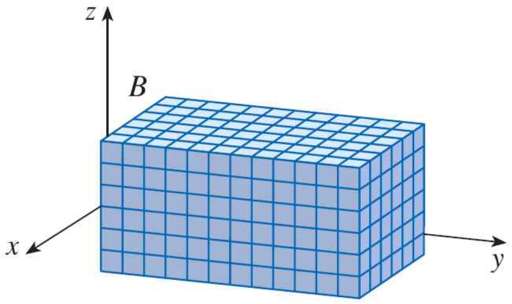
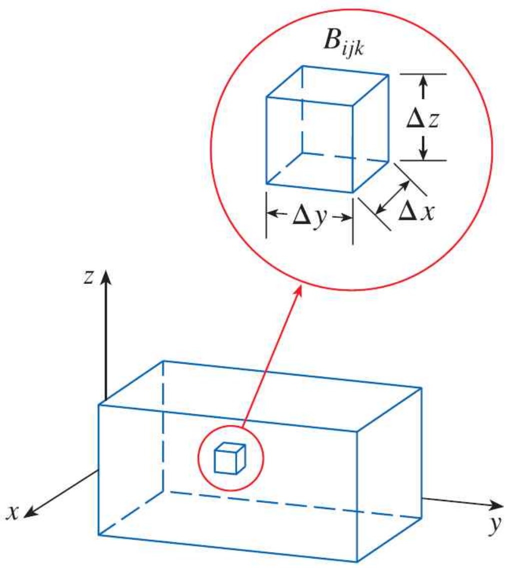
삼중적분

학습목표

- 직육면체 위에서의 삼중적분
- 일반영역 위에서의 삼중적분
- 적분 순서 바꾸기
- 삼중적분의 응용





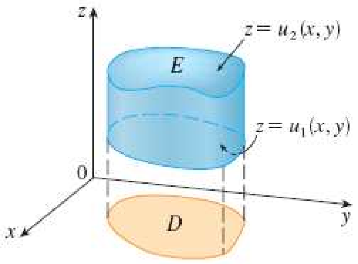
만약 극한이 존재한다면,
상자 B에 대한 f의 삼중적분은

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$$

만약 f가 직육면체 상자
$B=[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$에서 연속이면

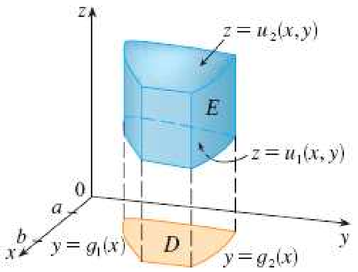
$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

D가 타입 I의 평면 영역인 타입 I의 입체 영역



$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

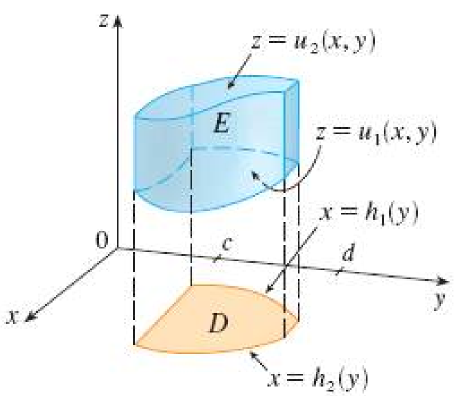
$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$



$$E = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

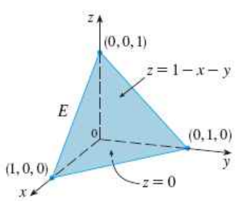
D가 타입 II의 평면 영역인 타입 I의 입체 영역

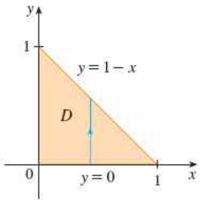


$$E = \{(x, y, z) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

예제. $\iiint_E z\,dV$의 값을 구하여라. 단, E는 4개의 평면 $x=0$, $y=0$, $x+y+z=1$로 둘러싸인 사면체 영역이다.





타입 I

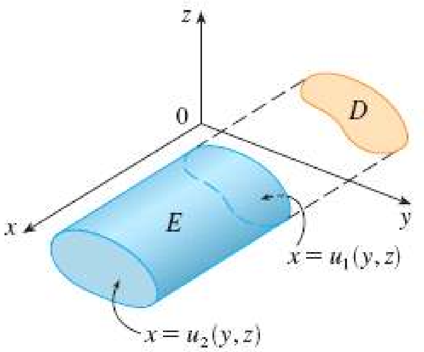
$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le z \le 1 - x - y\}$$

$$\iiint_E z\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \tfrac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\,dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

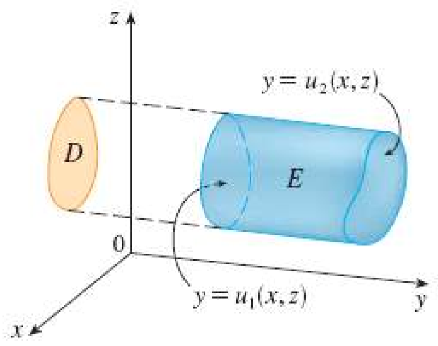
타입 II



$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \le x \le u_2(y, z)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)\,dx\right] dA$$

타입 III



$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \le y \le u_2(x, z)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z)\,dy\right] dA$$

예제. 포물면 $y = x^2 + z^2$과 평면 $y = 4$에 의해 유계된 영역을 E라 할 때 $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV$를 계산하여라.

적분 순서 바꾸기

예제. 반복적분 $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$를 삼중적분으로 나타내어라. 그런 다음 그 삼중적분을 다음의 순서로 적분하는 반복적분으로 다시 나타내어라.

(a) x, z, y의 순서

(b) y, x, z의 순서

삼중적분의 응용

$$V(E) = \iiint_E dV$$

예제. 평면 $x+2y+z=2$, $x=2y$, $x=0$, $z=0$에 의해 유계된 사면체 영역 T의 부피를 삼중적분을 이용하여 구하여라.

영역 E 의 **밀도 함수** $\rho(x,y,z)$**에 대한 질량** 구하기

$$m = \lim_{l,m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_{ij}^*,\, y_{ij}^*,\, z_{ij}^*)\, \Delta V = \iiint_E \rho(x,y,z)\, dV$$

영역 E를 차지하고 주어진 **전하밀도 함수** $\sigma(x,y,z)$**에 대한 전체 전하량** Q는

$$Q = \iiint_D \sigma(x,y,z)\, dV$$

세 좌표면에 대한 모멘트

yz평면에 대한 모멘트

$$M_{yz} = \iiint_E x\, \rho(x,y,z)\, dV$$

xz평면에 대한 모멘트

$$M_{xz} = \iiint_E y\, \rho(x,y,z)\, dV$$

xy평면에 대한 모멘트

$$M_{xy} = \iiint_E z\, \rho(x,y,z)\, dV$$

영역 E(입체 영역)의

질량 중심의 좌표 $(\overline{x}, \overline{y}. \overline{z})$는

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1}{m} \iiint_E x\,\rho(x,y,z)\,dV$$

$$\overline{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1}{m} \iiint_E y\,\rho(x,y,z)\,dV$$

$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{1}{m} \iiint_E z\,\rho(x,y,z)\,dV$$

$$m = \iiint_E \rho(x,y,z)\,dV$$

밀도함수가 상수인 경우 입체의 질량 중심을 E의 무게중심

x축에 관한 관성모멘트

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\,\rho(x,y,z)\,dV$$

y축에 관한 관성모멘트

$$I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\,\rho(x,y,z)\,dV$$

z축에 관한 관성모멘트

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\,\rho(x,y,z)\,dV$$

세 연속확률변수 X, Y, Z가 주어질 때 결합밀도함수는 (X, Y, Z)가 E 안에 놓일 확률이

$$P(\,(X,Y,Z)\in E) = \iiint_E f(x,y,z)\,dV$$

$$P(a \le X \le b,\ c \le Y \le d,\ r \le Z \le s)) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

결합밀도함수

(1) $f(x,y,z) \ge 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = 1$

예제. 포물기둥 $x = y^2$과 평면 $x = z$, $z = 0$, $x = 1$로 유계된 상수밀도를 갖는 입체의 질량 중심을 구하여라.