四元数矩阵的乘法及其可易性

肖尚彬
(西北工业大学)

提要：本文讨论了四元数矩阵的乘法运算，得出了四元数矩阵乘法可易性的一般规则；并用此法方便地证明了刚体的有限转动定理，进行了刚体有限转动的合成. 文中提出的方法发展了文献[1]的结论，在捷联式姿态计算中具有很大的实用价值.

一、引　言

在四元数理论中，四元数的乘法运算占据特殊的位置，起着关键作用. 由于四元数乘法巧妙而成功地解决了刚体有限转动的合成问题，因而使得四元数方法在刚体定位、惯性导航中获得了广泛而有效的应用.

四元数的乘法运算以四元数单位数的自乘与交乘规则为基础，其方法可以归纳为下列三种：

1. 四元数矢量式乘法　即将四元数表为矢量或解析形式然后进行乘法运算；
2. 四元数复数式乘法　即将四元数表为指数或复数形式然后进行乘法运算；
3. 四元数矩阵式乘法　即将四元数表为矩阵形式

$$\Lambda = [\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}]^T = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T \tag{1.1}$$

然后进行特定的乘法运算，式中 $\lambda_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 即四元数矩阵的元素，它们都是实数.

在四元数诸种乘法中，四元数矩阵乘法具有很大的优越性. 由于四元数矩阵乘法的可易性，可以方便地将相乘的因子中任何一个移至最后，亦即可将任何一个因子与其它因子隔离. 它的实用意义在于：在捷联式惯导系统中，此法可以将不服从乘法交换律的各个连续的有限转动改变其相乘的次序，以使变化最快的分转动隔离出来，而将不变化或变化较慢的诸转动用方阵形式在电子计算机中加以存储.

本文专门研究四元数矩阵的乘法及其可易性，得出了任意多个连续的有限转动的合成及其可易性的一般规则. 文中提出的方法发展了 B. P. Ickes 在文献[1]中的结论，比起文献[2]的方法更为方便和更具有实用价值.

二、四元数乘积的矩阵形式

我们将两个代表连续的有限转动的四元数表为列矩阵形式

$$P = [p_0, p_1, p_2, p_3]^T, \qquad Q = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T \tag{2.1}$$

本文于1982年10月11日收到.

其乘积四元数代表合成转动，也表为列矩阵形式

$$\Lambda=[\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3]^T \tag{2.2}$$

现在讨论四元数矩阵的特定写法．首先用四元数单位数的自乘与交乘规则求得两个四元数 P, Q 与乘积四元数 Λ 之间各分量的关系式，然后将这个关系式写为两种矩阵相乘的形式，其一为

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3\\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2\\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1\\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix} \tag{2.3}$$

或者简记为

$$\Lambda=M(P)Q \tag{2.4}$$

其二为

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3\\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2\\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1\\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_0\\ p_1\\ p_2\\ p_3\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

或者简记为

$$\Lambda=M(Q)^{+}P \tag{2.6}$$

比较式 (2.4) 与 (2.6)，便得下列关系式

$$\Lambda=M(P)Q=M(Q)^{+}P \tag{2.7}$$

这个关系式表明，如将四元数用矩阵表示，则其乘法在形式上是可易的．

我们来研究四元数矩阵 $M(P)$ 及其第一行一列的元素的三阶子式

$$V(P)=\begin{bmatrix}p_0 & -p_3 & p_2\\ p_3 & p_0 & -p_1\\ -p_2 & p_1 & p_0\end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$V(P)$ 称为矩阵 $M(P)$ 的矢量子阵． 将矢量子阵 $V(P)$ 加以转置，便得新的四元数矩阵 $M(P)^{+}$ 以及新的矢量子阵为

$$V(P)^{+}=\begin{bmatrix}p_0 & p_3 & -p_2\\ -p_3 & p_0 & p_1\\ p_2 & -p_1 & p_0\end{bmatrix} \tag{2.9}$$

$M(P)^{+}$ 称为 $M(P)$ 的蜕变矩阵．比较 $M(P)$ 与 $M(P)^{+}$，式 (2.8) 与 (2.9)，可以看出：

1. $M(P)$ 与 $M(P)^{+}$ 的行列式均等于 1，这意味着两个矩阵都是满秩的． 若将其中每一行或每一列看成四维空间中的一个矢量，则构成每个矩阵的四个矢量是线性无关的．

2. $M(P)$ 与 $M(P)^{+}$ 中第一行和第一列均相同，这对应于四元数乘积的可逆部分，即标量部分以及标量与矢量相乘部分．

3. $M(P)$ 与 $M(P)^{+}$ 的矢量子阵 $V(P)$ 与 $V(P)^{+}$ 则不同，后者是前者的变号或转置，这对应于四元数乘积的不可逆部分，即矢积部分．

三、四元数矩阵乘法的可易性

关系式 (2.7) 表明两个四元数相乘的次序可以颠倒：

$$M(P)Q = M(Q)^{+}P \tag{3.1}$$

其中 P,Q 表为列矩阵，它们的结构相同；但 $M(P)$ 是四元数矩阵，而 $M(Q)^{+}$ 是蜕变矩阵，两个方阵结构不同．这种可易性我们称为形式可易．

现在研究两个以上四元数的乘法规则．设有三个连续转动四元数 P，Q，S，其合成转动四元数可以通过依次应用式 (2.4) 和 (2.6) 而得到．对于三个四元数，有下列两种结合形式：

1．取结合式

$$\Lambda = PQS = [PQ]S \tag{3.2}$$

先将 $[PQ]$ 看成一个四元数，应用 (2.6) 得

$$\Lambda = M(S)^{+}[PQ]$$

再将 $[PQ]$ 看成两个四元数的乘积，应用 (2.4) 与 (2.6) 得

$$PQ = M(P)Q = M(Q)^{+}P$$

于是得到

$$\Lambda = M(S)^{+}M(P)Q = M(S)^{+}M(Q)^{+}P \tag{3.3}$$

2．取结合式

$$\Lambda = PQS = P[QS] \tag{3.4}$$

先将 $[QS]$ 看成一个四元数，应用 (2.4) 得

$$\Lambda = M(P)[QS]$$

再将 $[QS]$ 看成两个四元数的乘积，应用 (2.4) 与 (2.6) 得

$$QS = M(Q)S = M(S)^{+}Q$$

于是得到

$$\Lambda = M(P)M(Q)S = M(P)M(S)^{+}Q \tag{3.5}$$

对于四个四元数，仍取两种结合形式：

$$\begin{aligned}\Lambda = PQSR = P[QSR] &= M(P)M(Q)M(S)R \\ &= M(P)M(Q)M(R)^{+}S \\ &= M(P)M(R)^{+}M(Q)S \\ &= M(P)M(R)^{+}M(S)^{+}Q \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\Lambda = PQSR = [PQS]R &= M(R)^{+}M(P)M(Q)S \\ &= M(R)^{+}M(P)M(S)^{+}Q \\ &= M(R)^{+}M(S)^{+}M(P)Q \\ &= M(R)^{+}M(S)^{+}M(Q)^{+}P \end{aligned} \tag{3.7}$$

以此类推，对于 n 个四元数相乘的情形，也只能采用将首尾两个因子各自独立的两种结合形式，因为这种乘法的依据是两个四元数相乘的规则 (2.4) 和 (2.6) 式．由此可见，采用四元数矩阵乘法可将相乘因子中任何一个移至最后，这样一来，就可以将变化最大的

因子与其它不变化或变化较小的因子相隔离．同时可以得出下列的一般规则：

1. 同名矩阵(均带“+”号或均不带“+”号)相乘，其次序不可改变，即

$$\left.\begin{array}{l} M(P)M(Q) \neq M(Q)M(P) \\ M(P)^{+}M(Q)^{+} \neq M(Q)^{+}M(P)^{+} \end{array}\right\} \tag{3.8}$$

2. 异名矩阵(一带“+”号一不带“+”号)相乘，其次序可以改变，即

$$M(P)M(Q)^{+} = M(Q)^{+}M(P) \tag{3.9}$$

如前指出，这种可易性实质上是形式的，也称为条件可易．

3. 两个因子相乘有两种形式的结果，以后每增加一个因子，结果数目成倍增加，亦即从 $n=2$ 开始，因子数如按等差级数增加，公差是 1；结果数则按等比级数增加，公比是 2．

4. 任何数目因子相乘，由于只能采用将首尾两个因子各自独立的两种结合形式，因此在结果中首尾两个因子只能分别被隔离一次．

5. 蜕变矩阵的出现表示有限转轴的位置已经发生变化，它不再代表绕固联于惯性空间的轴的有限转动，而是代表绕经过旋转变换后的动轴的有限转动．但在计算中不须寻求被变换后新的有限转轴的位置，而只须以蜕变矩阵代替对应的四元数矩阵．

四、四元数矩阵变换算子

设有规范化四元数 Λ，其共轭四元数为 Λ^{*}，将它作为变换算子，对矢量 $\boldsymbol{r}$ 进行变换，从 $\boldsymbol{r}$ 到 $\boldsymbol{r}'$ 的变换式为

$$\boldsymbol{r}' = \Lambda \boldsymbol{r} \Lambda^{*} = M(\Lambda)M(\Lambda^{*})^{+}\boldsymbol{r} = M(\Lambda^{*})^{+}M(\Lambda)\boldsymbol{r} \tag{4.1}$$

式中四元数矩阵 $M(\Lambda)$ 的共轭四元数矩阵 $M(\Lambda^{*})$ 及其蜕变矩阵 $M(\Lambda^{*})^{+}$ 具有下列形式

$$M(\Lambda^{*}) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$$M(\Lambda^{*})^{+} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

将 $M(\Lambda)$ 和 (4.3) 代入 (4.1)，便得所求的变换式，其中变换矩阵为

$$W = M(\Lambda)M(\Lambda^{*})^{+}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2) \\ 0 & 2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2+\lambda_2^2-\lambda_1^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1) \\ 0 & 2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3+\lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

这个变换矩阵也可以用四元数其它形式的乘法运算求得，但没有四元数矩阵方法简捷直观．

五、有限转动定理的证明

刚体的有限转动定理陈述如下：设刚体绕过定点的相交轴作连续的有限转动，其合成转动的数值与各个连续转动的次序无关；但刚体的最终姿态则与连续转动的次序有关，合成转动的转轴位置随连续转动的次序而改变．J. S. Beggs 用欧拉参数法证明了它，但证法很繁[3]．这里我们用四元数矩阵乘法加以证明．

设刚体绕过定点的相交轴作两次连续转动，转动四元数用列矩阵表示为

$$P=[p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3]^T,\qquad Q=[q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3]^T \tag{5.1}$$

其顺序合成与逆序合成转动分别用顺乘与逆乘四元数表为如下形式

$$\Lambda=[\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3]^T,\qquad \Lambda'=[\lambda_0',\ \lambda_1',\ \lambda_2',\ \lambda_3']^T \tag{5.2}$$

按四元数矩阵乘法规则，得顺序合成转动为

$$\Lambda=PQ=M(P)Q \tag{5.3}$$

逆序合成转动为

$$\Lambda'=QP=M(P)^+Q \tag{5.4}$$

$M(P)$, $M(P)^+$ 的第一行分别乘以列矩阵 $Q=[q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3]^T$，决定合成转动四元数 Λ, Λ' 的标量部分，它们并不改变，即有等式

$$\lambda_0=p_0q_0-p_1q_1-p_2q_2-p_3q_3=\lambda_0' \tag{5.5}$$

于是得出两个合成转动的转角数值相等：$\theta=\theta'$．

合成转动的转轴位置决定于 $M(P)$ 与 $M(P)^+$ 的矢量子阵，显然它们是不相同的．亦即，当有限转动的次序改变后，刚体的最终姿态亦随之而改变．

以上就是有限转动定理的四元数证法．

刚体最终姿态的改变我们用两个合成转动的偏差四元数 $\Delta\Lambda=\Lambda-\Lambda'$ 表示，这种偏差称为交换误差，可按下式计算：

$$\Delta\Lambda=\Lambda-\Lambda'=[M(P)-M(P)^+]Q \tag{5.6}$$

实例　设 x, y, z 为三根互相垂直的轴，两个连续转动为：绕 x 轴转过 90°，再绕 y 轴转过 90°．求交换误差．

解：首先将两个连续转动表为四元数列矩阵，即

$$P=[\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2,\ 0,\ 0]^T$$

$$Q=[\sqrt{2}/2,\ 0,\ \sqrt{2}/2,\ 0]^T$$

顺乘四元数等于

$$\Lambda=PQ=M(P)Q$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}/2\\ 0\\ \sqrt{2}/2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\\ 1/2\\ 1/2\end{bmatrix}$$

逆乘四元数等于

$$\Lambda' = QP = M(P)^{+}Q$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

交换误差由最终姿态的偏差四元数确定，即

$$\begin{aligned} \Delta\Lambda &= [1/2,\ 1/2,\ 1/2,\ 1/2]^T - [1/2,\ 1/2,\ 1/2,\ -1/2]^T \\ &= [0,\ 0,\ 0,\ 1]^T \end{aligned}$$

可见，$\Delta\Lambda$ 的标量部分为零，即合成转动的数值不变；而 $\Delta\Lambda$ 矢量部分的三个分量为 0，0，1，即合成转轴的位置发生了变化.

六、有限转动的合成

设刚体从初始位置到最终位置的有限转动，是通过三次连续转动达到的：先绕达尔布三面体 abc 的棱边 a 转过角 α，再绕棱边 b 转过角 β，最后绕棱边 c 转过角 γ. α，β，γ 称为克雷洛夫角，可表为四元数矩阵式：

$$\left.\begin{aligned} P &= \left[\mathrm{c}\frac{\alpha}{2},\ \mathrm{s}\frac{\alpha}{2},\ 0,\ 0\right]^T \\ Q &= \left[\mathrm{c}\frac{\beta}{2},\ 0,\ \mathrm{s}\frac{\beta}{2},\ 0\right]^T \\ R &= \left[\mathrm{c}\frac{\gamma}{2},\ 0,\ 0,\ \mathrm{s}\frac{\gamma}{2}\right]^T \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

式中采用了省写符号 $\mathrm{c}=\cos$，$\mathrm{s}=\sin$.

总转动由 P，Q，R 的乘积确定，即

$$\Lambda = PQR = M(P)M(Q)R \tag{6.2}$$

或

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\frac{\alpha}{2} & -\mathrm{s}\frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \\ \mathrm{s}\frac{\alpha}{2} & \mathrm{c}\frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{c}\frac{\alpha}{2} & -\mathrm{s}\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & \mathrm{s}\frac{\alpha}{2} & \mathrm{c}\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{c}\frac{\beta}{2} & 0 & -\mathrm{s}\frac{\beta}{2} & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\frac{\beta}{2} & 0 & \mathrm{s}\frac{\beta}{2} \\ \mathrm{s}\frac{\beta}{2} & 0 & \mathrm{c}\frac{\beta}{2} & 0 \\ 0 & -\mathrm{s}\frac{\beta}{2} & 0 & \mathrm{c}\frac{\beta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{c}\frac{\gamma}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{s}\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

最后求得总转动四元数分量的克雷洛夫角表式为

$$\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c\frac{\alpha}{2}c\frac{\beta}{2}c\frac{\gamma}{2}-s\frac{\alpha}{2}s\frac{\beta}{2}s\frac{\gamma}{2}\\ s\frac{\alpha}{2}c\frac{\beta}{2}c\frac{\gamma}{2}+c\frac{\alpha}{2}s\frac{\beta}{2}s\frac{\gamma}{2}\\ c\frac{\alpha}{2}s\frac{\beta}{2}c\frac{\gamma}{2}-s\frac{\alpha}{2}c\frac{\beta}{2}s\frac{\gamma}{2}\\ s\frac{\alpha}{2}s\frac{\beta}{2}c\frac{\gamma}{2}+c\frac{\alpha}{2}c\frac{\beta}{2}s\frac{\gamma}{2}\end{bmatrix} \tag{6.4}$$

设三个连续转动为：先绕达尔布三面体 abc 的棱边 c 转过角 ψ，再绕棱边 a 转过角 θ，最后又绕棱边 c 转过角 φ. ψ, θ, φ 称为古典欧拉角，可表为四元数矩阵式：

$$\left.\begin{aligned} P&=\left[c\frac{\psi}{2},0,0,s\frac{\psi}{2}\right]^T\\ Q&=\left[c\frac{\theta}{2},s\frac{\theta}{2},0,0\right]^T\\ R&=\left[c\frac{\varphi}{2},0,0,s\frac{\varphi}{2}\right]^T\end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

总转动四元数为

$$\Lambda=PQR=M(P)M(Q)R$$

或

$$\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c\frac{\psi}{2} & 0 & 0 & -s\frac{\psi}{2}\\ 0 & c\frac{\psi}{2} & -s\frac{\psi}{2} & 0\\ 0 & s\frac{\psi}{2} & c\frac{\psi}{2} & 0\\ s\frac{\psi}{2} & 0 & 0 & c\frac{\psi}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\frac{\theta}{2} & -s\frac{\theta}{2} & 0 & 0\\ s\frac{\theta}{2} & c\frac{\theta}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & c\frac{\theta}{2} & -s\frac{\theta}{2}\\ 0 & 0 & s\frac{\theta}{2} & c\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\frac{\varphi}{2}\\ 0\\ 0\\ s\frac{\varphi}{2}\end{bmatrix} \tag{6.6}$$

最后求得总转动四元数分量的古典欧拉角表式为

$$\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c\frac{\psi}{2}c\frac{\theta}{2}c\frac{\varphi}{2}-s\frac{\psi}{2}c\frac{\theta}{2}s\frac{\varphi}{2}\\ c\frac{\psi}{2}s\frac{\theta}{2}c\frac{\varphi}{2}+s\frac{\psi}{2}s\frac{\theta}{2}s\frac{\varphi}{2}\\ s\frac{\psi}{2}s\frac{\theta}{2}c\frac{\varphi}{2}-c\frac{\psi}{2}s\frac{\theta}{2}s\frac{\varphi}{2}\\ s\frac{\psi}{2}c\frac{\theta}{2}c\frac{\varphi}{2}+c\frac{\psi}{2}c\frac{\theta}{2}s\frac{\varphi}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}\end{bmatrix} \tag{6.7}$$

参　考　文　献

[1] Ickes, B. P., A New Method for Performing Digital Control System Attitude Computations using

Quaternios. *AIAA* **8**, 1(1970).
[2] 张光枢,刚体有限转动合成的可交换性,力学学报,4(1982), 363—368.
[3] Beggs, J. S., Pestel's Theorem on Finite Rotations, *ACTA Mechanica*, **20**, 1—2, (1974).
[4] Harding, C. F., Solution to Euler's Gyrodynamics, Applied Mechanics, Paper No. 63-WA-60.
[5] 勃拉涅茨, B. H., 什梅格列夫斯基, И. П., 四元数在刚体定位问题中的应用, 梁振和译,国防工业出版社(1977).

MULTIPLICATION OF QUATERNION MATRIXES AND ITS COMMUTATIVITY

Xiao Shangbin

(*Northwest Polytechnical University*)

Abstract

In this paper, the multiplication of quaternion matrixes is discussed, and general rule for commutativity of quaternion matrixes multiplication is obtained. Moreover, this method is conveniently used to prove the theorem for finite rotations of a rigid body, and to compose the finite rotations of a rigid body. This method developed the conclusion in reference [1], and it possesses practical value in strapdown attitude computations.