四元数微分方程的推导

由于载体的运动，四元数 Q 是变量，即 q_0, q_1, q_2, q_3 是时间的函数。刚体绕瞬时转轴转过 σ 角，其角速度为：

$$\bar{\omega}_{tb}^{t} = \dot{\sigma}\bar{n} \quad （式1）$$

设这个运载体坐标系（ b系）和地理坐标系（ t系）之间的变换四元数的三角形式为：

$$Q = \cos\frac{\sigma}{2} + \bar{n}\sin\frac{\sigma}{2} \quad （式2）$$

对式2求导可得：

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\sigma}{2}\dot{\sigma} + \frac{1}{2}\bar{n}\cos\frac{\sigma}{2}\dot{\sigma} + \sin\frac{\sigma}{2}\frac{d\bar{n}}{dt} \quad （式3）$$

因为：

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = \bar{\omega}_{tb}^{t} \times \bar{n} = \dot{\sigma}\bar{n} \times \bar{n} = 0 \quad （式4）$$

$$\bar{n}\bar{n} = -1 \quad （式5）$$

则有：

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -\frac{1}{2}\sin\frac{\sigma}{2}\dot{\sigma} + \frac{1}{2}\bar{n}\cos\frac{\sigma}{2}\dot{\sigma} \\ &= \bar{n}\frac{\dot{\sigma}}{2}\left(\cos\frac{\sigma}{2} + \bar{n}\sin\frac{\sigma}{2}\right) \end{aligned} \quad （式6）$$

将式1和式2代入式6得：

$$\dot{Q} = \frac{1}{2}\bar{\omega}_{tb}^{t} Q \quad （式7）$$

由于捷联惯性导航系统的惯性器件是直接固联在运载体上的， 所以陀螺测量得到的角速度是沿运载体坐标系的绝对角速度，因此应用式 7 不方便，需要进行进一步变换。

因为：

$$\omega^{t}_{tb}=Q\omega^{b}_{tb}Q^{*}\text{（式8）}$$

$$Q\cdot Q^{*}=Q^{*}\cdot Q=1\text{（式9）}$$

式中 ω^{b}_{tb} 是沿运载体的角速度 .

将式8、9代入式 7得：

$$\dot{Q}=\frac{1}{2}Q\cdot\bar{\omega}^{b}_{tb}\text{（式10）}$$

将式10写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_0\\\dot{q}_1\\\dot{q}_2\\\dot{q}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_0&-q_1&-q_2&-q_3\\q_1&q_0&-q_3&q_2\\q_2&q_3&q_0&-q_1\\q_3&-q_2&q_1&q_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\omega^{b}_{x}\\\omega^{b}_{y}\\\omega^{b}_{z}\end{bmatrix}\text{（式11）}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_0\\\dot{q}_1\\\dot{q}_2\\\dot{q}_3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-\omega^{b}_{x}&-\omega^{b}_{y}&-\omega^{b}_{z}\\\omega^{b}_{x}&0&\omega^{b}_{z}&-\omega^{b}_{y}\\\omega^{b}_{y}&-\omega^{b}_{z}&0&\omega^{b}_{x}\\\omega^{b}_{z}&\omega^{b}_{y}&-\omega^{b}_{x}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0\\q_1\\q_2\\q_3\end{bmatrix}\text{（式12）}$$

式中， $\omega^{b}_{x},\omega^{b}_{y},\omega^{b}_{z}$ 分别表示载体坐标系相对于地理坐标系沿各个轴向的角速度分量。