第一章 随机事件和概率

① 独立 $P(AB)=P(A)P(B)$ 独立 $\not\rightleftarrows$ 互斥 互斥 $\not\rightleftarrows$ 不独立

互斥：$AB=\emptyset \not\rightleftarrows P(AB)=0$

相容：$AB\neq\emptyset$

对立：$B=\bar{A}$

② $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

③ $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$

第二章 一维随机变量

① $\begin{cases} F(x)=P\{X\leq x\} \\ F(x-0)=P\{X<x\} \end{cases}$
左极限

$Fx=F(x+0)$ 右连续

离散型

		EX	DX
$X\sim B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
$X\sim Ge(p)$	$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$X\sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(0,1,2)$	λ	λ

$B(n,p)$中n大p小，近似$P(np)$

$X\sim H(n,M,N)$ $P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_N^{n-k}}{C_N^n}$

连续型

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=P\{X\leq x\}$

$X\sim U(a,b)$ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\leq x\leq b\\ 0 & else\end{cases}$ $\frac{a+b}{2}$ $\frac{(b-a)^2}{12}$

$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\leq x<b\\ 1 & x\geq b\end{cases}$

$X\sim E(\lambda)$ $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$ $\frac{1}{\lambda}$ $\frac{1}{\lambda^2}$

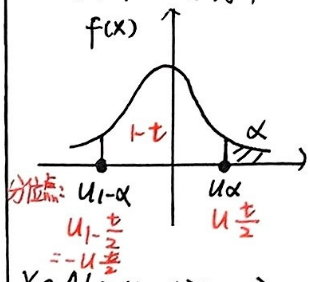
$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<+\infty$ μ σ

$X\sim N(0,$[redacted]$)$ $E|X|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ $D|X|=1-\frac{2}{\pi}$

☆ 标准正态分布

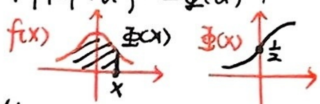
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $-\infty<x<+\infty$



$f(-x)=f(x)$

$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

$P\{|X|\leq a\}=2\Phi(a)-1$



$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

☆ 一维随机变量函数分布：$Y=g(X)$

① 离散型

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	…
P			

② 连续型 1. 先求$F_Y(y)$ $F_Y(y)=P(g(x)\leq y)$ $=F_X($[redacted]$)$

2. 再求$f_Y(y)$

（若X连续型，则

$f_Y(y)=\begin{cases}0 & else\\ f_X(\psi(y))\cdot|\psi'(y)| & \alpha<y<\beta\end{cases}$

单调可导 $g(x)$反函数）

第三章 多维随机变量

① 联合分布函数 $F(x,y)=P\{X\leq x,Y\leq y\}$

边缘分布函数 $F_X(x)=F(x,+\infty)$

X、Y独立 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

离散型

联合分布律 边缘分布律

条件分布律 $=\frac{联合}{边缘}$

$Z=g(X,Y)\Rightarrow P(Z=z_k)=P(X=x_k,Y=y_k)$

<独立增条：$p_{ij}=p_ip_j$>

连续型

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\underbrace{f(u,v)dudv}_{联合概率密度}$

边缘密度函数 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

<独立增条：$f(x,y)=f(x)f(y)$>

二维连续型

二维均匀分布 S_D

(在D上均匀分布)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D} & (x,y)\in D\\ 0 & else\end{cases}$$

① $P\{(X,Y)\in G\}=\frac{S_G}{S_D}$

② 边缘分布不一定均匀分布。

若固定一个变量，另一个变量的边缘分布为均匀分布。

二维正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$

① $aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_1,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2+2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$

$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2ab\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY}$

② 若有 X、Y 一维正态分布

$aX+bY$ 当 X、Y 独立，才符合二维正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\cdot\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}}{2(1-\rho)^2}}$$

☆ 两个随机变量函数分布

① 分布函数法

1. 求 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\underline{g(X,Y)\le z}\}$

多种情况讨论

2. 再求 $f_Z(z)=F'_Z(z)$

② 卷积公式法

$Z=aX+bY$ $\quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|a|}f(x,\frac{z-ax}{b})dx$

$Z=\frac{Y}{X}$ $\quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)dx$

$Z=XY$ $\quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx$

③ $M=\max\{X,Y\}$、$Y=\min\{X,Y\}$

$U=\max\{X_1\cdots X_n\}$ $\quad F_{max}(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$

$V=\min\{X_1\cdots X_n\}$ $\quad F_{min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)]\cdots\cdots[1-F_{X_n}(z)]$

若 $X_1,\cdots X_n$ 独立同分布 $F(x)$

$F_{max}(z)=[F(z)]^n$ $\qquad F_{min}(z)=1-[1-F(z)]^n$

$f_{max}(z)=n[F(z)]^{n-1}\cdot f(z)$ $\qquad f_{min}(z)=n[1-F(z)]^{n-1}\cdot f(z)$

④ 一连续 一离散
 Y X

$$F_Z(z)=\sum_{i=1}^{n}\underline{P\{g(X,Y)\le z,X=x_i\}}$$

$P\{X=x_i\}\,\underline{P\{Y\ |X=x_i\}}$ 条件概率

☆ 可加性的分布（二项、泊松；正态、指数；卡方）

① 二项 $X_i\sim B(n_i,p)$

$X_1+\cdots+X_k\sim B(n_1+\cdots+n_k,p)$

② 泊松 $X_i\sim P(\lambda_i)$

$X_1+\cdots+X_k\sim P(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)$

③ 正态、 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$

$a_1X_1+\cdots+a_kX_k\sim N(a_1\mu_1+\cdots+a_k\mu_k,a_1^2\sigma_1^2+\cdots+a_k^2\sigma_k^2)$

④ 指数 $X_i\sim E(\lambda_i)$ 最小值函数

$\min\{X_1,\cdots,X_k\}\sim E(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)$

⑤ 卡方 $X_i\sim\chi^2(n_i)$

$X_1+\cdots+X_k\sim\chi^2(n_1+\cdots+n_k)$

第四章 随机变量的数字特征

① EX： 连续：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\boxed{f(x)}dx$

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\boxed{f(x)}dx$

独立：$EXY=EXEY$

② DX： 连续：$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-EX]^2\cdot\boxed{f(x)}dx$

$DX=E[X-EX]^2$

① $DX=EX^2-(EX)^2$

② $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2Cov(X,Y)$

③ 原点矩：$E(X^k)$ $\quad EX^k$

中心矩：$E(X-EX)^k$

④ 协方差：$Cov(X,Y)=EXY-EXEY$

① $Cov(X,X)=DX$

② $Cov(aX,bY)=ab\,Cov(X,Y)$

③ X、Y独立 $\overset{\rightarrow}{\nleftarrow}$ $\underline{Cov(X,Y)=0\text{（不相关）}}$

⑤ 相关系数：$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$

① $Y=aX+b$ 线性：$a>1,\rho_{XY}>0$；$a<0,\rho_{XY}<0$

② $\rho_{XY}=0$ 不相关

独立 $\overset{\rightarrow}{\nleftarrow}$ 不相关

若X、Y服从二维正态分布，不相关 ⇔ 独立

第五章　大数定律和切比雪夫定律

① 切比雪夫不等式

$$P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

② 大数定律

《1》 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-a|<\varepsilon\}=1$

$X_n\xrightarrow{P}a$　　依概率收敛于 a

〈2〉 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i|<\varepsilon\}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1$

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu$

③ 中心极限定理

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\leq x\right\}=\Phi(x)$$

若 $X_n\sim B(n,p)$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\right\}=\Phi(x)$$

助记：$X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布 $F(\mu,\sigma^2)$

$\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)$

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

第六章　数理统计

① 样本：$X_1,\cdots\cdots,X_n$

样本值：$x_1,\cdots\cdots,x_n$

样本容量：n

② 样本

联合分布函数：$F(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}F(x_i)$

联合密度函数：$f(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$

③ 统计量

样本均值　$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$

样本方差　$S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)$

样本k阶原点矩　$A_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$

样本k阶中心矩　$B_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$

顺序统计量：

最大　$X_n=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$　　$F_n(x)=[F(x)]^n$

最小　$X_1=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$　　$F_1(x)=1-[1-F(x)]^n$

☆ 常用结论

$EX_i=\mu$　$DX_i=\sigma^2$

$E\overline{X}=\mu$　$D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$　$Cov(\overline{X},\overline{Y})=\frac{Cov(X,Y)}{n}$

$ES^2=\sigma^2$

☆ $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X^k\xrightarrow{P}EX^k$

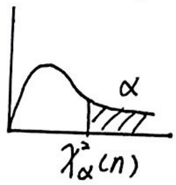
$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k\xrightarrow{P}E(X-EX)^k$

$\therefore\ \overline{X}\xrightarrow{P}EX$　　$S^2\xrightarrow{P}DX$

④ 三大分布

卡方分布　$X_1,\cdots,X_n$ 标准正态分布 $N(0,1)$

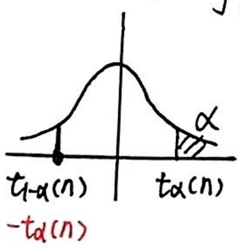
$\chi^2=X_1^2+\cdots+X_n^2$　　自由度 n



$$\boxed{\begin{aligned}EX&=n\\DX&=2n\end{aligned}}$$

t分布　$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$

$t=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$　　自由度 n



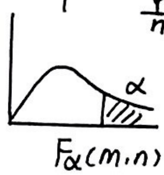
① $t_{1-\alpha}=-t_\alpha(n)$

② $T\sim t(n)$

$T^2\sim F(1,n)$

F分布：$X\sim\chi^2(m)$，$Y\sim\chi^2(n)$

$F=\frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$　　自由度 m,n



① $F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_\alpha(m,n)}$

② $F\sim F(m,n)$

$\frac{1}{F}\sim F(n,m)$

⑤ 单正态总体的抽样分布

$X_1, \cdots, X_n$ 来自 正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本

〈1〉 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

〈2〉 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

〈3〉 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \Rightarrow \frac{(\bar{X}-\mu)^2}{S^2/n} \sim F(1, n-1)$

〈4〉 $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

第七章 参数估计

①矩估计：θ未知，统计量已知

$\hat{\mu} = EX = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 一阶原点矩

$\hat{\sigma}^2 = DX = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X-\bar{X})^2$ 二阶中心矩

若EX=0，用 $EX^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 二阶原点矩

②最大似然估计

$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta)$ 离散 x_i：样本值

$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$ 连续

☆求 $L(\theta)$ max值：

1. 有驻点， θ取驻点
2. 无驻点，根据 $L(\theta)$ 单调性、θ范围取θ

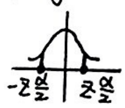
③无偏估计：

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

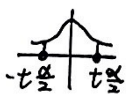
$\hat{\theta}$ 为未知参数 θ 的无偏估计量

④区间估计： θ的 $1-\alpha$ 的置信区间

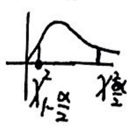
μ： $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$



$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$



σ： $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$



$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$