سكون لقطع مسافة 120 m

يستغرق 8 s يبلغ معدل سرعة السيارة خلال هذه

الفترة الزمنية

$$\frac{120}{8} = 15 \text{ m/s}$$

أي 54 km/h

تفيد نظرية القيمة المتوسطة أنه خلال انطلاق السيارة وفي نقطة ما محددة على المسار

يجب أن يشير عدد السرعة إلى 54 km/h

### نظرية (3): نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت  $f$  دالة:

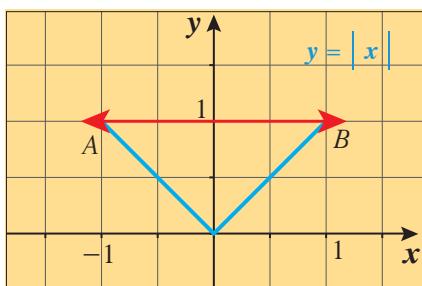
1 متصلة على الفترة  $[a, b]$

2 قابلة للاشتراق على الفترة  $(a, b)$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{حيث } c \in (a, b)$$



شروط نظرية القيمة المتوسطة كافية وليس لازمة، أي أنه إذا توفرت الشروط وبالتالي يوجد  $c$  الذي تنبئ به النظرية وعدم تحقق أحد الشرطين لا يعني بالضرورة عدم وجود  $c$  والملاحظات التالية توضح ذلك.



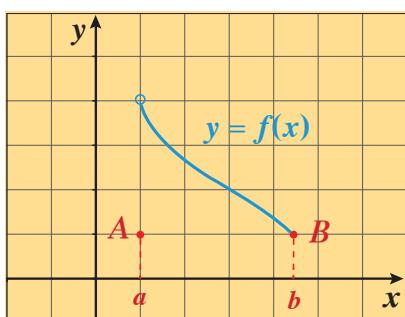
شكل (2)

### ملاحظات:

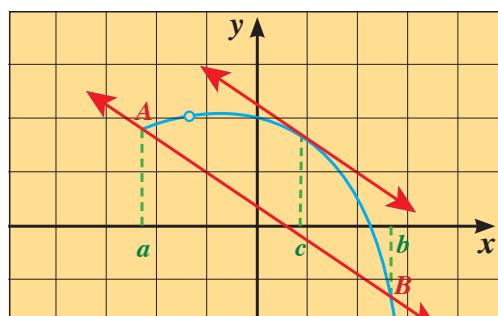
**1** إذا لم يتحقق أحد شرطى النظرية (3) فإنه قد لا يكون لبيان الدالة مماسٌ موازٌ للقاطع  $\overleftrightarrow{AB}$ .

فمثلاً،  $f(x) = |x|$  دالة متصلة على الفترة  $[-1, 1]$  وقابلة للاشتقاق عند كل  $x$  تنتهي إلى  $(-1, 1)$  باستثناء عند  $x = 0$ . بيان الدالة ليس له مماسٌ يوازي  $\overleftrightarrow{AB}$  (شكل 2).

**2** يبيّن شكل (3) بيان دالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند كل  $x$  تنتهي إلى  $(a, b)$  ومتصلة على الفترة  $(a, b)$ . ولكن لا يوجد مماسٌ يوازي  $\overleftrightarrow{AB}$ .

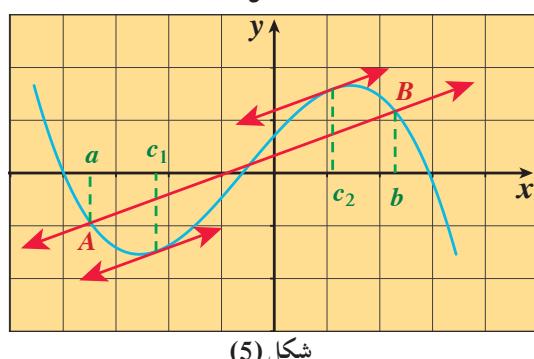


شكل (3)



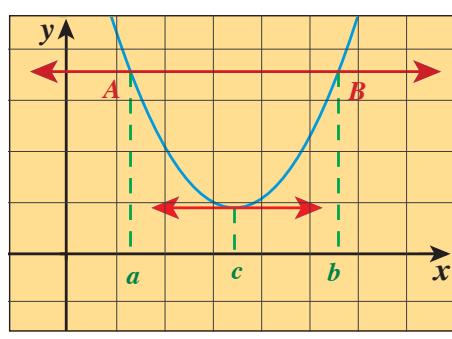
شكل (4)

**3** بيان الدالة في الشكل (4) يبيّن نقطة انفصال وبالرغم من عدم توفر شرط من شروط نظرية القيمة المتوسطة إلا أنه يوجد مماسٌ للمنحنى عند  $c$  يوازي  $\overleftrightarrow{AB}$ .



شكل (5)

**4** يمكن إيجاد أكثر من نقطة واحدة بحيث  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  ،  $c \in (a, b)$  أي أن المماس عند كل من النقاط  $(c_1, f(c_1))$  ،  $(c_2, f(c_2))$  يوازي  $\overleftrightarrow{AB}$  كما في الشكل (5).



شكل (6)

**5** في نظرية القيمة المتوسطة إذا كان  $f(a) = f(b)$  فإن  $f'(c) = 0$  أي أن المماس للمنحنى عند  $c$  يوازي القاطع ويواري محور السينات أي أن المماس أفقى كما في الشكل (6).

**مثال (1)**

يبين أن الدالة  $f : f(x) = x^2$  تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة  $[0, 2]$ ، ثم أوجد  $c$  الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

الحل:

الدالة  $f : f(x) = x^2$  دالة كثيرة حدود متصلة على  $\mathbb{R}$  فهي متصلة على الفترة  $[0, 2]$ ، وقابلة للاشتاقاق على  $(0, 2)$ .

∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة متحققة على الفترة  $[0, 2]$ .

∴ يوجد على الأقل  $c \in (0, 2)$  بحيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{نظرية القيمة المتوسطة}$$

$$= \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$\therefore f(0) = (0)^2 = 0, \quad f(2) = 2^2 = 4$$

$$f'(x) = 2x, \quad f'(c) = 2c$$

$$\therefore 2c = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$2c = \frac{4 - 0}{2 - 0}$$

$$2c = 2$$

$$c = 1 \in (0, 2)$$

التفسير:

يوجد مماس لمنحنى الدالة  $f$  عند  $x = 1$  يوازي القاطع المار بال نقطتين  $(0, 0)$  ،  $(2, 4)$  .

حاول أن تحل

**1** يبين أن الدالة  $f(x) = x^2 + 2x$  تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة  $[-3, 1]$  ،

ثم أوجد قيمة  $c$  الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

**مثال (2)**

يبين أن الدالة  $f : f(x) = x^3 + 1$  تتحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة  $[-3, 3]$  ،

ثم أوجد  $c$  الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

الحل:

الدالة  $f$  دالة كثيرة حدود متصلة على  $\mathbb{R}$  فهي متصلة على الفترة  $[-3, 3]$  وقابلة للاشتاقاق على الفترة  $(-3, 3)$ .

∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة متحققة على الفترة  $[-3, 3]$ .

∴ يوجد على الأقل  $c \in (-3, 3)$  بحيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$$

$$\therefore f(-3) = (-3)^3 + 1 = -26, \quad f(3) = 3^3 + 1 = 28$$

$$f'(x) = 3x^2, \quad f'(c) = 3c^2$$

$$\therefore 3c^2 = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$$

$$3c^2 = \frac{28 - (-26)}{3 + 3} = \frac{54}{6} = 9$$

$$c^2 = \frac{9}{3} = 3$$

$$c = \sqrt{3} \in (-3, 3), \quad c = -\sqrt{3} \in (-3, 3)$$

التفسير:

يوجد مماسان لمنحنى الدالة  $f$  عند:  $x = \sqrt{3}$ ,  $x = -\sqrt{3}$

والمماسان يوازيان القاطع المار بالنقطتين:  $(3, 28)$ ,  $(-3, -26)$

حاول أن تحل

**2** يَبْيَنُ أَنَّ الدَّالَّةَ  $f: f(x) = x^3 - 3x + 2$  تَحْقِقُ شُرُوطَ نَظَرِيَّةِ القيمةِ الْمُتَوَسِّطَةِ عَلَىِ الْفَتَرَةِ  $[0, 4]$ , ثُمَّ أَوْجَدُ  $c$  الَّذِي تَبَيَّنَ بِهِ النَّظَرِيَّةُ وَفَسَّرَ إِجَابَتَكَ.

## Increasing and Decreasing Functions

## نزاید و تناقص الدوال

تعريف (4): تزايد و تناقص الدوال

لتكن  $f$  دالة معرفة على الفترة  $I$ . نقول إن:

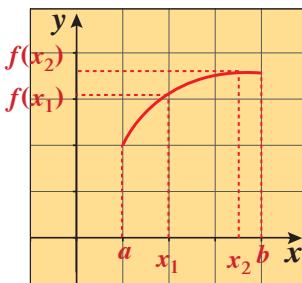
**1** دالة متزايدة على  $I$  إذا كان:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

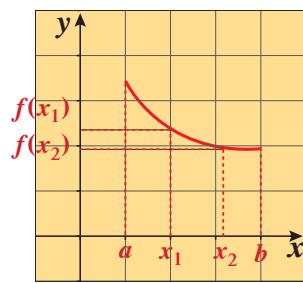
**2** دالة متناقصة على  $I$  إذا كان:

**ملاحظة:** تكون الدالة  $f$  ثابتة على الفترة  $I$  عندما:  $f(x_1) = f(x_2)$  عندما:



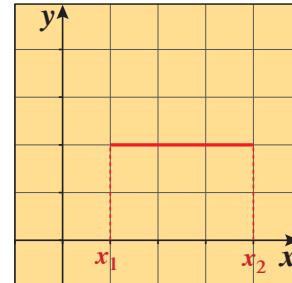
شكل (7)

دالة متزايدة



شكل (8)

دالة متناقصة



شكل (9)

دالة ثابتة

## Monotonic Function

## الدالة المطردة

الدالة التي تكون دائمًا متزايدة على فتره أو دائمًا متناقصة على فتره، يقال عنها إنها دالة مطردة على هذه الفتره.

تمكّنا نظرية القيمة المتوسطة من تحديد أين تزايـد الدوال وأين تتناقص بالضبط.  
الدوال التي مشتقـاتـها موجـبة تكون دوـال متزاـيدة، والدوـال التي مشـتقـاتـها سـالـبة تكون دـوـال مـتـنـاقـصـة.  
ويـتـضـحـ ذـلـكـ من خـلـالـ النـظـرـيـةـ التـالـيـةـ:

#### نظـريـةـ (4)ـ:ـ الدـوـالـ المتـزاـيدـةـ وـ الدـوـالـ المـتـنـاقـصـةـ وـ الدـوـالـ ثـابـتـةـ

لتـكـنـ  $f$  دـالـةـ قـابلـةـ لـلاـشـفـاقـ عـلـىـ  $(a, b)$ .

- 1 إذا كانت  $f'(x) > 0$  عند كل  $x$  تنتهي إلى الفترة  $(a, b)$ ، فإن  $f$  متزاـيدـ علىـ  $(a, b)$ .
- 2 إذا كانت  $f'(x) < 0$  عند كل  $x$  تنتهي إلى الفترة  $(a, b)$ ، فإن  $f$  مـتـنـاقـصـ علىـ  $(a, b)$ .
- 3 إذا كانت  $f'(x) = 0$  عند كل  $x$  تنتهي إلى الفترة  $(a, b)$ ، فإن الدالة  $f$  ثـابـتـةـ علىـ  $(a, b)$ .

#### مثال (3)

أوجـدـ فـقـراتـ التـزاـيدـ وـ فـقـراتـ التـنـاقـصـ لـلدـالـةـ  $f$  :

الـحـلـ:

الـدـالـةـ  $f$  كـثـيرـةـ حـدـودـ فـهـيـ مـتـصـلـةـ عـلـىـ  $\mathbb{R}$

نوـجـدـ مشـتـقـةـ الدـالـةـ  $f$  :

$$f'(x) = 2x - 5$$

$f'(x) = 0$  نـصـعـ

$$2x - 5 = 0 \implies x = \frac{5}{2}$$

نـكـونـ الجـدـولـ لـدـرـاسـةـ إـشـارـةـ  $f'$

الفـقـراتـ	$(-\infty, \frac{5}{2})$	$(\frac{5}{2}, \infty)$
إـشـارـةـ $f'$	--	++
سـلـوكـ الدـالـةـ $f$		

منـ الجـدـولـ:

$f$  مـتـنـاقـصـ عـلـىـ فـقـراتـ  $(-\infty, \frac{5}{2})$

$f$  مـتـزاـيدـ عـلـىـ فـقـراتـ  $(\frac{5}{2}, \infty)$

حاـولـ أـنـ تـحلـ

أـوجـدـ فـقـراتـ التـزاـيدـ وـ فـقـراتـ التـنـاقـصـ لـلدـالـةـ  $f$  :

مثال (4)

لتكن  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  :  $f$

حدّد الفترات حيث تكون  $f$  متزايدة والفترات حيث تكون  $f$  متناقصة.

الحل:

الدالة  $f$  كثيرة حدود فهي متصلة على  $\mathbb{R}$

نوجد أولاً مشتقة الدالة:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{نضع}$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$3(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1, \quad x = 3$$

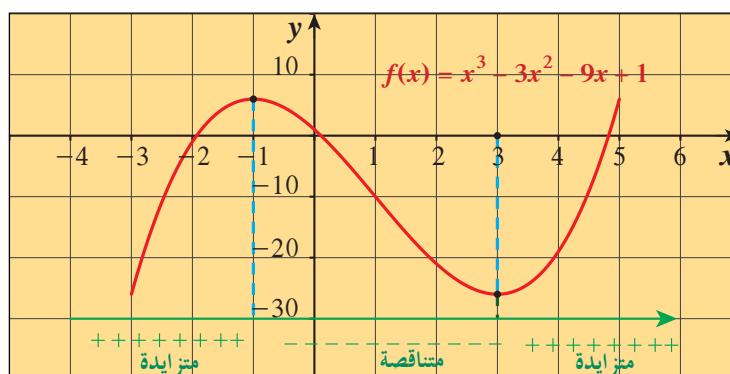
نكون الجدول لدراسة إشارة  $f'$

	$-\infty$	$-1$	$3$	$\infty$
الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$	
إشارة $f'$	++	--	++	
سلوك الدالة $f$	↗↗	↘↘	↗↗	

من الجدول: الدالة  $f$  متزايدة على كل من الفترة  $(-1, 3)$  ومتناقصة على الفترة  $(-1, 3)$ .

حاول أن تحل

إذا كانت  $f$  :  $f(x) = x^3 - 6x$ . حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة  $f$ .



شكل (10)

بيان الدالة يوضح فترات التزايد وفترات التناقص.

مثال (5)

إذا كانت  $f$  الدالة:  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$   
حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة.

الحل:

الدالة  $f$  حدودية نسبية فهي متصلة لكل  $x$  حيث  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$  نوجد مشتقة الدالة

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x-1) - 1(x)^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{نضع}$$

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, \quad x = 2$$

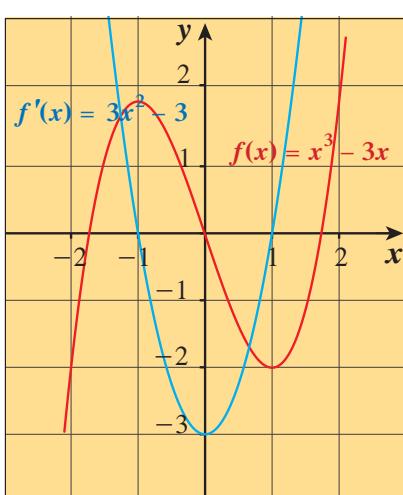
نكون الجدول لدراسة إشارة  $f'$

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة $f'$	+	-	-	+
سلوك الدالة $f$	↗	↘	↘	↗

من الجدول  $f$  متزايدة على كل من الفترة  $(-\infty, 0)$  والفترة  $(0, 2)$  ومتناقصة على كل من الفترة  $(0, 1)$  والفترة  $(1, 2)$

حاول أن تحل

5 حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة  $f$  :



نشاط

الشكل المقابل يوضح بيان الدالة  $f$  وبيان مشتقتها  $f'$   
أكمل ما يلي:

في الفترة  $(-1, -\infty)$  الدالة  $f$  متزايدة ومنحنى الدالة  $f'$  يقع أعلى محور السينات أي  
أن  $f'(x)$  موجبة  $\forall x \in (-\infty, -1)$

في الفترة  $(1, -1)$  الدالة  $f$  ..... ومنحنى الدالة  $f'$  يقع .....  
أي أن .....

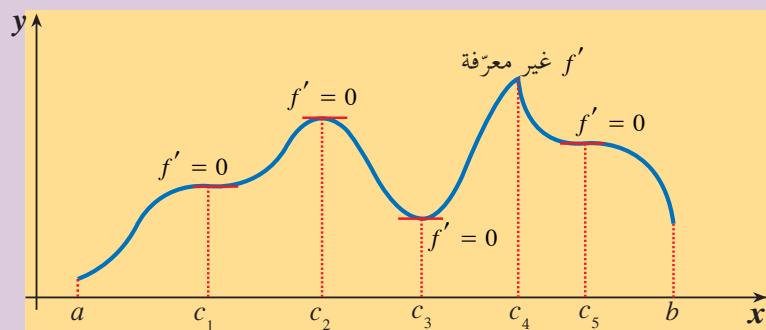
في الفترة  $(1, \infty)$  الدالة  $f$  ..... ومنحنى الدالة  $f'$  يقع .....  
أي أن .....

## ربط المشتقه الأولى $f'$ والمشتقه الثانيه $f''$ بمنحنى الدالة $f$

### Connecting $f'$ and $f''$ with the Graph of $f$

#### دعا نفك ونناقش

انظر إلى بيان الدالة في الشكل أدناه، ثم ضع علامة (✓) لكل فقرة مناسبة في الجدول أدناه:



ال فترة	تناقص في	ترايد في	قيمة عظمى محلية	قيمة صغرى محلية	قيمة عظمى مطلقة	قيمة صغرى مطلقة	الفترة (المجال)
							$[a, c_2]$
							$[c_1, c_3)$
							$[c_2, c_3)$
							$[c_3, c_5)$
							$[c_1, c_4]$
							$[c_5, b]$

#### نظرية (5): اختبار المشتقه الأولى للقيم القصوى المحلية

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجالها وكانت  $(c, f(c))$  نقطة حرجة.

إذا كانت إشارة المشتقه  $f'$  تتغير من الموجب إلى السالب عند  $x = c$  ، فإن  $f$  يكون لها قيمة عظمى محلية عند  $c$ . 1

إذا تغيرت إشارة  $f'$  من السالب إلى الموجب عند  $x = c$  ، فإن  $f$  يكون لها قيمة صغرى محلية عند  $c$ . 2

إذا لم تتغير إشارة  $f'$  عند  $x = c$  ، فإن  $f$  لا يكون لها قيمة قصوى محلية عند  $c$ . 3

#### سوف تعلم

- اختبار المشتقه الأولى لتحديد القيم القصوى المحلية.
- تحديد تغير منحنى الدالة باستخدام المشتقه الثانية أو الرسم البياني.
- تحديد نقاط الانعطاف بدراسة المشتقه الثانية.
- اختبار المشتقه الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية.

#### المفردات والمصطلحات

- قيمة قصوى محلية

#### Local Extrema

- اختبار المشتقه الأولى

#### First Derivative Test

- نقطة طرفية End Point

#### Concavity

- نقاط الانعطاف

#### Points of Inflection

- اختبار المشتقه الثانية

#### Second Derivative Test

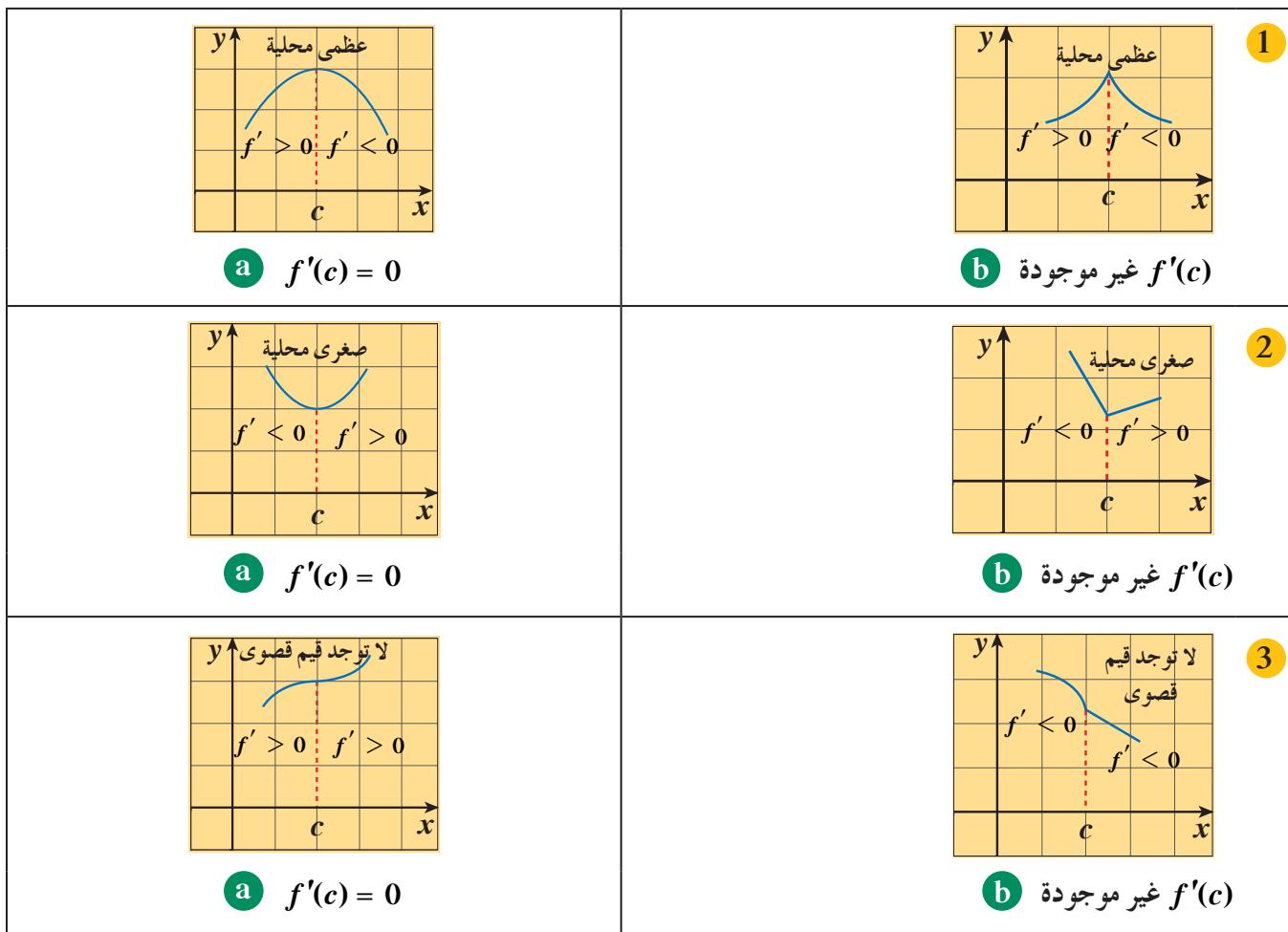
#### Notes:

#### ملاحظة:

$f' > 0$  • تعني أن قيم  $f'(x)$  موجبة لكل قيم  $x$

$f' < 0$  • تعني أن قيم  $f'(x)$  سالبة لكل قيم  $x$

الأشكال التالية توضح بيان دالة  $f$  وتوضح نظرية (5) من خلالها.



شكل (1)

هنا نبين كيف نطبق اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحلية لدالة  $f$  والأعداد الحرجة لدالة  $f$  تجزئ محور السينات إلى فترات تكون فيها  $f'$  موجبة أو سالبة. نحدد إشارة  $f'$  على كل فترة بإيجاد قيمة  $f'$  لقيمة واحدة  $x$  على الفترة، ثم نطبق نظرية (5) كما في المثالين (1) و(2) التاليين:

### مثال (1)

لتكن الدالة  $f$  :  $f(x) = x^3 - 12x - 5$

أو جد كلاً مما يلي:

**a** النقاط الحرجة للدالة.

**b** الفترات التي تكون الدالة  $f$  متزايدة أو متناقصة عليها.

**c** القيم القصوى المحلية.

الحل:

**a**  $\therefore f$  دالة كثيرة حدود.

$\therefore f$  متصلة وقابلة للاشتراق عند كل  $x \in \mathbb{R}$ .

نوجد النقاط الحرجة فقط عند أصفار مشتقة الدالة  $f'$ .

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{نضع:}$$

$$3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = -2, \quad x = 2$$

$$(-2, f(-2)) = (-2, 11)$$

$$(2, f(2)) = (2, -21)$$

∴ النقط المحرجة هي:

**b** نكون الجدول لدراسة إشارة  $f'$ :

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'$ إشارة	+++	---	+++
سلوك الدالة $f$	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

نلاحظ من الجدول: الدالة متزايدة على الفترة  $(-2, \infty)$  ومتناقصة على الفترة  $(-\infty, 2)$ .

**c** نستطيع أن نلاحظ من الجدول أنه توجد قيمة عظمى محلية عند  $x = -2$ ، وقيمة صغرى محلية عند  $x = 2$ .

القيمة العظمى المحلية هي  $f(-2) = 11$ ، والقيمة الصغرى المحلية هي  $f(2) = -21$ .

حاول أن تحل

**1** نلخص الدالة  $f$  :  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ . أوجد كلاً مما يلي:

**a** النقاط المحرجة للدالة.

**b** الفترات التي تكون الدالة  $f$  متزايدة أو متناقصة عليها.

**c** القيم القصوى المحلية.

مثال (2)

لتكن الدالة  $f$  :  $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x-1}$  فأوجد كلاً مما يلي:

**a** النقاط المحرجة للدالة.

**b** الفترات التي تكون عليها الدالة  $f$  متزايدة وتلك التي تكون عليها متناقصة.

**c** القيم القصوى المحلية.

الحل:

**a** ∵  $f$  مجموع دالتين إحداهما كثيرة حدود والأخرى حدودية نسبية

∴ مجال الدالة  $f$  هو  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

∴  $f$  متصلة وقابلة للاشتغال على كل من الفترتين من مجالها  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ .

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{نضع}$$

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3, \quad x = -1$$

$(3, f(3)) = (3, 2)$   $\therefore$  النقطة الحرجة هي

$$(-1, f(-1)) = (-1, -6)$$

b) نكون الجدول لدراسة إشارة  $f'$ :

	$-\infty$	-1	1	3	$\infty$
الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$	
إشارة $f'$	+++	---	---	+++	
سلوك الدالة $f$	متزايدة	متناقصة	متناقصة	متزايدة	

نلاحظ من الجدول أن الدالة متزايدة على كل من الفترتين  $(-\infty, -1)$ ,  $(3, \infty)$

ومتناقصة على كل من الفترتين  $(-1, 1)$ ,  $(1, 3)$

c) توجد قيمة عظمى محلية عند  $x = -1$  وقيمة صغرى محلية عند  $x = 3$

القيمة العظمى المحلية هي:  $f(-1) = -6$  والقيمة الصغرى المحلية هي:  $f(3) = 2$

حاول أن تحل

لتكن الدالة  $g$ :  $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  2

أوجد كلاً مما يلي:

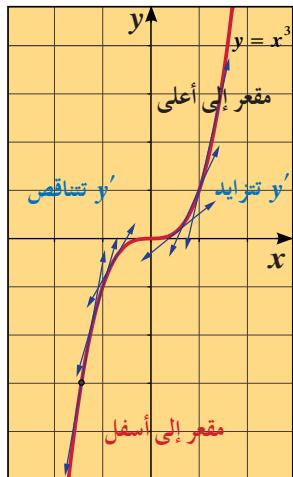
a) النقاط الحرجة.

b) الفترات التي تكون الدالة  $g$  متزايدة أو متناقصة عليها.

c) القيم القصوى المحلية.

## التععر

### Concavity



يبيّن الشكل المقابل أن الدالة  $f : f(x) = x^3$  تتزايد مع تزايد قيم  $x$ ، ولكن جزئي المنحني المعروفي على كل من الفترتين  $(-\infty, 0)$  ،  $(0, \infty)$  ينطوفان بشكل مختلف.

إذا أمعنا النظر في المنحني والمماسات وتفحصناها بدقة من اليسار إلى اليمين نلاحظ أن المنحني يقع أسفل المماسات على الفترة  $(-\infty, 0)$  ويعود أعلى المماسات على الفترة  $(0, \infty)$ .

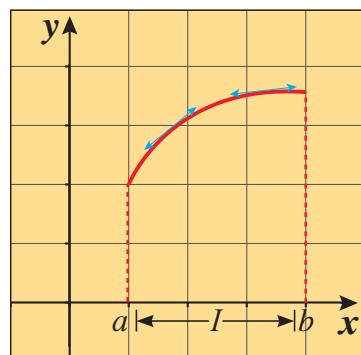
يمكنا القول إن منحني الدالة  $f$  **مقعر للأسفل على الفترة  $(-\infty, 0)$**  و**مقعر للأعلى على الفترة  $(0, \infty)$** .

### تعريف (5): التععر

إذا وقع منحني الدالة أعلى جميع مماساته على فترة  $I$  فإنه يكون مقعرًا للأعلى على  $I$ .

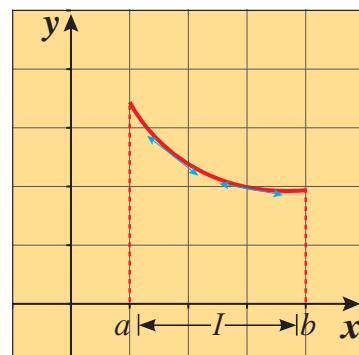
وإذا وقع منحني الدالة أسفل جميع مماساته على فترة  $I$  فإنه يكون مقعرًا للأسفل على  $I$ .

الشكلان التاليان يوضحان التععر:



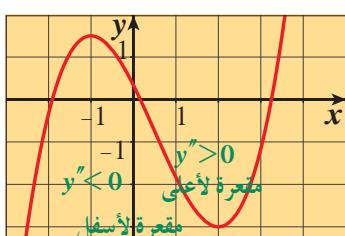
شكل (2)

في الفترة  $(a, b)$  نلاحظ أن:  
جميع نقاط المنحني (ما عدا نقاط التماس)  
تقع أعلى المماسات.  
لذلك نقول المنحني **مقعر للأعلى**.



شكل (1)

في الفترة  $(a, b)$  نلاحظ أن:  
جميع نقاط المنحني (ما عدا نقاط التماس)  
تقع أسفل المماسات.  
لذلك نقول المنحني **مقعر للأسفل**.



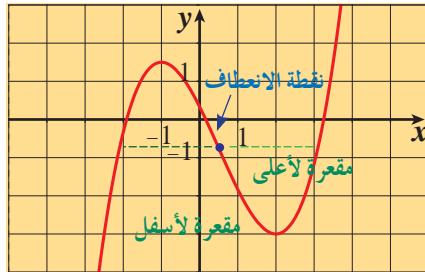
### اختبار التععر

a) إذا كانت  $I$   $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$  فإن منحني الدالة  $f$  **مقعرًا للأعلى على  $I$** .

b) إذا كانت  $I$   $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I$  فإن منحني الدالة  $f$  **مقعرًا للأسفل على  $I$** .

## Point of Inflection

## نقطة الانعطاف



تعريف (6): نقطة الانعطاف

تسمى النقطة  $(c, f(c))$  نقطة انعطاف لمنحنى الدالة  $f$  إذا كانت  $f$  دالة متصلة عند  $c$ ، ومنحنى الدالة  $f$  يغير تعرّفه عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

إذا كانت  $(c, f(c))$  نقطة انعطاف لبيان الدالة  $f$  فإن  $f''(c) = 0$  أو  $f''(c)$  غير موجودة.

مثال (3)

أوجد فترات التعرّف ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة  $f$  :  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

الحل:

$\therefore f$  دالة كثيرة حدود  
 $\therefore f$  قابلة للاشتراق على  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 12x + 6$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{نضع}$$

$$12x + 6 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$$

نكون الجدول لدراسة إشارة  $f''$  :

الفترات	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \infty)$
إشارة $f''$	--	++
بيان الدالة $f$	$\cap$ مقعر لأسفل	$\cup$ مقعر لأعلى

نلاحظ من الجدول أن: بيان الدالة  $f$  مقعر لأسفل على الفترة  $(-\infty, -\frac{1}{2})$

بيان الدالة  $f$  مقعر لأعلى على الفترة  $(-\frac{1}{2}, \infty)$

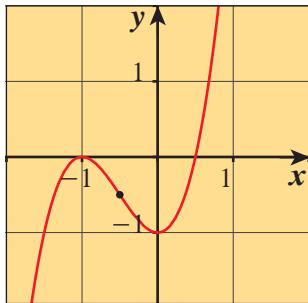
$$f(-\frac{1}{2}) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$$

لإيجاد نقطة الانعطاف:

النقطة  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  هي نقطة انعطاف لمنحنى  $f$

حاول أن تحل

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \quad 3$$



نلاحظ في الشكل المقابل أن بيان الدالة  $f$  في مثال (3) مقعر للأعلى على الفترة  $(-\infty, -\frac{1}{2})$  وأن النقطة  $(-\frac{1}{2}, \infty)$  هي نقطة انعطاف.

لدراسة حركة جسم يتحرك على خط مستقيم غالباً ما تحتاج إلى وصف هذه الحركة من خلال دالة الموضع (الإزاحة) ومشتقتها (السرعة) ومشتقتها الثانية (العجلة) في أي لحظة على مساره.

#### مثال إثري

يتحرك جسم على خط مستقيم أفقي حيث دالة موقعه  $s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$  ،  $t \geq 0$  . أوجد السرعة اللحظية للجسم وعجلته ثم صف حركته.

الحل:

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$$

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22$$

$$= 2(t-1)(3t-11)$$

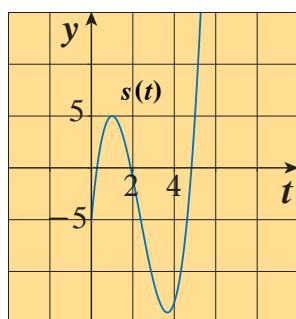
$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

$$= 12t - 28 = 4(3t - 7)$$

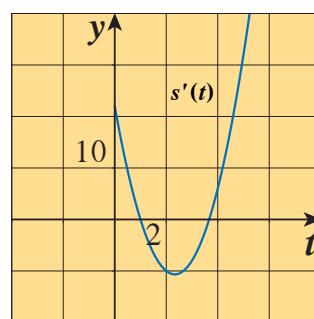
السرعة اللحظية هي:

والعجلة هي:

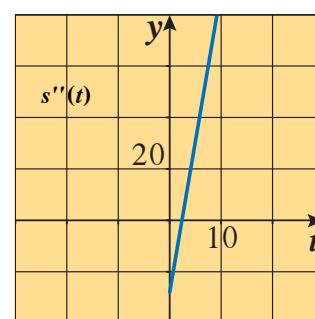
عندما تزيد الدالة  $s(t)$  يتحرك الجسم إلى اليمين، وعندما تتناقص  $s(t)$  يتحرك الجسم إلى اليسار. يبيّن الشكل أدناه الرسوم البيانية للموضع (المسافة) والسرعة اللحظية والعجلة للجسم.



$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5 \\ t \geq 0$$



$$s'(t) = 6t^2 - 28t + 22$$



$$s''(t) = 12t - 28$$

لاحظ أن المشقة الأولى ( $v = s'$ ) تساوي 0 عند  $t = 1$

الفترات	$(0, 1)$	$(1, \frac{11}{3})$	$(\frac{11}{3}, \infty)$
$v = s'$	++	--	++
سلوك $s$	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗
حركة الجسم	يمين	يسار	يمين

يتحرك الجسم إلى اليمين على الفترة الزمنية  $(1, \frac{11}{3})$ ، ويتحرك إلى اليسار على الفترة  $(\frac{11}{3}, \infty)$

$$a(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7)$$

العجلة:  $t = \frac{7}{3}$  عند 0

الفترات	$(0, \frac{7}{3})$	$(\frac{7}{3}, \infty)$
إشارة $a = s''$	--	++
بيان الدالة $s$	⌒	∪

اتجاه العجلة ناحية اليسار (العجلة سالبة) أثناء الفترة الزمنية  $(0, \frac{7}{3})$ ، وتكون في لحظة تساوي صفرًا عند  $t = \frac{7}{3}$  واتجاهها ناحية اليمين (العجلة موجبة بعد ذلك).

### تدريب إثريائي

يتحرك جسم معين على خط مستقيم أفقى حيث دالة موقعه:  $f(t) = t^3 - 3t^2 + 5$  ;  $t \geq 0$  أوجد السرعة اللحظية للجسم وعجلته، ثم صف حركته.

## Second Derivative Test for Local Extrema

## اختبار المشقة الثانية للقيم القصوى المحلية

بدلاً من النظر إلى إشارة التغير في  $y'$  عند نقاط حرجة، يمكننا أن نستخدم أحياناً الاختبار الآتي لتحديد وجود قيم قصوى محلية.

### نظرية (6): اختبار المشقة الثانية للقيم القصوى المحلية

1 إذا كانت  $f'(c) = 0$  ،  $f''(c) < 0$  ، فإن  $f$  تكون لها قيمة عظمى محلية عند  $x = c$

2 إذا كانت  $f'(c) = 0$  ،  $f''(c) > 0$  ، فإن  $f$  تكون لها قيمة صغرى محلية عند  $x = c$

يتطلب منا هذا الاختبار أن نعرف " $f''$ " فقط عند العدد  $c$  نفسه وليس على فترة تشمل  $c$ . وهذا يجعل الاختبار سهلاً للتطبيق.

الاختبار لا يصلح (يفشل) إذا كانت  $f''(0) = 0$  أو لا يكون لها وجود.

فمثلاً: الدالة  $f$  :  $f(x) = x^4$  ، مشتقتها الأولى هي:

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

عندما  $f'(x) = 0 \implies x = 0$

$$f''(0) = 0$$

عندما يحدث ذلك نعود إلى اختبار المشتقة الأولى للبحث عن القيم القصوى المحلية.

في مثال (4) نطبق اختبار المشتقة الثانية للدالة الموجودة في مثال (1).

#### مثال (4)

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة:  $f(x) = x^3 - 12x - 5$

الحل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 \\ &= 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0$$

نضع:

$$x = -2, x = 2$$

ومنها

$$f''(x) = 6x$$

باختبار الأعداد الحرجية  $x = \pm 2$  ، نجد أن:

$$f''(-2) = -12, -12 < 0$$

فيكون للدالة  $f$  قيمة عظمى محلية عند  $x = -2$  وهي  $11$

$$f''(2) = 12, 12 > 0$$

فيكون للدالة  $f$  قيمة صغرى محلية عند  $x = 2$  وهي  $-21$

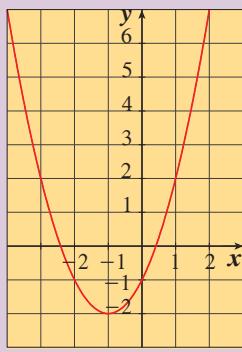
حاول أن تحل

استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة  $f$  :  $f(x) = 4x^3 - 12x^2$

4

## رسم بيان دوال كثيرات الحدود

### Graph of Polynomial Functions



#### دعنا نفك ونناقش

يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة  $f$  :  $f(x) = x^2 + 2x - 1$

**1** أوجد إن أمكن:

**a**  $(x)$  محدّداً كلاً من النقاط الحرجة

وفترات التزايد وفترات التناقص للدالة  $f$ .

**b**  $(x)$  محدّداً كلاً من نقاط الانعطاف وفترات التغير.

**2** قارن نتائج الحل في **1** مع المنحنى المرسوم.

#### سوف تعلم

- ربط بيان  $f'$  و  $f$ .
- خطوات رسم بيان دوال كثيرات الحدود.

#### المفردات والمصطلحات

- بيان دوال كثيرات الحدود

Graph of Polynomial Functions

تعلمت فيما سبق كيفية رسم منحنى تقريري لبيان دالة كثيرة حدود معتمداً على سلوكها نهاية الدالة، وفي البنود السابقة تعلمت تحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة وتحديد النقاط الحرجة والقيم العظمى أو الصغرى، وتم تحديد نقاط الانعطاف والفترات التي يكون فيها منحنى الدالة مقعرًا لأعلى أو لأسفل. وسنستفيد من كل هذه المعلومات لرسم بيان دالة كثيرة الحدود رسمًا أكثر دقة.

#### الخطوات اللازم اتباعها في دراسة تغير الدالة كثيرة الحدود ورسم بيانها

#### Steps to be Followed in Drawing the Graph of a Polynomial Function

**1** عَيِّن مجال الدالة  $f$ .

مجال دالة كثيرة الحدود هو  $\mathbb{R}$  ولكنه يقتصر أحياناً على فترة من  $\mathbb{R}$  خاصة في المسائل الحياتية.

**2** أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة  $f$ .

**3** عَيِّن النقاط الحرجة للدالة  $f$ .

**4** كُوّن جدولًا لدراسة إشارة  $f$  وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.

**5** كُوّن جدولًا لدراسة إشارة  $f'$  وتحديد فترات التغير لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.

**6** أوجد نقاطاً إضافية.

تساعد هذه النقاط على رسم بيان الدالة بدقة وأهم هذه النقاط، نقاط التقاطع مع أحد المحورين إن أمكن.

**7** ارسم بيان الدالة  $f$ . استخدم نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

مثال (1)

ادرس تغير الدالة  $f : f(x) = x^3 - 3x + 4$  وارسم بيانها.

الحل:

$f$  دالة كثيرة الحدود مجالها  $\mathbb{R}$ .

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة  $f$

دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتراق على مجالها.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

$f'(x) = 0$  نضع:

$$3(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = 1, \quad x = -1$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 4 = 2, \quad f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = 6$$

$\therefore (1, 2), (-1, 6)$ . نقطتان حرجة.

نكون جدول لدراسة إشارة  $f'$

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'$ إشارة	+++	----	+++
$f$ سلوك الدالة	متزايدة $\nearrow$	متناقصة $\searrow$	متزايدة $\nearrow \infty$

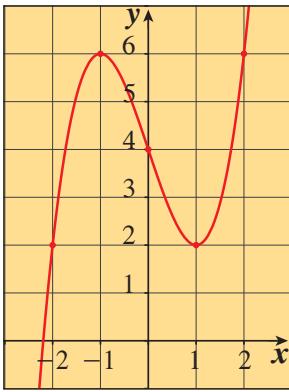
الدالة متزايدة على كل من الفترة  $(-\infty, -1)$  وال فترة  $(1, \infty)$  ومتناقصة على الفترة  $(-1, 1)$ .

نكون جدول لدراسة إشارة  $f''$ :

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	$f''(x) = 6x$
$f''$ إشارة	--	++	$f''(x) = 0$
التقعر	$\cap$	$\cup$	$6x = 0, \quad x = 0$ $f(0) = 4$

منحنى الدالة مقعر لأسفل على الفترة  $(-\infty, 0)$  ومقعر لأعلى على الفترة  $(0, \infty)$ .

نقطة انعطاف  $(0, 4)$ .



نقاط إضافية							
$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-14	2	6	4	2	6	22
	نقطة إضافية	نقطة إضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة إضافية	نقطة إضافية

بيان الدالة  $f$ :

حاول أن تحل

1 درس تغير الدالة  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$  وارسم بيانها.

### مثال (2)

درس تغير الدالة  $f(x) = 1 - x^3$  وارسم بيانها.

الحل:

$f$  دالة كثيرة الحدود مجالها  $\mathbb{R}$ .

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3) = -\infty$$

نوجد النقاط الحرجة حيث  $f$  دالة قابلة للاشتراق على مجالها.

$$f'(x) = -3x^2$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{نضع:}$$

$$-3x^2 = 0 \implies x = 0$$

$$f(0) = 1 - (0)^3 = 1$$

$\therefore (0, 1)$  نقطة حرجة.

نكون جدول التغير لدراسة إشارة  $f'$ :

الدالة متناقصة على الفترة  $(-\infty, 0)$  والفتره  $(0, \infty)$ .

إشارة $f'$	---	---
سلوك الدالة $f$	متناقصة $\infty$	

نكون جدول لدراسة إشارة  $f''$

$$f''(x) = -6x$$

$$-6x = 0 \implies x = 0$$

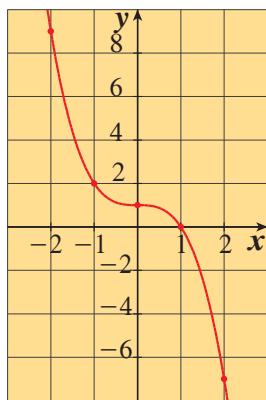
منحنى الدالة مقعر لأعلى على الفترة  $(-\infty, 0)$

ومقعر لأسفل على الفترة  $(0, \infty)$

نقطة انعطاف  $(0, 1)$ .

إشارة $f''$	++	---
التقعر	تقعر لأعلى	

نقاط إضافية



$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	2	1	0	-7

بيان الدالة  $f$ :

حاول أن تحل

ادرس تغير الدالة  $f$  :  $f(x) = x - 2x^3$  وارسم بيانها.

مثال (3)

ادرس تغير الدالة  $f$  :  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$  وارسم بيانها.

الحل:

$f$  دالة كثيرة الحدود مجالها  $\mathbb{R}$ .  
نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^4) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة  $f$

دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{نضع:}$$

$$12x^3 + 12x^2 = 0$$

$$12x^2(x+1) = 0 \implies x = 0 \quad , \quad x = -1$$

$$f(0) = 2 \quad , \quad f(-1) = 3 - 4 + 2 = 1$$

(0, 1), (-1, 1), (0, 2) نقطتان حرجنات.

نكون جدول لدراسة إشارة  $f'$

$f'$ إشارة	$-\infty$	-1	0	$\infty$
$f$ سلوك الدالة	متناقصة $\infty$	متزايدة	متزايدة	$\infty$

الدالة متناقصة على الفترة  $(-\infty, -1)$  ومتزايدة على الفترة  $(-1, 0)$  والفترة  $(0, \infty)$

## نکون جدول لدراسة إشارة $f''$

$$f''(x) = 36x^2 + 24x$$

نضع:  $f''(x) = 0$

$$12x(3x + 2) = 0$$

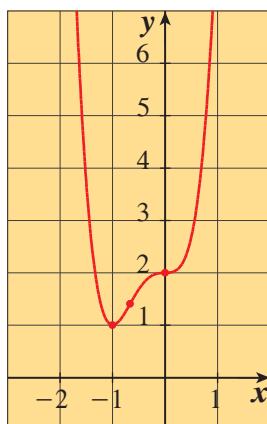
$$x = 0 \quad , \quad x = -\frac{2}{3}$$

$$f(0) = 2 \quad , \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{38}{27}$$

$f''$ إشارة	$++$	$--$	$++$
النَّقْعُرُ	$\cup$ تقعر لأعلى	$\cap$ تقعر لأسفل	$\cup$ تقعر لأعلى

منحنى الدالة مقعر لأعلى على كل من الفترتين  $(-\infty, -\frac{2}{3})$  ،  $(0, \infty)$  ومقعر لأسفل على الفترة  $(-\frac{2}{3}, 0)$  .  
ال نقطتان  $(-\frac{2}{3}, \frac{38}{27})$  هما نقطتا انعطاف.

نقاط إضافية



$x$	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	0	1
$f(x)$	18	1	$\frac{38}{27}$	2	9

بيان الدالة:  $f$ :

حاول أن تحل

3 ادرس تغير الدالة  $f$ :  $f(x) = x^4 - 2x^2$  وارسم بيانها.

مثال (4)

ادرس تغير الدالة  $f$ :  $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$  وارسم بيانها.

الحل:

$f$  دالة كثيرة الحدود مجالها  $\mathbb{R}$ .

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^4) = -\infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة  $f$

دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتغال على مجالها.

$$f'(x) = -4x^3 + 4x$$

$$f'(x) = 0$$

نضع:

$$-4x^3 + 4x = 0$$

$$-4x(x^2 - 1) = 0$$

$$-4x(x-1)(x+1) = 0 \implies x=0, \quad x=1, \quad x=-1$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = -(1)^4 + 2(1)^2 + 1 = 2$$

$$f(-1) = -(-1)^4 + 2(-1)^2 + 1 = 2$$

$\therefore (0, 1), (1, 2), (-1, 2)$  نقاط حرجة.

نكون جدول لدراسة إشارة  $f'$

$f'$ إشارة	$-\infty$	-1	0	1	$\infty$
	$+++$	---	+++	---	
سلوك الدالة $f$	$+\infty$	متزايدة	متناقصة	متزايدة	متناقصة

$\therefore$  الدالة متزايدة على كل من الفترة  $(-\infty, -1)$  والدالة متناقصة على كل من الفترة  $(0, 1)$  والدالة متزايدة على كل من الفترة  $(1, \infty)$ .

نكون جدول لدراسة إشارة  $f''$

$$f''(x) = -12x^2 + 4$$

$$f''(x) = 0$$

نضع:

$$-12x^2 + 4 = 0$$

$$-12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$-12\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

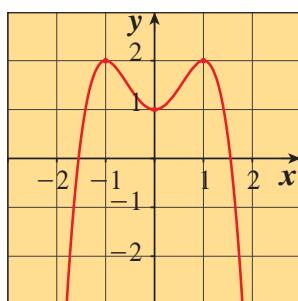
$f''$ إشارة	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\infty$
التفعر	$\cap$ تقعر لأسفل	$\cup$ تقعر لأعلى	$\cap$ تقعر لأسفل	

منحنى الدالة مقعر لأسفل على كل من الفترتين  $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$  ومقعر لأعلى على الفترة

نقاط الانعطاف هي:  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{14}{9}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{14}{9}\right)$

• نقاط إضافية

$x$	-2	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	2
$f(x)$	-7	2	$\frac{14}{9}$	1	$\frac{14}{9}$	2	7



بيان الدالة  $f$ :

حاول أن تحل

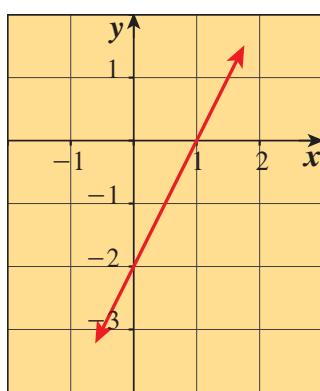
ادرس تغير الدالة: 4 وارسم بيانها.

### Relations Between the Graphs of $f'$ and $f$

### العلاقات بين بيان الدالة $f'$ و $f$

إن معرفة النقاط الحرجة وإشارة الدالة المشتقة  $f'$  تسمحان بمعرفة سلوك الدالة  $f$ .

يمكن قراءة بيانات  $f'$  من رسماها البياني واستنتاج سلوك  $f$ . فمثلاً يمثل الشكل (1) المقابل بيان الدالة  $f$ .

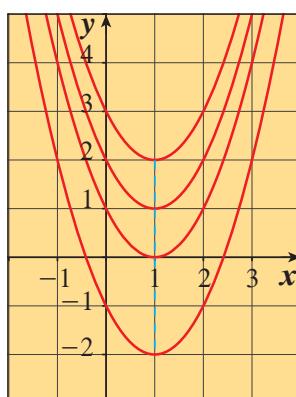


شكل (1)  
بيان الدالة  $f'$

- نقطة حرجة  $(1, f(1))$

- إشارة  $f'$  سالبة على الفترة  $(-\infty, 1)$

- إشارة  $f'$  موجبة على الفترة  $(1, \infty)$



نستنتج أن  $f$  متناقصة على الفترة  $(-\infty, 1)$

ومترابدة على الفترة  $(1, \infty)$

ولها قيمة صغرى  $f(1)$ .

لكن هذا لا يسمح برسم بيان  $f$  بدقة إذ يلزمها بعض النقاط الإضافية. يمثل الشكل المقابل بيانات بعض الدوال التي يمكن أن تكون بيانات  $f$ .

مثال (5)

(إثريائي)

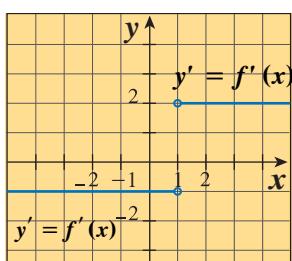
الرسم البياني للدالة  $f'$  من

ارسم صورة تقريرية للرسم البياني للدالة  $f$  التي لها الخواص التالية:

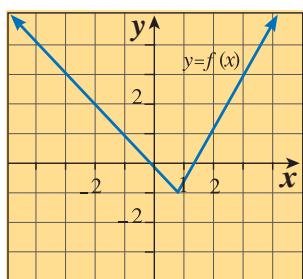
$f(0) = 0$  a

الرسم البياني للدالة  $f'$  (مشتقة الدالة  $f$ ) موضح في الشكل المقابل.

دالة متصلة لكل  $x$  c



الرسم البياني للمشتقة



الرسم البياني للدالة  $f$  منشأ عن الرسم  
البياني للمشتقة  $f'$  وشرطين آخرين.

الحل:

لتحقيق الخاصية a نبدأ بنقطة الأصل.

لتحقيق الخاصية b نأخذ بعين الاعتبار ما يوضحه الرسم البياني للمشتقة بالنسبة إلى الميل.  
إلى يسار  $x = 1$  الرسم البياني للدالة  $f$  له ميل ثابت قدره  $-1$ ، لذلك نرسم مستقيماً ميله  $-1$  إلى  
يسار  $x = 1$  مع التأكيد من أنه يمرّ بنقطة الأصل.

إلى يمين  $x = 1$  الرسم البياني للدالة  $f$  له ميل ثابت قدره  $2$ ، لذلك ينبغي أن يكون مستقيماً ميله  $2$ .  
هناك عدد لا نهائي من مثل تلك المستقيمات، ولكن واحداً فقط، المستقيم الذي يقابل الجانب  
الأيسر من الرسم البياني عند النقطة  $(1, -1)$  سوف يحقق شرط الاتصال.

يبين الشكل أعلاه الرسم البياني الناتج.

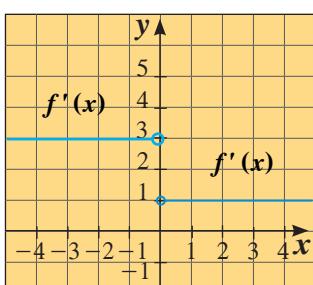
حاول أن تحل

5 ارسم صورة تقريرية للرسم البياني للدالة  $f$  التي لها الخواص التالية:

$f(0) = 1$  a

الرسم البياني للدالة  $f'$  موضح في الشكل المقابل.

دالة متصلة لكل  $x$ . c



## تطبيقات على القيم القصوى

### Applications on Extreme Value



#### عمل تعاوني

وجد صاحب محل لبيع الأحذية الرياضية أنه يمكن نمذجة ربحه بالدالة  $f$  :

$$f(x) = -15x^2 + 600x + 50$$

حيث  $x$  تمثل سعر الحذاء بالدينار.

- a** ما سعر الحذاء الذي يحقق أعلى ربح؟
- b** ما قيمة أعلى ربح؟

#### سوف تعلم

- تطبيقات على الهندسة والصناعة.
- تطبيقات على الاقتصاد.

#### المفردات والمصطلحات

- القيم العظمى والقيم الصغرى

Max-Min Values

من «العمل التعاوني» وجدت أكبر قيمة للدالة من خلال تطبيق خواص القطع المكافئ للدالة التربيعية، وفي هذا البند يمكنك إيجاد القيم نفسها باستخدام خواص القيم القصوى التي درستها حيث إن الاشتغال يقدم لنا الطريقة الناجحة لإيجاد أكبر القيم وأصغرها للدوال ويمكن أن تساعدنا الخطوات التالية على ذلك :

- 1 افهم المسألة: اقرأ المسألة بعناية، حدد المعلومات التي تحتاج إليها لحل المسألة.
- 2 كون نموذجاً رياضياً للمسألة: ارسم أشكالاً وضع علامات على الأجزاء المهمة في المسألة. ضع متغيراً واحداً يمثل الكمية المطلوب الحصول على قيمتها العظمى أو قيمتها الصغرى. ثم اكتب دالة باستخدام المتغير بحيث تعطي قيمتها القصوى المعلومات التي نبحث عنها.
- 3 أوجد مجال الدالة. وحدّد قيم المتغير التي تكون معقوله في المسألة.
- 4 حدد النقاط الحرجة ويمكن إيجاد النقاط الطرفية.
- أوّل آين تكون المشتقّة صفرية أو آين لا يكون لها وجود.
- 5 حل النموذج الرياضي: إذا لم تكن واثقاً من النتيجة دعم أو أكد صحة حلك بطريقة أخرى.
- 6 فسر الحل: ترجم نتائجك الرياضية إلى الموقف في المسألة، ثم قرّر ما إذا كانت النتيجة معقوله.

#### (1) مثال

عددان موججان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

الحل:  
نمدج:

$0 < x < 100$  حيث

$\therefore$  العدد الآخر هو

مجموع مربعيهما هو:

$$g(x) = x^2 + (100 - x)^2$$

$$g'(x) = 2x + 2(100 - x)(-1)$$

$$g'(x) = 2x - 200 + 2x$$

$$= 4x - 200$$

$$g'(x) = 0 \quad \text{نضع}$$

$$4x - 200 = 0 \Rightarrow x = 50$$

$\therefore$  توجد نقطة حرجة  $(50, g(50))$ .

$$g''(x) = 4, \quad 4 > 0$$

$x = 50$  قيمة صغرى مطلقة عند

$x = 50$   $\therefore$  العدد الأول هو:

$$100 - x = 100 - 50 = 50$$

العدد الثاني هو:

$$50, 50$$

$\therefore$  العددان هما

حاول أن تحل

1 أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

مثال (2) صنع صندوق

يراد صنع صندوق بدون غطاء بقص مربعات متطابقة طول ضلع كل منها  $x$  من أرکان طبقة صفيح أبعادها  $16 \text{ cm}$ ,  $6 \text{ cm}$  وثني جوانبها إلى أعلى (انظر الشكل المقابل).

أوجد قيمة  $x$  بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن. وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟

الحل:

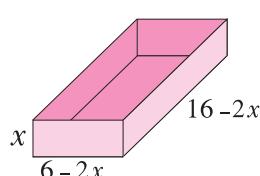
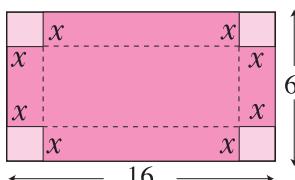
نمدج:

ارتفاع الصندوق  $x$ , والبعدان الآخرين هما  $(16 - 2x)$ ,  $(6 - 2x)$

$$0 < 2x < 6$$

لا يمكن أن تزيد على  $6$ ,

$$0 < x < 3 \quad \text{أي أن}$$



$$V(x) = x(6 - 2x)(16 - 2x)$$

$$V(x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 88x + 96$$

$$V'(x) = 0 \quad \text{نضع}$$

$$12x^2 - 88x + 96 = 0$$

$$4(3x^2 - 22x + 24) = 0$$

$$4(x - 6)(3x - 4) = 0$$

$$x = 6 \quad , \quad x = \frac{4}{3}$$

∴ حجم الصندوق هو:

بفك الأقواس نحصل على:

المشتقة الأولى للحجم  $V$  هي:

حالة المعادلة التربيعية هما:

وحيث إن  $(0, 3) \notin$  ففيتم استبعادها

المشتقة الثانية:

$$V''(x) = 24x - 88$$

$$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 24 \times \frac{4}{3} - 88 = -56 \quad , \quad -56 < 0$$

لذلك يكون الصندوق أكبر ما يمكن عند  $x = \frac{4}{3}$

حجم أكبر صندوق:

$$= \frac{1600}{27} \text{ cm}^3$$

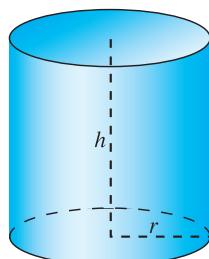
فسّر

طول ضلع كل مربع يقطع من أركان طبقة صفيح  $\frac{4}{3} \text{ cm}$  ليعطي أكبر سعة للصندوق.

ويكون أكبر حجم  $\frac{1600}{27} \text{ cm}^3$

حاول أن تحل

في مثال (2)، ما أكبر حجم للصندوق إذا كانت أبعاد طبقة الصفيح  $8 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$



مثال (3) تصميم علبة

طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترًا واحدًا تكون على شكل أسطوانة دائرية قائمة (كما في الشكل المقابل).

ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن؟

الحل:

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة العلبة هو  $r$  وارتفاعها  $h$ . لكي تكون كمية المعدن المستخدمة أقل ما يمكن، يجب أن تكون المساحة السطحية (الكلية) أقل ما يمكن وفي الوقت نفسه تحقق شرط الحجم

المساحة السطحية للعلبة = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدين

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 \quad (1)$$

$$1L = 1000 \text{ cm}^3 \quad \text{وحيث إن حجم العلبة معلوم}$$

$$\therefore V = \pi r^2 h = 1000$$



$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \quad (2)$$

وبالتعويض عن  $h$  في المعادلة (1) نحصل على

$$A = 2\pi r \times \frac{1000}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$

$$A = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{-2000}{r^2} + 4\pi r$$

$$\frac{dA}{dr} = 0 \quad \text{نضع}$$

$$\therefore 0 = \frac{-2000}{r^2} + 4\pi r$$

$$4\pi r = \frac{2000}{r^2}$$

$$\therefore 4\pi r^3 = 2000$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

$$r \approx 5.42$$

وهذه هي القيمة الحرجة الوحيدة حيث  $r \neq 0$

وللتتأكد من أن هذه القيمة تعطي أقل مساحة سطحية نوجد المشتقة الثانية:

$$\frac{d^2A}{dr^2} = \frac{4000}{r^3} + 4\pi \quad \text{المشتقة الثانية:}$$

وهي موجبة على كل مجال  $A$ .

لذلك فإن منحنى الدالة  $A$  مقعرًا للأعلى وقيمة  $A$  عند  $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$  هي قيمة صغرى مطلقة.

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r \quad , \quad h \approx 10.84$$

فسّر:

علبة اللتر الواحد التي تستخدم أقل معدن ممكن لتصنيعها يكون ارتفاعها مساوياً للقطر، حيث:

$$r \approx 5.42 \text{ cm} \quad , \quad h \approx 10.84 \text{ cm}$$

حاول أن تحل

3 . تعطي الدالة  $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$  حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها  $h$ .

a ) أوجد الارتفاع  $h$ (cm) للحصول على أكبر حجم لأسطوانة.

b ) ما قيمة هذا الحجم؟

مثال (4)

أوجد أقصر مسافة بين النقطة  $P(x, y)$  على المنحنى الذي معادلته  $y^2 - x^2 = 16$  والنقطة  $Q(6, 0)$

الحل:

$$y^2 - x^2 = 16 \Rightarrow y^2 = x^2 + 16$$

نوجد المسافة بين النقطتين  $P$ ,  $Q$

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 0)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 12x + 36 + y^2} = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + x^2 + 16} \\ &= \sqrt{2x^2 - 12x + 52} \end{aligned}$$

نفرض أن دالة المسافة هي:

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{1}{2}(4x - 12)(2x^2 - 12x + 52)^{\frac{-1}{2}} \\ &= \frac{2x - 5}{\sqrt{2x^2 - 12x + 52}} \end{aligned}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$2x^2 - 12x + 52 = 0$$

$$x^2 - 6x + 26 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 26$$

$$= 36 - 104 = -68, \quad -68 < 0$$

نوجد أصفار المقام بوضع

المميز:

$\therefore$  لا يوجد أصفار للمقام

نكون جدول التغير

$x$	$-\infty$	3	$\infty$
$S'(x)$	--	++	
$S(x)$			

$\therefore$  أقصر مسافة بين النقطتين  $P$ ,  $Q$  هي عند  $x = 3$

$$S(3) = \sqrt{2(3)^2 - 12(3) + 52}$$

$$= \sqrt{34}$$

أقصر مسافة هي  $\sqrt{34}$  وحدة طول.

حاول أن تحل

أوجد أقصر مسافة بين النقطة  $A(x, y)$  على المنحنى الذي معادلته  $y = \sqrt{x}$  والنقطة  $B(3, 0)$  4

مثال (5)



تنتج إحدى شركات الأدوات الكهربائية خلال فترة زمنية محددة كمية  $x$  من الخلاطات الكهربائية..

يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة (بالدينار) بالعلاقة

**1** أوجد كمية عدد القطع المنتجة خلال الفترة لتحقيق أقل كلفة ممكنة.

**2** تباع كل قطعة منتجة بمبلغ 100 دينار.

**a** عَبَرْ عن ربح الشركة بمعنوية  $x$ .

**b** أوجد قيمة  $x$  التي تحقق أكبر ربح، وما قيمته؟

الحل:

يمثل المتغير  $x$  عدد القطع المنتجة  $\therefore x$  عدد صحيح موجب.

**1** ندرس تغير الدالة  $C$  على الفترة  $(0, \infty)$  لحساب قيمة  $x$  التي تعطي قيمة صغرى.

$$C'(x) = 1 - \frac{400}{x^2} = \frac{x^2 - 400}{x^2} = \frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$$

$\therefore x + 20 > 0 , x^2 > 0$  (  $x$  عدد صحيح موجب )

$\therefore x - 20 > 0$  ،  $C'$  لهما نفس الإشارة

جدول التغير

$x$	0	20	$\infty$
إشارة $f'$	--	++	
سلوك $f$			

من جدول التغير نستنتج أن إنتاج 20 قطعة يحقق أقل كلفة ممكنة.

**a** **2** الربح = سعر مبيع الكمية - كلفة الكمية المباعة

سعر الكمية المباعة:  $100x$

كلفة الكمية المباعة:  $(x - 20 + \frac{400}{x}) \cdot x = x^2 - 20x + 400$

الربح:

$$P(x) = 100x - (x^2 - 20x + 400)$$

$$= 100x - x^2 + 20x - 400$$

$$= -x^2 + 120x - 400$$

**b** لحساب قيمة  $x$  التي تحقق أكبر ربح ندرس تغير الدالة  $P$  على الفترة  $(0, \infty)$  ونوجد قيمة  $x$  التي تحقق قيمة قصوى.

$$P'(x) = -2x + 120$$

$$P'(x) = 0 \quad \text{نضع}$$

$$-2x + 120 = 0$$

$$x = 60$$

$x$	0	60	$\infty$
$P'$ إشارة	++	--	
سلوك			

من جدول التغير نستنتج أن قيمة  $x$  التي تحقق قيمة عظمى للدالة  $P$  هي 60 أي أن مبيع 60 قطعة يحقق أكبر ربح للشركة.  
أكبر قيمة للربح:

$$\begin{aligned} P(60) &= -(60)^2 + 120(60) - 400 \\ &= -4000 + 7200 \\ &= 3200 \end{aligned}$$

أكبر قيمة للربح 3200 دينار.



حاول أن تحل

5 تصنّع إحدى الشركات يومياً  $x$  (بالآلاف) من المكثفات الكهربائية.  
يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة بالعلاقة:  $C(x) = x - 2 + \frac{25}{x}$

a أوجد كمية عدد المكثفات المنتجة يومياً لتحقيق أقل كلفة ممكنة.

b تباع كل ألف قطعة بسعر 10 دنانير.

أوجد كمية المكثفات المنتجة لتحقيق أكبر ربح.

## المرشد لحل المسائل

مستطيلات داخل أشكال: يبيّن الشكل مستطيلاً داخل مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين، طول وتره وحدتي طول:

١ عَبَرْ عن الإِحْدَاثِيِّ الصَّادِيِّ للنَّقْطَةِ  $P$  بِدَلَالَةِ  $x$ .

[إرشاد: اكتب معادلة  $\overline{AB}$ ].

٢ عَبَرْ عن مساحة المستطيل بِدَلَالَةِ  $x$ .

٣ ما أَكْبَرْ مساحة يَأْخُذُها المستطيل؟ وَمَا أَبعَادُهُ حِينَهَا؟

الحل:

١ يجب إيجاد معادلة  $\overline{AB}$ : لدينا  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$

$y = -x + 1$ : معادلة  $\overline{AB}$  ميل  $-1 = \overline{AB}$

٤ النقطة  $P$  موجودة على  $\overline{AB}$

٥ مساحة المستطيل = الطول  $\times$  العرض

الطول =  $2 \times x_p = 2x$

العرض =  $y_p = -x + 1$

٦ مساحة المستطيل =  $2x(-x + 1) = -2x^2 + 2x$

٧ نرسم على الآلة الحاسبة البيانية الدالة  $f$ :

نجد بيانياً أن  $f(x)$  لها قيمة قصوى تساوي 0.5 عندما  $x = 0.5$

٨ أقصى مساحة يأخذها المستطيل هي 0.5 وحدة مربعة.

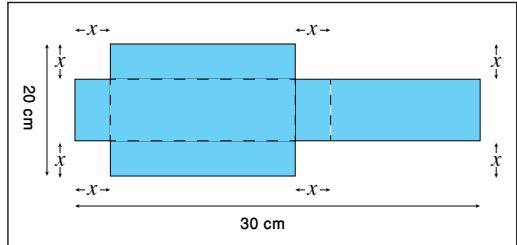
قياسات المستطيل:

الطول:  $2 \times 0.5 = 1$  units

العرض:  $-0.5 + 1 = 0.5$  units

### مسألة إضافية

لتصميم صندوق له غطاء، أخذت قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل أبعادها  $20\text{ cm} \times 30\text{ cm}$ ، قطع مربعان متطابقان من أركانها طول ضلع كل منها  $x\text{ cm}$ ، وقطع مستطيلان متطابقان من الجهة الأخرى بحيث أصبح بالإمكان طي الأجزاء البارزة لتكون متوازي مستطيلات له غطاء.



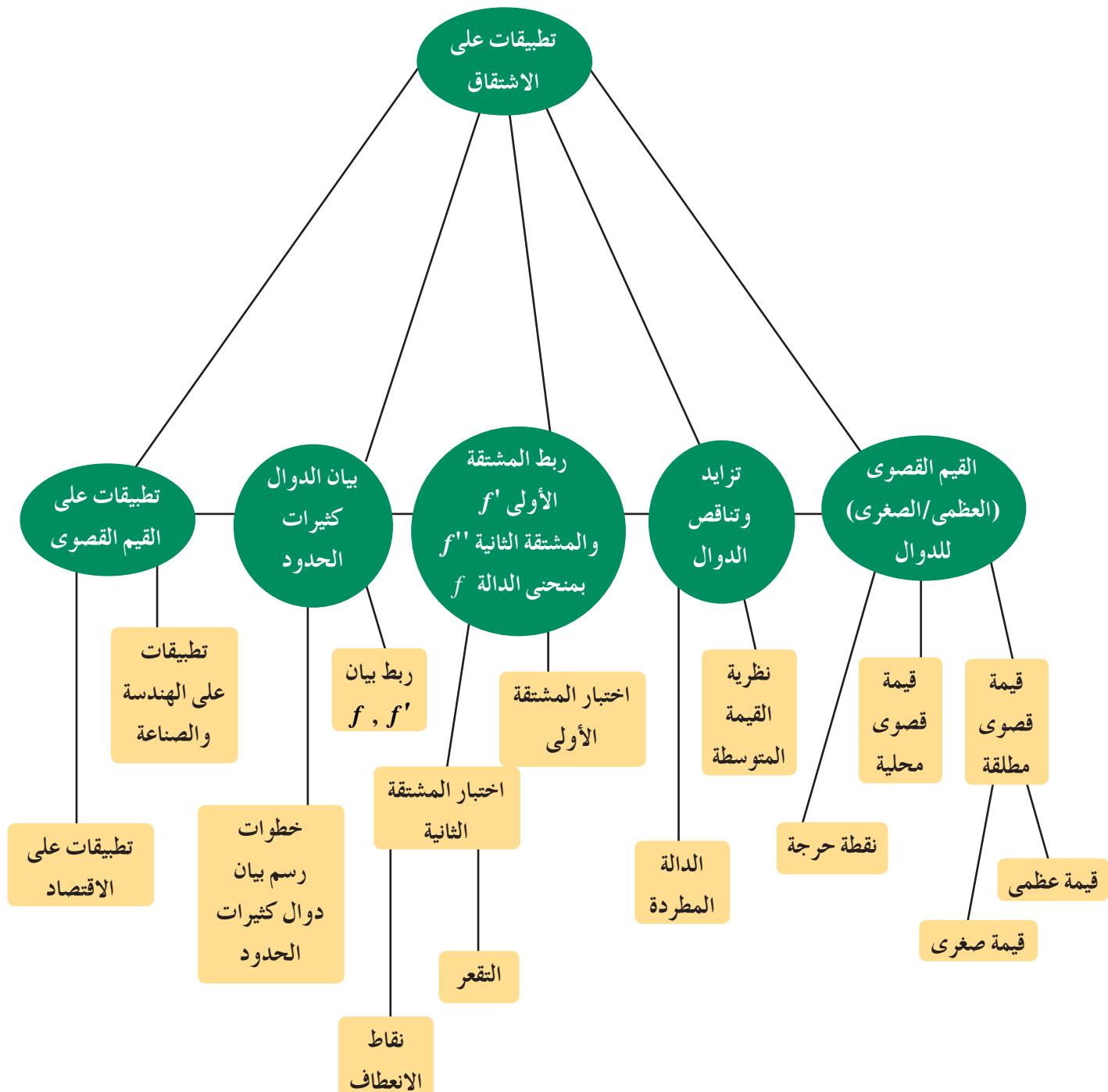
٩ اكتب صيغة تعبر عن  $V(x)$  حجم الصندوق.

١٠ أوجد مجال  $V$  للمسألة واستخدم رسمياً بيانياً يمثل  $V$  في ذلك المجال.

١١ استخدم الطريقة البيانية لإيجاد أكبر حجم ممكن للصندوق وقيمة  $x$  التي تعطي ذلك الحجم.

١٢ دعم النتائج التي حصلت عليها تحليلياً.

## مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة



## ملخص

- إذا كانت  $f$  دالة مجالها  $D$ ,  $c \in D$  فإن  $f(c)$  تسمى:
  - قيمة عظمى مطلقة للدالة  $f$  على  $D$  عندما:  $f(c) \geq f(x)$ ,  $\forall x \in D_f$
  - قيمة صغرى مطلقة للدالة  $f$  على  $D$  عندما:  $f(c) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in D_f$
- إذا كانت  $f$  دالة متصلة على فترة مغلقة  $[a, b]$  فإن  $f$  تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.
- لتكن  $(c, f(c))$  نقطة داخلية للدالة  $f$ ,  $D$  فترة مفتوحة تحوي  $c$ ,  $f(c)$  تكون:
  - a** قيمة عظمى محلية عند  $c$  عندما:  $f(c) \geq f(x)$   $\forall x \in D$
  - b** قيمة صغرى محلية عند  $c$  عندما:  $f(c) \leq f(x)$   $\forall x \in D$
- النقطة الداخلية للدالة  $f$   $(c, f(c))$  تسمى نقطة حرجة عندما  $f'(c) = 0$  أو  $f'(c)$  غير موجودة.
- إذا كانت للدالة  $f$  قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند  $c = x$  فإن  $(c, f(c))$  نقطة حرجة.
- إذا كانت  $f$  دالة:
  - متصلة على الفترة  $[a, b]$
  - قابلة للاشتراق على الفترة  $(a, b)$
- فإذا يوجد على الأقل  $c \in (a, b)$  بحيث  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  لتكن  $f$  دالة معروفة على الفترة  $I$ . نقول إن:
  - 1**  $f$  دالة متزايدة على  $I$  إذا كان:  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ,  $\forall x_1, x_2 \in I$
  - 2**  $f$  دالة متناقصة على  $I$  إذا كان:  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ,  $\forall x_1, x_2 \in I$
- الدالة التي تكون دائمًا متزايدة على فترة أو دائمًا متناقصة على فترة، يقال عنها إنّها دالة مطردة على هذه الفترة.
- لتكن  $f$  دالة قابلة للاشتراق على  $(a, b)$ .
  - إذا كانت  $f'(x) > 0$  عند كل  $x$  تنتهي إلى الفترة  $(a, b)$ , فإن  $f$  متزايدة على  $(a, b)$ .
  - إذا كانت  $f'(x) < 0$  عند كل  $x$  تنتهي إلى الفترة  $(a, b)$ , فإن  $f$  متناقص على  $(a, b)$ .
  - إذا كانت  $f'(x) = 0$  عند كل  $x$  تنتهي إلى الفترة  $(a, b)$ , فإن الدالة  $f$  ثابتة على  $(a, b)$ .
- لتكن  $f$  دالة متصلة على مجالها وكانت  $(c, f(c))$  نقطة حرجة.
  - إذا كانت إشارة المشتقة  $f'$  تتغير من الموجب إلى السالب عند  $x = c$  يكون لها قيمة عظمى محلية عند  $c$ .
  - إذا تغيرت إشارة  $f'$  من السالب إلى الموجب عند  $x = c$  يكون لها قيمة صغرى محلية عند  $c$ .

- إذا لم تغير إشارة  $f'$  عند  $x = c$  فإن  $f$  لا يكون لها قيمة قصوى محلية عند  $c$ .
- تعريف: التقعر

إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فتره  $I$  فإنه يكون مقعرًا لأعلى على  $I$ .

وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فتره  $I$  فإنه يكون مقعرًا لأسفل على  $I$ .

- اختبار التقعر:

إذا كانت  $I \in f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$  فإن منحنى الدالة  $f$  مقعرًا لأعلى على  $I$ . (a)

إذا كانت  $I \in f''(x) < 0 \quad \forall x \in I$  فإن منحنى الدالة  $f$  مقعرًا لأسفل على  $I$ . (b)

- نقطة الانعطاف:

تسمى النقطة  $(f(c), c)$  نقطة انعطاف لمنحنى الدالة  $f$  إذا كانت  $f$  دالة متصلة عند  $c$ ، ومنحنى الدالة  $f$  يغير تقرره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

• إذا كانت  $0 = f'(c) < 0$  ، فإن  $f$  تكون لها قيمة عظمى محلية عند  $x = c$ .

• إذا كانت  $0 = f'(c) > 0$  ، فإن  $f$  تكون لها قيمة صغرى محلية عند  $x = c$ .

# الوحدة الرابعة

## الإحصاء

### Statistics

#### مشروع الوحدة: ما هي أفضل طريقة لإيجاد وظيفة؟

1 **مقدمة المشروع:** بعد التخرج يواجه الحاصلون على الإجازات والشهادات الجامعية تحديًّا جديًّا هو الانخراط في سوق العمل.

2 **الهدف:** هو البحث عن فرص عمل من خلال القيام بعده خطوات ومحاولات متنوعة واستخدام العديد من الوسائل.

3 **اللوازم:** حاسوب – شبكة الإنترنت.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

(a) كيف ستختار عينة عشوائية من الموظفين للاستفسار عن الوسيلة التي استخدموها في إيجاد وظيفتهم؟

(b) ما الخيارات التي اكتشفتها؟ نظمها في استماراة.

(إرشاد):

- من خلال الأصدقاء والمعارف.

- من خلال الإعلانات في الصحف والمجلات.

- من خلال الوكالات المختصة في الربط بين سوق العمل وطالبي الوظائف.

- من خلال البحث عبر شبكة الإنترنت.

- من خلال التقدم مباشرةً لطلب وظيفة من الشركة المختصة أو اعتماد وسيلة أخرى (اذكرها ...).

(c) حدد النسب المئوية لكل خيار مما سبق.

5 **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصلاً يحدد النسب التي حصلت عليها من خلال العينة العشوائية التي اعتمدتها مكونًا جدولاً بالنسبة المئوية عن كل وسيلة تم استخدامها لإيجاد وظيفة.

**القرار:** ضمن تقريرك بعض الاقتراحات والنصائح والاستنتاجات التي نتجت عن تلك الدراسة.

#### دروس الوحدة

الارتباط والانحدار	اختبارات الفروض الإحصائية	التقدير
4-3	4-2	4-1

## الوحدة الرابعة

### أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

أضف إلى معلوماتك

- تعلمت مقاييس النزعة المركزية: المتوسط الحسابي – الوسيط – المتوسط.
- تعلمت المجتمع الإحصائي.
- تعلمت العينة العشوائية وأنواعها واستخداماتها.

### ماذا سوف تتعلم؟

- يُعرف المعلمة والإحصاء.
- إيجاد التقدير بنقطة.
- إيجاد التقدير بفتره ثقة.
- استكشاف الفرضيات الإحصائية.
- يُعرف الاختبارات الإحصائية ويجريها.
- اتخاذ القرار المناسب.
- يتعرف الارتباط والانحدار.
- يوجد مُعامل ارتباط بيرسون.
- يكتب معادلة خط الانحدار ويتبناها.

### المصطلحات الأساسية

المعلمة – الإحصاء – التقدير – التقدير بنقطة – فتره الثقة – التقدير بفتره الثقة – درجة الثقة – التوزيع الطبيعي – القيمة الحرجة – هامش الخطأ – الخطأ المعياري – خواص التوزيع  $\sigma$  – الفرضيات الإحصائية – المقاييس الإحصائي – فرض العدم – الفرض البديل – القرار – الانحدار – المخطط الانتشاري – الارتباط – مُعامل الارتباط الخطى – خواص مُعامل الارتباط – مُعامل ارتباط بيرسون – التنبؤ.

## التقدير

### Estimation



#### دعاً نفكّر ونناقش

متوسط عدد الرحلات الجوية المغادرة يومياً خلال شهر يونيو من أحد المطارات هو 75 رحلة.

هل يمكن استخدام هذه العينة لتقدير متوسط عدد الرحلات  $\mu$  خلال أشهر السنة؟ لماذا؟

وما هي أفضل وسيلة للتقدير لقترب من الحقيقة؟

سبق لنا في الصف الحادي عشر تعريف المجتمع الإحصائي والعينة العشوائية والأسباب التي تؤدي إلىأخذ العينات لدراسة المجتمع بدلاً من الحصر الشامل، وذلك لتقدير المتوسط (الوسط) الحسابي للمجتمع  $\mu$  أو الانحراف المعياري  $\sigma$ .

ويعتبر الوسط الحسابي للمجتمع  $\mu$  والانحراف المعياري للمجتمع  $\sigma$  من معالم المجتمع، وعادة ما تكون هذه المعالم مجهولة.

ولتقدير هذه المعالم نلجأ إلى سحب عينة عشوائية منه، ثم نحسب المتوسط الحسابي للعينة  $\bar{x}$  أو الانحراف المعياري  $S$  والذي يعتمد على قيم العينة ولا يعتمد على معالم المجتمع.

**المعلمة (Parameter):** هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي  $\mu$  أو الانحراف المعياري  $\sigma$ .

**الإحصاءة (Statistic Function):** هو اقتران تعيين قيمة من العينة كالمتوسط الحسابي  $\bar{x}$  أو الانحراف المعياري  $S$ .

**تقدير المعلمة (Parameter Estimate):** هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككل وتوزيعه.

في هذا الدرس سوف تعرف طريقتين تساعدان على إيجاد قيم تقديرية لبعض معالم مجتمع معين:

- طريقة أولى: التقدير بنقطة.
- طريقة ثانية: التقدير بفتررة الثقة.

#### سوف تعلم

- التقدير بنقطة.
- التقدير بفتررة الثقة.
- هامش الخطأ.

#### المفردات والمصطلحات:

- Parameter      • المعلمة
- الإحصاءة

#### Statistic Function

- تقدير المعلمة

#### Parameter Estimate

- Estimation      • تقدير
- تقدير بنقطة

#### Point Estimate

- تقدير بفتررة الثقة

#### Confidence Interval

#### Estimation

- درجة الثقة (مستوى الثقة)

#### (Level of Confidence)

#### Degree of Confidence

- نسبة الخطأ (مستوى المعنوية)

#### Percentage of error

#### (Significance Level)

- القيمة الحرجة

#### Critical Value

- هامش الخطأ

#### Margin of Error

- درجات الحرية

#### Degree of Freedom

#### تذكرة:

الاقتران هو قيمة تربط مفردات معينة وتنتج منها.

## Point Estimate

### التقدير بنقطة

التقدير بنقطة هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة مجهولة من معالم المجتمع. فمثلاً المتوسط الحسابي للعينة العشوائية  $\bar{x}$  يستخدم كتقدير بنقطة للمتوسط الحسابي للمجتمع  $\mu$ , وكذلك الانحراف المعياري للعينة  $s$  يستخدم كتقدير بنقطة للانحراف المعياري للمجتمع  $\sigma$ .

## Confidence Interval Estimation

### التقدير بفترة الثقة

علمنا مما سبق أن لكل مجتمع معالم منها المتوسط الحسابي  $\mu$  والانحراف المعياري  $\sigma$ , ودرستنا كيفية إيجاد التقدير بنقطة لتلك المعالم. وعلمنا أن التقدير بنقطة لإحدى معالم المجتمع هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة، ولذلك فإن احتمال الخطأ في التقدير بنقطة يكون كبيراً. وبناء عليه فإنه من الأفضل إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو باحتمال معين. إن مثل هذه الفترة تسمى فترة الثقة.

## Confidence Interval

### فترة الثقة

هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).

### التقدير بفترة الثقة

هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معين.

تذكرة:

المتوسط الحسابي لعينة =

مجموع قيم البيانات

عدد البيانات

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

الانحراف المعياري لعينة:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

تذكرة:

المتوسط الحسابي للمجتمع

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N}$$

الانحراف المعياري للمجتمع:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

### درجة الثقة (مستوى الثقة)

## Degree of Confidence (Level of Confidence)

إن درجة الثقة أو مستوى الثقة هو احتمال  $(1 - \alpha)$  أن تكون فترة الثقة تحوي القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع قيد الدراسة، وعادة يعبر عنها كنسبة مئوية.

أما  $\alpha$  فهي نسبة الخطأ في التقدير وتسمى مستوى المعنوية أو مستوى الدلالة. فمثلاً:

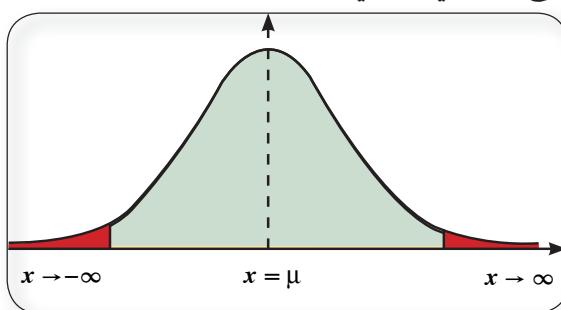
- إذا كانت  $\alpha = 0.05$  حينها تكون درجة الثقة  $0.95 = 1 - \alpha$  أي 95%
- إذا كان مستوى الثقة 90% فإن مستوى المعنوية  $\alpha = 10\%$
- أيضاً إذا كان مستوى الثقة 99% فإن مستوى المعنوية  $\alpha = 1\%$

ومن هذه الخيارات الثلاثة، يعتبر مستوى الثقة 95% هو الأكثر انتشاراً لأنه يؤمن التوازن الأنسب بين الدقة الموضحة من خلال طول فترة الثقة والدقة الموضحة من خلال مستوى الثقة.

## Normal Distribution

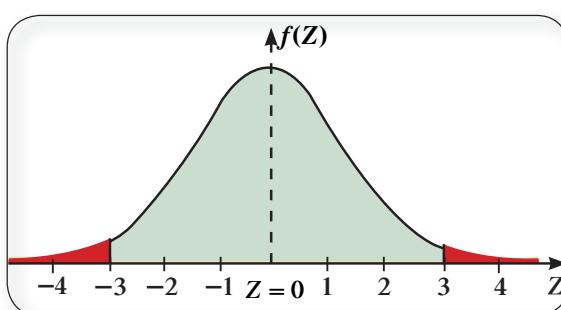
## التوزيع الطبيعي

تعرفنا فيما سبق على بيان منحنى التوزيع الطبيعي، وعلمنا من خواص التوزيع الطبيعي ما يلي:



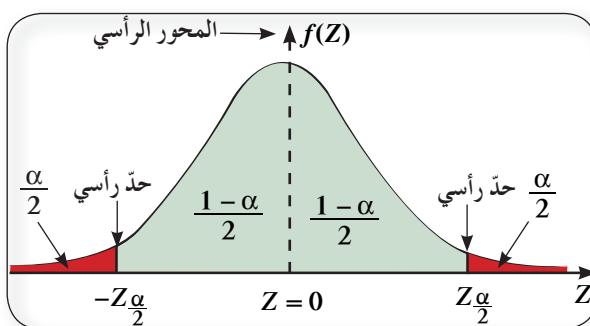
شكل (1)

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنسوب.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره ( $x = \mu$ ).
- يمتد المنحنى من طرفه إلى  $\infty$  وإلى  $-\infty$  (لا يقطع المحور الأفقي).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).
- المستقيم الرأسى  $x = \mu$  يقسم المساحة تحت المنحنى إلى منطقتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوى نصف (وحدة مساحة) كما في الشكل (1).



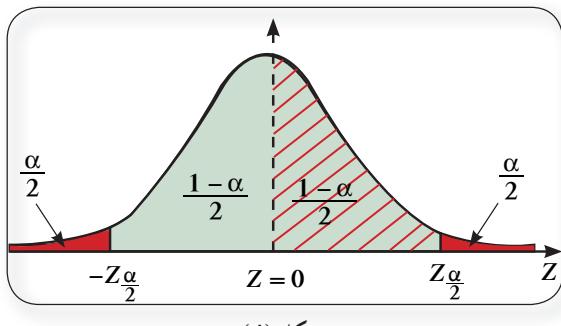
شكل (2)

## Critical Value



شكل (3)

- نعلم أن مساحة المنطقة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري تساوى الواحد (وحدة مساحة) والمحور الرأسى يقسم المنطقة تحت المنحنى إلى قسمين متطابقين مساحة كل منهما تساوى  $\frac{1}{2}$  وحدة مساحة. ومجموع مساحتى الجزئين باللون الأحمر معاً تساوى  $\alpha$  وتكون مساحة كل جزء منها تساوى  $\frac{\alpha}{2}$  وعليه تكون مساحة كل من الجزئين باللون الأخضر على جانبي المحور الرأسى  $\frac{1-\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}$  أي  $\frac{1-\alpha}{2}$ .
- نعتبر عن الحدين الرأسين بالرموز  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  و $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$  حيث  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  يفصل المنطقة التي مساحتها  $\frac{\alpha}{2}$  من ذيل الطرف الأيمن عن المنطقة التي مساحتها  $\frac{1-\alpha}{2}$  بينما  $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$  يفصل المنطقة التي مساحتها  $\frac{\alpha}{2}$  من ذيل الطرف الأيسر عن المنطقة التي مساحتها  $\frac{1-\alpha}{2}$  من المستقيم  $Z = 0$ .



شكل (4)

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad -Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$$

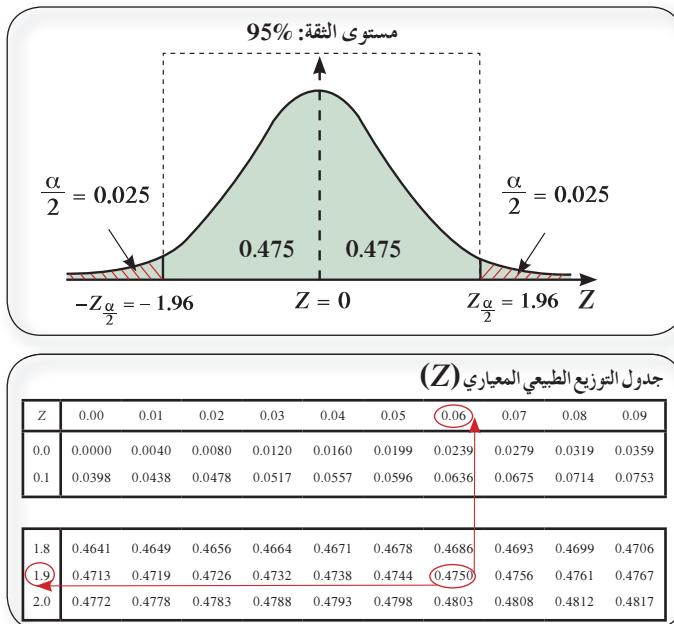
## إيجاد القيمة الحرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

لإيجاد قيمة  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  المناظرة للمساحة تحت المنحنى نحسب المساحة  $1 - \frac{\alpha}{2}$  التي تقع على يسار  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  ويمين الصفر أي في الفترة  $[0, Z_{\frac{\alpha}{2}}]$  ثم نكشف عنها في الجدول المرفق في نهاية الوحدة صفحة 194 حيث العمود الأول قيم  $Z$  ابتداءً من 0.0 وحتى 3.1 وأكثر. والصف الأول يمثل الأجزاء من المئة لقيم  $Z$ ، ومنه يمكن تحديد قيمة  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  وذلك بجمع قيمتي الصف والعمود لـ  $Z$ .

Normal Distribution

### مثال (1)

أوجد القيمة الحرجة  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  الم対اظرة لمستوى ثقة 95% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.



الحل:

$$\therefore \text{مستوى الثقة هو } 95\% \\ 1 - \alpha = 0.95 \quad \therefore \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{0.95}{2} = 0.475$$

نأخذ جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z) صفحة 194

نبحث في الجدول عن 0.4750 فنجد لها على التقابل الأفقي/العمودي للعدادين على الترتيب: 1.9 ، 0.06

وبالتالي القيمة الحرجة هي:

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.9 + 0.06$$

$$\therefore Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

حاول أن تحل

1 أوجد القيمة الحرجة  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  الم対اظرة لمستوى ثقة 97% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

## Margin of Error

### Point Estimation Error

### هامش الخطأ

### أولاً: الخطأ بالتقدير بنقطة

علمنا فيما سبق أنه يمكن استخدام المتوسط الحسابي للعينة  $\bar{x}$  كتقدير بنقطة للمتوسط الحسابي  $\mu$  للمجتمع.

ومن المتوقع أن تكون قيمة المتوسط الحسابي للعينة  $\bar{x}$  غير مساوية لقيمة المتوسط الحسابي  $\mu$  للمجتمع.

تسمى القيمة المطلقة للفرق بين القيمتين السابقتين بالخطأ المعياري وتساوي  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  حيث  $\sigma$  الانحراف المعياري للمجتمع،  $n$  عدد قيم العينة (أو حجم العينة).

### Interval Estimation Error

### ثانياً: الخطأ بالتقدير بفتره

والآن نعرض للخطأ بالتقدير بفتره فعندما نستخدم عينة لتقدير المتوسط الحسابي  $\mu$  لمجتمع، يكون الخطأ في التقدير هو القيمة المطلقة لفرق بين المتوسط الحسابي للعينة  $\bar{x}$ ، والمتوسط الحسابي  $\mu$  للمجتمع.

### هامش الخطأ E

عند استخدام بيانات عينة لتقدير المتوسط الحسابي  $\mu$  لمجتمع، يكون هامش الخطأ، يرمز إليه بـ  $E$ ، القيمة العظمى الأكتر ترجحًا عند درجة ثقة  $(1 - \alpha)$  لفرق بين المتوسط الحسابي  $\bar{x}$  للعينة والمتوسط الحسابي  $\mu$  للمجتمع.

يسمي أيضًا هامش الخطأ الأكتر في التقدير، ويمكن إيجاده بأخذ ناتج ضرب القيمة الحرجة  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  والخطأ المعياري  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

عند درجة ثقة  $(1 - \alpha)$ .

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

وحتى يكون الخطأ في التقدير أقل ما يمكن يجب أن تتحقق المتباينة:

$$|\bar{x} - \mu| < E$$

أي أن:

$$-\bar{E} < \mu - \bar{x} < \bar{E}$$

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$$

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$$

وعليه تكون فترة الثقة هي:

التقدير بفترة الثقة للمتوسط الحسابي  $\mu$  للمجتمع الإحصائي

## Confidence Interval Estimation for the Mean Value $\mu$ of Statistical Population

أولاً: إذا كان التباين  $\sigma^2$  للمجتمع معلوم

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها  $n$  من مجتمع طبيعي  $(\mu, \sigma^2)$  حيث تباينه  $\sigma^2$  معلوم وحجم العينة  $n > 30$  أو  $n \leq 30$  فإن تقدير فترة الثقة للمتوسط الحسابي  $\mu$  هو:

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E) \quad \text{عند درجة ثقة } (1 - \alpha)$$

حيث  $\bar{x}$  المتوسط الحسابي للعينة،  $E$  هامش الخطأ.

وتسمى القيمتان  $\bar{x} - E$ ,  $\bar{x} + E$  طرفي فترة الثقة.

**ملاحظة:** عند إيجاد فترة الثقة سنكتفي بدرجة الثقة 95% والتي تناظرها القيمة الحرجة  $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

(من جدول التوزيع الطبيعي المعياري).

الخطوات المتتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي  $\mu$

إذا كانت  $\sigma^2$  معلومة و  $n > 30$  أو  $n \leq 30$ .

1 نوجد القيمة الحرجة  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96.

2 نوجد هامش الخطأ  $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , حيث  $\sigma$  هي الانحراف المعياري للمجتمع.

3 نوجد فترة الثقة  $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$ .

### تفسير فترة الثقة

عند اختيار عينات عشوائية مختلفة متساوية في الحجم ( $n$ ) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95% من فترات الثقة هذه تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع ( $\mu$ ).

فمثلاً عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه ( $n$ ) وفي كل مرة نحسب  $\bar{x}$  وفترة الثقة فإننا نتوقع أن 95% فترات تحوي  $\mu$  الحقيقة و5 فترات لا تحويها.

**مثال (2)**

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل البض لدبيهن فإذا كان حجم عينة الإناث  $n = 40$  والانحراف المعياري لمجتمع الإناث  $\sigma = 12.5$  والمتوسط الحسابي للعينة  $\bar{x} = 76.3$ . باستخدام مستوى ثقة 95%



١. أوجد هامش الخطأ.

٢. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي لمجتمع الإحصائي  $\mu$ .

٣. فسر فترة الثقة.

الحل:

١.  $\therefore$  مستوى الثقة 95%

$$\therefore \text{القيمة الحرجة: } Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

نلاحظ أن  $\sigma$  معلومة

$\therefore n = 40$  ،  $\sigma = 12.5$  ،  $\bar{x} = 76.3$

$$E = 1.96 \times \frac{12.5}{\sqrt{40}}$$

$$E \approx 3.87379$$

هامش الخطأ:

$\therefore$  هامش الخطأ  $\approx 3.8738$

٢. فترة الثقة هي:

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$$

$$= (76.3 - 3.8738, 76.3 + 3.8738)$$

$$= (72.4262, 80.1738)$$

٣. عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه ( $n = 40$ ) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95% تتحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي لمجتمع  $\mu$ .

حاول أن تحل

٢. من المثال (2) إذا أجريت الدراسة على عينة أخرى من الإناث حجمها 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث  $\sigma = 3.6$  والمتوسط الحسابي للعينة  $\bar{x} = 18.4$

باستخدام مستوى ثقة 95%

١. أوجد هامش الخطأ.

٢. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي لمجتمع الإحصائي  $\mu$ .

٣. فسر فترة الثقة.

ثانياً: إذا كان التباين  $\sigma^2$  للمجتمع غير معلوم وحجم العينة  $n > 30$

الخطوات المتتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي  $\mu$

١. نوجد القيمة الحرجة  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96

٢. نوجد هامش الخطأ  $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$  ، حيث  $S$  هي الانحراف المعياري للعينة.

٣. نوجد فترة الثقة  $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$ .

مثال (3)

عينة عشوائية حجمها 36، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباعيها 16، باستخدام مستوى ثقة 95%:

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي  $\mu$ .

3 فسر فترة الثقة.

الحل:

حجم العينة:  $n = 36$  ، المتوسط الحسابي:  $\bar{x} = 60$

التباعين:  $S^2 = 16$  ، الانحراف المعياري:  $S = 4$

3: مستوى الثقة 95% 1

$$\therefore Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$n > 30$  غير معلوم ،  $\therefore \sigma^2$

$$\begin{aligned} E &= Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \\ &= 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{36}} \\ &= 1.3066 \end{aligned}$$

$\therefore$  هامش الخطأ  $\approx 1.3067$

2 فترة الثقة هي:

$$\begin{aligned} (\bar{x} - E, \bar{x} + E) \\ = (60 - 1.3067, 60 + 1.3067) \\ = (58.6933, 61.3067) \end{aligned}$$

3 عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه ( $n = 36$ ) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقة للمتوسط الحسابي للمجتمع  $\mu$ .

حاول أن تحل

3 أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها  $n = 81$  ومتواسطها الحسابي  $\bar{x} = 50$  ، وانحرافها المعياري  $S = 9$  ، باستخدام مستوى ثقة 95%.

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي  $\mu$ .

3 فسر فترة الثقة.

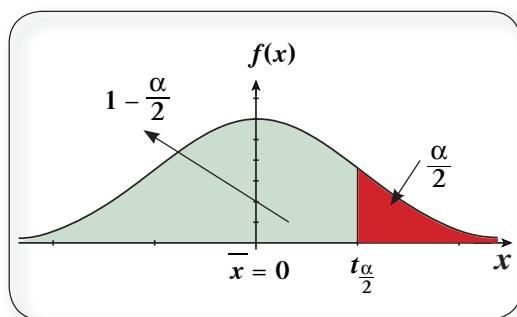
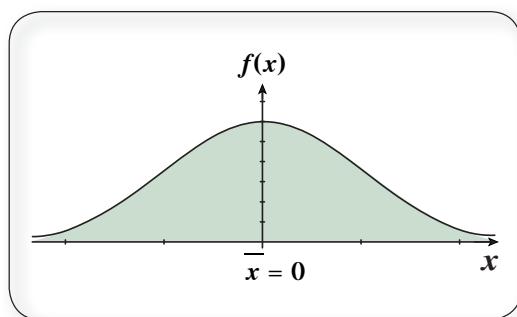
ثالثاً: إذا كان التباعين  $\sigma^2$  للمجتمع غير معلوم وحجم العينة  $n \leq 30$

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها  $n$  من مجتمع طبيعي تباعيه  $\sigma^2$  غير معلوم وحجم العينة  $n \leq 30$  فإن توزيع العينة لا يؤول إلى التوزيع الطبيعي وفي هذه الحالة يلزمـنا استخدام توزيع آخر هو توزيع  $t$  للعينات الصغيرة التي حجمها  $n \leq 30$  ويكون تقدير فترة الثقة  $(\alpha - 1)$  للمتوسط الحسابي  $\mu$  هو  $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$ .

حيث  $\bar{x}$  المتوسط الحسابي للعينة،  $E$  هامش الخطأ.

## خواص التوزيع $t$

- 1 توزيع متماثل حول متوسطه الحسابي والذي يساوي صفرًا، ويمتد إلى  $\infty$  من جهة اليمين وإلى  $-\infty$  من جهة اليسار ويزداد قرباً من الصفر في الجهتين.
- 2 انحراف المعياري أكبر من الواحد.
- 3 يعتمد هذا التوزيع على درجات الحرية والتي تساوي (حجم العينة - 1) أي  $(n - 1)$ .
- 4 التوزيع  $t$  يشبه التوزيع الطبيعي إلا أن قمته أكثر انخفاضاً من التوزيع الطبيعي.
- 5 كلما زادت درجات الحرية اقترب هذا التوزيع من التوزيع الطبيعي ويقترب انحراف المعياري إلى الواحد الصحيح.



### إيجاد القيمة الحرجة من جدول توزيع $t$

لإيجاد القيمة الحرجة من جدول توزيع  $t$  حيث يبين العمود الأول قيم درجات الحرية  $(n - 1)$  وتبعد من 1 إلى 30 وأكثر والصف الأول يمثل قيم  $\frac{\alpha}{2}$  ومنه يمكن تحديد  $t_{\frac{\alpha}{2}}$ . لاحظ أن:

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1 - \frac{\alpha}{2}}$$

هامش الخطأ للمتوسط الحسابي  $\bar{x}$  للمجتمع الإحصائي (في حالة  $\sigma^2$  غير معروف،  $n \leq 30$ )

**Margin of Error for Mean Value of Statistical Population where  $\sigma^2$  is not known and  $n \leq 30$**

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

حيث  $S$  الانحراف المعياري للعينة

فترة الثقة للمتوسط الحسابي  $\bar{x}$  للمجتمع الإحصائي (في حالة  $\sigma^2$  غير معروف،  $n \leq 30$ )

**Confidence Interval for Mean Value of Statistical Population where  $\sigma^2$  is not known and  $n \leq 30$**

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$$

الخطوات المتبعة لإيجاد فتره الثقة للمتوسط الحساب  $\bar{x}$  إذا كانت  $\sigma^2$  غير معلومة،  $n \leq 30$ :

- 1 نوجد درجات الحرية  $(n - 1)$ .

- 2 نوجد القيمة الحرجة  $t_{\frac{\alpha}{2}}$  المناظرة لدرجة ثقة 95% من جدول توزيع  $t$ .

- 3 نوجد هامش الخطأ  $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

- 4 نوجد فتره الثقة  $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$ .

مثال (4)

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها  $n = 25$ ، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة ( $S$ ) يساوي 10 ومتوسطها الحسابي ( $\bar{x}$ ) يساوي 15، استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد:

1 هامش الخطأ.

2 فتره الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي  $\mu$ .

الحل:

$$n \leq 30 \quad \therefore \sigma^2 \text{ غير معلوم} , \quad 1$$

نستخدم توزيع  $t$ .

$$\therefore n = 25$$

$$n - 1 = 25 - 1 = 24$$

درجات الحرية:

$$1 - \alpha = 95\%$$

مستوى الثقة:

$$\therefore 1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.050$$

$$\therefore \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

من جدول توزيع  $t$  تكون قيمة  $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025} = 2.064$  مناظرة للعدد 2.064

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

هامش الخطأ

$$= 2.064 \times \frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$\therefore \text{هامش الخطأ} = 4.128$$

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$$

فتره الثقة:

$$= (15 - 4.128, 15 + 4.128)$$

$$= (10.872, 19.128)$$

حاول أن تحل

أوجد فتره ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي  $\mu$  علماً أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

$$\bar{x} = 8.4, S = 0.3, n = 13$$

## اختبارات الفرض الإحصائية

### Statistical Hypotheses Testing

#### سوف تعلم

- القيمة الحرجية.
- مستوى المعنوية.
- درجة المعنوية.
- الفرض.
- اختبار الفرض.
- فرض العدم.
- الفرض البديل.

#### دعنا نفك ونتناقش

ينتاج مصنع نوعاً معيناً من المعلبات مسجل على العلبة أن الوزن الصافي g 200. فإذا تمّ أخذ عينة حجمها 100 علبة وتمّ حساب المتوسط الحسابي لأوزان هذه العينة فوجد أنه g 197.3، فهل يمكن الحكم على هذا المصنع بأنه يقوم بغض تجاري؟ ما هي حيّيات هذا الحكم؟

نحن نعلم أنه في كثير من الأحيان وفي مواقف معينة نحتاج إلى اتخاذ قرار بناء على معلومات محددة وحيّيات معقولة لها مبررها، لذلك دعت الضرورة إلى دراسة ما يسمى بالفرض الإحصائي واختبارات الفرض الإحصائية.

#### Statistic Hypothesis

#### تعريف: الفرض الإحصائي

هو ادعاء معين مبني على حيّيات معقولة حول معلومة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي  $\mu$  أو الانحراف المعياري  $\sigma$ .

#### تعريف: المقياس الإحصائي

هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.

#### تعريف: اختبارات الفرض الإحصائية (اختبار المعنوية)

هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلومة من معالم المجتمع.

**ملاحظة:** سنكتفي في هذا الموضوع بدراسة معلومة واحدة من معالم المجتمع وهي المتوسط الحسابي  $\mu$ .

إليك بعض الأمثلة عن الفرض التي يمكن اختبارها من خلال الطرق التي سنتطرق إليها في هذا الدرس. على سبيل المثال:

- في إدارة الأعمال: تدعى إحدى الصحف في مقال لها أنّ معظم الموظفين يجدون عملاً عن طريق وكالات التوظيف.
- في الطب: يدعى باحثون في الطب أنّ متوسط درجة حرارة جسم أي بالغ معافى ليست .37°C

#### المفردات والمصطلحات:

- الفرض الإحصائي Statistic Hypothesis
- المقياس الإحصائي Statistical Scale
- اختبارات الفرض الإحصائية Statistical Hypotheses Testing
- فرض العدم Null Hypothesis
- الفرض البديل Alternative Hypothesis

- في سلامة الطيران المدني: تدعى إدارة الطيران المدني في الكويت أن متوسط وزن المسافر (مع حقائبه) يتعدى الوزن المسموح منذ عشرين سنة والبالغ 84 kg

## Null and Alternative Hypothesis

## فرض العدم والفرض البديل

- فرض العدم ( $H_0$ ): يفيد بأن قيمة معلمة المجتمع (مثل المتوسط الحسابي  $\mu$ ) تساوي قيمة مزعومة.
  - نختبر فرض العدم مباشرة أي نفترض بأنه صحيح ونتوصل إلى خلاصة بفرض أو عدم رفض  $H_0$ .
  - الفرض البديل ( $H_1$ ): يفيد بأن للمعلمة قيمة تختلف نوعاً ما عن فرض العدم ( $H_0$ ).
  - يضم الشكل الرمزي للفرض البديل أحد هذه الرموز:  $>$  أو  $<$  أو  $\neq$
- وستقتصر دراستنا على الحالات ( $\neq$ ). فمثلاً:  $H_0: \mu = 98.6$  ،  $H_1: \mu \neq 98.6$

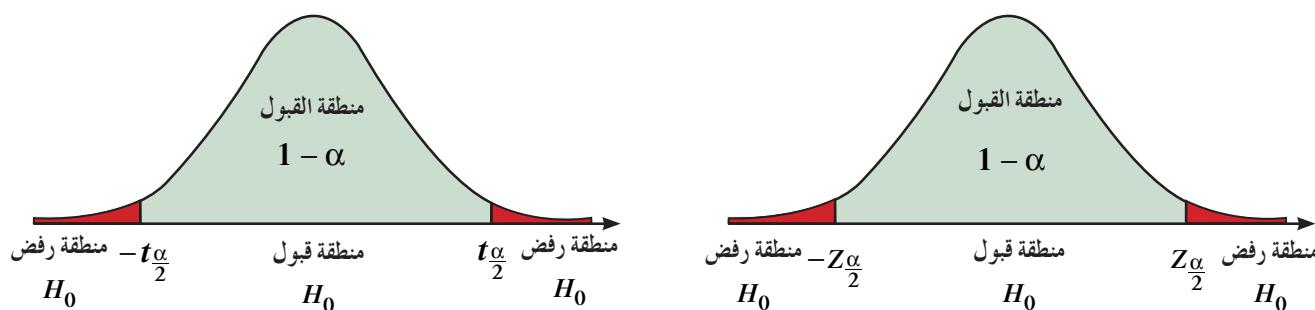
**الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفرض الإحصائي:**

- 1 صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم  $H_0$  والفرض البديل  $H_1$ ).
- 2 التحقق من الانحراف المعياري  $\sigma$  للمجتمع (معلومات أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة ( $n$ ) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار ( $Z$  أو  $t$ ), (مسترشداً بالجدول التالي):

حجم العينة ( $n$ )	المقياس الإحصائي ( $Z$ أو $t$ )	الانحراف المعياري ( $\sigma$ )
لا يشترط حجم معين للعينة	$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	معلوم
$n > 30$	$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	
$n \leq 30$	$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	غير معلوم

- 3 تحديد مستوى المعنوية  $\alpha$  وحساب القيمة الجدولية  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  من جدول التوزيع الطبيعي المعياري أو القيمة الجدولية  $t_{\frac{\alpha}{2}}$  من جدول  $t$  ذي درجات حرية.
- 4 تحديد منطقة القبول:  $(Z_{\frac{\alpha}{2}}, -Z_{\frac{\alpha}{2}})$  أو  $(t_{\frac{\alpha}{2}}, -t_{\frac{\alpha}{2}})$  كما هو موضح بالشكل.
- 5 اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل).

**ملاحظة:** ستقتصر دراستنا على مستوى ثقة 95%.



(1) مثال

ترעם شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4 000 دينار كويتي. إذا أخذت عينة من 25 موظفًا، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3 950 دينارًا كويتيًا فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع (دينارًا)  $\sigma = 125$

ووضح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%

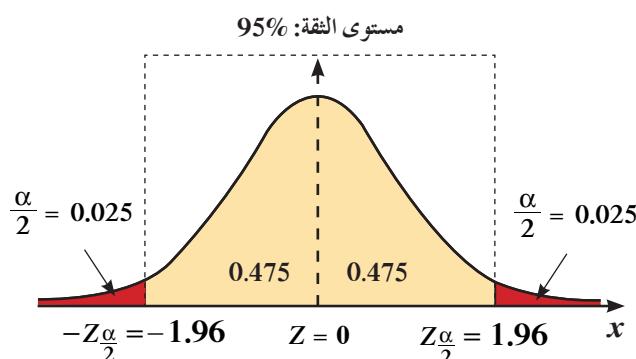
الحل:

1 صياغة الفرض

$$H_1: \mu \neq 4000$$

$$\text{مقابل } H_0: \mu = 4000$$

$$\therefore \sigma = 125 \text{ (معلومة)} \quad 2$$



$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\therefore n = 25, \quad \bar{x} = 3950$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\therefore Z = \frac{3950 - 4000}{\frac{125}{\sqrt{25}}} = -2$$

3 ∴ مستوى الثقة 95%

$$\therefore \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$\therefore Z_{\alpha/2} = 1.96$$

4 منطقة القبول هي (-1.96, 1.96)

5 اتخاذ القرار الإحصائي:  $-2 \notin (-1.96, 1.96)$

∴ القرار: نرفض فرض عدم  $\mu = 4000$  ونقبل الفرض البديل  $\mu \neq 4000$ .

حاول أن تحل



1 بُينت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو

$$\sigma = 150 \text{ kg} \quad \mu = 1800 \text{ kg}$$

ويؤكد الأحصائيون في المصنع المنتج لهذه الأسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك، وتأكدوا على ذلك تم اختبار عينة من 40 سلكًا

فنبيّن أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1840 kg

هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$ ؟

إذا كان الانحراف المعياري  $\sigma$  لمجتمع غير معلوم،  $n > 30$

مثال (2)

$$n = 80 , \bar{x} = 37.2 , S = 1.79$$

اخبر الفرض بأن  $\mu = 37$  عند مستوى معنوية  $\alpha = 0.05$

الحل:

$$n = 80 , \bar{x} = 37.2 , S = 1.79$$

صياغة الفروض: 1

$$H_1: \mu \neq 37$$

$$H_0: \mu = 37$$

$\therefore \sigma$  غير معلومة ، 2

$\therefore$  نستخدم المقياس الإحصائي Z:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$Z = \frac{37.2 - 37}{\frac{1.79}{\sqrt{80}}} = 0.999$$

$$\therefore \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

3 تحديد مستوى المعنوية  $\alpha$ :

$$\therefore Z_{0.025} = 1.96$$

4 منطقة القبول هي (-1.96 , 1.96)

$$\therefore 0.999 \in (-1.96 , 1.96)$$

5 اتخاذ القرار الإحصائي:

$\therefore$  القرار بقبول فرض العدم  $\mu = 37$ .

حاول أن تحل



2 متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع  $\bar{x} = 1570$  بانحراف معياري  $S = 120$ .

يقول صاحب المصنع إن متوسط العمر بالساعات  $\mu = 1600$  للمصابيح المصنعة في المصنع.

اخبر صحة الفرض  $\mu = 1600$  مقابل الفرض  $\mu \neq 1600$  وباختيار مستوى معنوية  $\alpha = 0.05$



مثال (3)

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 ديناراً كويتياً.  
إذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبيّن أن متوسطها الحسابي (ديناراً)  $S = 283$  وانحرافها المعياري (ديناراً)  $\bar{x} = 32$ .  
فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟  
استخدم مستوى ثقة 95% (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًا).

الحل:

$$n = 10, \bar{x} = 283, S = 32$$

1 صياغة الفرض

$$H_1: \mu \neq 290 \quad \text{مقابل} \quad H_0: \mu = 290$$

2  $\sigma$  غير معلومة،  $n = 10 < 30$

: نستخدم المقياس الإحصائي  $t$  :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$t = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}}$$

$$t \approx -0.6917$$

3 درجات الحرية:  $n = 10$

مستوى الثقة 95%

$$\alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

من جدول توزيع  $t$

4 منطقة القبول هي  $(-2.262, 2.262)$

5 اتخاذ القرار الإحصائي:  $-0.6917 \in (-2.262, 2.262)$

: القرار بقبول فرض عدم  $\mu = 290$



حاول أن تحل

3 في المثال (3)، إذا أجريت دراسة إحصائية أخرى على المدينة ذاتها وتبيّن من خلالها أن  $S = 5$ ،  $\bar{x} = 296$  لعينة من 10 منازل مع استخدام درجة الثقة نفسها.

فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحًا أم لا؟ وضح إجابتك.

## الارتباط والانحدار

### Correlation and Regression

#### سوف تعلم

#### دعنا نفكّر ونناقش

هل تسأّلت يوماً: كيف تحسّب العلاقة بين الطول والوزن؟  
 ما الذي يربط بين التدخين والإصابة بمرض السرطان؟  
 كيف نجد رابطاً بين وزن سيارة واستهلاكها للوقود؟  
 كيف يتغيّر سعر الذهب مع تغيّر قيمة الدولار الأميركي؟  
 وما هي أفضل وسيلة للتقدير لنقترب من الحقيقة؟

### Correlation

### أولاً: الارتباط

من دراستنا السابقة تم عرض بعض المقاييس الإحصائية مثل مقاييس التزعة المركزية (المتوسط الحسابي - الوسيط - المتوال) ومقاييس التشتت (المدى - التباين - الانحراف المعياري). نلاحظ أن هذه المقاييس كانت تصف شكل البيانات التي تم جمعها من ظاهرة إحصائية واحدة أي من متغير واحد والذي يمكن الحصول عليه من العينة. بينما يقابلنا في حياتنا العملية مواقف كثيرة تتضمن متغيرين (ظاهرتين) أو أكثر ويكون تساؤلنا: هل هناك علاقة بين هذه المتغيرات؟ وما هو شكل هذه العلاقة؟ وأيضاً كيف يمكن التنبؤ بقيمة أحد هذين المتغيرين إذا علم قيمة المتغير الآخر؟ وكثيراً ما يرى الباحثون ضرورة دراسة العلاقة بين متغيرين (ظاهرتين) كما يتضح من الأمثلة التالية:

- الطول والوزن.
- التدخين والإصابة بمرض السرطان.
- وزن سيارة واستهلاكها للوقود.
- الإنفاق والدخل.
- سعر السلعة والكمية المعروضة منها.
- العمر وضغط الدم.

والأمثلة في هذا المجال كثيرة ومتنوعة ولدراسة العلاقة بين هذه الظواهر ندرس ما يسمى الارتباط.

#### تعريف

الارتباط هو العلاقة بين متغيرين.

- مفهوم الارتباط وأنواعه.
- رسم مخطط الانشار.
- إيجاد معامل الارتباط الخطي.
- خواص معامل الارتباط.
- إيجاد معامل ارتباط بيرسون.
- مفهوم الانحدار.
- إيجاد معادلة خط الانحدار.
- تنبؤ قيمة أحد المتغيرين.
- التقدير باستخدام معادلة خط الانحدار.
- التنبؤ.
- إيجاد مقدار الخطأ.

#### المفردات والمصطلحات:

- الارتباط
- ارتباط طردي
- Positive Correlation
- ارتباط عكسي
- Negative Correlation
- معامل الارتباط الخطي
- Linear Correlation
- Coefficient
- Regression
- الانحدار
- معادلة خط الانحدار
- Regression Line
- Equation
- Prediction
- التنبؤ
- مقدار الخطأ
- Error Value

سنرمز للمتغير الأول بالرمز « $x$ » وهو المتغير الذي يتم تحديده من قبل الباحث القائم بالدراسة ويسمى «**بالمتغير المستقل**».

ونرمز للمتغير الثاني بالرمز « $y$ » وهذا المتغير غير مستقل بذاته لأن نتيجته مرتبطة بالمتغير المستقل ولذلك يسمى «**بالمتغير التابع**».

## أنواع الارتباط

### 1 ارتباط طردي (موجب)

هو علاقة بين متغيرين  $y$ ,  $x$  بحيث إذا تغير المتغير المستقل ( $x$ ) فإن المتغير التابع ( $y$ ) يتبعه في نفس الاتجاه.

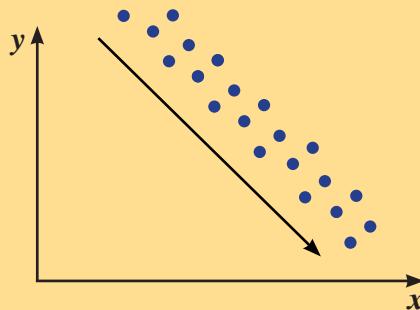
### 2 ارتباط عكسي (سالب)

هو علاقة بين متغيرين  $y$ ,  $x$  بحيث إذا تغير المتغير المستقل ( $x$ ) فإن المتغير التابع ( $y$ ) يتبعه في الاتجاه المضاد.

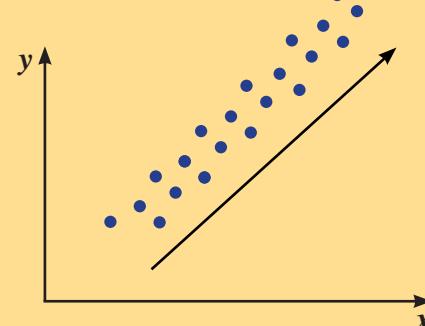
### تذكرة:

مخيطط الانشار هو تمثيل بياني لعدد من الأزواج المرتبة ( $x, y$ ) يستخدم لوصف العلاقة بين المتغيرين.

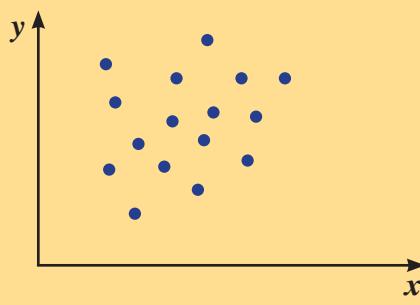
### بعض مخططات الانشار التي توضح أنواع الارتباط



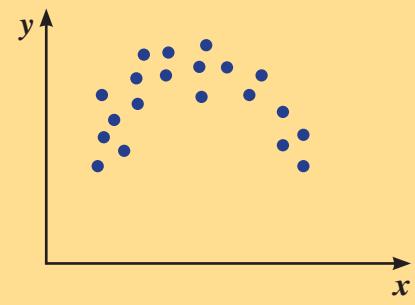
علاقة خطية  
ارتباط عكسي (سالب)



علاقة خطية  
ارتباط طردي (موجب)



لا توجد علاقة



علاقة غير خطية

**مثال (1)**

البيانات التالية تبيّن العلاقة بين عمر الشخص وعدد ساعات التمارينات الرياضية التي يقوم بها:

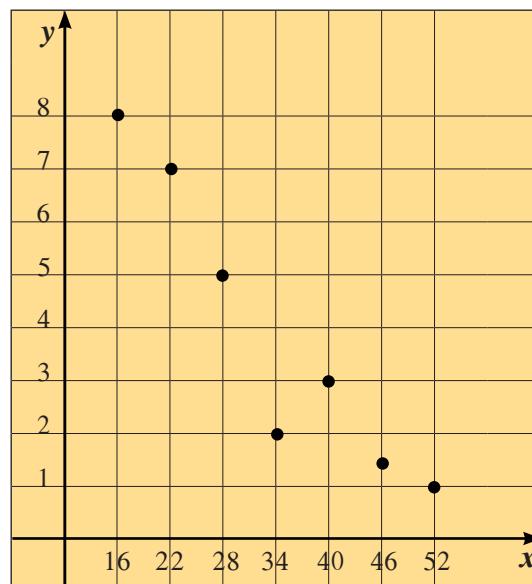
العمر ( $x$ )	16	22	28	34	40	46	52
عدد ساعات التمارينات ( $y$ )	8	7	5	2	3	$1\frac{1}{2}$	1

a) ارسم مخطط الانتشار.

b) حدد نوع العلاقة.

الحل:

a)



b) العلاقة خطية عكسيّة.

حاول أن تحل

1) ارسم مخطط الانتشار للبيانات التالية وحدّد نوع العلاقة التي تعبر عنها:

$x$	2	6	5	2	7	3	4	7	5
$y$	2	3	1	4	1	5	3	4	5

## Linear Correlation Coefficient

## معامل الارتباط الخطّي

تعلم أن الاستنتاجات المبنية على المعايير البصرية لمخطط الانتشار هي نسبيّة بامتياز، لذا فنحن بحاجة إلى قياسات أكثر دقة وموضوعية وبالتالي نستخدم معامل الارتباط الخطّي ( $r$ ).

تعريف

معامل الارتباط الخطّي ( $r$ ) هو عبارة عن مقياس عددي لقوّة العلاقة بين متغيرين يمثلان بيانات كمية، حيث  $-1 \leq r \leq 1$ .

## خواص مُعامل الارتباط ( $r$ )



(1)  $-1 \leq r \leq 1 , \quad r \in [-1,1]$

إذا كانت  $r = 1$  يكون الارتباط **طريدي (موجب)** تام.

إذا كانت  $r = -1$  يكون الارتباط **عكسى (سالب)** تام.

إذا كانت  $r = 0$  ينعدم الارتباط.

إذا كانت  $r \in [0.7,1]$  يكون الارتباط **طريدي (موجب)** قوي.

إذا كانت  $r \in [0.5,0.7]$  يكون الارتباط **طريدي (موجب)** متوسط.

إذا كانت  $r \in (0,0.5)$  يكون الارتباط **طريدي (موجب)** ضعيف.

إذا كانت  $r \in (-0.5,0)$  يكون الارتباط **عكسى (سالب)** ضعيف.

إذا كانت  $r \in [-0.5,-0.7]$  يكون الارتباط **عكسى (سالب)** متوسط.

إذا كانت  $r \in [-0.7,-1]$  يكون الارتباط **عكسى (سالب)** قوى.

## معامل ارتباط بيرسون $r$ :

$$r = \frac{\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{nS_x \cdot S_y}$$

حيث: (الانحراف المعياري للمتغير  $x$ ) .....  
 $S_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}}$

(الانحراف المعياري للمتغير  $y$ ) .....  
 $S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y - \bar{y})^2}{n}}$

$$r = \frac{\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x - \bar{x})^2} \sqrt{\Sigma(y - \bar{y})^2}}$$

مثال (2)

احسب مُعامل الارتباط الخطى للبيانات التالية وحدّد نوعه وقوته الارتباط.

$x$	1	2	3	4	5
$y$	3	5	7	9	11

الحل:

معامل الارتباط:

$$r = \frac{\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x - \bar{x})^2} \sqrt{\Sigma(y - \bar{y})^2}}$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = 3 , \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = 7$$

$x$	$y$	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
1	3	-2	-4	4	16	8
2	5	-1	-2	1	4	2
3	7	0	0	0	0	0
4	9	1	2	1	4	2
5	11	2	4	4	16	8
المجموع	$\Sigma x = 15$	$\Sigma y = 35$		$\Sigma(x - \bar{x})^2 = 10$	$\Sigma(y - \bar{y})^2 = 40$	$\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y}) = 20$

$$\therefore r = \frac{20}{\sqrt{10} \times \sqrt{40}} = 1$$

نوع الارتباط: طردي (موجب) تام.

حاول أن تحل

$x$	1	2	3	4	5
$y$	1	-1	-4	-6	-5

2 احسب مُعامل الارتباط الخطوي للبيانات التالية وحدّد نوعه وقوته:

صيغة أخرى لمعامل ارتباط بيرسون

$$r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} \sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$$

مثال (3)

احسب مُعامل الارتباط الخطوي للمتغيرين التاليين وبين نوعه وقوته.

$x$	1	2	3	4	5	6
$y$	4	7	8	3	5	5

الحل:

$$n = 6$$

$x$	$y$	$xy$	$x^2$	$y^2$
1	4	4	1	16
2	7	14	4	49
3	8	24	9	64
4	3	12	16	9
5	5	25	25	25
6	5	30	36	25
المجموع	$\Sigma x = 21$	$\Sigma y = 32$	$\Sigma xy = 109$	$\Sigma x^2 = 91$
				$\Sigma y^2 = 188$

$$r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} \sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$$

$$r = \frac{6 \times 109 - 21 \times 32}{\sqrt{6 \times 91 - (21)^2} \sqrt{6 \times 188 - (32)^2}}$$

$$r = \frac{-18}{\sqrt{105} \times \sqrt{104}}$$

$r \approx -0.172$  ارتباط عكسي (سالب) ضعيف

x	1	2	3	4	5	6
y	98	99	75	40	100	150

حاول أن تحل

3 احسب معامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وبين نوعه وقوته:

## ثانيًا: الانحدار

سوف نتعلم وصف العلاقة بين متغيرين بإيجاد معادلة الخط المستقيم الممثل لهذه العلاقة.  
يسمي هذا الخط المستقيم بخط الانحدار، وتسمى معادلته بمعادلة خط الانحدار.

تعريف

انحدار هو وصف العلاقة بين متغيرين.

تعريف

**معادلة خط الانحدار:** هي المعادلة الخطية التي يمكن من خلالها التنبؤ بقيم أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر.

سبق لنا دراسة معادلة الخط المستقيم على الصورة:  $y = b_1x + b_0$  حيث  $b_1$  ترمز إلى ميل هذا المستقيم،  $|b_0|$  ترمز إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

في الإحصاء توجد طرق متعددة لإيجاد معادلة خط انحدار مستقيم والتي تساعدنا في التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين ومنها الطريقة التالية:

تعريف

حيث  $\widehat{y} = b_0 + b_1x$ ، حيث  $|b_0|$  ترمز إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات،  $b_1$  ترمز إلى ميل المستقيم.

حيث:  $b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$  ،  $b_1 = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$

حيث:  $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$  ،  $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n}$

وهذا ما يسمى بـ **طريقة المربعات الصغرى** التي تتلخص خطواتها فيما يلي:

1) تعين قيمة  $b_1$

2) تعين قيمة  $b_0$

3) نكتب معادلة خط الانحدار:  $\hat{y} = b_0 + b_1 x$

4) التنبؤ بقيمة  $y$  إذا علمت قيمة  $x$

5) تحديد مقدار الخطأ في التنبؤ

$$\begin{aligned} \text{مقدار الخطأ} &= |\text{القيمة الجدولية} - \text{القيمة التي تحقق معادلة الانحدار}| \\ &= |y_x - \hat{y}_x| \end{aligned}$$

#### (4) مثال

$x$	1	3	5	7	9
$y$	2	5	9	10	14

باستخدام البيانات التالية لقيم  $y$  ،  $x$  :

أوجد:

a) معادلة خط الانحدار.

b) قيمة  $y$  عندما  $x = 10$

c) مقدار الخطأ عندما  $x = 5$

الحل:

a)

$x$	$y$	$xy$	$x^2$
1	2	2	1
3	5	15	9
5	9	45	25
7	10	70	49
9	14	126	81
المجموع	$\Sigma x = 25$	$\Sigma y = 40$	$\Sigma xy = 258$
			$\Sigma x^2 = 165$

$$n = 5 , \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{25}{5} = 5 , \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{40}{5} = 8$$

$$b_1 = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} = \frac{5 \times 258 - 25 \times 40}{5 \times 165 - 25 \times 25} = 1.45$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 8 - 1.45 \times 5 = 0.75$$

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x = 0.75 + 1.45x$$

∴ معادلة خط الانحدار هي:

b) عندما  $x = 10$  فإن:

$$y = 0.75 + 1.45 \times 10 = 15.25$$

من الجدول 9 c

من المعادلة:

$\therefore$  مقدار الخطأ:

حاول أن تحل

$x$	4	5	8	9	10	12
$y$	2	4	5	8	6	11

من الجدول التالي: 4

أوجد:

معادلة خط الانحدار. a

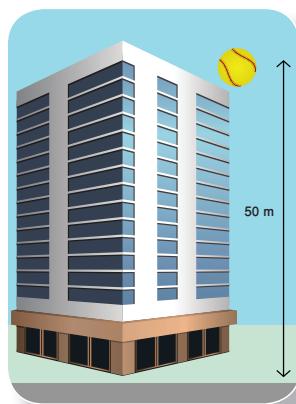
قيمة  $y$  عندما  $x = 10$  b

مقدار الخطأ عندما  $x = 10$  c

مثال (5)

سقطت كرة من ارتفاع 50 m، وتم تسجيل المسافات (بالเมตร) التي قطعتها هذه الكرة كل 0.5 s لمدة ثلاثة ثوان.

فأثبتت النتائج كما يوضح الجدول التالي:



الوقت ( $x$ )	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
المسافة ( $y$ )	0	1.2	4.9	11	19.5	30.5	44

أوجد معادلة خط الانحدار. a

قدر قيمة المسافة  $y$  عندما  $x = 4$  b

أوجد مقدار الخطأ في المسافة عندما  $x = 2.5$  s c

الحل:

a

$x$	$y$	$xy$	$x^2$
0	0	0	0
0.5	1.2	0.6	0.25
1	4.9	4.9	1
1.5	11	16.5	2.25
2	19.5	39	4
2.5	30.5	76.25	6.25
3	44	132	9
المجموع		$\Sigma x = 10.5$	$\Sigma y = 111.1$
		$\Sigma xy = 269.25$	$\Sigma x^2 = 22.75$

$$n = 7 \quad , \quad \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{10.5}{7} = 1.5 \quad , \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{111.1}{7} = 15.87$$

$$b_1 = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} = \frac{7 \times 269.25 - 10.5 \times 111.1}{7 \times 22.75 - (10.5)^2} = \frac{718.2}{49}$$

$$b_1 \approx 14.66$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

$$= 15.87 - 14.66 \times 1.5$$

$$= -6.12$$

معادلة خط الانحدار هي: (a)

$$\therefore \hat{y} = -6.12 + 14.66x$$

∴ المسافة  $y$  عندما  $x = 4$  هي:

$$\hat{y}_4 = -6.12 + 14.66 \times 4 = 52.52 \text{ m}$$

مقدار الخطأ عند  $x = 2.5 \text{ s}$  (c)

$$\hat{y} = -6.12 + 14.66x \quad \text{من المعادلة.}$$

$$\hat{y}_{2.5} = -6.12 + 14.66 \times 2.5 = 30.53 \quad \text{نجد أن:}$$

من الجدول عند  $x = 2.5 \text{ s}$

نجد أن:  $y = 30.5 \text{ s}$

∴ مقدار الخطأ:

$$\begin{aligned} |y_x - \hat{y}_x| \\ = |30.5 - 30.53| \\ = 0.03 \end{aligned}$$

حاول أن تحل

5 في الجدول التالي، المتغير  $x$  هو تكلفة إنتاج فيلم سينمائي (بملايين الدولارات) والمتغير  $y$  هو مردود هذا الفيلم.



التكلفة ( $x$ )	62	90	50	35	200	100	95
المردود ( $y$ )	65	64	48	57	601	146	47

أوجد معادلة خط الانحدار. (a)

قدر مردود فيلم بلغت تكلفته 55 مليون دولار. (b)

أوجد مقدار الخطأ لفيلم بلغت تكلفته 90 مليون دولار. (c)

## المرشد لحل المسائل

نظرًا لأهمية المياه بالنسبة إلى صحة الإنسان وحياته، قررت مؤسسة تعنى بذلك، القيام بحملة تهدف إلى التأكد من أن كل شخص يستهلك متوسط قدره  $ml = 2000$  يوميًّا من مياه الشرب.



في دراسة سابقة لعينة من 100 شخص، لاحظت المؤسسة أنَّ المتوسط الحسابي للاستهلاك:  $ml = 1850$  مع انحراف معياري  $S = 900$ .

وفي دراسة جديدة لعينة من 100 شخص، وبعد القيام بحملتها، لاحظت أنَّ المتوسط الحسابي للاستهلاك:  $ml = 1900$  مع انحراف معياري  $S = 300$ .

اعتقدت المؤسسة أنَّ حملتها قد نجحت بما أنَّ المتوسط الحسابي للاستهلاك قد ازداد  $ml = 50$  وقد اقترب كثيرًا من هدفها وهو  $ml = 2000$  يوميًّا للشخص الواحد.

هل المؤسسة على حق؟ اشرح.

**الحل:**

وضع يوسف جدولًا ليختبر فرضية الشركة من خلال اختبارات إحصائية مع:

$$H_0: \mu = 2000 \quad \text{مقابل} \quad H_1: \mu \neq 2000, \quad \text{ومستوى الثقة} = 0.95$$

الدراسة الجديدة	الدراسة السابقة	
$\bar{x} = 1900, S = 300, n = 100$	$\bar{x} = 1850, S = 900, n = 100$	المعايير
$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$	$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$	القيمة الجدولية
$Z = \frac{1900 - 2000}{\frac{300}{\sqrt{100}}} = -3.33$	$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{S} = \frac{1850 - 2000}{\frac{900}{\sqrt{100}}} = -1.66$	قيمة الاختبار الإحصائي
(-1.96, 1.96)	(-1.96, 1.96)	الفترة
$\because -3.33 \notin (-1.96, 1.96)$ رفض $H_0$ والأخذ بـ $H_1: \mu \neq 2000 \text{ ml}$	$\because -1.66 \in (-1.96, 1.96)$ قبول $H_0: \mu = 2000 \text{ ml}$	القرار

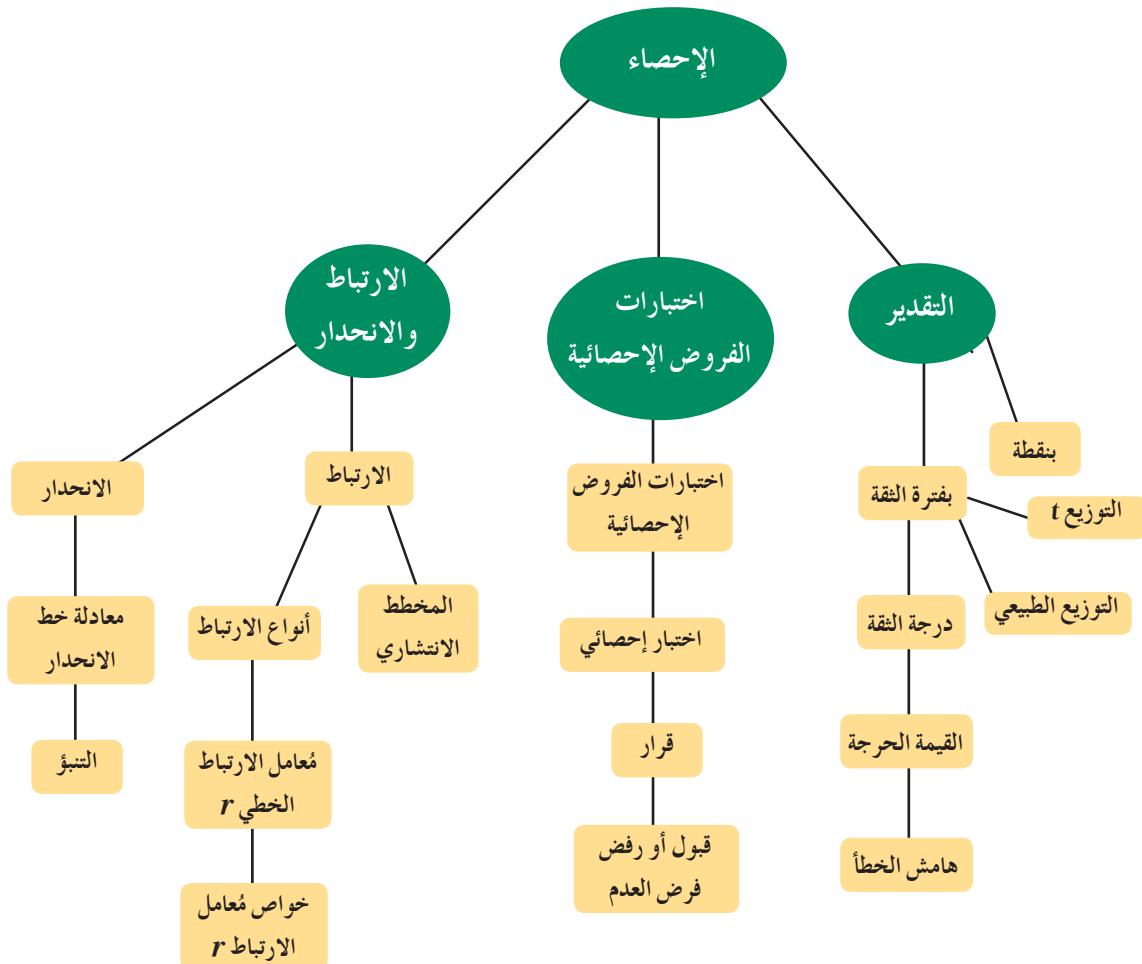
الاستنتاج:

لم تكن الحملة ضرورية، والحصول على قيمة متوسطة أكبر لا يعني الاقتراب من الهدف المنشود.

**مسألة إضافية**

قامت مؤسسة أخرى بحملة على عينة من 100 شخص تهدف إلى التأكد من أنَّ المتوسط الحسابي للاستهلاك كل شخص لمياه الشرب  $ml = 2000$  يوميًّا. فأدت النتائج على الشكل التالي:  
 $\bar{x} = 2100 \text{ ml}, S = 800 \text{ ml}$

## مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



### ملخص

- المعلمـة هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزـع المجتمع كالمتوسط الحـسابـي  $\bar{x}$  أو الانحراف المعيـاري  $s$ .
- الإحـصـاء هو اقـتران تـعيـين قـيمـته من العـيـنة كـالمـتوـسطـ الحـاسـبـي  $\bar{x}$  أو الانحراف المعيـاري لـها  $s$ .
- تقـدـيرـ المـعلمـةـ: هو إـحـصـاءـ تعـتمـدـ عـلـىـ قـيمـ العـيـنةـ وـتـعـكـسـ قـيمـةـ قـرـيـبةـ لمـعلمـةـ المـجـتمـعـ كـكـلـ وـتـوزـعـهـ.
- التقـدـيرـ بنـقطـةـ هي قـيمـةـ وـحـيدـةـ مـحسـوبـةـ منـ العـيـنةـ تـسـتـخـدـمـ لـتقـدـيرـ مـعلمـةـ مـجهـولةـ منـ معـالـمـ المـجـتمـعـ.
- فـترةـ الثـقةـ هي فـترةـ طـرـفـاـهاـ مـتـغـيرـانـ عـشـوـائـيـانـ (أـيـ أـنـهـاـ فـترةـ عـشـوـائـيـةـ) تـحـوـيـ إـحـدـىـ معـالـمـ المـجـتمـعـ بـنـسـبـةـ مـعـيـنةـ تـسـمـىـ درـجـةـ الثـقةـ (مستـوىـ الثـقةـ).
- التقـدـيرـ بـفترـةـ الثـقةـ: هو إـيجـادـ فـترةـ مـعـيـنةـ يـتـوقـعـ أنـ تـقـعـ مـعلمـةـ المـجـتمـعـ دـاخـلـهاـ بـنـسـبـةـ مـعـيـنةـ أوـ اـحـتمـالـ معـيـنـ.
- $\alpha$  هي نـسـبـةـ الـخـطـأـ فيـ التـقـدـيرـ وـتـسـمـىـ مـسـتـوىـ الـمـعـنـوـيـةـ أوـ مـسـتـوىـ الدـلـالـةـ.
- $(1 - \alpha)$  هي درـجـةـ الثـقةـ (مستـوىـ الثـقةـ).
- $Z_{\frac{\alpha}{2}}$  هي الـقـيمـةـ الـحرـجـةـ الـمـسـتـخـرـجـةـ منـ جـدـولـ التـوزـعـ الطـبـيـعـيـ المـعـيـاريـ.
- $\bar{x}$  هوـ المـتوـسطـ الحـاسـبـيـ لـالـعـيـنةـ.

- $s$  هو الانحراف المعياري للعينة.
  - $t_{\frac{\alpha}{2}}$  هي القيمة الحرجة المستخرجة من جدول التوزيع  $t$ .
  - هامش الخطأ  $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  في حالة الانحراف المعياري  $\sigma$  معلوم والتوزيع الطبيعي.
  - فترة الثقة هي:  $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$ .
  - الفرض الإحصائي: هو ادعاء معين مبني على حبيبات معقولة حول معلومة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي  $\mu$  أو الانحراف المعياري  $\sigma$ .
  - المقاييس الإحصائي هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.
  - اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية) هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلومة من معالم المجتمع.
  - الارتباط هو العلاقة بين متغيرين.
  - ارتباط طردي (موجب): هو علاقة بين متغيرين  $y, x$  بحيث إذا تغير المتغير المستقل ( $x$ ) فإن المتغير التابع ( $y$ ) يتبعه في نفس الاتجاه.
  - ارتباط عكسي (سالب): هو علاقة بين متغيرين  $y, x$  بحيث إذا تغير المتغير المستقل ( $x$ ) فإن المتغير التابع ( $y$ ) يتبعه في الاتجاه المضاد.
  - معامل الارتباط الخطى ( $r$ ) هو عبارة عن مقاييس عددي لقوّة العلاقة بين متغيرين يمثلان بيانات كمية حيث  $-1 \leq r \leq 1$
- خواص معامل الارتباط ( $r$ )**

- 1 إذا كانت  $r = 1$  يكون الارتباط طردي (موجب) قوي.
- 2 إذا كانت  $r = -1$  يكون الارتباط عكسي (سالب) قوي.
- 3 إذا كانت  $r = 0$  ينعدم الارتباط.
- 4 إذا كانت  $r \in [0.7, 1]$  يكون الارتباط طردي (موجب) قوي.
- 5 إذا كانت  $r \in [0.5, 0.7]$  يكون الارتباط طردي (موجب) متوسط.
- 6 إذا كانت  $r \in (0, 0.5)$  يكون الارتباط طردي (موجب) ضعيف.
- 7 إذا كانت  $r \in (-0.5, 0)$  يكون الارتباط عكسي (سالب) ضعيف.
- 8 إذا كانت  $r \in [-0.5, -0.7]$  يكون الارتباط عكسي (سالب) متوسط.
- 9 إذا كانت  $r \in [-0.7, -1]$  يكون الارتباط عكسي (سالب) قوي.

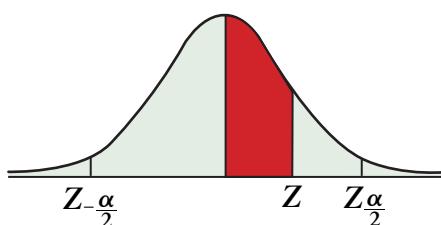
$$r = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x - \bar{x})^2} \sqrt{\sum(y - \bar{y})^2}} \quad \text{أو} \quad r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} \sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$$

- الانحدار هو وصف العلاقة بين متغيرين.
- معادلة خط الانحدار: هي المعادلة الخطية التي يمكن من خلالها التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر.

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \quad \text{حيث} \quad b_1 = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \quad \text{أو} \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} \quad \text{حيث} \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

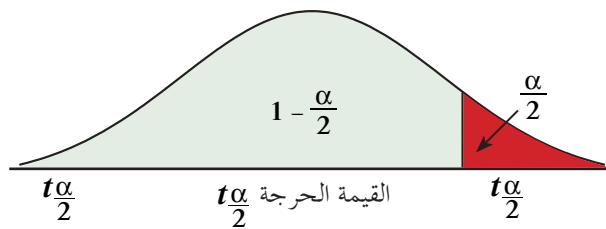
$$\left| y_x - \hat{y}_x \right| = \left| \text{القيمة الجدولية} - \text{القيمة من معادلة الانحدار} \right|$$



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.10	0.4999									
وأكثر										

ملاحظة: استخدم 0.4999 عندما تزيد قيمة Z عن 3.09



جدول التوزيع  $t$

درجات الحرية ( $n - 1$ )	$\frac{\alpha}{2}$					
	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	0.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	0.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	0.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	0.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	0.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	0.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	0.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	0.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.683
30 وأكثر	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	0.675

## ALGEBRA

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a > 0$ :

$$|x| = a : x = a \quad \text{أو} \quad x = -a$$

$$|x| < a : -a < x < a$$

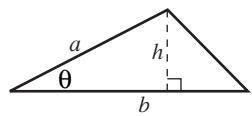
$$|x| > a : x > a \quad \text{أو} \quad x < -a$$

## GEOMETRY

Triangle

$$A = \frac{1}{2}bh$$

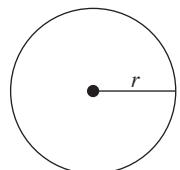
$$= \frac{1}{2}ab \sin \theta$$



Circle

$$A = \pi r^2$$

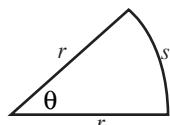
$$C = 2\pi r$$



Sector of Circle

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

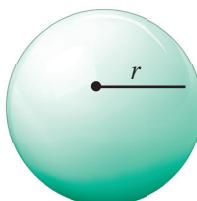
$$s = r\theta \quad (\theta \text{ in radians})$$



Sphere

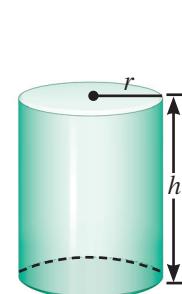
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$A = 4\pi r^2$$



Cylinder

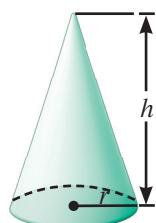
$$V = \pi r^2 h$$



Cone

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$



## TRIGONOMETRY

## علم المثلثات

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

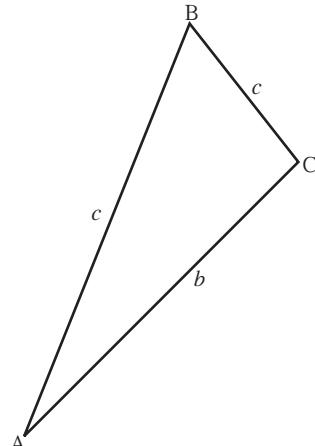
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$



$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}} ; \quad -Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$$

(القيمة الحرجة)

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(الخطأ المعياري للمجتمع)

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(هامش الخطأ - توزيع طبيعي)

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$$

فترة الثقة للمتوسط الحسابي

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

(التوزيع  $t$ )

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

(هامش الخطأ - توزيع  $t$  الانحراف المعياري  $\sigma$  غير معروف)

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

(المقياس الإحصائي - توزيع طبيعي)

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

(المقياس الإحصائي - توزيع طبيعي - الانحراف المعياري  $\sigma$  غير معروف)

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

(المقياس الإحصائي - توزيع  $t$  - الانحراف المعياري  $\sigma$  غير معروف)

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y - \bar{y})^2}} = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n(\sum x^2) - (\sum x)^2} \sqrt{n(\sum y^2) - (\sum y)^2}}$$

(معامل ارتباط بيرسون)

$$\hat{y} = b_1 x + b_0$$

(معادلة خط الانحدار)

$$b_1 = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n}$$

حيث

$$|y_x - \hat{y}_x| =$$

مقدار الخطأ





شركة مطبع الرسالة - الكويت

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (٣١٩) بتاريخ ٣١/١٢/٢٠١٥ م