방향도함수와 기울기벡터

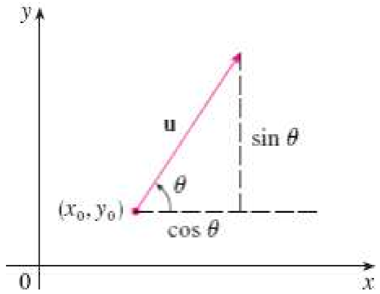
학습목표

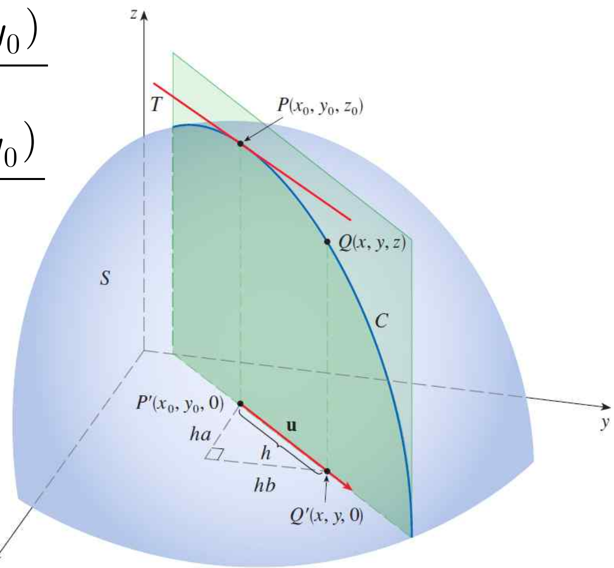
- 방향도함수, 기울기벡터
- 삼변수함수의 방향도함수
- 방향도함수의 최대화
- 등위곡면에 대한 접평면
- 기울기 벡터의 성질

방향도함수

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$





$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathrm{u} = < ha, hb > = < x-x_0, y-y_0 >$$

$$\frac{\Delta z}{h}=\frac{z-z_0}{h}=\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{h}=\frac{f(x_0+ha,y_0+hb)-f(x_0,y_0)}{h}$$

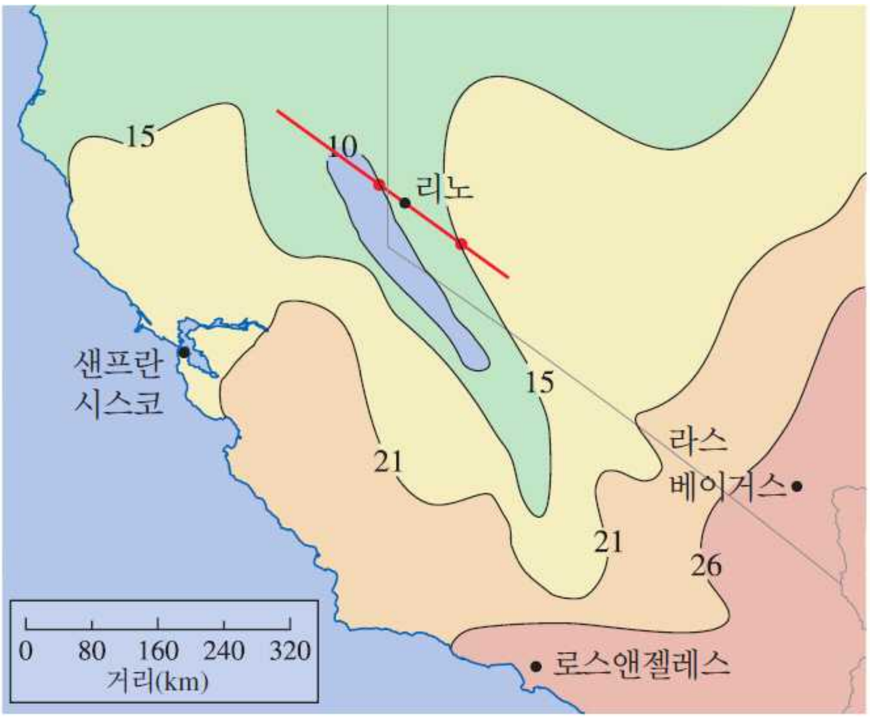
정의

단위벡터 $\mathbf{u} = < a,b >$ 방향에 대한
점 (x_0,y_0)에서
함수 f의 **방향도함수**(directional derivative)는

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+ha,\ y_0+hb) - f(x_0,y_0)}{h}$$

로 정의한다. (단, 극한이 존재할 경우)

예제. 그림의 기상도를 이용하여 리노에서 남동쪽으로 이동할 때 온도함수의 방향도함수의 값을 추정하여라.



정리

f가 x와 y의 미분가능 함수이면,
f는 임의의 단위벡터 $\mathrm{u} = \langle a, b \rangle$ 방향에 대한
f의 방향도함수를 가지며 다음과 같다.

$$D_{\mathrm{u}} f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= D_{\mathrm{u}} f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

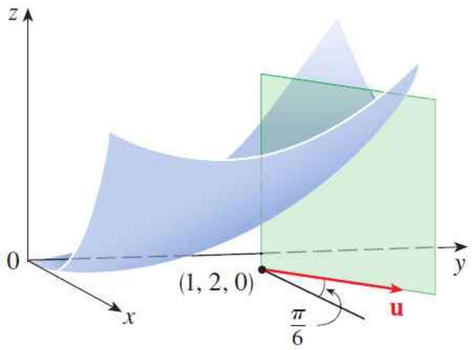
$$x = x_0 + ha,\ y = y_0 + hb \quad \Rightarrow \quad g(h) = f(x,y)$$

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x,y)\,a + f_y(x,y)\,b$$

$$h = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0,\ y = y_0$$

$$\begin{aligned} g'(0) &= f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b \\ D_{\mathrm{u}} f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b \\ D_{\mathrm{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta \end{aligned}$$

예제. $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$이고 단위벡터 u와 양의 x축이 이루는 각이 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$일 때 방향도함수 $D_{\mathrm{u}} f(x,y)$를 구하여라. $D_{\mathrm{u}} f(1,2)$의 값은 얼마인가?



$$\begin{aligned} D_{\mathrm{u}} f(x,y) &= f_x(x,y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x,y)\sin\frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{u}} f(1,2) &= (3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 2)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3 \cdot 1 + 8 \cdot 2)\frac{1}{2} \\ &= \frac{-3\sqrt{3} + 13}{2} \end{aligned}$$

기울기벡터

정의 이변수함수 $f(x,y)$에 대해, f의 **기울기벡터**는
다음과 같이 정의된 벡터 함수 ∇f(델-del f) 또는 grad f이다.

$$\nabla f(x,y) = \ < f_x(x,y),\ f_y(x,y)\ > = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{j}$$

점 $\mathrm{x}_0 = (x_0, y_0)$에서 f_x, f_y가 존재하는 이변수함수 $f(x,y)$에 대해,
점 x_0에서 f의 **물매**, **그래디언트**(gradient), **기울기벡터**는
다음과 같이 정의된 벡터 함수 ∇f(델-del f) 또는 grad f이다.

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0,y_0) &= \ < f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)\ > \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathrm{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\mathrm{j}\end{aligned}$$

정리

$$D_{\mathrm{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathrm{u}$$

$$\begin{aligned}D_{\mathrm{u}} f(x,y) &= f_x(x,y)\,a + f_y(x,y)\,b \\ &= \ < f_x(x,y),\ f_y(x,y)\ > \ \cdot \ < a,b > \\ &= \ < f_x(x,y),\ f_y(x,y)\ > \ \cdot \mathrm{u}\end{aligned}$$

예제. $f(x,y)=\sin x+e^{xy}$에 대해, 함수 f의 기울기벡터를 구하여라.

$$\nabla f(x,y) = \ < f_x(x,y),\ f_y(x,y) > \qquad = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{j}$$

$$= \ < \cos x+ye^{xy},\ xe^{xy} > \qquad = (\cos x+ye^{xy})\,\mathrm{i}+(xe^{xy})\,\mathrm{j}$$

$$\nabla f(0,1) = \ < \cos(0)+1\cdot e^{0\cdot 1}, 0\cdot e^{0\cdot 1} >$$

$$= \ < 2,0 > \qquad = 2\,\mathrm{i}$$

예 $f(x,y)=xy^2$에 대해, 점 $(4,-1)$에서 벡터 $\mathrm{v}=2\mathrm{i}+3\mathrm{j}$ 방향의 함수 f의 방향도함수를 구하여라.

(i) 정의 $D_{\mathrm{u}}f(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ha,\ y_0+hb)-f(x_0,y_0)}{h}$를 이용

$$\mathrm{u}=\frac{\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}}(2\mathrm{i}+3\mathrm{j})= \ < \frac{2}{\sqrt{13}},\ \frac{3}{\sqrt{13}} >$$

$$D_{\mathrm{u}}f(4,\ -1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+\frac{2}{\sqrt{13}}h,\ -1+\frac{3}{\sqrt{13}}h)-f(2,\ -1)}{h} \qquad =\lim_{h\to 0}\frac{\left(4+\frac{2}{\sqrt{13}}h\right)\left(-1+\frac{3}{\sqrt{13}}h\right)^2-4\cdot(-1)^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(4+\frac{2}{\sqrt{13}}h\right)\left(1-2\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}h+\frac{9}{13}h^2\right)-4}{h} \qquad =\lim_{h\to 0}\frac{\left(4+\frac{2}{\sqrt{13}}h\right)\left(1-2\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}h+\frac{9}{13}h^2\right)-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left\{4+\left(\frac{2}{\sqrt{13}}-\frac{24}{\sqrt{13}}\right)h+\left(\frac{-12}{13}+\frac{36}{\sqrt{13}}\right)h^2+\frac{18}{13\sqrt{13}}h^3\right\}-4}{h} \qquad =\lim_{h\to 0}\frac{h\left(-\frac{22}{\sqrt{13}}+\frac{24}{\sqrt{13}}h+\frac{18}{13\sqrt{13}}h^2\right)}{h}$$

$$=-\frac{22}{\sqrt{13}}$$

(ii) 기울기벡터를 이용

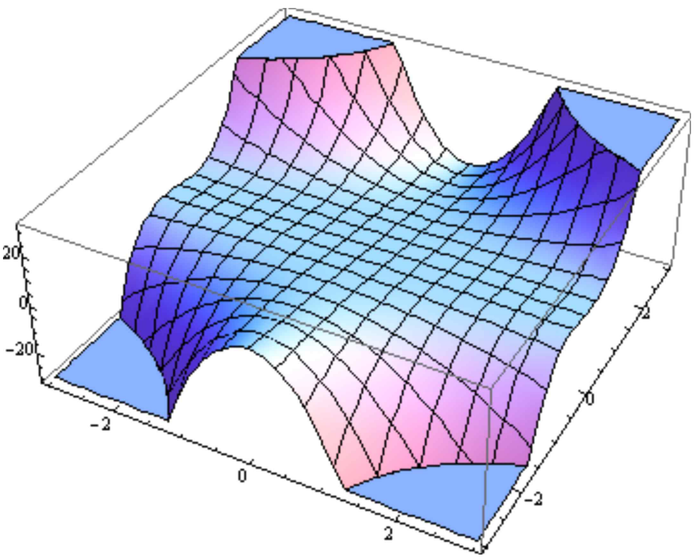
$$\nabla f(x,y) = \ < f_x(x,y),\ f_y(x,y) > \ = \ < y^2,\ 2xy >$$

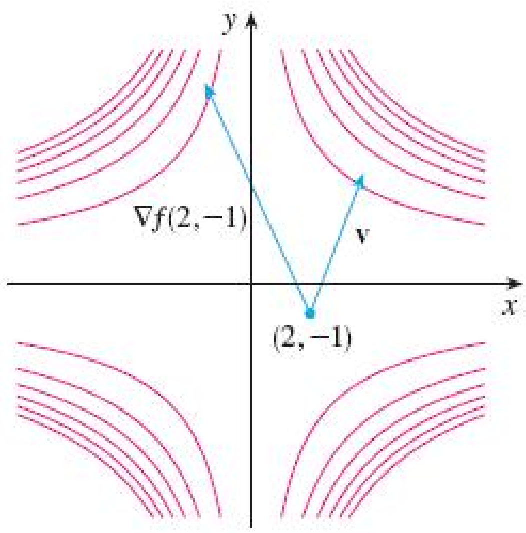
$$\nabla f(4,\ -1) = \ < (-1)^2,\ 2 \cdot 4 \cdot (-1) > \ = \ < 1,\ -8 >$$

$$\mathrm{u} = \frac{\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}}(2\mathrm{i}+3\mathrm{j}) = \ < \frac{2}{\sqrt{13}},\ \frac{3}{\sqrt{13}} >$$

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{u}} f(4,\ -1) &= \nabla f(4,\ -1) \cdot \mathrm{u} \\ &= \ < 1,\ -8 > \cdot < \frac{2}{\sqrt{13}},\ \frac{3}{\sqrt{13}} > \\ &= \frac{2-24}{\sqrt{13}} = -\frac{22}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

예제. 함수 $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$의 점 $(2,-1)$에서 벡터 $\mathrm{v} = 2\mathrm{i}+5\mathrm{j}$의 방향으로의 방향도함수를 구하여라.





(i) 정의 $D_{\mathrm{u}} f(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + ha,\ y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$ 를 이용

$$\mathrm{u} = \frac{\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 5^2}}(2\mathrm{i} + 5\mathrm{j}) = \ < \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} >$$

$$\begin{aligned}
D_{\mathrm{u}} f(2,\ -1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + \frac{2}{\sqrt{29}}h,\ -1 + \frac{5}{\sqrt{29}}h) - f(2,\ -1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\left(2 + \frac{2}{\sqrt{29}}h\right)^2 \left(-1 + \frac{5}{\sqrt{29}}h\right)^3 - 4\left(-1 + \frac{5}{\sqrt{29}}h\right)\right] - [2^2 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\left(4 + 2\frac{4}{\sqrt{29}}h + \frac{4}{29}h^2\right)\left(-1 + 3 \cdot 1 \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}h + 3 \cdot (-1) \cdot \frac{25}{29}h^2 + \frac{125}{29\sqrt{29}}h^3\right) - 4\left(-1 + \frac{5}{\sqrt{29}}h\right)\right] - [-4 + 4]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\left[-4 + \left(-\frac{8}{\sqrt{29}} + \frac{60}{\sqrt{29}}\right)h + \left(-\frac{4}{29} + \frac{120}{29} - \frac{300}{29}\right)h^2 + \left(\frac{60}{29\sqrt{29}} - \frac{600}{29\sqrt{29}} + \frac{500}{29\sqrt{29}}\right)h^3 + \left(-\frac{300}{841} + \frac{1000}{841}\right)h^4 + \frac{500}{841\sqrt{29}}h^5 + 4 - \frac{20}{\sqrt{29}}h\right] - [-4 + 4]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{32}{\sqrt{29}}h - \frac{184}{29}h^2 - \frac{40}{29\sqrt{29}}h^3 + \frac{700}{841}h^4 + \frac{500}{841\sqrt{29}}h^5}{h} \\
&= \frac{32}{\sqrt{29}}
\end{aligned}$$

(ii) 기울기벡터를 이용

$$\nabla f(x, y) = \ < f_x(x, y),\ f_y(x, y) > \ = \ < 2xy^3,\ 3x^2y^2 - 4 >$$

$$\nabla f(2,\ -1) = \ < 2 \cdot (2) \cdot (-1)^3,\ 3 \cdot (2)^2 \cdot (-1)^2 - 4 > \ = \ < -4,\ 8 >$$

$$\mathrm{u} = \frac{\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 5^2}}(2\mathrm{i} + 5\mathrm{j}) = \ < \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} >$$

$$\begin{aligned}
D_{\mathrm{u}} f(2,\ -1) &= \nabla f(2,\ -1) \cdot \mathrm{u} \\
&= \ < -4,\ 8 > \cdot < \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} > \\
&= \frac{-8 + 40}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}
\end{aligned}$$

예 금속판에서 전압의 분포 V가 다음과 같다고 하자.

$$V(x,y) = 50 - x^2 - 4y^2$$

(1) 점 $(1,-2)$에서 전압이 가장 급격하게 증가하는 방향과 급격하게 감소하는 방향을 찾아라.

(2) (1)에서 구한 각 방향으로의 함숫값의 증가율과 감소율의 크기는 각각 얼마인가?

(3) 점 $(1,-2)$에서 전압 V의 변화가 없는 방향을 찾아라.

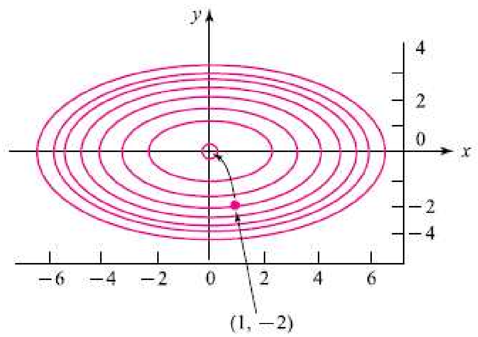
예제 앞의 예제에서 금속판에서 한 입자가 점 $(1,-2)$에서 시작하여 항상 전압 V가 가장 빨리 증가하는 방향으로 운동한다고 할 때 입자의 경로를 찾아라.

$\nabla V = -2x\,\mathbf{i} - 8y\,\mathbf{j}$

$$x'(t) = -2c\,x(t), \quad y'(t) = -8c\,y(t), \qquad (\text{단, } c>0\text{는 상수})$$

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -2c\,, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -8c$$

$$x(t) = c_1 e^{-2ct}, \quad y(t) = c_2 e^{-8ct}, \qquad (\text{단, } c_1, c_2\text{는 적분상수})$$



전미분

$$z = f(x,y)$$

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\ &= \nabla f \cdot \langle dx, dy \rangle \end{aligned}$$

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \cdot \langle dx_1, dx_2, \cdots, dx_n \rangle \\ &= \nabla f \cdot \langle dx_1, dx_2, \cdots, dx_n \rangle \end{aligned}$$

연쇄법칙

$$z = f(x,y),\ \ x = g(t),\ y = h(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle \\ &= \nabla f \cdot \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\rangle \end{aligned}$$

$$z = f(x,y),\ \ x = g(s,t),\ y = h(s,t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= \left\langle \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s} \right\rangle \\ &= \nabla f \cdot \left\langle \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \left\langle \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \right\rangle \\ &= \nabla f \cdot \left\langle \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \right\rangle \end{aligned}$$

삼변수함수

정의

단위벡터 $\mathrm{u}=<\mathrm{a,b,c}>$ 방향에 대한 (x_0,y_0,z_0)에서 f의 방향도함수

$$D_{\mathrm{u}}f(x_0,y_0,z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ha,y_0+hb,z_0+hc)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

로 정의한다(단, 극한이 존재할 경우)

정의

$$D_{\mathrm{u}}f(\mathrm{x}_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{x}_0+h\mathrm{u})-f(\mathrm{x}_0)}{h}$$

$$D_{\mathrm{u}}f(x,y,z)=f_x(x,y,z)a+f_y(x,y,z)b+f_z(x,y,z)c$$

$$\nabla f(x,y,z)=<f_x(x,y,z,f_y(x,y,z),f_z(x,y,z)>$$

$$\nabla f=<f_x,f_y,f_y\geqq\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{j}+\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{k}$$

$$D_{\mathrm{u}}f(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)\cdot\mathrm{u}$$

예제. $f(x,y,z) = x\sin yz$

방향도함수의 최대화

정리

f가 이변수 또는 삼변수를 갖는 미분가능 함수라고 가정하자.
방향도함수 $D_{\mathrm{u}}\mathrm{f}(\mathrm{x})$의 최대값은 $|\nabla f(\mathrm{x})|$이고,
이것은 기울기 벡터 $\nabla f(\mathrm{x})$와 벡터 u의 방향이 일치할 때 생긴다.

$$D_{\mathrm{u}}f = \nabla f \cdot \mathrm{u} = |\nabla f||\mathrm{u}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$

정리

점 (x,y)에서 이변수 함수 $f(x,y)$의 일계 편도함수가 연속 $\Rightarrow$
(1) $\nabla f(x,y) = 0$이면 임의의 단위 벡터 u에 대해 $D_{\mathrm{u}}\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0$
(2) 함수 f의 값이 가장 빨리 증가하는 방향은 $\nabla f(x,y)$의 방향
(3) 함수 f의 값이 가장 빨리 감소하는 방향은 $-\nabla f(x,y)$의 방향

예제. $f(x,y,) = xe^y$

예제. $T(x,y,z) = \dfrac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$

등위곡면에 대한 접평면

곡면 S의 방정식 : $F(x,y,z)=k$

$P(x_0,y_0,z_0)$: 곡면 S 위의 점

C : 곡면 S 위에 놓여있고, 점 P를 지나는 임의의 곡선

$\mathbf{r}(\mathrm{t})=<\mathrm{x}(\mathrm{t}),\mathrm{y}(\mathrm{t}),\mathrm{z}(\mathrm{t})>$: 곡선 C에 대한 연속인 벡터함수

$\mathbf{r}(\mathrm{t}_0)=<\mathrm{x}(\mathrm{t}_0),\mathrm{y}(\mathrm{t}_0),\mathrm{z}(\mathrm{t}_0)>$

$(x(t),y(t),z(t))$: S의 방정식

$F(x(t),y(t),z(t))=k$

x,y,z : t의 미분가능한 함수

F : 미분가능

By 연쇄법칙,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0$$

$\nabla F=<F_x,F_y,F_z>$

$\mathbf{r}'(\mathrm{t})=<\mathrm{x}'(\mathrm{t}),\mathrm{y}'(\mathrm{t}),\mathrm{z}'(\mathrm{t})>$

$\nabla F\cdot\mathbf{r}'(\mathrm{t})=0$

특히, $t=t_0$에서 $\mathbf{r}(\mathrm{t}_0)=<\mathrm{x}(\mathrm{t}_0),\mathrm{y}(\mathrm{t}_0),\mathrm{z}(\mathrm{t}_0)>$이므로

$\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot\mathbf{r}'(\mathrm{t}_0)=0$

$\nabla F(x_0,y_0,z_0)$: P를 지나면서 S 위에 놓인 임의의 곡선 C에 대한 접선벡터 $\mathbf{r}'(\mathrm{t}_0)$에 수직

$\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq 0 \Rightarrow$ P를 지나고 법선벡터 $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$를 가지는 평면

점 $P(x_0,y_0,z_0)$에서의 등위곡면 $F(x,y,z)=k$에 대한 접평면

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

: 점 $P(x_0,y_0,z_0)$에서의 등위곡면 $F(x,y,z)=k$에 대한 접평면

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

: P에서의 곡면 S에 대한 법선

(P를 지나고 접평면에 수직인 직선)

예제 다음 타원면의 점 $(-2,1,-3)$에서의 접평면과 법선의 방정식을 구하여라.

$$\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$$

예제 곡면 $z = 2x^2 + y^2$의 점 $(1,1,3)$에서 접평면을 구하여라.

예제 이엽 쌍곡면 $x^2 - \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$에 있는 점 $(\sqrt{3}, 2, 1)$에서 접평면의 방정식과 법선의 방정식을 찾아라.

예제 쌍곡 포물면 $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = z$에 있는 점 $(4, 1, 3)$에서 접평면의 방정식과 법선의 방정식을 찾아라.

기울기 벡터의 중요성

정리

f를 $\nabla f(\mathrm{x}) \neq 0$인 이변수 또는 삼변수의 미분가능한 함수라 하자.

x에서 단위벡터 u 방향으로 f의 방향도함수는

로 주어진다.

$\nabla f(\mathrm{x})$는 x에서 f의 증가율이 최대인 방향을 가리키며 최대변화율은 $|\nabla f(\mathrm{x})|$이다.

$\nabla f(\mathrm{x})$는 x를 지나는 f의 등위곡선 또는 등위곡면과 수직이다.