다변수함수의 극값, 최댓값, 최솟값

학습목표

- 극댓값, 극솟값
- 최댓값, 최솟값
- 이계도함수 판정법
- 이변수함수에 대한 극값 정리
- 폐집합에서의 최댓값과 최솟값 구하기

정의

(a,b)를 중심으로 하는 어떤 원판 안의 모든 점 (x,y)에서 $f(x,y) \le f(a,b)$이면 이변수함수 (a,b)에서 극대값을 갖는다고 한다. $f(a,b)$를 **극대값**이라 부른다. (a,b)에 가까운 (x,y)에 대하여 $f(x,y) \ge f(a,b)$이면, $f(a,b)$를 **극소값**이라 한다.

정리

만약 f가 (a,b)에서 극값(극대값 또는 극소값)을 가지며 f의 편도함수가 (a,b)에서 존재하면, $f_x(a,b)=0$이고, $f_y(a,b)=0$이다.

예제. $f(x,y)=x^2+y^2-2x-6y+14$

$f_x(x,y)=2x-2,\quad f_y(x,y)=2y-6$

$x=1,\ y=3$에서 0이다. 따라서, 임계점은 (1,3)

$f(1,3)=1^2+3^2-2\cdot 1-6\cdot 3+14=4$

$f(x,y)=4+(x-1)^2+(y-3)^2$

$(x-1)^2\geq 0,\ (y-3)^2\geq 0$이므로 $f(x,y)\geq 4$

그러므로 $f(1,3)=4$: 극소값

다변수함수의 극값_최댓값과 최솟값 **편도함수, 다변수함수**

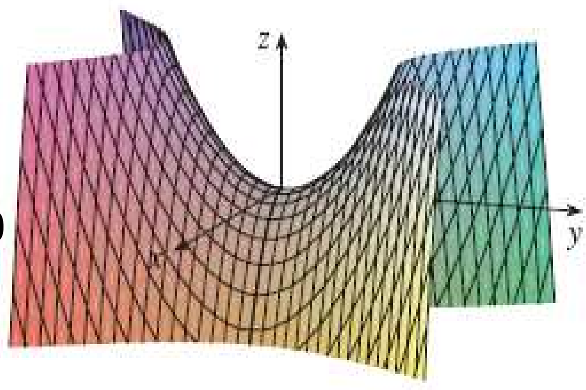
예제. $f(x,y)=y^2-x^2$

$f_x=-2x,\quad f_y=2y$

임계점 (0,0)

$y=0$으로 고정 $f(x,0)=-x^2<0$

$x=0$으로 고정 $f(0,y)=y^2>0$



(0,0)을 중심으로

함수 f가 양의 값과 음의 값을 동시에 갖음

$f(0,0)=0$은 f의 극값이 아니다.

이계 도함수 판정법

중심을 (a,b)로 하는 원판에서 f의 이계편도함수가 연속이고 $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ (즉, (a,b)는 f의 임계점)이라 하자.

$$D=D(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-[f_{xy}(a,b)]^2$$

(a) $D>0$, $f_{xx}(a,b)>0$ or $f_{yy}(a,b)>0$이면 $f(a,b)$는 극소값

(b) $D>0$, $f_{xx}(a,b)<0$ or $f_{yy}(a,b)<0$이면 $f(a,b)$는 극대값.

(c) $D<0$이면 $f(a,b)$는 극값이 아니다.(안장점이다.)

예제. $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$의 극대, 극소값과 안장점을 구하여라.

$$\begin{aligned} f_x &= 4x^3-4y=0 &\Rightarrow\quad & y=x^3, \\ f_y &= 4y^3-4x=0 &\Rightarrow\quad & 4(x^3)^3-4x=0 \\ &&& x^9-x=0 \\ &&& x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)=0 \end{aligned}$$

$x=0,1,-1$, 세 임계점 : $(0,0),(1,1),(-1,-1)$

$$f_{xx}=12x^2,\quad f_{xy}=f_{yx}=-4,\quad f_{yy}=12y^2$$
$$D(x,y)=f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=144x^2y^2-14$$

$D(0,0)=-16<0$ $(0,0)$: 안장점

$D(1,1)=128>0$ & $f_{xx}(1,1)=12>0$ $f(1,1)=-1$: 극소값

$D(-1,-1)=128>0$ & $f_{xx}(1,1)=12>0$ $f(-1,-1)=-1$: 극소값

예제. 함수 $f(x,y)=10x^2y-5x^2-4y^2-x^4-2y^4$의 임계점을 구하고, 임계점을 분류하여라. 또한 f의 그래프 위에서 가장 높은 점을 구하여라.

$$f_x=20xy-10x-4x^3=0 \;\Rightarrow\; 2x(10y-5-2x^2)=0,$$
$$f_y=10x^2-8y-8y^3=0 \;\Rightarrow\; 2(5x^2-4y-4y^3)=0$$

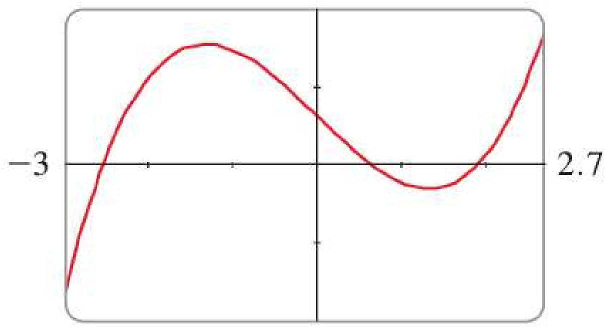
$x=0$ 또는 $10y-5-2x^2=0$

1) $x=0$

$-4y(1+y^2)=0$ 임계점 (0,0)

2) $10y-5-2x^2=0$

$x^2=5y-2.5 \Rightarrow 5(5y-2.5)-4y-4y^3=0 \Rightarrow 4y^3-21y+12.5=0$



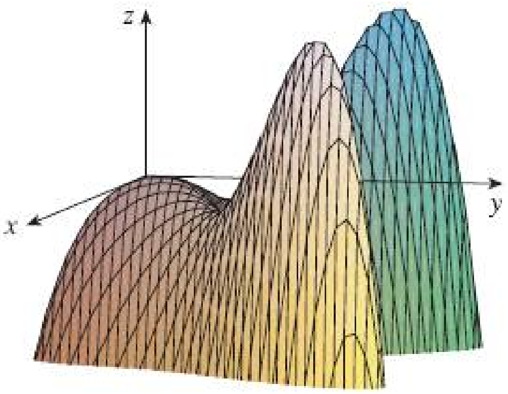
임계점 : $\begin{cases} y \approx -2.5452 \\ \quad\;\; 0.6468 \\ \quad\;\; 1.8984 \end{cases} \Rightarrow x=\pm\sqrt{5y-2.5} \Rightarrow \begin{cases} x \approx \times \\ \pm 0.8567 \\ \pm 2.6442 \end{cases}$

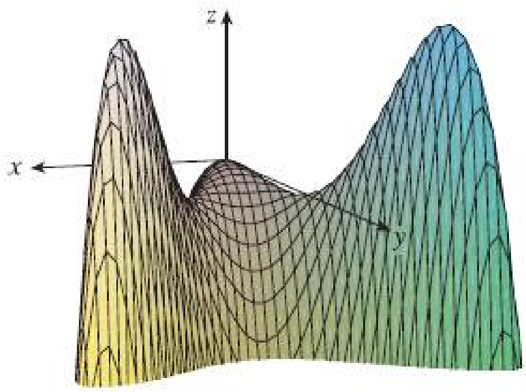
$$f_{xx}=20y-10-12x^2,\quad f_{xy}=20x,\quad f_{yy}=-8-24y^2$$

$$D=f_{xx}\cdot f_{yy}-\{f_{xy}\}^2=(20y-10-12x^2)\cdot(-8-24y^2)-(20x)^2$$

임계점	D	f_{xx}	f_{yy}	f	판정
$(0,0)$	80.00	-10.00	-8.00	0.00	극대
$(\pm 2.64, 1.90)$	2477.48	-55.64	-94.64	8.49	극대
$(\pm 0.86, 0.65)$	-189.26	-5.88	-18.04	-1.48	안장점

임계점	D	f_{xx}	f_{yy}	f	판정
$(0,0)$	80.00	-10.00	-8.00	0.00	극대
$(\pm 2.644224, 1.898384)$	2488.72	-55.93	-94.49	8.50	극대
$(\pm 0.856656, 0.646772)$	-187.64	-5.87	-18.04	-1.48	안장점





예제. 점 $(1,0,-2)$와 평면 $x+2y+z=4$ 사이의 최단거리를 구하여라.

$$d=\frac{|(1)+2\cdot(0)+(-2)-4|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{5}{6}\sqrt{6}$$

평면 위의 임의의 점 (x,y,z)와 점 $(1,0,-2)$ 사이의 거리

$$d=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z+2)^2}$$

$$\begin{aligned} d^2=f(x,y)&=(x-1)^2+y^2+(z+2)^2 \\ &=(x-1)^2+y^2+(6-x-2y)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_x&=2(x-1)-2(6-x-2y)=4x+4y-14=0, \\ f_y&=2y-4(6-x-2y)\qquad\;\;=4x+10y-24=0 \end{aligned} \Rightarrow \text{임계점 } \left(\frac{11}{6},\frac{5}{3}\right)$$

$f_{xx}=4,\quad f_{xy}=4,\quad f_{yy}=10$

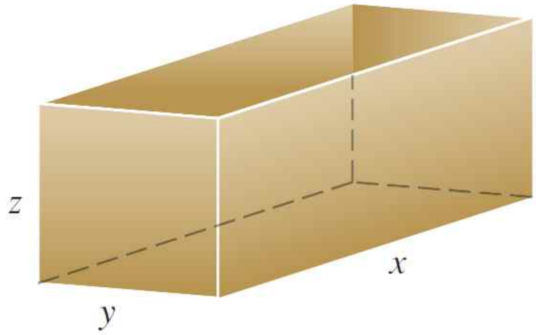
$D=f_{xx}\cdot f_{yy}-\{f_{xy}\}^2=4\cdot 10-4^2=24>0$

$f_{xx}=4>0$

함수 $f(x,y)$는 $(\frac{11}{6},\frac{5}{3})$에서 극솟값을 갖는다.

$$d=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(6-x-2y)^2}$$
$$=\sqrt{(\frac{11}{6}-1)^2+(\frac{5}{3})^2+(6-\frac{11}{6}-2\cdot\frac{5}{3})^2}$$
$$=\sqrt{\frac{25+100+25}{36}}=\sqrt{\frac{25}{6}}=\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{5}{6}\sqrt{6}$$

예제. 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 $12\mathrm{m}^2$ 넓이의 판자로 만들려고 한다. 이 상자의 부피의 최댓값을 구하여라.



$$V(x,y,z)=xyz$$
$$xy+2xz+2yz=12 \quad\Rightarrow\quad 2(x+y)z=12-xy$$
$$z=\frac{12-xy}{2(x+y)}$$
$$\Rightarrow\quad V(x,y)=xy\frac{12-xy}{2(x+y)}=\frac{12xy-x^2y^2}{2(x+y)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}[12xy-x^2y^2]\cdot[2(x+y)]-[12xy-x^2y^2]\cdot\frac{\partial}{\partial x}[2(x+y)]}{[2(x+y)]^2}$$
$$= \frac{2(12y-2xy^2)(x+y)-2(12xy-x^2y^2)}{4(x+y)^2}$$
$$= \frac{(12xy+12y^2-2x^2y^2-2xy^3)-(12xy-x^2y^2)}{2(x+y)^2}$$
$$= \frac{12y^2-2xy^3-x^2y^2}{2(x+y)^2}$$
$$= \frac{y^2(12-2xy-x^2)}{2(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}[12xy-x^2y^2]\cdot[2(x+y)]-[12xy-x^2y^2]\cdot\frac{\partial}{\partial y}[2(x+y)]}{[2(x+y)]^2}$$
$$= \frac{2(12x-2x^2y)(x+y)-2(12xy-x^2y^2)}{4(x+y)^2}$$
$$= \frac{(12x^2+12xy-2x^3y-2x^2y^2)-(12xy-x^2y^2)}{2(x+y)^2}$$
$$= \frac{12x^2-2x^3y-x^2y^2}{2(x+y)^2}$$
$$= \frac{x^2(12-2xy-y^2)}{2(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12-2xy-x^2)}{2(x+y)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y=0 \text{ or } \quad 12-2xy-x^2=0$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12-2xy-y^2)}{2(x+y)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \text{ or } \quad 12-2xy-y^2=0$$

(1) $y=0,\ x=0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$

(2) $y=0,\ 12-2xy-y^2=0 \quad \Rightarrow \quad y=0,\ x\in R$

(3) $x=0,\ 12-2xy-x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\ y\in R$

(4) $12-2xy-y^2=0,\ 12-2xy-x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=y^2 \quad \Rightarrow \quad x=\pm y$

x,y,z는 직육면체의 한 변의 길이이므로 양수

$x=y$

(4) $12-2x\cdot(x)-(x)^2=0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2=12$

$\Rightarrow \quad x^2=4 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2$

$x=y=2$

$$V(2,2) = \frac{12\cdot 2\cdot 2-2^2\cdot 2^2}{2(2+2)} = \frac{48-16}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

$$x=y=2 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{12-2\cdot 2}{2(2+2)} = \frac{8}{8} = 1$$

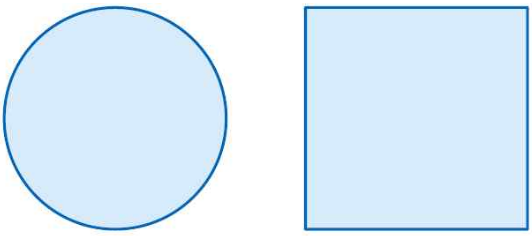
$V(2,2,1) = 2\cdot 2\cdot 1 = 4$

최댓값과 최솟값

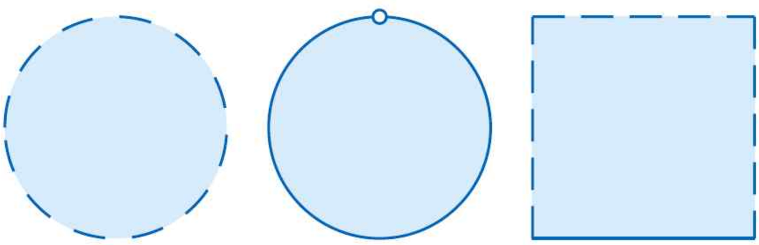
정의

(a,b)를 이변수함수 f의 정의역 D에 속하는 점이라 하자.
D의 모든 점 (x,y)에 대해, $f(a,b) \geq f(x,y)$이면
$f(a,b)$는 f의 **최댓값**이다.
D의 모든 점 (x,y)에 대해, $f(a,b) \leq f(x,y)$이면
$f(a,b)$는 f의 **최솟값**이다.

폐집합



(a) 폐집합



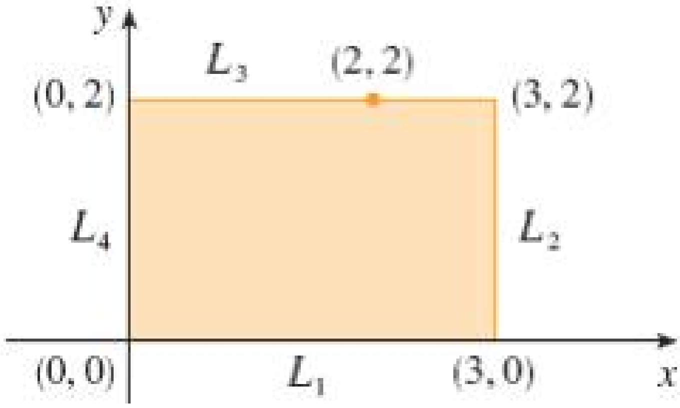
(b) 폐집합이 아닌 집합

이변수함수에 대한 극값정리

f가 R^2에 놓인 유계인 폐집합 D에서 연속이면,
f는 D 안의 어떤 점 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$에서
최대값 $f(x_1,y_1)$과 최소값 $f(x_2,y_2)$를 갖는다.

유계인 폐집합 D에서 연속함수 f의 최대, 최소값을 구하기
1. D의 내부에 있는 f의 임계점에서 f의 값을 구한다.
2. D의 경계에서 f의 극값을 구한다.
3. 1과 2로부터 얻은 값 중 가장 큰 값을 최대값,
가장 작은 값은 최소값이다.

예제. 사각형 $D=\{(x,y)|0\le x\le 3, 0\le y\le 2\}$에서
함수 $f(x,y)=x^2-2xy+2y$의 최대값과 최소값을 구하여라.



1. 임계점

$$f_x=2x-2y=0, \quad \Rightarrow \quad x=y$$
$$f_y=-2x+2=0, \quad \Rightarrow \quad x=1$$

임계점 $(1,1)$, $f(1,1)=1$

2. D의 경계

$L_1(y=0)$	$\Rightarrow\ f(x,0)=x^2,$	$0\le x\le 3$에서 x는 증가함수	$f(0,0)=0$: 최소, $f(3,0)=9$: 최대
$L_2(x=3)$	$\Rightarrow\ f(3,y)=9-4y,$	$0\le y\le 2$에서 y는 감소함수	$f(3,0)=9$: 최대, $f(3,2)=1$: 최소
$L_3(y=2)$	$\Rightarrow\ f(x,2)=x^2-4x+4,$	$f(x,2)=(x-2)^2$	$f(2,2)=0$: 최소, $f(0,2)=4$: 최대
$L_4(x=0)$	$\Rightarrow\ f(0,y)=2y,$	$0\le y\le 2$에서 y는 증가함수	$f(0,2)=4$: 최대, $f(0,0)=0$: 최소

3. 1, 2의 결과 비교

f의 최대값 : $f(3,0)=9$ f의 최소값 : $f(0,0)=f(2,2)=0$

라그랑주 승수

학습목표

- 라그랑주 승수법
- 최댓값 or 최솟값 찾기

라그랑주 승수(라그랑주 곱셈자, Lagrange Multiplier)

일반함수 $f(x,y)$ 또는 $f(x,y,z)$의 최대화 또는 최소화에 대한 라그랑주 방법 (λ : 라그랑주 승수, 라그랑주 곱셈자)

이변수함수에 대한 라그랑주 방법

제약조건 $g(x,y)=k$, 함수 $f(x,y)$의 최대화 또는 최소화 문제

: 등위곡선 $g(x,y)=k$ 위에 놓여 있는 점 (x,y)에서 $f(x,y)$의 극값

$\Leftrightarrow$ $g(x,y)=k$의 조건을 만족하는 $f(x,y)$를 최대화 또는 최소화

$\Leftrightarrow$ $g(x,y)=k$와 교차하는 등위곡선 $f(x,y)=c$에서 c의 최대, 최소

$\Leftrightarrow$ $\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0)$을 만족하는 점 (x_0,y_0) 중

가장 큰 $f(x_0,y_0)$가 최댓값, 가장 작은 $f(x_0,y_0)$가 최솟값

이변수함수에 대한 라그랑주 방법

제약조건 $g(x,y)=k$,

함수 $f(x,y)$의 최대화

또는 최소화 문제

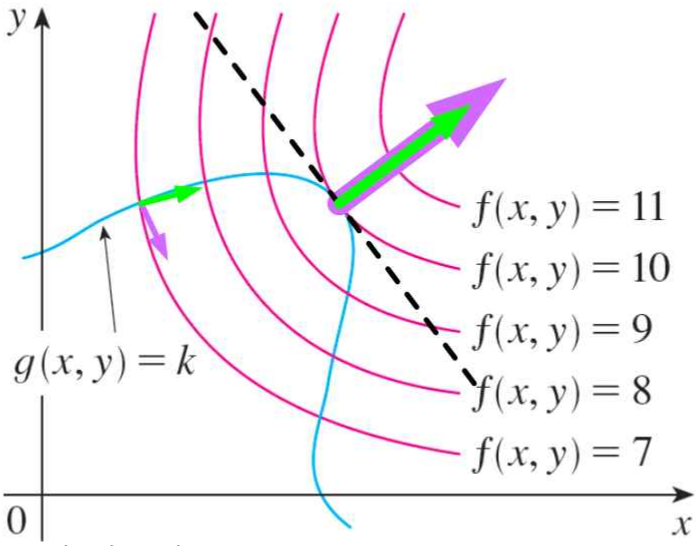
$\Leftrightarrow$ $g(x,y)=k$와 교차하는

등위곡선 $f(x,y)=c$에서

c의 최대, 최소

: g와 f의 등위곡선이

서로 접할 때 발생



1. g와 f가 하나의 공통접선을 가질 경우
2. 서로 접하는 점 (x_0,y_0)에서의 법선은 동일(반대방향도 발생)
3. 기울기 벡터들은 평행
4. $\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0)$

라그랑주 승수법(이변수함수)

제약조건 $g(x,y)=k$를 만족하는

$f(x,y)$의 최대값과 최소값을 구하기

(극값이 존재하고 $g(x,y)=k$ 상에서 $\nabla g(x_0,y_0)\neq 0$가정)

(a) 다음을 만족하는 모든 x,y,z와 λ의 값을 구한다.

$$\begin{array}{l}\text{(i) } \nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\\ \text{(ii) } g(x,y)=k\end{array} \Rightarrow \begin{cases} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \\ g(x,y)=k\end{cases}$$

(미지수 3개 x,y,λ와 식 3개인 연립방정식의 해 구하기)

(b) (a)에서 구한 모든 점 (x,y)에서 f의 값을 계산한다.

이 값 중 가장 큰 것이 f의 최댓값이고,

가장 작은 것이 f의 최솟값

삼변수함수에 대한 라그랑주 방법
제약조건 $g(x,y,z)=k$,
함수 $f(x,y,z)$의 최대화 또는 최소화 문제
$\Leftrightarrow$ $g(x,y,z)=k$와 교차하는 등위곡면 $f(x,y,z)=c$에서 c의 최대값 또는 최소값 구하기
: g와 f의 등위곡면이 서로 접할 때 발생
1. g와 f가 하나의 공통 접평면을 가질 경우
2. 서로 접하는 점 (x_0,y_0,z_0)에서의 법선은 동일(반대방향도 발생)
3. 기울기 벡터들은 평행
4. $\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0)$

점 (x,y,z)는 방정식 $g(x,y,z)=k$를 갖는 등위곡면 S 위에 있다.
등위곡면 $f(x,y,z)=c$에 대하여,
f의 최대값이 $f(x_0,y_0,z_0)=c$이면
등위곡면 $f(x,y,z)=c$는 등위곡면 $g(x,y,z)=k$에 접하게 되고
이 때 대응되는 기울기 벡터는 서로 평행

함수 f : 곡면 S 위의 점 $P(x_0,y_0,z_0)$에서 극값을 갖는다.
곡선 C : S 위의 점 $P(x_0,y_0,z_0)$를 통과하는
벡터방정식 $\mathbf{r}(t)=<x(t),y(t),z(t)>$
$\mathbf{r}(t_0)=<x(t_0),y(t_0),z(t_0)> \;=\; <x_0,y_0,z_0>$

합성함수 $h(t)=f(x(t),y(t),z(t))$: f가 곡선 C 위에서 취하는 값
f는 (x_0,y_0,z_0)에서 극값을 가짐 $\Rightarrow$ h는 t_0에서 극값을 갖는다.
$\Rightarrow h'(t_0)=0$

f가 미분가능하면, 연쇄법칙 이용

$$
\begin{aligned}
0 &= h'(t_0) \\
&= f_x(x_0,y_0,z_0)x'(t_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)y'(t_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)z'(t_0) \\
&= \nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot \mathrm{r}'(t_0)
\end{aligned}
$$

f의 기울기 벡터 $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$가 이러한 모든 곡선 C 에 대한 접선 벡터 $\mathrm{r}'(t_0)$에 수직

g의 기울기 벡터 $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ 또한 곡선 C 에 대한 접선 벡터 $\mathrm{r}'(t_0)$에 수직

(“곡선 $C: \mathrm{r}(t) = < x(t), y(t), z(t) >$가 $F(x(t),y(t),z(t)) = k$일 때, $\nabla F \cdot \mathrm{r}'(t) = 0$ 이다.” 라는 등위곡면에 대한 접평면의 내용 이용)

따라서, 기울기 벡터 $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$와 $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$는 서로 평행

라그랑주 승수법(삼변수함수)

제약조건 $g(x,y,z) = k$를 만족하는

$f(x,y,z)$의 최대값과 최소값을 구하기

(극값이 존재하고 $g(x,y,z) = k$ 상에서 $\nabla g(x_0,y_0,z_0) \neq 0$가정)

(a) 다음을 만족하는 모든 x,y,z와 λ의 값을 구한다.

$$
\begin{array}{l}
\text{(i) } \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\
\text{(ii) } g(x,y,z) = k
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
f_x = \lambda g_x \\
f_y = \lambda g_y \\
f_z = \lambda g_z \\
g(x,y,z) = k
\end{cases}
$$

(미지수 4개 x,y,z,λ와 식 4개인 연립방정식의 해 구하기)

(b) (a)에서 구한 모든 점 (x,y,z)에서 f의 값을 계산한다.

이 값 중 가장 큰 것이 f의 최댓값이고,

가장 작은 것이 f의 최솟값

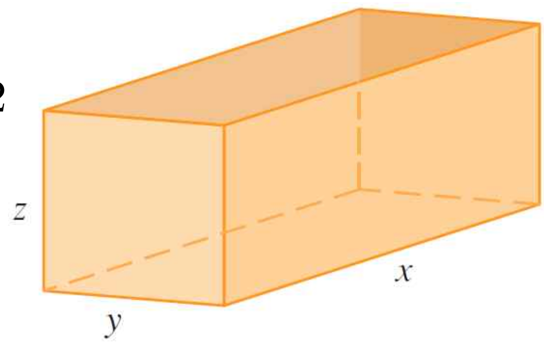
예제. 뚜껑이 없는 직육면체의 상자가 $12\mathrm{m}^2$ 넓이의 판자로 만들어졌다. 이 상자의 부피의 최댓값을 구하여라.

$V = xyz$

제약조건 : $g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz = 12$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{12 - xy}{2(x+y)}$$

$$V(x,y) = xy\frac{12 - xy}{2(x+y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$$



직육면체 $V(x,y,z)$의 최댓값 or $V(x,y)$의 최댓값?

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}\{12xy - x^2y^2\}\cdot(2(x+y)) - (12xy - x^2y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\{2(x+y)\}}{(2(x+y))^2}\\ &= \frac{(12y - 2xy^2)\cdot(2x+2y) - (12xy - x^2y^2)\cdot(2)}{(2(x+y))^2}\\ &= \frac{2(12xy + 12y^2 - 2x^2y^2 - 2xy^3 - 12xy + x^2y^2)}{(2(x+y))^2}\\ &= \frac{12y^2 - x^2y^2 - 2xy^3}{2(x+y)^2} = \frac{y^2(12 - x^2 - 2xy)}{2(x+y)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\frac{\partial}{\partial y}\{12xy - x^2y^2\}\cdot(2(x+y)) - (12xy - x^2y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\{2(x+y)\}}{(2(x+y))^2}\\ &= \frac{(12x - 2x^2y)\cdot(2x+2y) - (12xy - x^2y^2)\cdot(2)}{(2(x+y))^2}\\ &= \frac{2(12x^2 + 12xy - 2x^3y - 2x^2y^2 - 12xy + x^2y^2)}{(2(x+y))^2}\\ &= \frac{12x^2 - x^2y^2 - 2x^3y}{2(x+y)^2} = \frac{x^2(12 - y^2 - 2xy)}{2(x+y)^2}\end{aligned}$$

임계점 $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ & $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$

$y^2(12 - x^2 - 2xy) = 0 \quad x^2(12 - y^2 - 2xy) = 0$

(i) $y^2 = 0$ & $\mathrm{x}^2 = 0 \Rightarrow (\mathrm{x},\mathrm{y}) = (0,0) \Rightarrow$ 부피가 만들어지지 않음

(ii) $y^2 = 0$ & $12 - \mathrm{y}^2 - 2\mathrm{xy} = 0 \Rightarrow 12 = 0 \Rightarrow$ 존재하지않음

(iii) $12 - x^2 - 2xy = 0$ & $\mathrm{x}^2 = 0 \Rightarrow 12 = 0 \Rightarrow$ 존재하지않음

(iv) $12 - x^2 - 2xy = 0$ & $12 - \mathrm{y}^2 - 2\mathrm{xy} = 0 \Rightarrow 12 = 0$
$\Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y \Rightarrow x = y$

$12 - x^2 - 2x(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$x = 2 \Rightarrow y = 2$

$$V(2,2) = 2\cdot 2\frac{12 - 2\cdot 2}{2(2+2)} = 4\cdot\frac{12-4}{8} = 4\cdot\frac{8}{8} = 4$$

$$\nabla V(x,y,z) = \ < yz,\ xz,\ xy >, \quad \nabla g(x,y,z) = \ < 2x+y,\ 2z+x,\ 2x+2y >$$

$$\begin{cases} \nabla V = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 2xz+2yz+xy = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz = \lambda(2z+y) \\ xz = \lambda(2z+x) \\ xy = \lambda(2x+2y) \\ 2xz+2yz+xy = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xyz = \lambda(2xz+xy) & \cdots\cdots \boxed{1} \\ xyz = \lambda(2yz+xy) & \cdots\cdots \boxed{2} \\ xyz = \lambda(2xz+2yz) & \cdots\cdots \boxed{3} \\ 2xz+2yz+xy = 12 & \cdots\cdots \boxed{4} \end{cases}$$

$\boxed{1}$ & $\boxed{2}$ $\Rightarrow$ $2\lambda z(x-y)=0$ $\Rightarrow$ $\lambda=0,\ z=0\ \ x=y$
$\Rightarrow$ $\lambda \neq 0(xyz=0),\quad z\neq 0(V=0),\quad x=y$

$\boxed{1}$ & $\boxed{3}$ $\Rightarrow$ $\lambda y(x-2z)=0$ $\Rightarrow$ $\lambda=0,\ y=0\ \ x=2z$
$\Rightarrow$ $\lambda \neq 0(xyz=0),\quad y\neq 0(V=0),\quad x=2z$

$\boxed{4}$ $\Rightarrow$ $x=y=2z$ $\Rightarrow$ $2(2z)z+2(2z)z+(2z)(2z)=12$ $\Rightarrow$ $12z^2=12$ $\Rightarrow z^2=1$

$z=1 \Rightarrow x=2=y \quad \Rightarrow \quad V(2,2,1)=2\cdot 2\cdot 1=4$

예제. 원 $x^2+y^2=1$ 상에서 함수 $f(x,y)=x^2+2y^2$의 극값을 구하여라.

제약조건 : $g(x,y)=x^2+y^2=1$

$\nabla f(x,y) = \ < 2x,\ 4y >, \quad \nabla g(x,y,z) = \ < 2x,\ 2y >$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 4y = 2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1-\lambda)=0 & \cdots\cdots \boxed{1} \\ 2y(1-\lambda)=0 & \cdots\cdots \boxed{2} \\ x^2+y^2=1 & \cdots\cdots \boxed{3} \end{cases}$$

$\boxed{1}$로부터 $x=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{3}$에 의해, $y=\pm 1$ $\Rightarrow$ $(0,\pm 1)$

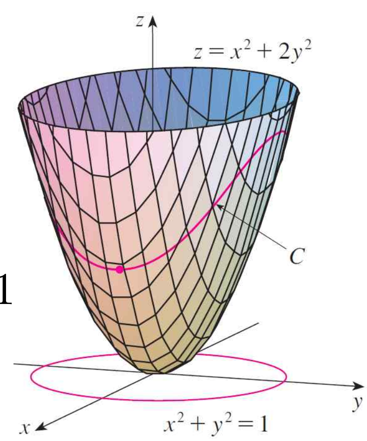
$\boxed{1}$로부터 $1-\lambda=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{2}$에 의해, $y=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{3}$에 의해,
$x=\pm 1$ $\Rightarrow$ $(\pm 1,0)$

$\boxed{2}$로부터 $y=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{3}$에 의해, $x=\pm 1$ $\Rightarrow$ $(\pm 1,0)$

$f(0,1)=2,\quad f(0,-1)=2,\quad f(1,0)=1,\quad f(-1,0)=1$

가장 큰 값 : $2=f(0,1)=f(0,-1)$

가장 작은 값 : $1=f(1,0)=f(-1,0)$

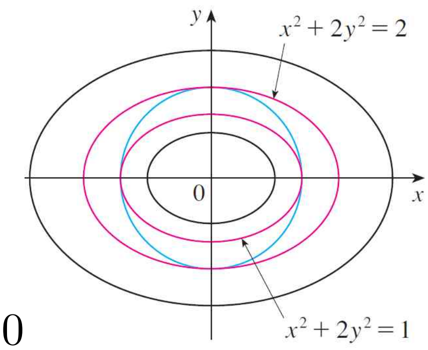


예제. 원판 $x^2+y^2 \le 1$ 상에서 함수 $f(x,y)=x^2+2y^2$의 극값을 구하여라.

원판 내부의 영역 : $x^2+y^2<1 \Rightarrow$ 임계점

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2x \\ f_y(x,y)=4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 4y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad (x,y)=(0,0)$$

경계 : $x^2+y^2=1 \Rightarrow$ 제약조건 $x^2+y^2=1$ 상에서 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 의 극값 : $(0,\pm 1)$, $(\pm 1,0)$



$f(0,0)=0$

$f(0,1)=f(0,-1)=2$

$f(1,0)=f(-1,0)=1$

최댓값 $f(0,1)=f(0,-1)=2$, 최솟값 $f(0,0)=0$

예제. 구면 $x^2+y^2+z^2=4$ 위의 점으로서 점 $(3,1,-1)$로부터 가장 가까운 점과 가장 먼 점을 구하여라.

구면 상의 점 (x,y,z)로부터 $(3,1,-1)$까지 거리

$d(x,y,z)=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$

거리의 최대, 최소화 $\Rightarrow$ 거리의 제곱의 최대, 최소화

$f(x,y,z)=\{d(x,y,z)\}^2=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$의 극값

제약조건 : $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=4$

$$\begin{cases} \nabla f=\lambda \nabla g \\ g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-3)=2x\lambda \\ 2(y-1)=2y\lambda \\ 2(z+1)=2z\lambda \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)=x\lambda \\ (y-1)=y\lambda \\ (z+1)=z\lambda \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x=3 & \cdots\cdots \boxed{1} \\ (1-\lambda)y=1 & \cdots\cdots \boxed{2} \\ (1-\lambda)z=-1 & \cdots\cdots \boxed{3} \\ x^2+y^2+z^2=4 & \cdots\cdots \boxed{4} \end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{1-\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2+\left(\frac{-1}{1-\lambda}\right)^2=4 \Rightarrow (1-\lambda)^2=\frac{11}{4} \Rightarrow 1-\lambda=\pm\frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow \lambda=1\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$$

$\lambda=1+\frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow \left(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$: 최소, $\quad \lambda=1-\frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow \left(-\frac{6}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$: 최대

예. 포물면 $z=4-x^2-y^2$에 있는 점 중에서 점 $P(5,5,4)$에 가장 가까운 점을 구하여라.

포물면 상의 점 (x,y,z)로부터 $(5,5,4)$까지 거리

$$d(x,y,z)=\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2+(z-4)^2}$$

$f(x,y,z)=\{d(x,y,z)\}^2=(x-5)^2+(y-5)^2+(z-4)^2$의 극값

제약조건 : $g(x,y,z)=x^2+y^2+z=4$

$$\begin{cases} \nabla f=\lambda\nabla g \\ g(x,y,z)=x^2+y^2+z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-5)=2x\lambda \\ 2(y-5)=2y\lambda \\ 2(z-4)=1\cdot\lambda \\ x^2+y^2+z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-5)=x\lambda \\ (y-5)=y\lambda \\ (z-4)=\lambda/2 \\ x^2+y^2+z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x=5 & \cdots\cdots \boxed{1} \\ (1-\lambda)y=5 & \cdots\cdots \boxed{2} \\ z=\lambda/2+4 & \cdots\cdots \boxed{3} \\ x^2+y^2+z=4 & \cdots\cdots \boxed{4} \end{cases}$$

$$\left(\frac{5}{1-\lambda}\right)^2+\left(\frac{5}{1-\lambda}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}+4\right)=4 \Rightarrow \frac{2\cdot 25}{(1-\lambda)^2}=-\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda(1-\lambda)^2=-100 \Rightarrow \lambda^3-2\lambda^2+\lambda+100=0$$
$$\Rightarrow (\lambda+4)(\lambda^2-6\lambda+25)=0$$

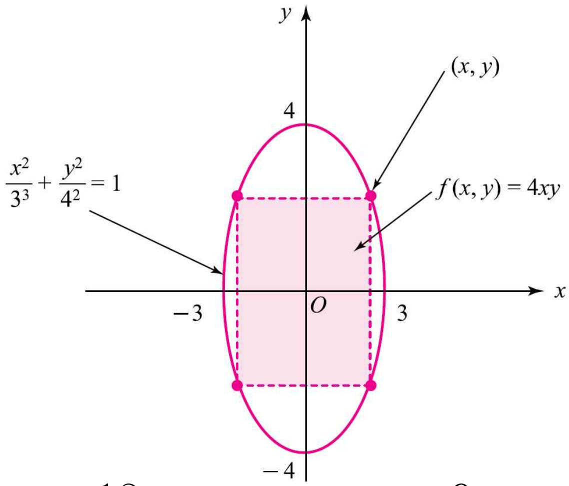
$$\lambda=-4 \Rightarrow x=\frac{5}{5}=1,\ y=\frac{5}{5}=1,\ z=\frac{-4}{2}+4=2$$

가장 가까운 점 : $(1,1,2)$

예. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$을 만족하는 점 중에서 $f(x,y)=4xy,\ (x>0,\ y>0)$의 최댓값을 구하여라.

$f(x,y)=4xy,\ (x>0,\ y>0)$의 극값

제약조건 : $g(x,y)=\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$



$$\begin{cases} \nabla f=\lambda\nabla g \\ g(x,y,z)=x^2/9+y^2/16=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y=(2/9)x\lambda & \cdots\cdots \boxed{1} \\ 4x=(2/16)y\lambda & \cdots\cdots \boxed{2} \\ x^2/9+y^2/16=1 & \cdots\cdots \boxed{3} \end{cases}$$

$\boxed{1} \Rightarrow \lambda=18y/x$ $\boxed{2}$에 대입 $4x=(1/8)y\cdot\left(\dfrac{18y}{x}\right) \Rightarrow x^2=\dfrac{9}{16}y^2$

$\boxed{3}$에 대입 $\left(\dfrac{1}{9}\right)\left(\dfrac{9}{16}y^2\right)+\dfrac{y^2}{16}=1 \Rightarrow y^2=8 \Rightarrow y=2\sqrt{2}\,(y>0),\ x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\,(x>0)$

점 $(3/\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$에서 최대, $f(3/\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})=4\cdot 3/\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=24$

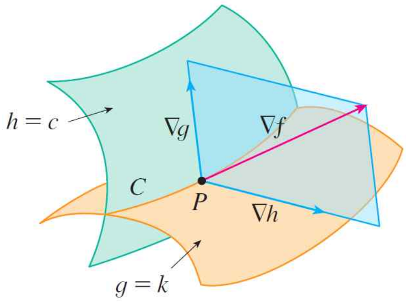
두 제약조건

두 제약조건 $g(x,y,z)=k$와 $h(x,y,z)=c$를 만족하는
$f(x,y,z)$의 최대값과 최소값을 구하는 문제
: 등위곡면 $g(x,y,z)=k$와 $h(x,y,z)=c$의 교차곡선 C 위에 존재하는 점 (x,y,z) 에서 f의 극값을 찾는다.

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0)+\mu\nabla h(x_0,y_0,z_0)$$

미지수 5개 x,y,z,λ,μ와 식 5개인 연립방정식을 푼다.

$$\begin{cases} f_x=\lambda g_x+\mu h_x \\ f_y=\lambda g_y+\mu h_y \\ f_z=\lambda g_z+\mu h_z \\ \text{제약조건 : } g(x,y,z)=k \\ \text{제약조건 : } h(x,y,z)=c \end{cases}$$



예제. 평면 $x-y+z=1$과 원기둥 $x^2+y^2=1$과의 교선인 곡선 위에서 함수 $f(x,y,z)=x+2y+3z$의 최댓값을 구하여라.

$f(x,y,z)=x+2y+3z$

제약조건 : $g(x,y,z)=x-y+z=1$

$h(x,y,z)=x^2+y^2=1$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)+\mu\nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z)=x-y+z=1 \\ h(x,y,z)=x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=\lambda+2x\mu & \cdots\cdots \boxed{1} \\ 2=-\lambda+2y\mu & \cdots\cdots \boxed{2} \\ 3=\lambda & \cdots\cdots \boxed{3} \\ x-y+z=1 & \cdots\cdots \boxed{4} \\ x^2+y^2=1 & \cdots\cdots \boxed{5} \end{cases}$$

$\boxed{3} \Rightarrow \lambda=3$을 $\boxed{1}$ & $\boxed{2}$에 대입 $\Rightarrow x=-1/\mu,\ \ y=5/(2\mu)$

$\boxed{5}$에 대입 $\Rightarrow \left(\dfrac{1}{\mu}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2\mu}\right)^2=1 \Rightarrow 4\mu^2=29 \Rightarrow \mu^2=\dfrac{29}{4} \Rightarrow \mu=\pm\dfrac{\sqrt{29}}{2}$

$$\mu=\frac{\sqrt{29}}{2} \Rightarrow x=-\frac{2}{\sqrt{29}},\ y=\frac{5}{\sqrt{29}}$$

$\boxed{4}$에 대입 $\Rightarrow \left(-\frac{2}{\sqrt{29}}\right)-\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)+z=1 \quad \Rightarrow \quad z=1+\frac{7}{\sqrt{29}}$

$$\mu=-\frac{\sqrt{29}}{2} \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{29}},\ y=-\frac{5}{\sqrt{29}}$$

$\boxed{4}$에 대입 $\Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)-\left(-\frac{5}{\sqrt{29}}\right)+z=1 \Rightarrow z=1-\frac{7}{\sqrt{29}}$

$f(-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1+\frac{7}{\sqrt{29}})=-\frac{2}{\sqrt{29}}+2\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)+3\left(1+\frac{7}{\sqrt{29}}\right)=3+\sqrt{29}$: 최대

$f(\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1-\frac{7}{\sqrt{29}})=\frac{2}{\sqrt{29}}+2\left(-\frac{5}{\sqrt{29}}\right)+3\left(1-\frac{7}{\sqrt{29}}\right)=3-\sqrt{29}$: 최소