Курсовая работа по вычислительной математике
Уравнение Бонгоффера-Ван-дер-Поля

Шеренешева Анастасия, гр.714

17 мая 2020 г.

Содержание

1 Постановка задачи **3**

2 Исследование системы уравнений **3**

3 Оценка погрешности методов **3**

3.1 Теоретическая оценка 3

1 Постановка задачи

Решить жесткую систему уравнений, описывающую протекание тока через клеточную мембрану:

$$\begin{cases} y_1' = a(-(\frac{y_1^3}{3} - y_1) + y_2) \\ y_2' = -y_1 - by_2 - c \end{cases}$$

при начальных условиях $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 0$, на отрезке $t \in [0, 20]$ и ограничениях на коэффициенты $0 < c < 1$, $b > 0$

2 Исследование системы уравнений

Особые точки определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{y_1^3}{3} + y_1 + y_2 = 0 \\ -y_1 - by_2 - c = 0 \end{cases}$$

Вблизи найденной особой точки систему можно лианеризовать:

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + ay_2 \\ y_2' = -y_1 - by_2 \end{cases}$$

Получим следующее характеристическое уравнение:
$$\lambda^2 + (b - a)\lambda - a(b - a) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{a-b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4a}}{2}$$

Рассмотрим сначала грубые положения равновесия, когда $a \neq b \neq 0$. В этом случае корни характеристического уравнения всегда получаются одного знака, значит при условии $(a + b)^2 > 4a$ получим устойчивый или неустойчивый узел если $a < b$ или $a > b$ соответственно.
Возьмем, например, $a = 1, b = 2$:

3 Оценка погрешности методов

3.1 Теоретическая оценка

Оценим главный член погрешности каждого из методов, подставив сеточную проекцию точного решения в разностные схемы:

- Неявный метод Эйлера

$$r = \frac{u^{n+1}-u^n}{h} - f(u^{n+1}) = \frac{u^{n+1}-u^{n+1}+h(u'_x)^{n+1}-\frac{h^2}{2}(u''_{xx})^{n+1}+O(h^3)}{h} -$$
$$- f(u^{n+1}) = -\frac{h}{2}(u''_x)^{n+1} + O(h^2)$$

- Неявная формула дифференцирования назад 3 порядка

$$r = \frac{\frac{11}{6}u^{n+1}-3u^n+\frac{3}{2}u^{n-1}-\frac{1}{3}u^{n-2}}{h} - f(u^{n+1}) = \frac{\frac{11}{6}u^{n+1}-3u^{n+1}+3h(u'_x)^{n+1}-3\frac{h^2}{2}(u''_{xx})^{n+1}+}{h}$$
$$\frac{+3\frac{h^3}{6}(u'''_{xxx})^{n+1}-3\frac{h^4}{24}(u''''_{xxxx})^{n+1})+\frac{3}{2}u^{n+1}-\frac{3}{2}2h(u'_x)^{n+1}+\frac{3}{2}\frac{(2h)^2}{2}(u''_{xx})^{n+1}-\frac{3}{2}\frac{(2h)^3}{6}(u'''_{xxx})^{n+1}+}{h}$$
$$\frac{+\frac{3}{2}\frac{(2h)^4}{24}(u''''_{xxxx})^{n+1}-\frac{1}{3}u^{n+1}+\frac{1}{3}3h(u'_x)^{n+1}-\frac{1}{3}\frac{(3h)^2}{2}(u''_{xx})^{n+1}+\frac{1}{3}\frac{(3h)^3}{6}(u'''_{xxx})^{n+1}-\frac{1}{3}\frac{(3h)^4}{24}(u''''_{xxxx})^{n+1}}{h} +$$
$$+ O(h^4) - f(u^{n+1}) = -\frac{h^3}{4}(u''''_{xxxx})^{n+1} + O(h^4)$$

- Явный метод Рунге-Кутты 4 порядка