미분가능

학습목표

- 미분가능의 정의
- 미분가능성의 충분조건

일변수 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분 가능

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $f'(a)$가 존재, 즉 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right\}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}=0$$

$\exists\,\epsilon(x)\in$함수, $A\in$실수 $(f'(a)=A)$, s.t.

$f(x)=f(a)+A(x-a)+\epsilon(x)(x-a)$, $\lim\limits_{x\to a}\epsilon(x)=0$

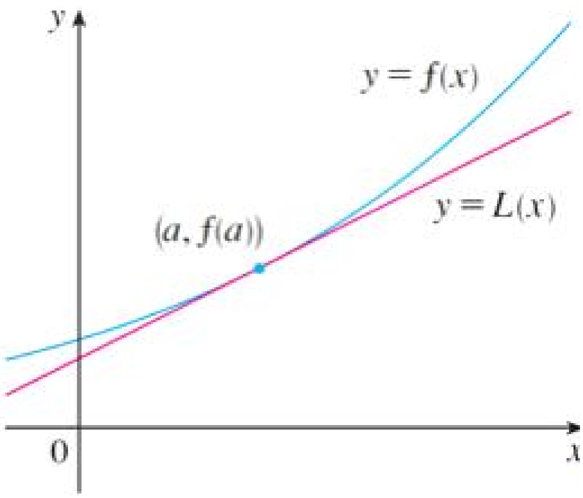
$$\underbrace{f(x)-f(a)}_{\Delta y}=\underbrace{A}_{f'(a)}\,\underbrace{(x-a)}_{\Delta x}+\underbrace{\epsilon(x)}_{\epsilon}\,\underbrace{(x-a)}_{\Delta x},\quad \lim_{x\to a}\epsilon(x)=0$$

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분 가능하다.

⇔ 점 $(a,f(a))$를 지나는 접선의 방정식

$y=L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$

$x=a$의 근방에서 함수의 근삿값을 직선 $y=L(x)$를 이용



다변수 함수 $z=f(x,y)$가 $\mathrm{x}_0=(a,b)$에서 미분 가능

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $f'(a,b)$가 존재,

$\mathrm{x}=(x,y)$, $\mathrm{x}_0=(a,b)$, $\Delta\mathrm{x}=\langle \Delta x, \Delta y \rangle = \langle x-a, y-b \rangle$

$\mathrm{a}=\langle f_x(a,b), f_y(a,b) \rangle$, $\epsilon(\mathrm{x})=\langle \epsilon_1, \epsilon_2 \rangle$

$\exists\, \epsilon(\mathrm{x})=\langle \epsilon_1,\epsilon_2 \rangle \in$ 벡터함수, $\mathrm{a} \in$ 벡터, s.t.

$f(\mathrm{x})=f(\mathrm{x}_0)+\mathrm{a}\cdot\Delta\mathrm{x}+\epsilon(\mathrm{x})|\Delta\mathrm{x}|$, $\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\epsilon(\mathrm{x})=0$

$$f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)=\langle f_x(a,b),f_y(a,b)\rangle\cdot\langle x-a,y-b\rangle+\langle \epsilon_1,\epsilon_2\rangle\cdot\langle x-a,y-b\rangle$$

$$\underbrace{f(\mathrm{x})-f(\mathrm{x}_0)}_{\Delta z} = f_x(a,b)\underbrace{(x-a)}_{\Delta x} + f_y(a,b)\underbrace{(y-b)}_{\Delta y} + \epsilon_1\underbrace{(x-a)}_{\Delta x} + \epsilon_2\underbrace{(y-b)}_{\Delta y}$$

단, $(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)$일 때 $\epsilon_1,\epsilon_2\to 0$이다.

정리

공간 R^2의 열린 집합 Ω에서 정의된 이변수함수 $z=f(x,y)$가 점 $\mathrm{x}_0=(a,b)\in\Omega$에서 다음이 성립하면 미분가능하다.

(1) f는 $\mathrm{x}_0=(a,b)$에서 연속

(2) $\mathrm{a}=\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{x}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{x}_0) \right\rangle$이 존재

즉, $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$가 존재

정리

공간 R^n의 열린 집합 Ω에서 정의된 다변수함수 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$가 점 $\mathrm{x}_0\in\Omega$에서 미분가능하면 다음이 성립한다.

(1) f는 x_0에서 연속

(2) $i=1,2,\cdots,n$에 대하여

$\mathrm{a}=\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{x}_0),\cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathrm{x}_0) \right\rangle$이 존재

예제. $f(x,y)=xe^{xy}$가 $(1,0)$에서 미분가능임을 보여라.

x는 다항함수이므로 $\mathbb{R}$에서 연속

e^{xy}는 지수함수이므로 $\mathbb{R}^2$에서 연속

따라서 $f(x,y)$는 연속인 두 함수의 곱이므로 $\mathbb{R}^2$에서 연속

$f_x(x,y)=e^{xy}+xye^{xy}$ $\quad f_y(x,y)=x^2e^{xy}$

$f_x(1,0)=1$ $\quad f_y(1,0)=1$

$f_x(1,0)$, $f_y(1,0)$가 존재

따라서 $f(x,y)$는 $(1,0)$에서 미분가능

예 원점에서 다음 함수 $f(x,y)$의 편미분 계수 $f_x(0,0)$과 $f_y(0,0)$이 존재하지만 f는 원점에서 미분 가능하지 않음을 보여라.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}f_x(0,0)&=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h\cdot0}{h^2+0^2}-0}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y(0,0)&=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0\cdot h}{0^2+h^2}-0}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0\end{aligned}$$

x축을 따라 접근할 때

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$y=x$를 따라 접근할 때

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

원점에서 각 편도함수가 존재하지만,
원점에서 극한이 존재하지 않아 연속이 아니므로
주어진 함수는 원점에서 미분 가능하지 않다.

예 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$는 원점에서 연속이지만 편미분 불가능함을 보여라.

임의의 양의 실수 ϵ 에 대하여 다음을 만족시키는 $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$의 존재성을 보이면 된다.

$$|f(x,y)-0| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \overset{\text{Let}}{=} \epsilon$$

$\epsilon-\delta$ 방법에 따라 f는 원점에서 연속

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\sqrt{h^2+0^2}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{|h|}{h}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\sqrt{0^2+h^2}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{|h|}{h}$$

원점에서 f는 편미분 불가능

예 함수 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$는 원점에서 연속이고 편미분 가능하지만 미분 불가능함을 보여라.

(연속성) 임의의 양의 실수 ϵ에 대하여 다음을 만족시키는 $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$의 존재성을 보이면 된다.

$$|f(x,y)-0|=|\sqrt{|xy|}-0|\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}<\frac{\delta}{\sqrt{2}}\underset{\text{Let }\delta=\sqrt{2}\epsilon}{=}\epsilon$$

(편미분 가능성)

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h\cdot 0}}{h}\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{0\cdot h}}{h}\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

(미분 불가능성)

$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\epsilon(\mathrm{x})=0$ 즉, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\epsilon(x,y)=0$임을 보이면 된다.

$$f(x,y)-f(0,0)=f_x(0,0)\times(x-0)+f_y(0,0)\times(y-0)+\epsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sqrt{|xy|}-\quad 0\quad=\quad 0\quad\times(x-0)+\quad 0\quad\times(y-0)+\epsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow\quad\sqrt{|xy|}=\epsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}\quad\Rightarrow\quad\epsilon(x,y)=\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\epsilon(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

x축을 따라 접근하면 0으로 $y=x$를 따라 접근하면 $1/\sqrt{2}$가 되어 극한값이 존재하지 않는다. 따라서 원점에서 미분 불가능하다.

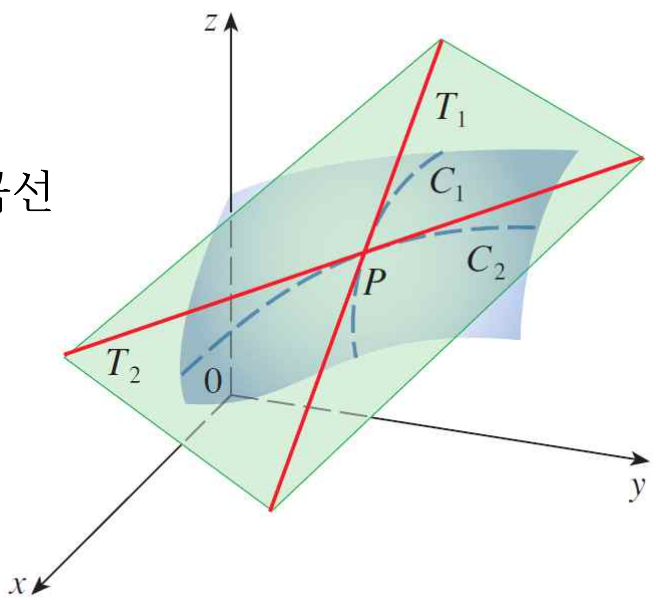
접평면과 선형근사

학습목표

- 접평면
- 선형근사
- 미분, 전미분

접평면

곡면 S : $z = f(x,y)$
점 $P(x_0, y_0, z_0)$
C_1, C_2 : 점 P에서 x,y축에 따른 곡선
T_1 : 점 P에서 곡선 C_1의 접선
T_2 : 점 P에서 곡선 C_2의 접선



점 P에서 곡면 S에 대한 접평면
: 접선 T_1과 T_2를 포함하는 평면

점 P에서 곡면 S에 대한 접평면

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A}{C}(x-x_0)+\frac{B}{C}(y-y_0)+(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow \quad z-z_0=-\frac{A}{C}(x-x_0)-\frac{B}{C}(y-y_0)$$

$$\Rightarrow \quad z-z_0=a(x-x_0)+b(y-y_0), \qquad a=-\frac{A}{C},\ b=-\frac{B}{C}$$

평면 $y=y_0$와의 교선 : 접선 T_1

$$\Rightarrow \quad z-z_0=a(x-x_0),\ y=y_0$$

$$\Rightarrow \quad a=\frac{z-z_0}{x-x_0}=f_x(x_0,y_0)$$

평면 $x=x_0$와의 교선 : 접선 T_2

$$\Rightarrow \quad z-z_0=b(y-y_0),\ x=x_0$$

$$\Rightarrow \quad b=\frac{z-z_0}{y-y_0}=f_y(x_0,y_0)$$

정의

f가 연속인 편도함수를 가질 때,

한 점 $P(x_0,y_0,z_0)$에서 곡면 $z=f(x,y)$에 대한 **접평면의 방정식**

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

or

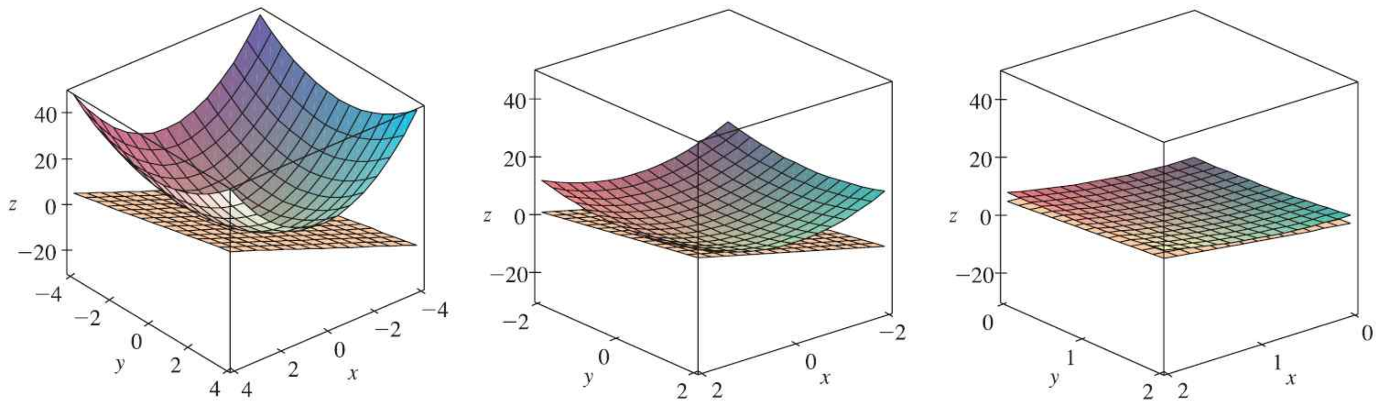
$$z=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+z_0$$

예제. $z=2x^2+y^2$ 위의 점 (1, 1, 3)에서의 접평면의 방정식

$f(x,y)=2x^2+y^2$

$$f_x(x,y)=4x \qquad f_y(x,y)=2y$$
$$f_x(1,1)=4 \qquad f_y(1,1)=2$$

$$z-3=4(x-1)+2(y-1)$$
$$z=4x+2y-3$$



선형근사

정의

곡면 $z=f(x,y)$의 한 점 $P(a,b,f(a,b))$에서의 접평면의 방정식

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

$$z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

$$L(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

(a,b)에서 f의 선형화

$$\Rightarrow \quad z=f(x,y)\approx f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

(a,b)에서 f의 선형근사(일차근사) 또는 접평면근사

예제. $f(x,y)=xe^{xy}$가 $(1,0)$에서 미분가능임을 보이고 선형화를 구하고 그것을 이용하여 $f(1,1,\ -0.1)$의 근삿값을 구하여라.

x는 다항함수이므로 $\mathbb{R}$에서 연속

e^{xy}는 지수함수이므로 $\mathbb{R}^2$에서 연속

따라서 $f(x,y)$는 연속인 두 함수의 곱이므로 $\mathbb{R}^2$에서 연속

$$f_x(x,y)=e^{xy}+xye^{xy} \qquad f_y(x,y)=x^2e^{xy}$$
$$f_x(1,0)=1 \qquad f_y(1,0)=1$$

$f_x(1,0)$, $f_y(1,0)$가 존재

따라서 $f(x,y)$는 $(1,0)$에서 미분가능

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(1,0)+f_x(1,0)(x-1)+f_y(1,0)(y-0) \\ &= 1+1\cdot(x-1)+1\cdot y \\ &= x+y \end{aligned}$$

점 $(1,0)$에서 $xe^{xy}\approx x+y$

$f(1.1,\ -0.1)\approx(1,1)+(-0.1)=1$

$f(1.1,\ -0.1)=1.1\cdot e^{1.1\times(-0.1)}=1.1\cdot e^{-0.11}\approx 0.98542$

예제. $z=2x^2+y^2$ 위의 점 $(1,1,3)$에서의 접평면의 방정식

$f_x(x,y)=4x$ $\quad f_y(x,y)=2y$ $\quad z-3=4(x-1)+2(y-1)$

$f_x(1,1)=4$ $\quad f_y(1,1)=2$ $\quad z=4x+2y-3$

점 $(1.1,\ 0.95)$에서의 실제값 : $f(1.1,\ 0.95)=2(1.1)^2+(0.95)^2=3.3225$

점 $(1.1,\ 0.95)$에서의 선형근사값 : $L(1.1,\ 0.95)=4(1.1)+2(0.95)-3=3.3$

$f(1.1,\ 0.95)\approx L(1.1,\ 0.95)$

$(1,1)$에서의 선형근사값이 실제값에 가깝다.

But, (1, 1)에서 멀리 떨어진 (2, 3)에서의 값이 차이가 큼

실 제 값 : $f(2,3)=2(2)^2+(3)^2=17$

선형근사값 : $L(2,3)=4(2)+2(3)-3=11$

예 점 $(1,1,2)$에서 함수 $f(x,y)=\sqrt{6-x^2-y^2}$의 접평면의 방정식을 찾고, 그것을 이용해서 점 $(1.01,\ 0.97)$에서 함숫값의 근삿값을 찾아라.

$$f_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{6-x^2-y^2}} \qquad f_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{6-x^2-y^2}}$$

$$f_x(1,1)=-1/2 \qquad f_y(1,1)=-1/2$$

$$z-2=-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)$$

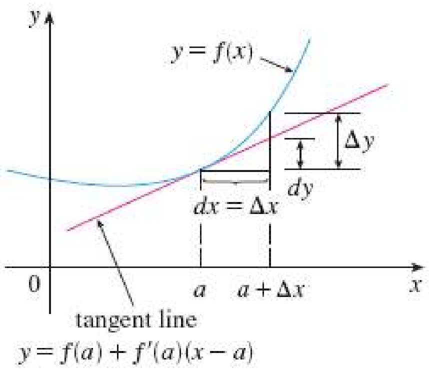
$$z=2-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)$$

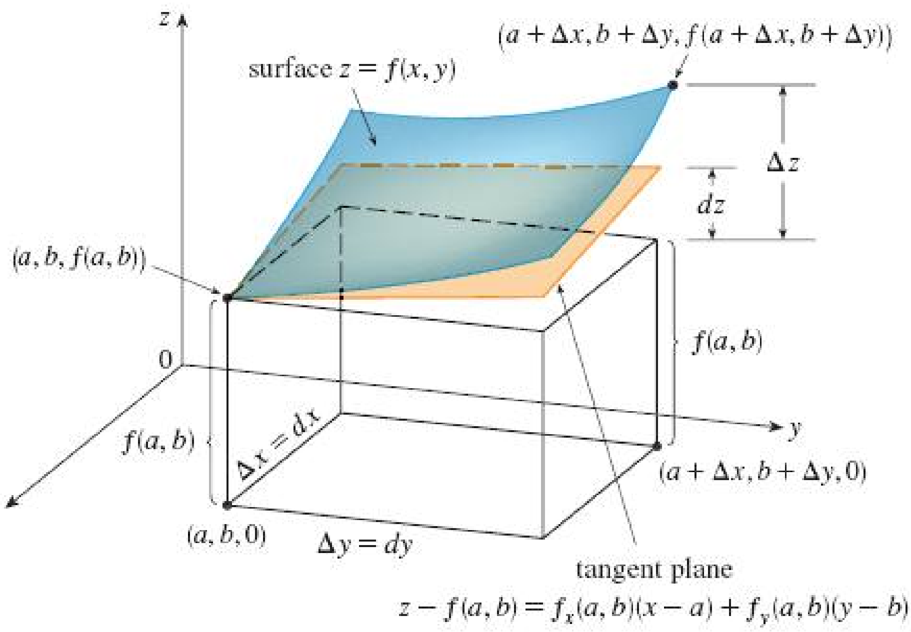
$$f(1.01,\ 0.97)\approx L(1.1,\ 0.95) \qquad =2-\frac{1}{2}(1.01-1)-\frac{1}{2}(0.97-1)$$

$$=2-\frac{1}{2}(0.01)-\frac{1}{2}(-0.03)=2-0.005+0.015=2.01$$

실제값 : $f(1.01,\ 0.97)\approx 2.00973$

미분





$$y = f(x)$$
$$dy = f'(x)dx$$

정의

이변수함수 $z = f(x,y)$

전미분

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{z - f(a,b)} & = & \underline{f_x(a,b)}\;\underline{(x-a)} & + & \underline{f_y(a,b)}\;\underline{(y-b)} \\ \Delta z & = & f_x(a,b)\quad \Delta x & + & f_y(a,b)\quad \Delta y \\ dz & = & f_x(a,b)\quad dx & + & f_y(a,b)\quad dy \end{array}$$

예제. (a) $z=f(x,y)=x^2+3xy-y^2$일 때 미분 dz를 구하여라.

(b) x가 2에서 2.05까지 변하고 y가 3에서 2.96까지 변할 때 Δz의 값과 dz의 값을 비교하여라.

(a) $f_x(x,y)=2x+3y \qquad f_y(x,y)=3x-2y$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(2x+3y)dx+(3x-2y)dy$$

(b) $x=2,\ dx=0.05,\quad y=3,\ dy=-0.04$

$$\begin{aligned} dz&=(2\cdot 2+3\cdot 3)(0.05)+(3\cdot 2-2\cdot 3)(-0.04)\\ &=13\cdot 0.05+0=0.65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta z&=f(2.05,\ 2.96)-f(2,\ 3)\\ &=\left[(2.05)^2+3(2.05)(2.96)-(2.96)^2\right]-\left[(2)^2+3(2)(3)-(3)^2\right]\\ &=\left[4.2025+3\cdot 6.068-8.7616\right]-\left[4+3\cdot 6-9\right]\\ &=13.6449-13\\ &=0.6449 \end{aligned}$$

예 점 $(1,1)$이 $(1.01,\ 0.97)$로 움직일 때, 함수 $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$의 증분의 근삿값을 전미분 dz를 사용해서 찾아라.

$$f_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \qquad f_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$f_x(1,1)=-1/\sqrt{2} \qquad f_y(1,1)=-1/\sqrt{2}$$

$$\Delta z\approx\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dx+\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dy=dz$$

$$dz=-\frac{1}{\sqrt{2}}(0.01)-\frac{1}{\sqrt{2}}(-0.03)=\frac{0.02}{\sqrt{2}}\approx 0.014142\approx\Delta z$$

$$\Delta z=f(1.01,\ 0.97)-f(1,1)\approx 0.01372$$

예 평면의 점 (x,y)가 점 $(2,2)$이 $(2.01,\ 1.97)$로 움직이면 이변수 함수 $f(x,y)=xy\cos(x-y)$의 값이 근사적으로 얼마나 변하는지 전미분 dz를 사용해서 찾아라.

$$f_x(x,y)=y\cos(x-y)-xy\sin(x-y) \qquad f_x(2,2)=2$$
$$f_y(x,y)=y\cos(x-y)+xy\sin(x-y) \qquad f_y(2,2)=2$$
$$\Delta z\approx dz=2\cdot dx+2\cdot dy$$

$$dz=2(0.01)+2(-0.03)=-0.04\approx\Delta z$$
$$\Delta z=f(2.01,\ 1.97)-f(2,2)\approx-0.0403$$

참 값 : z

근 삿 값 : $\bar{z}$

오 차 : $dz=\bar{z}-z$

절대 오차 : $|du|$

상대 오차 : $\dfrac{dz}{z}$ or $\left|\dfrac{dz}{z}\right|$

백분위오차 : $\dfrac{dz}{z}\times100(\%)$ or $\left|\dfrac{dz}{z}\right|\times100(\%)$

예제. 직원뿔의 밑면의 반지름이 10cm, 높이가 25cm이고 각각의 최대허용오차는 $\epsilon\ cm$이다. 직원뿔이 있다.

(a) 원뿔의 부피를 계산할 때 미분을 사용하여 부피의 최대허용오차를 추정하여라.

(b) 반지름과 높이의 최대허용오차가 0.1cm일 때 부피의 최대허용오차는 얼마인가?

(a) 반지름 : r, 높이 : h, 부피 : $V=\dfrac{\pi r^2 h}{3}$

$$dV=\frac{\partial V}{\partial r}dr+\frac{\partial V}{\partial h}dh=\frac{2\pi rh}{3}dr+\frac{\pi r^2}{3}dh$$

$$|\Delta r|\le\epsilon,\ |\Delta h|\le\epsilon \quad\Rightarrow\ dr=\epsilon,\ dh=\epsilon,\quad r=10,\ h=25$$

$$\Delta V\approx dV=\frac{2\pi\cdot 10\cdot 25}{3}\times\epsilon+\frac{\pi\cdot 10^2}{3}\times\epsilon=200\pi\epsilon$$

(b) $\epsilon=0.1$

$dV=200\pi(0.1)=20\pi\approx 63$, 부피의 최대측정오차는 약 $63cm^3$

상대오차 : $\dfrac{dV}{V}=\dfrac{20\pi}{\pi\cdot 10^2\cdot 25/3}=\dfrac{60}{2500}=\dfrac{6}{250}=0.24$

예 원기둥의 지름과 높이를 재어 보니 각각 5cm와 8cm이었다. 측정한 값에는 ± 0.1cm 범위 내의 오차가 있다고 할 때, 측정한 지름과 높이를 이용하여 찾은 원기둥의 부피에는 최대 얼마의 상대 오차가 있겠는가?

지름 : x, 높이 : h, 부피 : $V = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{4}x^2 h$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial h}dh = \frac{\pi x h}{2}dx + \frac{\pi x^2}{4}dh$$

$dx = 0.1,\ dh = 0.1,\quad x = 5,\ h = 8$

$$dV = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 8}{2} \times 0.1 + \frac{\pi \cdot 5^2}{4} \times 0.1 = \frac{21}{8}\pi$$

상대오차 : $\dfrac{dV}{V} = \dfrac{\frac{21}{8}\pi}{\frac{\pi}{4} \cdot 5^2 \cdot 8} = \dfrac{21}{400} = 0.0525$

반지름 : r, 높이 : h, 부피 : $V = \pi r^2 h$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh = 2\pi r h \cdot dx + \pi r^2 \cdot dh$$

$dr = 0.01,\ dh = 0.1,\quad x = 2.5,\ h = 8$

$$dV = 2\pi \cdot 2.5 \cdot 8 \times 0.05 + \pi \cdot 2.5^2 \times 0.1 = \frac{21}{8}\pi$$

상대오차 : $\dfrac{dV}{V} = \dfrac{\frac{21}{8}\pi}{\pi \cdot 2.5^2 \cdot 8} = \dfrac{21}{400} = 0.0525$