大话多旋翼飞行器--动力学分析

http://www.hezimm.com

作者：红桃 k

四旋翼飞行器的结构与基本飞行原理

四个旋翼的对称布局可以有两种形式，分别称为 X 模式和十字模式。实际应用中，这两种模式在性能上差别不大，但对于分析来说，十字模式更为简化和直观，因此本文以十字模式进行分析。

四旋翼微型飞行器的结构如图 1 所示。机身是一个刚性的十字交叉结构，四个电机分别位于十字结构的末端，驱动四个旋翼转动进而产生升力。四旋翼飞行器产生基本动作的原理为：电机 1 和 3 逆时针旋转驱动两个正桨(旋翼逆时针旋转产生升力则称为正桨，反之则为反桨)产生升力，电机 2 和 4 顺时针旋转驱动两个反桨产生升力。反向旋转的两组电机和桨使其各自对机身产生的转矩相互抵消，保证四个电机转速一致时机身不发生自旋。电机 1 转速减小(增大)，同时电机 3 转速增大(减小)，产生向前(后)方向的运动。电机 2 转速减小(增大)，同时电机 4 转速增大(减小)，产生向左(右)方向的运动。四个电机转速同时增大(减小)产生向上(向下)的运动。对角线的电机一组转速增大，另一组转速减小产生自身旋转运动。通过这几种动作的组合，即可实现多样的飞行。

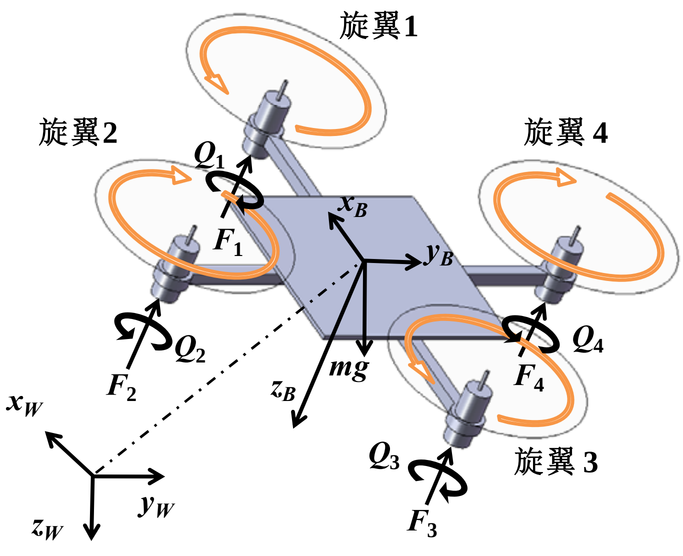

图 1 飞行器结构

使用北-东-地坐标系作为导航坐标系，以 W 表示。其坐标轴 x_W 指向地球北，y_W 指向地球东，z_W 垂直于地球表面并指向下。飞行器机体坐标系固连于飞行器的质心，以 B 表示。其坐标轴 x_B 平行于桨盘平面并指向前，y_B 平行于桨盘平面并指向右，z_B 垂直于桨盘平面并指向下。

旋翼动力学

令单个旋翼绕其旋转轴的角速度为 Ω_i (i=1,2,3,4)，电机转矩为 τ_i，与电机转矩相反的空气阻力矩为 Q_i。则有

$$\tau_i = I_r \dot{\Omega}_i + Q_i \tag{0-1}$$

其中 I_r 为单个旋翼绕其旋转轴的转动惯量与电机转子转动惯量之和。单个旋翼在自由流中的升力为

$$F_i = b\Omega_i^2 \tag{0-2}$$

其中，b 为一正比例常数，其值由空气密度，桨叶半径的立方，桨叶数量，桨叶弦长，升力常数(与桨叶攻角相关)，阻力常数(与飞行器结构相关)，以及几何尾迹决定。旋翼在自由流中的阻力矩为

$$Q_i = \kappa\Omega_i^2 \tag{0-3}$$

常数 κ 也为一正比例常数，其值仍然与以上因素相关，尤其是桨叶俯仰角。四个旋翼的总升力为

$$T = \sum_{i=1}^{4} F_i = b\left(\sum_{i=1}^{4} \Omega_i^2\right) \tag{0-4}$$

四个旋翼产生的横滚、俯仰以及偏航转矩分别为

$$\tau_x = Lb\left(\Omega_2^2 - \Omega_4^2\right) \tag{0-5}$$

$$\tau_y = Lb\left(\Omega_1^2 - \Omega_3^2\right) \tag{0-6}$$

$$\tau_z = \kappa\left(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2\right) + I_r\left(\dot{\Omega}_2 + \dot{\Omega}_4 - \dot{\Omega}_1 - \dot{\Omega}_3\right) \tag{0-7}$$

L 为旋翼旋转轴到飞行器质心的距离。

旋翼转速与电机电压的关系

直流电机的模型可以描述为

$$\begin{aligned} E &= K_E \Phi \Omega = K_E K_\Phi I_a \Omega \\ \tau &= K_\tau \Phi I_a = K_\tau K_\Phi {I_a}^2 \\ U &= E + I_a R_a \end{aligned} \tag{0-8}$$

其中 E 为反电动势，τ 为电磁转矩，U 为电机的外加电压，I_a 为电机电流，R_a 为电机电阻，Ω 为电机转速(单位：转/分)，K_E 为与电机结构有关的常数，K_τ 为与线圈结构有关的常数，Φ 为线圈所处位置的磁通，与线圈电流成正比，即 $\Phi = K_\Phi I_a$。由以上三式可得

$$\Omega = \frac{\sqrt{K_T}U}{K_E\sqrt{K_\Phi \tau}} - \frac{R_a}{K_E K_\Phi} \tag{0-9}$$

忽略旋翼绕其旋转轴的转动惯量与电机转子转动惯量，有

$$\tau = Q = \kappa\Omega^2 \tag{0-10}$$

代入上式并忽略电机电阻，有

$$\Omega^2 = \frac{\sqrt{K_T}U}{K_E\sqrt{K_\Phi\kappa}} \tag{0-11}$$

令

$$K_\Omega = \frac{\sqrt{K_T}}{K_E\sqrt{K_\Phi\kappa}} \tag{0-12}$$

有

$$\Omega^2 = K_\Omega U \tag{0-13}$$

即旋翼转速的平方与电机电压成正比。

1.1.1 前飞侧翻效应与旋翼陀螺效应

飞行器在前飞时会受到侧翻效应的影响。桨叶向前划行时，桨叶和空气的相对速度高于旋转本身所带来的线速度；反之，桨叶向后划行时，桨叶和空气的相对速度低于旋转本身所带来的线速度。因此，旋翼两侧产生的升力不均匀。对于单个旋翼来说，这个周期性的升力变化在桨毂处产生一个转矩，力图使机身向一侧倾斜。由于飞行器具有正反两组旋翼，并且布局对称，四个旋翼引起的总的侧翻转矩被基本抵消了，不会产生大幅度侧向倾斜。

假设旋翼是刚性的，则绕电机轴高速转动的旋翼可以看做一个陀螺。当飞行器绕载体坐标轴旋转时，旋翼的旋转轴被迫在空间改变方位，即旋转轴被迫进动，旋翼将受到陀螺力矩的作用，其大小为

$$\begin{aligned} \tau_x' &= I_r q\left(\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4\right) \\ \tau_y' &= I_r p\left(\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4\right) \end{aligned} \tag{0-14}$$

在近悬停状态下，飞行器角速度很小且四个旋翼转速基本相同，陀螺力矩近似为0。然而，在高机动性飞行(比如高速空翻)时，陀螺转矩的值较大，需要加以考虑。

飞行器机体动力学分析

使用 *Z-Y-X* 欧拉角描述飞行器在导航坐标系下的旋转。由 W 系到 B 系，可以先绕 z_W 轴旋转一个偏航角 ψ，再绕新坐标系下的 y 轴旋转一个俯仰角 θ，最后绕 x_B 轴旋转一个横滚角 ϕ。由 W 系到 B 系的旋转矩阵 C_W^B 表示为

$$C_W^B = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & s\phi c\theta \\ s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \tag{0-15}$$

其中符号 c 和 s 分别代表余弦函数和正弦函数。由 B 系到 W 系的旋转矩阵为 C_B^W $= C_W^{B^T}$ 。

以$[p,q,r]^T$表示飞行器在 B 系下绕质心旋转的角速度，其与欧拉角的关系可以表示为

$$\begin{bmatrix}\dot{\psi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \sin\phi\sec\theta & \cos\phi\sec\theta\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix} \tag{0-16}$$

令 $\boldsymbol{r}$ 代表飞行器质心在 W 系下的位置向量，则飞行器质心的动力学方程表示为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=m\boldsymbol{g}+C_B^W\boldsymbol{T}_B-\boldsymbol{D}_T \tag{0-17}$$

其分量形式为

$$\begin{aligned}&ma_x=\left(s\phi s\psi+c\phi s\theta c\psi\right)\left(-T\right)-D_{T_x}\\ &ma_y=\left(-s\phi c\psi+c\phi s\theta s\psi\right)\left(-T\right)-D_{T_y}\\ &ma_z=mg+\left(c\phi c\theta\right)\left(-T\right)-D_{T_z}\end{aligned} \tag{0-18}$$

其中 $\boldsymbol{D}_T$ 是由于飞行器做平移飞行时的空气阻力，方向与飞行器飞行速度方向相反。

令 $\boldsymbol{J}\in R^{3\times3}$ 代表飞行器相对质心的惯性矩阵，表示为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}J_{xx} & J_{xy} & J_{xz}\\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz}\\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz}\end{bmatrix} \tag{0-19}$$

描述飞行器转动的欧拉方程为

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\omega}\right)\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{M} \tag{0-20}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 为飞行器的合外力矩，$\boldsymbol{\omega}$ 为飞行机体坐标系下的转动角速度，$\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\omega}\right)$ 为代表向量叉积的斜对称矩阵，即

$$\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{\omega}\right)=\begin{bmatrix}0 & -r & q\\ r & 0 & -p\\ -q & p & 0\end{bmatrix} \tag{0-21}$$

欧拉方程的分量形式为

$$\begin{aligned}&J_{xx}\dot{p}-\left(J_{yy}-J_{zz}\right)qr+J_{yz}\left(r^2-q^2\right)-J_{xz}\left(pq+\dot{r}\right)+J_{xy}\left(pr-\dot{q}\right)=M_x\\ &J_{yy}\dot{q}-\left(J_{zz}-J_{xx}\right)pr+J_{xz}\left(p^2-r^2\right)-J_{xy}\left(qr+\dot{p}\right)+J_{yz}\left(pq-\dot{r}\right)=M_y\\ &J_{zz}\dot{r}-\left(J_{xx}-J_{yy}\right)pq+J_{xy}\left(q^2-p^2\right)-J_{yz}\left(pr+\dot{q}\right)+J_{xz}\left(qr-\dot{p}\right)=M_z\end{aligned} \tag{0-22}$$

假设飞行器的结构是严格对称的，即忽略惯性积 J_{xy}，J_{xz}，J_{yz}，上式简化为

$$\begin{aligned}&J_{xx}\dot{p}-\left(J_{yy}-J_{zz}\right)qr=M_x=\tau_x+\tau_x^{'}-D_{R_x}\\ &J_{yy}\dot{q}-\left(J_{zz}-J_{xx}\right)pr=M_y=\tau_y+\tau_y^{'}-D_{R_y}\\ &J_{zz}\dot{r}-\left(J_{xx}-J_{yy}\right)pq=M_z=\tau_z-D_{R_z}\end{aligned} \tag{0-23}$$

其中 $\boldsymbol{D_R}=\left(D_{R_x},D_{R_x},D_{R_x}\right)^T$ 是飞行器绕质心旋转时的空气阻力矩，方向与飞行器瞬

时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 方向相反，其大小表示为

$$\left|\boldsymbol{D_R}\right|=\frac{1}{2}\rho C_2\left|\boldsymbol{\omega}\right|^2 \tag{0-24}$$

综上所述，完整的飞行器非线性动力学模型为

$$\begin{aligned}
&a_x=\frac{\left(s\phi s\psi+c\phi s\theta c\psi\right)\left(-T\right)-D_{T_x}}{m}\\
&a_y=\frac{\left(-s\phi c\psi+c\phi s\theta s\psi\right)\left(-T\right)-D_{T_y}}{m}\\
&a_z=\frac{mg+\left(c\phi c\theta\right)\left(-T\right)-D_{T_z}}{m}\\
&\dot{p}=\frac{J_{yy}-J_{zz}}{J_{xx}}qr+\frac{\tau_x+\tau_x^{'}-D_{R_x}}{J_{xx}}\\
&\dot{q}=\frac{J_{zz}-J_{xx}}{J_{yy}}pr+\frac{\tau_y+\tau_y^{'}-D_{R_y}}{J_{yy}}\\
&\dot{r}=\frac{J_{xx}-J_{yy}}{J_{zz}}pq+\frac{\tau_z-D_{R_z}}{J_{zz}}\\
&\dot{\psi}=\left(q\sin\phi+r\cos\phi\right)\sec\theta\\
&\dot{\theta}=q\cos\phi-r\sin\phi\\
&\dot{\phi}=p+\left(q\sin\phi+r\cos\phi\right)\tan\theta
\end{aligned} \tag{0.25}$$