# 일반 영역 위에서의 이중적분

## 일반 영역

## 푸비니의 정리

## 반복적분 - 적분 순서 바꾸기

## 이중적분의 성질

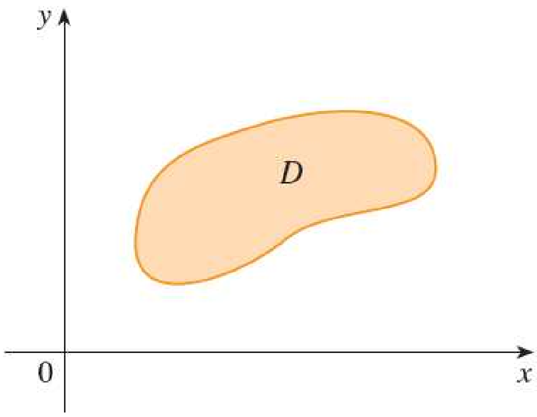
## 넓이, 부피

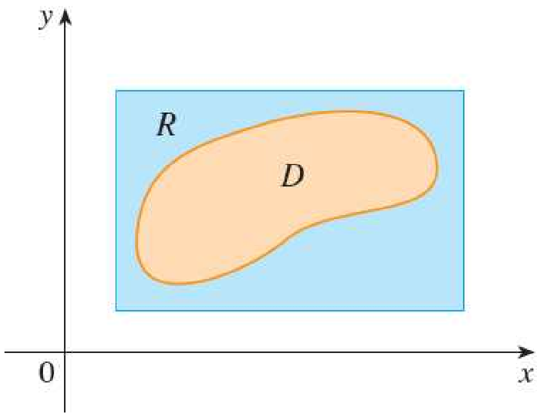




## 일반영역

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\in R,\ \ (x,y)\notin D \end{cases}$$

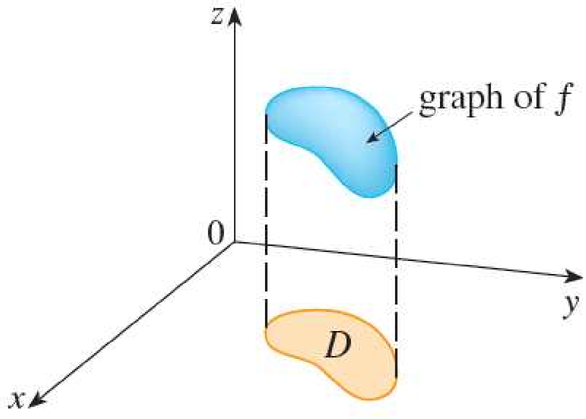


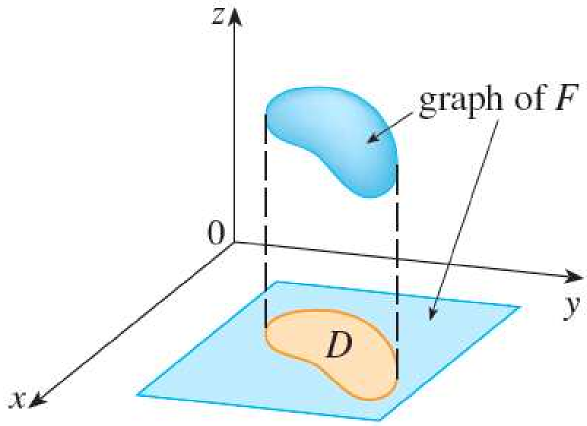



영역 $R$에 대해서 $F$의 이중적분이 존재한다면
$D$ 위에서 $f$의 이중적분을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA$$

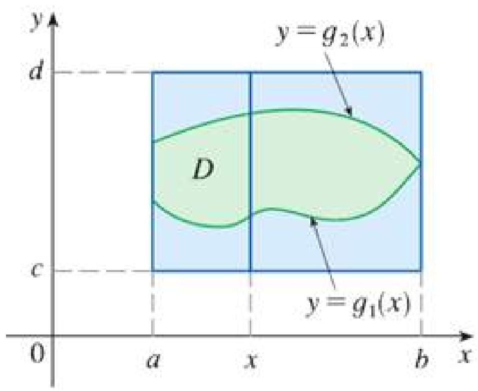
단, $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R,\ (x,y) \notin D \end{cases}$







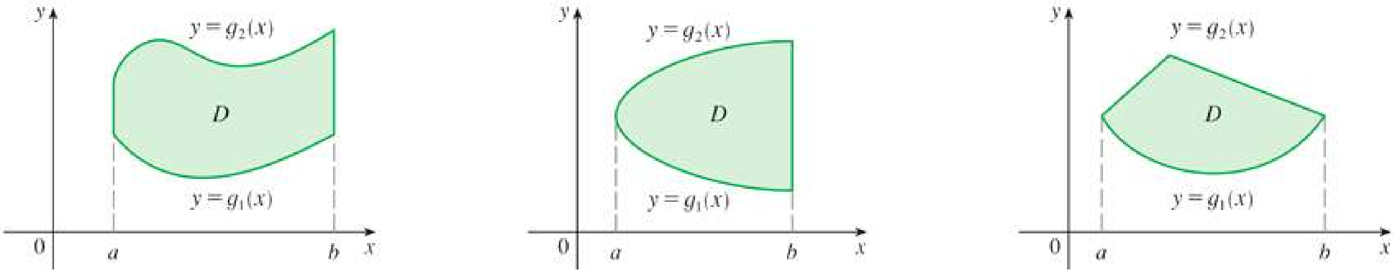

$y < g_1(x)$ 또는 $y > g_2(x)$인 $(x,y)$에 대해 $F(x,y) = 0$이다.

즉, $(x,y) \notin D$에 대해서는 $F(x,y) = 0$이다.

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA &= \int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx \end{aligned}$$

평면영역 $D$ 가 $x$를 변수로 갖는 두 연속함수의 그래프 사이에 있다. 즉, 폐구간 $[a,b]$에서 연속인 두 함수 $g_1$과 $g_2$에 대해서

$$D=\{(x,y)\,|\,a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}\ :\ \textbf{타입 I}$$




$f$가 타입 I의 영역

$D=\{(x,y)\,|\,a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ 상에서 연속 함수이면

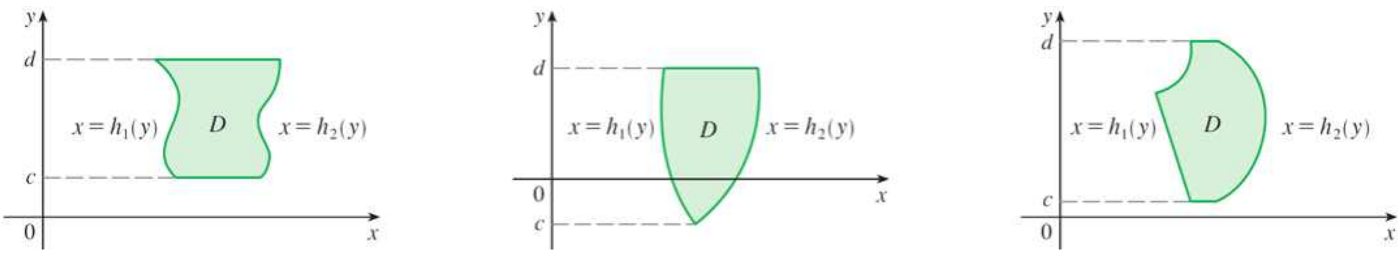
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$





평면영역 $D$ 가 $y$를 변수로 갖는 두 연속함수의 그래프 사이에 있다. 즉, 폐구간 $[c,d]$에서 연속인 두 함수 $h_1$과 $h_2$에 대해서

$$D=\{(x,y)\,|\,c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}\ :\ \textbf{타입 II}$$




$f$가 타입 II의 영역

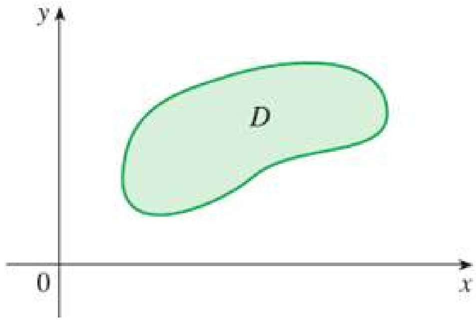
$D=\{(x,y)\,|\,c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$ 상에서 연속 함수이면

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \underbrace{\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right]}_{y\text{에 관해 적분}} dx$$

$$\Downarrow$$

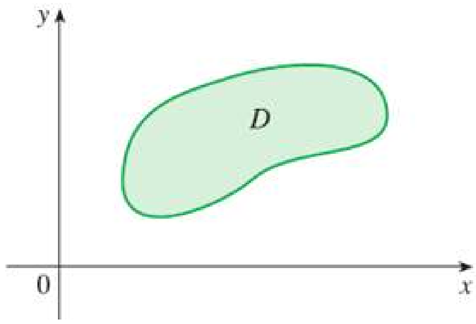
$$x\text{만의 함수}$$




$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \underbrace{\left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right]}_{x\text{에 관해 적분}} dy$$

$$\Downarrow$$

$$y\text{만의 함수}$$








# 푸비니 정리

**푸비니 정리(Fubini's Theorem)**

영역 $D$에서 연속인 함수 $f$에 대해 다음이 성립한다.

(1) 구간 $[a,b]$에서 $g_1(x) \le g_2(x)$이고

연속인 두 함수 $y = g_1(x)$와 $y = g_2(x)$에 대해

$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$이면

다음이 성립한다.

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

## 푸비니 정리(Fubini's Theorem)

영역 $D$에서 연속인 함수 $f$에 대해 다음이 성립한다.

(2) 구간 $[c,d]$에서 $h_1(y) \le h_2(y)$이고

연속인 두 함수 $x = h_1(y)$와 $x = h_2(y)$에 대해

$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$이면

다음이 성립한다.

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$





## 푸비니 정리(Fubini's Theorem)

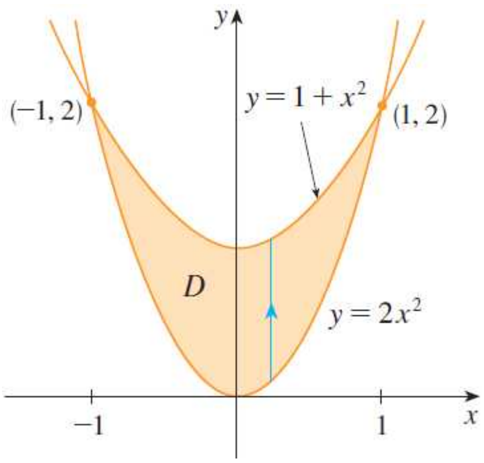
영역 $D$에서 연속인 함수 $f$에 대해 다음이 성립한다.

$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$

$= \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx \\[2ex] \displaystyle\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \end{cases}$$

**예제** $D$ 가 포물선 $y=2x^2$과 $y=1+x^2$에 의해 둘러싸인 영역일 때 $\iint_D (x+2y)\,dA$의 값을 구하여라.



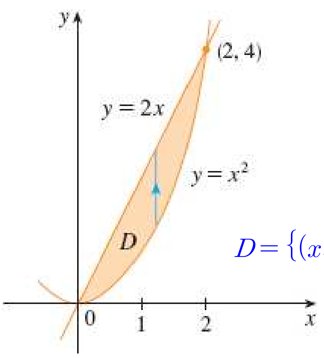

$$D=\left\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ 2x^2\le y\le 1+x^2\right\}$$

$$\begin{aligned}
&\iint_D (x+2y)\,dA\\
&=\int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)\,dy\,dx\\
&=\int_{-1}^{1}\left[xy+y^2\right]_{2x^2}^{1+x^2}dx\\
&=\int_{-1}^{1}\left[\{x(1+x^2)+(1+x^2)^2\}-\{x(2x^2)+(2x^2)^2\}\right]dx\\
&=\int_{-1}^{1}(-3x^4-x^3+2x^2+x+1)\,dx=2\int_0^1(-3x^4+2x^2+1)\,dx\\
&=2\left[-\frac{3}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1=2\left(-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}+1\right)=2\cdot\frac{16}{15}=\frac{32}{15}
\end{aligned}$$



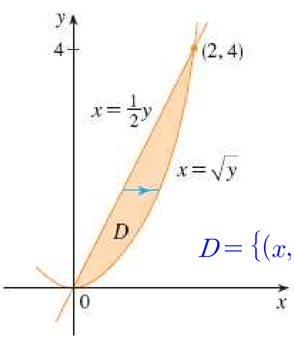


**예제** 포물면 $z=x^2+y^2$ 아래에 있고, 직선 $y=2x$와 포물선 $y=x^2$으로 둘러싸인 $xy$ 평면에 있는 영역 $D$ 위에 있는 입체의 부피를 구하여라.




$D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\ x^2\le y\le 2x\right\}$

$$\begin{aligned}
V&=\iint_D (x^2+y^2)\,dA=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)\,dy\,dx\\
&=\int_0^2\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{2x}dx\\
&=\int_0^2\left[\left\{x^2(2x)+\frac{(2x)^3}{3}\right\}-\left\{x^2(x^2)+\frac{(x^2)^3}{3}\right\}\right]dx\\
&=\int_0^2\left(-\frac{x^6}{3}-x^4+\frac{14}{3}x^3\right)dx\\
&=\left[-\frac{x^7}{21}-\frac{x^5}{5}+\frac{7}{6}x^4\right]_0^2=\frac{216}{35}
\end{aligned}$$



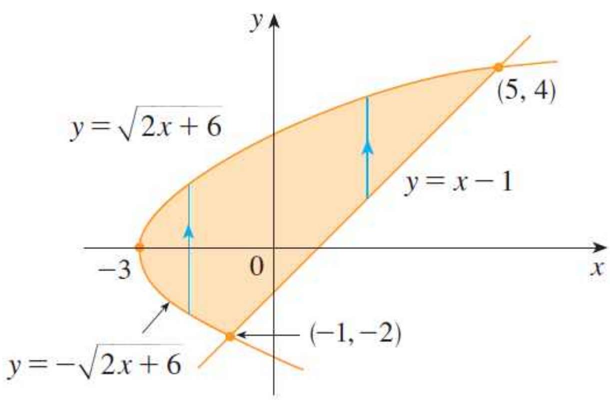

$D=\left\{(x,y)\mid 0\le y\le 4,\ y/2\le x\le \sqrt{y}\right\}$

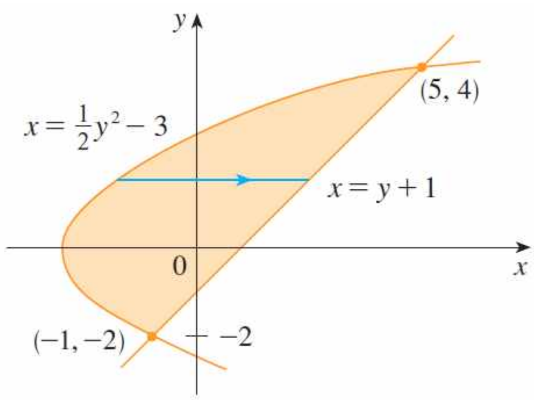
$$\begin{aligned}
V&=\iint_D (x^2+y^2)\,dA=\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}}(x^2+y^2)\,dx\,dy\\
&=\int_0^4\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{y/2}^{\sqrt{y}}dy\\
&=\int_0^4\left[\left\{\frac{(\sqrt{y})^3}{3}+(\sqrt{y})y^2\right\}-\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{y}{2}\right)^3+\left(\frac{y}{2}\right)y^2\right\}\right]dy\\
&=\int_0^4\left(-\frac{13}{24}y^3+y^{5/2}+\frac{1}{3}y^{3/2}\right)dy\\
&=\left[-\frac{13}{96}y^4+\frac{2}{7}y^{7/2}+\frac{1}{3}\frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^4=\frac{216}{35}
\end{aligned}$$

**예제** 직선 $y=x-1$과 포물선 $y^2=2x+6$에 의해 유계된 영역 $D$에 대해 $\iint_D xy\,dA$를 구하여라.

$$D=\left\{(x,y)\,|\,\begin{array}{ll} -3\le x\le -1, & -\sqrt{2x+6}\le y\le \sqrt{2x+6} \\ -1\le x\le 5, & x-1\le y\le \sqrt{2x+6}\end{array}\right\}$$

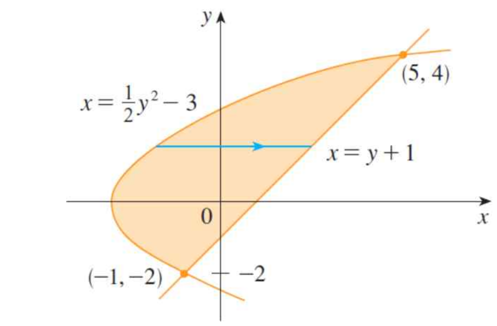
$$=\left\{(x,y)\,|\,-2\le y\le 4,\ \frac{y^2}{2}-3\le x\le y+1\right\}$$



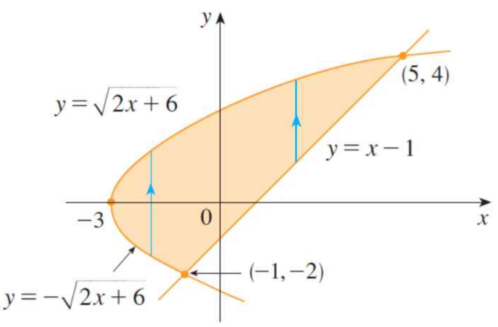







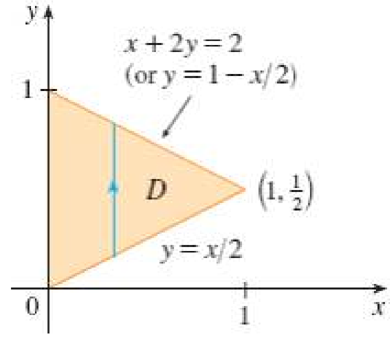

$$\begin{aligned}\iint_D xy\,dA &= \int_{-2}^{4}\int_{y^2/2-3}^{y+1} xy\,dx\,dy \\ &= \int_{-2}^{4}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{y^2/2-3}^{y+1} dy \\ &= \int_{-2}^{4}\frac{y}{2}\left[(y+1)^2-\left(\frac{y^2}{2}-3\right)^2\right] dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{4}+4y^3+2y^2-8y\right) dy \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24}+y^4+\frac{2}{3}y^3-4y^2\right]_{-2}^{4}=\frac{216}{35}\end{aligned}$$

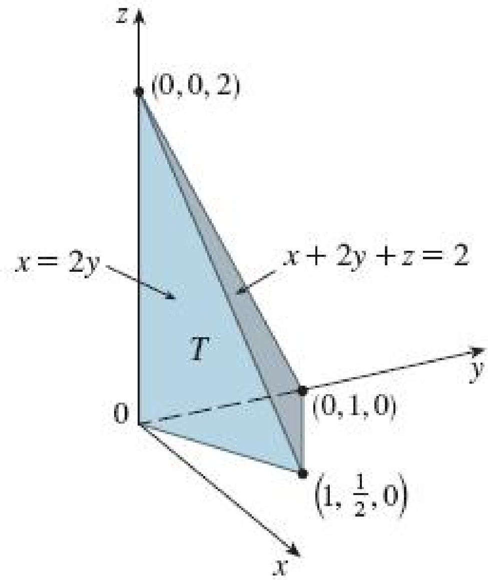



$$\iint_D xy\,dA=\int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx + \int_{-1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx$$

**예제** 평면 $x+2y+z=2$, $x=2y$, $x=0$, $z=0$에 의해 유계된 사면체의 부피를 구하여라.

$$D=\left\{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1,\ \frac{x}{2} \le y \le 1-\frac{x}{2}\right\}$$



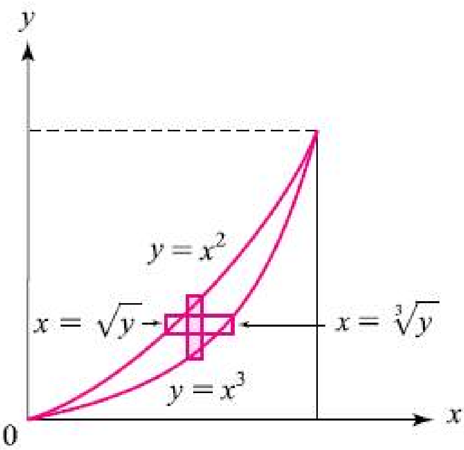

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (2-x-2y)\, dA \\
&= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2-x-2y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[2y-xy-y^2\right]_{x/2}^{1-x/2} dx \\
&= \int_0^1 \left[\left\{2\left(1-\frac{x}{2}\right)-x\left(1-\frac{x}{2}\right)-\left(1-\frac{x}{2}\right)^2\right\}-\left\{2\left(\frac{x}{2}\right)-x\left(\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right\}\right] dx \\
&= \int_0^1 (x^2-2x+1)\, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1 = \frac{1}{3}-1+1=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$





**예** 다음 반복 적분의 값을 찾고 그 적분 영역을 $xy$ 평면에 그려라.

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\, dy\, dx$$




$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left\{\int_{x^3}^{x^2} y\, dy\right\} dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^3}^{x^2} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\left[(x^2)^2-(x^3)^2\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^4-x^6)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{7-5}{35}=\frac{1}{35}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} y\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \left\{\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} y\, dx\right\} dy \\
&= \int_0^1 \left[xy\right]_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} dy \\
&= \int_0^1 \left[(\sqrt[3]{y})y-(\sqrt{y})y\right] dy \\
&= \int_0^1 \left(y^{4/3}-y^{3/2}\right) dy \\
&= \left[\frac{3}{7}y^{7/3}-\frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^1 = \frac{3}{7}-\frac{2}{5}=\frac{15-14}{35}=\frac{1}{35}
\end{aligned}
$$

**예** $D=[0,1]\times[0,1]$에서 함수 $f(x,y)=x^2+y$의 이중 적분을 찾아라.

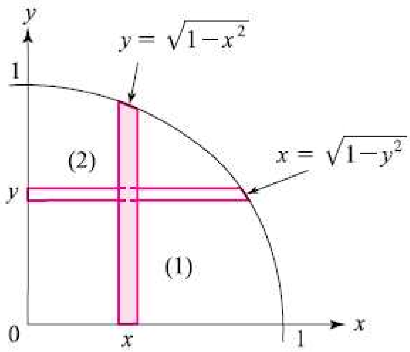
$$\iint_D (x^2+y)\,dA = \int_0^1\int_0^1 (x^2+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2y+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \left[\left\{x^2+\frac{1}{2}\right\}-0\right] dx = \int_0^1 (x^2+\frac{1}{2})\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

$$\iint_D (x^2+y)\,dA = \int_0^1\int_0^1 (x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{3}+xy\right]_0^1 dy = \int_0^1 \left[\left\{\frac{1}{3}+y\right\}-0\right] dy = \int_0^1 (\frac{1}{3}+y)\,dy = \left[\frac{1}{3}y+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$





**예** $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$일 때 $\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$를 찾아라.




$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx$$

삼각 치환법 이용

$y=x\tan\theta$

$\Rightarrow \quad dy=x\tan\theta\,d\theta$

계산 과정이 복잡

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\sqrt{x^2+y^2}\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^1 \left[\sqrt{(\sqrt{1-y^2})^2+y^2}-\sqrt{(0)^2+y^2}\right] dy = \int_0^1 (1-y)\,dy = \left[y-\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

예 영역 $D=[0,\pi]\times[0,\pi/2]$에서 함수 $f(x,y)=\sin(x+y)$가 적분 가능한가? 만약 이 함수가 적분 가능하다면 이중 적분 $\iint_D f(x,y)\,dA$를 찾아라.

함수 $f(x,y)=\sin(x+y)$는 $x+y$가 다항 함수이고 sin 함수로의 합성이므로 영역 $D$에서 유계이고 연속이므로 적분 가능

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dA &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\sin(x+y)\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}[-\cos(x+y)]_0^{\pi}\,dy\\ &=\int_0^{\pi/2}[-\cos(\pi+y)+\cos(0+y)]\,dy\\ &=[-\sin(\pi+y)+\sin y]_0^{\pi/2}\\ &=\left(-\sin(\pi+\frac{\pi}{2})+\sin\frac{\pi}{2}\right)-(-\sin(\pi+0)+\sin 0)=-(-1)+1=2\end{aligned}$$





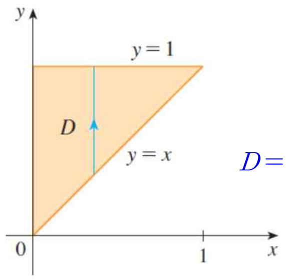
## 적분 순서 바꾸기

적분 순서에 따라 계산이 쉬울 수도,
어려울 수도 있고
계산이 가능할 수도
계산이 불가능할 수도 있다.

따라서 적분 영역과 적분 순서를 정하는 것에 따라 다중적분의 계산의 효율성은 다르다.

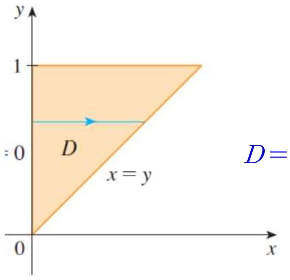
**예제** 반복적분 $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx$의 값을 구하여라.

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx = \int_x^1 \int_0^1 \sin(y^2)\, dx\, dy \quad \times$$




$D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx$$
$$= \iint_D \sin(y^2)\, dA$$




$D = \{(x,y) | 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\}$

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx = \iint_D \sin(y^2)\, dA$$
$$= \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[x \sin(y^2)\right]_0^y dy$$
$$= \int_0^1 \left[y \sin(y^2) - 0\right] dy$$
$$= \left[-\frac{1}{2}\cos(y^2)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left[\cos(1) - \cos(0)\right] = \frac{1}{2}(1 - \cos 1)$$





# 이중적분의 성질

$$\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]\, dA = \iint_D f(x,y)\, dA + \iint_D g(x,y)\, dA$$

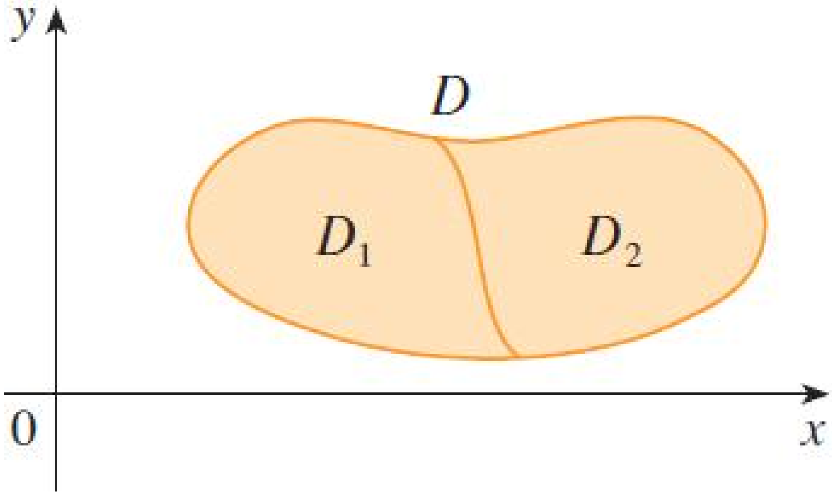
$$\iint_D cf(x,y)\, dA = c \iint_D f(x,y)\, dA$$

만약 $D$의 모든 점 $(x,y)$에 대해서 $f(x,y) \ge g(x,y)$이면,

$$\iint_D f(x,y)\, dA \ge \iint_D g(x,y)\, dA$$

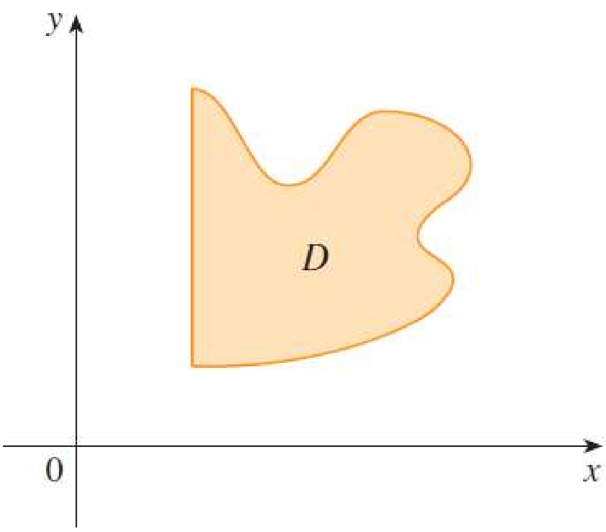
영역 $D$가 서로 겹치지 않는 $D_1, D_2$에 대해서 $D = D_1 \cup D_2$라면

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$

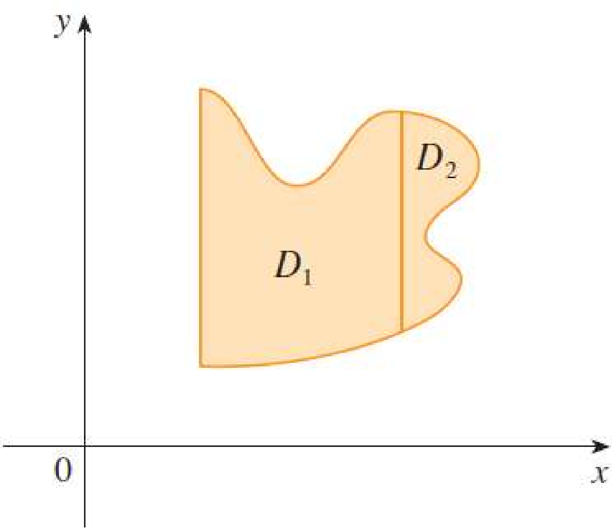







(a) $D$ is neither type I nor type II.

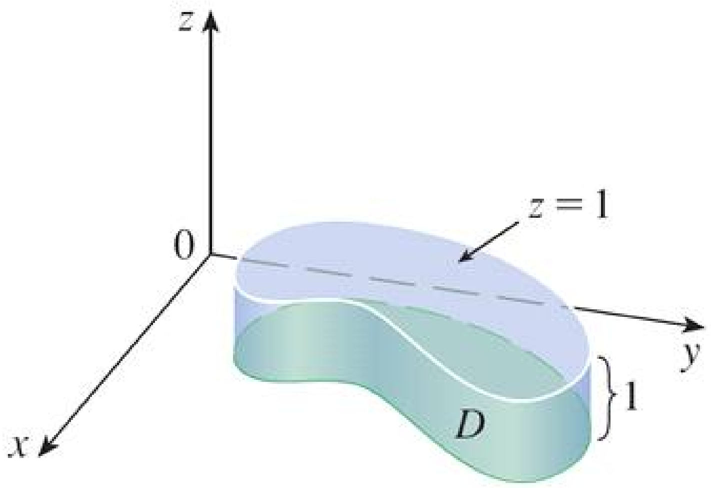



(b) $D = D_1 \cup D_2$, $D_1$ is type I, $D_2$ is type II.

## 넓이

영역 $D$ 상의 상수 함수 $f(x,y)=1$을 적분하면
$\Rightarrow$ $D$의 넓이 : $A(D)$를 얻는다.

$$\iint_D 1\, dA = A(D)$$



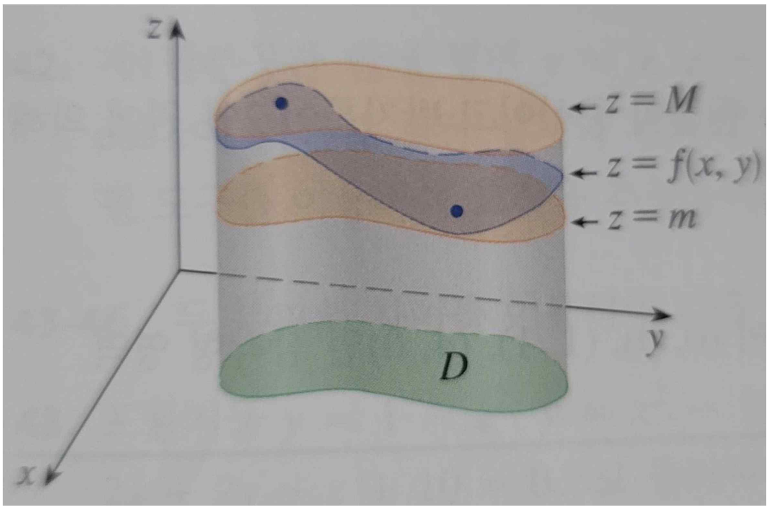





$D$ 안에 있는 모든 점 $(x,y)$에 대해서 $m \le f(x,y) \le M$이면

$$m \cdot A(D) \le \iint_D f(x,y)\, dA \le M \cdot A(D)$$

가 성립한다.



**예제** $D$가 중심이 원점이고 반지름이 2인 원판일 때,
적분 $\iint_D e^{\sin x \cos y}\, dA$의 값을 근사하여라.

$-1 \le \sin x \le 1, \quad -1 \le \cos y \le 1$
$\Rightarrow \ -1 \le \sin x \cos y \le 1$

$e^{-1} \le e^{\sin x \cos y} \le e^1 = e$

$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 1\, dy\, dx \qquad A(D) = \pi(2)^2 = 4\pi$$

$$= \int_{-2}^{2} [y]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\, dx = 4\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$$

$$\frac{1}{e}\cdot 4\pi \le \iint_D e^{\sin x \cos y}\, dA \le e \cdot 4\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi}{e} \le \iint_D e^{\sin x \cos y}\, dA \le 4\pi e$$





## 부피

영역 $D$에서 항상 $f(x,y) \ge 0$이고 적분 가능한 함수 $z = f(x,y)$의 이중 적분은 영역 $D$와 함수 $f(x,y)$에 의해 유계된 영역(둘러싸인 영역)으로 입체 $V$의 부피를 나타낸다.

$$V = \iint_D f(x,y)\, dA$$