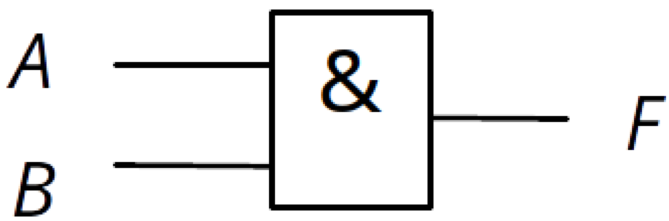
第二章 逻辑代数基础

基本的逻辑运算

逻辑乘法 逻辑与

$F = A \cdot B$

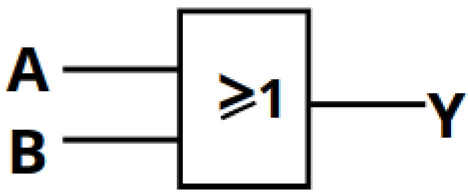
与门



逻辑加法 逻辑或

$F = A + B$

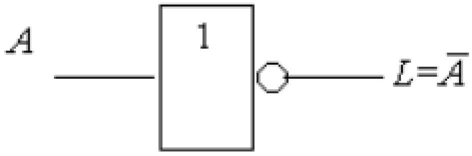
或门



逻辑非 逻辑反

$F = \bar{A}$

非门

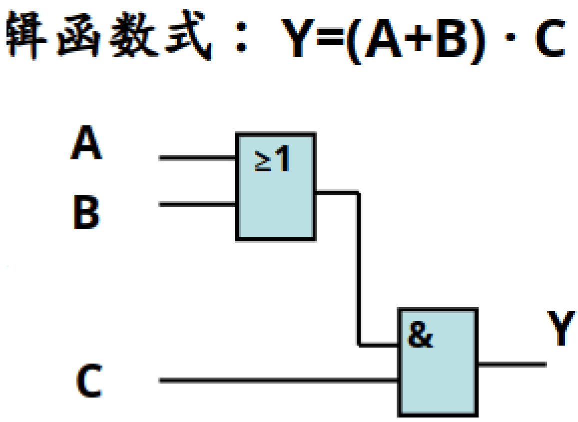


真值表

逻辑函数式

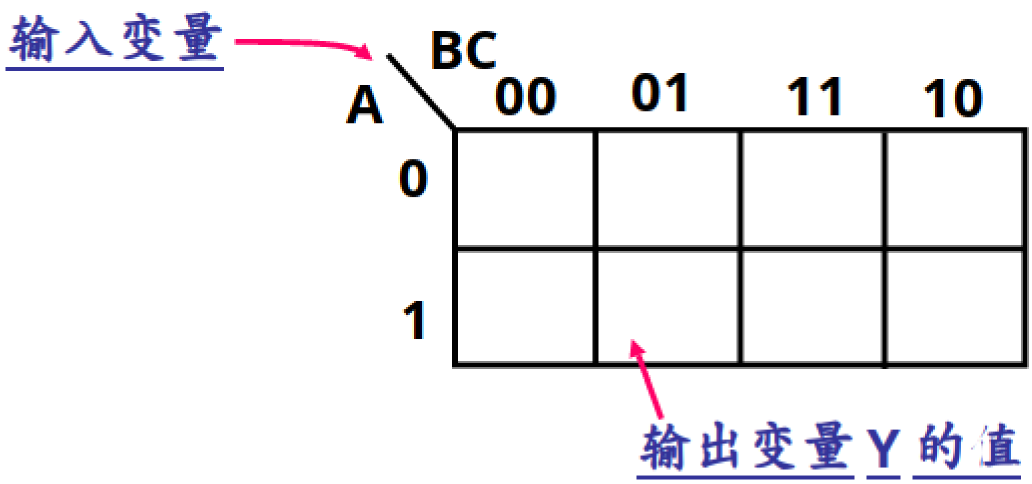
逻辑函数图

由逻辑函数图可以得到逻辑函数式，反之亦然。



卡诺图

由表示**逻辑变量所有取值组合**的小方格所构成的**平面图**。



具体方法是：将逻辑函数中包含的最小项对应的小方格填入“1”，其余填“0”（一般情况下省略）；熟悉之后可以用观察法直接填图。

例 1 ：画出$Y = AC + AB$ 的卡诺图

$$Y = ABC + A\overline{B}C + AB\overline{C} = m_5 + m_6 + m_7$$

将逻辑函数化为**与或式**发现只有第5,6,7项。

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

5,6,7项的位置填1,其余位置填0.，

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1

逻辑代数的基本规则和定律

逻辑代数的基本规律和公式

交换律

$$A+B=B+A$$

$$A \cdot B=B \cdot A$$

结合律

$$A+(B+C)=(A+B)+C=(A+C)+B$$

$$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$$

分配律

$$A(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

$$A+B\cdot C=(A+B)(A+C)$$

吸收律

原变量的吸收

$$A+AB=A$$

证明：$A+AB=A(1+B)=A\cdot 1=A$

例如：

$$AB+CD+AB\overline{D}(E+F)=AB+CD$$

反变量的吸收

：

$$A+\overline{A}B=A+B$$

证明：$A+\overline{A}B=A+AB+\overline{A}B$

$$=A+B(A+\overline{A})=A+B$$

例如：

$$A+\overline{A}BC+DC=A+BC+DC$$

混合变量的吸收

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

证明：

$$\begin{aligned}&AB+\overline{A}C+BC\\=\;&AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC\\=\;&AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC\\=\;&AB+\overline{A}C\end{aligned}$$

1

吸收

记忆方法：**如果两个乘积项中的部分因子恰好互补，而这两个乘积项中的其余因子都是第三个乘积项中的因子，则这第三个乘积项是多余的。**

反演律（摩根律）

$$\overline{A\bullet B}=\overline{A}+\overline{B}$$

$$\overline{A+B}=\overline{A}\bullet\overline{B}$$

记忆方法： **大杠变小杠，加变乘，乘变加**。

公式的证明方法

- 使用简单的公式来证明复杂的公式。
- 使用真值表来证明。

逻辑代数的基本规则

代入规则

在任何一个包含变量A的逻辑等式中，若以另外一个逻辑式代替式中所有的A，则等式仍然成立。

例如：$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$

则 $\overline{A \bullet B \bullet C \bullet D} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}$

反演定理

对于任意一个逻辑式Y，若将其中的“·”**换成“+”，“+”换成“·”，原变量换成反变量，反变量换成原变量，“1”换成“0”，“0”换成“1”**，则得到的结果就是 $\bar{Y}$

例如：$Y = A(B + C) + CD$

$$\overline{Y} = (\overline{A} + \overline{B}\,\overline{C})(\overline{C} + \overline{D})$$

例如：

$$F(A,B,C) = A\overline{B} + \overline{(A + C)B} + \overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C}$$

$$\overline{F} = (\overline{A} + B) \bullet \overline{\overline{A} \bullet \overline{C} + \overline{B}} \bullet (A + B + C)$$

注意：

- **保持原函数的运算次序**。
- **不属于单个变量上的非号要保留不变**。

对偶定理

对于任意一个逻辑式Y，若将其中的“·”**换成“+”，“+”换成“·”，“1”换成“0”，“0”换成“1”**，则得到的结果就是Y的对偶式Y'

对偶定理：若两逻辑式相等，则它们的对偶式也相等。

例如：$A(B+C)=A \cdot B+A \cdot C$

$$A+B \cdot C=(A+B)(A+C)$$

注意：

- **和反演定理不同的是，不需要对原反变量进行变化。**
- **同样要注意保持运算顺序不变。**

与或表达式

无论任何形式都可以转换成与或表达式

如：$F = A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + ABC$

逻辑函数的化简

使用公式化简

并项法

常用公式：$A+\overline{A}=1$

吸收法

常用公式：

$$A+AB=A, AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

消去法

常用公式：$A+\overline{A}B=A+B$

配项法

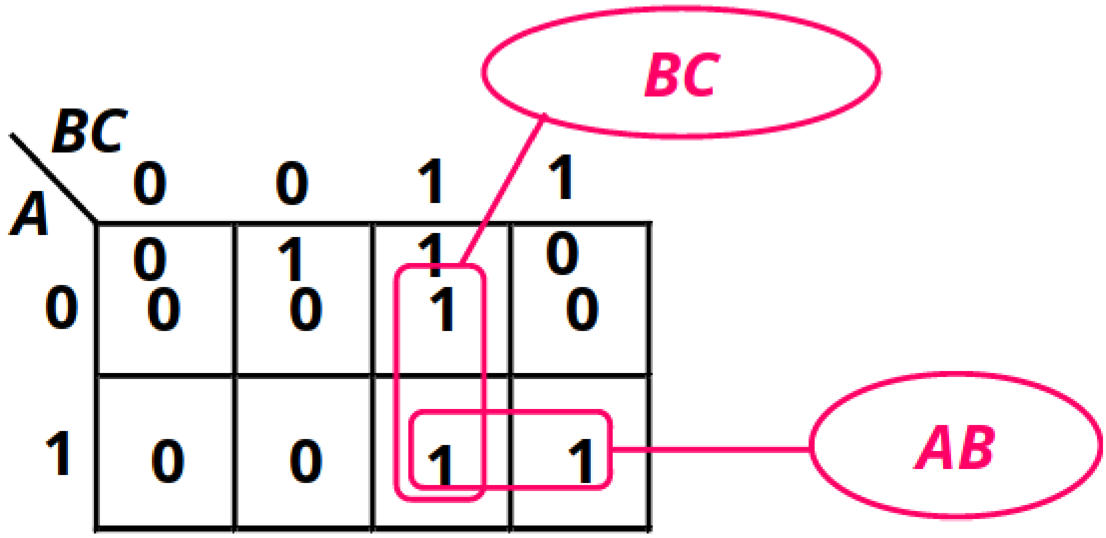
常用公式：

$$A+\overline{A}=1,\quad AB+\overline{A}C=AB+\overline{A}C+BC$$

利用卡诺图化简

相邻最小项：如果两个最小项中只有一个变量互为反变量，其余变量均相同，则称这两个最小项为逻辑相邻，简称相邻项。

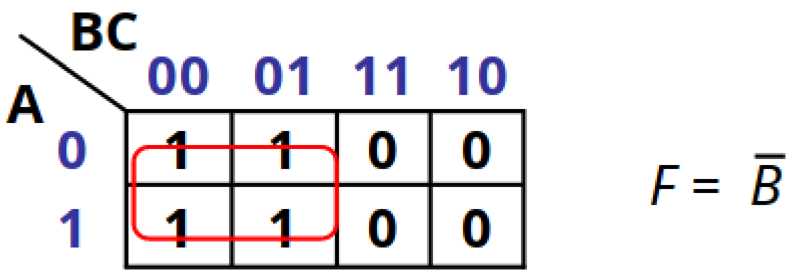
例如：如果两个相邻最小项出现在同一个逻辑函数中，可以合并为一项，同时消去互为反变量的那个量。



F=AB+BC

卡诺图的化简的规则（相邻项的合并规律）

- **2个相邻**的小方格可以合并为1项，**消去1个**变量。
- **4个相邻**的小方格可以合并为1项，**消去2个**变量。
- **8个相邻**的小方格可以合并为1项，**消去3个**变量。



画圈的原则：

- 相邻单元组成的必须要是2^n**个矩形**
- 相邻包括上下底，左右边，和四角相邻。
- 圈要尽量大，圈的个数要尽量少。
- 每一个1都必须要被圈到
- 同一个1可以被不同的圈包含。

卡诺图化简逻辑函数的步骤

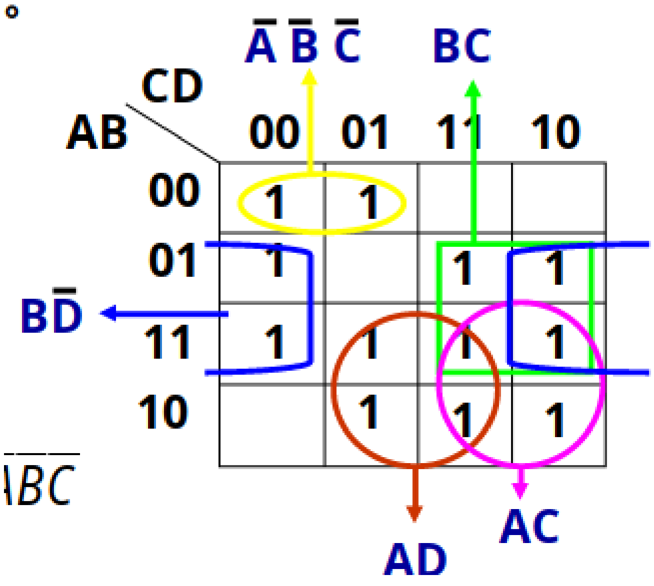
1. 画出逻辑函数的卡诺图。
2. 合并相邻的最小项，即根据前述原则画圈。
3. 写出化简后的表达式。

每一个圈写一个最简与项，最简与项由圈内没有0、1变化的那些变量组成。

例1：将 $F(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D} + AB + \overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}BC + AC$ 化为最简与或表达式。

画出函数的卡诺图，并且画圈。

。



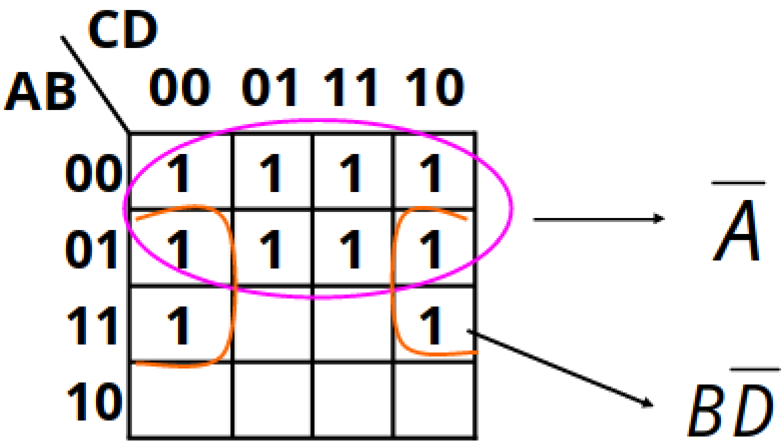
上图中化了五个圈，**注意蓝色的圈**，这个也算是相邻的矩形。

根据每个圈写出化简之后的结果。

$$F = AC + BC + AD + B\overline{D} + \overline{ABC}$$

例2：化简 $L = \overline{A} + \overline{AB} + BC\overline{D} + B\overline{D}$

画出函数的卡诺图，并且画圈。



根据每个圈写出化简之后的结果。

$$L = \overline{A} + B\overline{D}$$