归谬法(续)

例4 证明$\sqrt{2}$ 是无理数

证 假设$\sqrt{2}$ 是有理数, 存在正整数n,m, 使得$\sqrt{2}=m/n$,

不妨设m/n为既约分数. 于是$m=n\sqrt{2}$, $m^2=2n^2$, m^2是偶数,

从而m是偶数. 设$m=2k$, 得 $(2k)^2=2n^2$, $n^2=2k^2$, 这又得到n也

是偶数, 与m/n为既约分数矛盾.

间接证明法是归谬法的特殊形式: 由B不成立推出A不成立,
与前提A成立矛盾.

构造性证明法

- 即把需要**证明存在**的事物构造出来，便完成了证明。

做法 在A为真的条件下, 构造出具有这种性质的客体

例7 对于每个正整数n, 存在n个连续的正合数.

证 令$x=(n+1)!$

则 $x+2, x+3,\ldots, x+n+1$是n个连续的正合数:

$$i \mid x+i, \qquad i=2,3,\ldots,n+1$$

非构造性证明

例8 对于每个正整数n, 存在大于n的素数.

证 令x等于所有小于等于n的素数的乘积加1,

则 x不能被所有小于等于n的素数整除.

于是, x或者是素数, 或者能被大于n的素数整除.

因此,存在大于n的素数.

数学归纳法的步骤

命题形式: $\forall x(x\in \mathrm{N} \wedge x\geq n_0), P(x)$

(1)归纳基础 证$P(n_0)$为真

(2)归纳步骤 $\forall x(x\geq n_0)$, 假设$P(x)$为真, 证$P(x+1)$为真.

称“$P(x)$为真”为归纳假设

例9 证明:对所有$n\geq 1$, $1+3+5+ \ldots +(2n-1)=n^2$

证 归纳基础. 当$n=1$时, $1=1^2$, 结论成立.

归纳步骤. 假设对$n\geq 1$结论成立, 则有

$$1+3+5+ \ldots +(2n-1)+(2n+1)=n^2 +(2n+1) = (n+1)^2$$

得证当$n+1$时结论也成立.

第二数学归纳法

归纳基础 证明$P(n_0)$为真

归纳步骤 $\forall x(x\geq n_0)$, 假设$P(n_0),P(n_0+1),\ldots,P(x)$为真, 证$P(x+1)$为真.

归纳假设 $\forall y(n_0\leq y\leq x)$, $P(y)$为真

例10 任何大于等于2的整数均可表成素数的乘积

证 归纳基础. 对于2, 结论显然成立.

归纳步骤. 假设对所有的$k(2\leq k\leq n)$结论成立, 要证结论对$n+1$也成立. 若$n+1$是素数, 则结论成立; 否则$n+1=ab$, $2\leq a,b<n$. 由归纳假设, a,b均可表成素数的乘积, 从而$n+1$也可表成素数的乘积. 得证结论对$n+1$成立.

第二数学归纳法

以多米诺骨牌为例的话：

- 第一归纳法：第一个牌会倒，且有规则：前一张牌倒，后一张牌必定会倒。牌会一直倒下去（成立下去）
- 第二归纳法：前一批牌会倒，且有规则：前一批牌倒，前一批牌紧接着的下一张牌必定会倒。牌会一直倒下去（成立下去）

显然第二（强归纳法）归纳法与第一归纳法相比，是把一批牌看做成一张牌，初始条件由一张牌，变成了一批牌。

二部图的判别定理

定理6.7 无向图$G=<V,E>$是二部图当且仅当G中无奇长度的回路

证 必要性. 设$G=<V_1,V_2,E>$是二部图, 每条边只能从V_1到V_2, 或从V_2到V_1, 故任何回路必为偶长度.

充分性. 不妨设G至少有一条边且连通. 取任一顶点u, 令

$$V_1=\{v \mid v\in V \wedge d(v,u)\text{为偶数}\},\ V_2=\{v \mid v\in V \wedge d(v,u)\text{为奇数}\}$$

则$V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$. 先证V_1中任意两点不相邻. 假设存在$s,t\in V_1$, $e=(s,t)\in E$. 设Γ_1, Γ_2分别是u到s,t的短程线, 则$\Gamma_1\cup e\cup\Gamma_2$是一条回路, 其长度为奇数, 与假设矛盾. 同理可证V_2中任意两点不相邻.

哈密顿图的必要条件

定理6.12 若无向图$G=\langle V,E\rangle$是哈密顿图, 则对于V的任意非空真子集V_1均有 $p(G-V_1)\le|V_1|$.

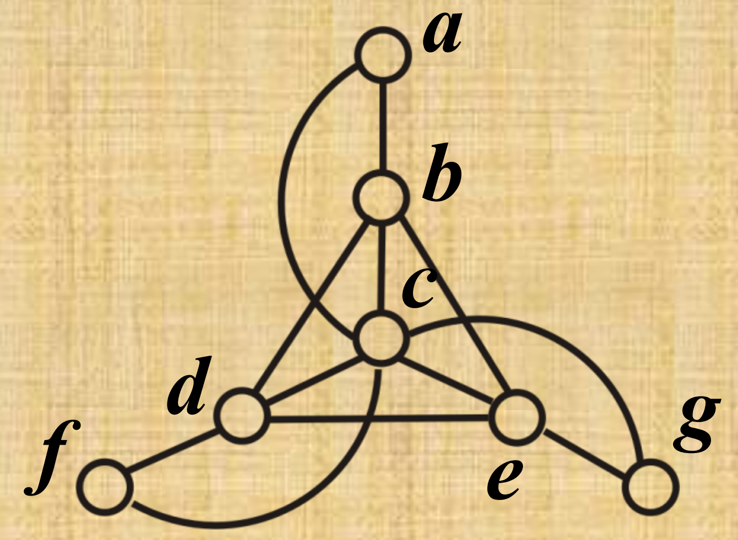
证 设C为G中一条哈密顿回路, 有$p(C-V_1) \le |V_1|$. 又因为$C\subseteq G$, 故 $p(G-V_1) \le p(C-V_1) \le |V_1|$.

例如 当$r\ne s$时, $K_{r,s}$不是哈密顿图

推论 有割点的图不是哈密顿图

实例

例3 证明右图不是哈密顿图



证 假设存在一条哈密顿回路，

a,f,g是2度顶点，边(a,c), (f,c)和(g,c)必在这条哈密顿回路上，

从而点c出现3次，矛盾.

此外，该图满足定理6.12的条件，这表明此条件是必要、而不充分的.

又，该图有哈密顿通路.

存在哈密顿回路(通路)的充分条件

定理6.13 设G是$n(n\geq 3)$阶无向简单图, 若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于$n-1$, 则G中存在哈密顿通路; 若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于n, 则G中存在哈密顿回路, 即G为哈密顿图.

推论 设G是$n(n\geq 3)$阶无向简单图, 若$\delta(G)\geq n/2$, 则G是哈密顿图

当$n\geq 3$时, K_n是哈密顿图; 当$r=s\geq 2$时, $K_{r,s}$是哈密顿图.

定理6,14 设D是$n(n\geq 2)$阶有向图, 若略去所有边的方向后所得无向图中含子图K_n, 则D中有哈密顿通路.

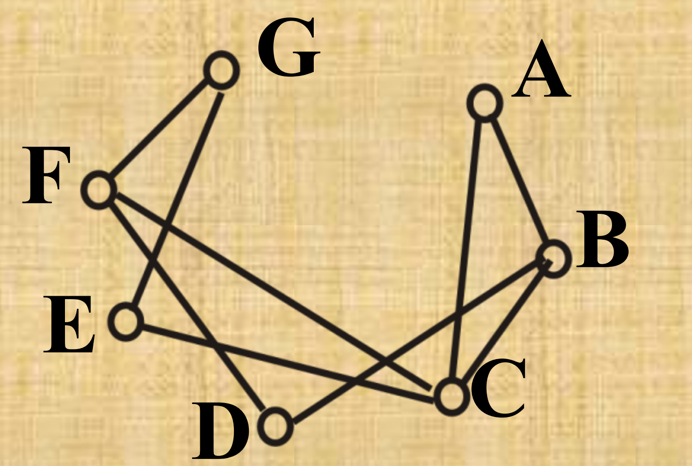
- 对一般的有向图中是否存在哈密顿回路或哈密顿通路，也还是没有好的判别法

应用

例4 有7个人, A会讲英语, B会讲英语和汉语, C会讲英语、意大利语和俄语, D会讲日语和汉语, E会讲德语和意大利语, F会讲法语、日语和俄语, G会讲法语和德语. 问能否将他们沿圆桌安排就坐成一圈, 使得每个人都能与两旁的人交谈?

解　作无向图, 每人是一个顶点,

2人之间有边⇔他们会讲同一种语言.



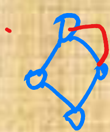
ACEGFDBA是一条哈密顿回路,

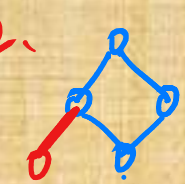
按此顺序就坐即可.

欧拉公式

归纳法 ① $n=1$ $m=0$ $f=1$时 成立

② 假设 $n-m+f=2$成立，证$m+1$ $m+1$时成立

1.  $n'=n$ $m'=m+1$ $f'=f+1$ $n'-m'+f'=2$

2、  $n'=n+1$ $m'=m+1$ $f'=f$ $n'-m'+f'=2$

定理6.16 设G为n阶m条边r个面的连通平面图, 则

$$n-m+r=2$$

证 对边数m做归纳证明. $m=0$, G为平凡图, 结论成立.

设$m=k(k\geq 0)$时结论成立, 对$m=k+1$,

若G中无圈, 则G必有一个度数为1的顶点v, 删除v及关联的边, 记作G'. G'连通, 有n-1个顶点, k条边和r个面. 由归纳假设, $(n-1)-k+r=2$, 即$n-(k+1)+r=2$, 得证$m=k+1$时结论成立.

否则, 删除一个圈上的一条边,记作G'. G'连通, 有n个顶点,k条边和r-1个面. 由归纳假设, $n-k+(r-1)=2$, 即$n-(k+1)+r=2$. 得证$m=k+1$时结论也成立. 证毕.

欧拉公式(续)

推论 设平面图G有 p $(p\geq 2)$ 个连通分支, 则

$$n - m + r = p + 1$$

其中n, m, r 分别是G的阶数, 边数和面数.

证 设第 i 个连通分支有 n_i个顶点, m_i条边和 r_i个面. 对各连通分支用欧拉公式,

$$n_i - m_i + r_i = 2, \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

求和并注意 $r = r_1+\ldots+r_p - p+1$, 即得

$$n - m + r = p + 1$$

$n_i - m_i + f_i = 2$

求和 $n - m + (f_1 + \cdots + f_i) = 2p$

$f-p+1$ (多个$p-1$个无限面)

欧拉公式(续)

定理6.17 设G为n阶连通平面图, 有m条边, 且每个面的次数不小于l ($l \geq 3$), 则

$n-m+f=2$

$2m \geq f \cdot l$

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

证 由各面次数之和等于边数的2倍及欧拉公式得

$$2m \geq lr = l\,(2+m-n)$$

可解得所需结论.

平面图的必要条件: 每个面次数至少3

当$n \geq 3$时, $2m \geq 3f$ → $m \leq 3n-6$