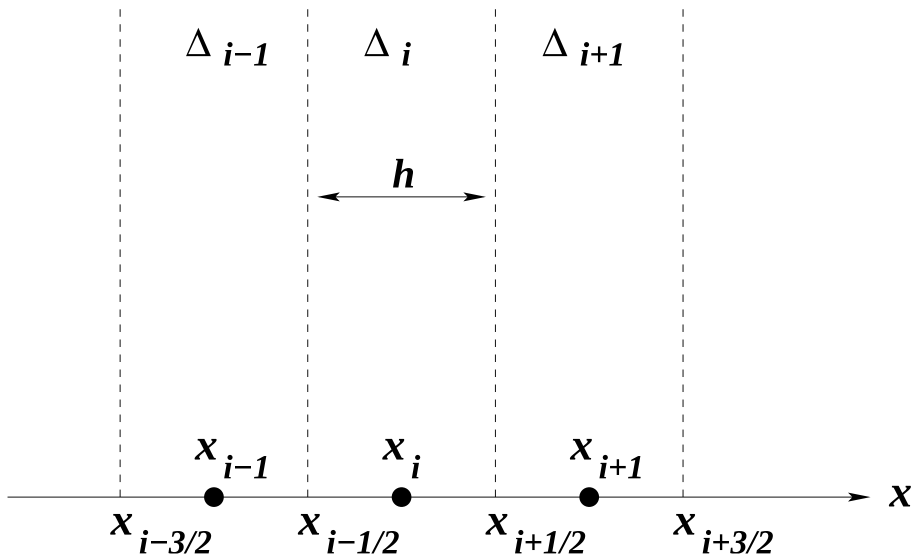
Основные способы пространственной дискретизации

- **Метод конечных разностей.** Искомые величины — значения переменных в некоторых точках, узлах конечноразностной сетки. Ошибка уменьшается как Δ^{-N}, где Δ — шаг сетки и N — порядок метода.
- **Метод конечных объемов.** Искомые величины — средние по некороым объемам, ячейкам расчетной сетки. Ошибка уменьшается как Δ^{-N}, где Δ — размер ячейки и N — порядок метода.
- **Спектральный метод.** Искомые величины — коэффициенты разложения решения по системе N ортогональных функций. Если решение бесконечно дифференцируемо, то ошибка уменьшается быстрее любой степени N.
- **Метод конечных элементов.** Решение на каждом элементе записывается как суперпозиция небольшого числа базисных функций. Искомые величины — коэффициенты разложения решения на каждом элементе.

Некоторые из существующих методов дискретизации с трудом поддаются такой простой классификации. Приведем следующие примеры:

- **Метод дискретных вихрей.**
- **Метод частиц в ячейках.**
- **Прямое статистическое моделирование.**
- **Клеточные автоматы.**

Различие между конечноразностной и конечнообъемной аппроксимациями



$$\bar{u}_i = \frac{1}{h}\int\limits_{\Delta_i} u(x)\,dx = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[u_i + u_i'\,(x-x_i) + \frac{1}{2}u_i''\,(x-x_i)^2 + \ldots\right]\,dx \approx u_i + \frac{1}{6h}u_i''\,(x-x_i)^3\,\Big|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} = u_i + \frac{h^2}{24}u_i''$$

Аппроксимация

Система уравнений $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathsf{L}\mathbf{u}$, где в общем случае L — нелинейный оператор.

После дискретизации $\mathbf{u}^{n+1} = \mathsf{T}(\Delta t, \Delta x)\mathbf{u}^n$ (T — оператор перехода, $\mathbf{u}^n \equiv \mathbf{u}(n\Delta t)$).

Разностная схема *аппроксимирует уравнение* (или *согласована с уравнением*), если

$$\lim_{\Delta t \to 0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathsf{T}(\Delta t, \Delta x) - \mathsf{I}}{\Delta t} = \mathsf{L} \qquad (\Delta t/\Delta x \to \beta).$$

Пусть $u_e(x,t)$ — точное решение. Тогда локальная ошибка аппроксимации записывается как

$$LTE \equiv u_e^{n+1} - \mathsf{L}u_e^n = O(\Delta t \sum_{p,q \geq 0,\ p+q=l} \Delta t^p \Delta x^q).$$

В этом случае порядок локальной ошибки аппроксимации равен $l+1$, а порядок схемы l.

Пример. Схема с разностями против потока для линейного уравнения переноса $u_t + au_x = 0$.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \qquad (\mathsf{L}u_e^n)_j = u_{e,j}^n + \sigma(u_{e,j-1}^n - u_{e,j}^n), \quad \sigma = a\Delta t/\Delta x.$$

$$LTE = u_e^{n+1} - \mathsf{L}u_e^n = (\partial u_e/\partial t + a\ \partial u_e/\partial x)\Delta t + O(\Delta x \Delta t + \Delta t^2) = \Delta t\ O(\Delta x + \Delta t)$$

Устойчивость

Обозначим вектор ошибки, появляющейся на n-м шагу, через $\varepsilon^n = u^n - u_e^n$.

Матрица перехода G определяется как $\varepsilon^{n+1} = \mathsf{G}\ \varepsilon^n$.

Для линейного уравнения матрица перехода G эквивалентна оператору перехода T.

В общем случае $\quad \mathsf{G} = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(\mathsf{T}\mathbf{u}), \quad G_{\mu\nu} = \dfrac{\partial u_\mu^{n+1}}{\partial u_\nu^\mu}.$

Метод устойчив, если $||\varepsilon^{n+1}|| = ||u^{n+1} - u_e^{n+1}||$ может быть ограничена $||\varepsilon^n||$, умноженной на константу, независящую как от u^n, так и от u_e^n:

$$||\varepsilon^{n+1}|| \le (1 + K\Delta t)\ ||\varepsilon^n||.$$

Если точное решение не растет со временем, то никакого роста не должно происходить и в численном решении, т.е. должно быть $K = 0$.

Если уравнение перехода приведено к диагональному виду $\varepsilon_\mu^{n+1} = g_\mu\ \varepsilon_\mu^n$, тогда для устойчивости надо потребовать, чтобы норма каждого собственного вектора ошибки не возрастала, откуда получаем

$$|g_\mu| = \sqrt{g_\mu g_\mu^*}\ \le\ 1 \qquad \text{для всех} \quad \mu.$$

Сходимость

Приближенное решение сходится к точному, когда $||u^n - u_e^n|| \to 0$ при $\Delta t \to 0,\ n\Delta t \to T$.

Теорема Лакса об эквивалентности. *Аппроксимация + Устойчивость → Сходимость*

$$||u^n - u_e^n|| \leq ||Lu^{n-1} - Lu_e^{n-1}|| + ||Lu_e^{n-1} - u_e^n|| \leq ||u^{n-1} - u_e^{n-1}|| + \Delta t(\sum_{p+q=l} \Delta x^p \Delta t^q) \leq ||u^0 - u_e^0|| + n\Delta t(\sum_{p+q=l} \Delta x^p \Delta t^q)$$

Искомый результат получается при $\Delta t \to 0,\ n\Delta t \to T$.

Фактически теорема Лакса полезна только для линейных разностных схем.

Анализ устойчивости по фон Нейману

Пусть оператор перехода $\mathsf{T}(\Delta t, \Delta x)$ равен постоянной величине. Тогда можно рассмотреть устойчивость фурье-моды зависимой переменной $u_j^n = \hat{u}_k^n e^{ikx_j}$ и потребовать ограниченности ее амплитуды. Для устойчивости множитель перехода g (или для системы уравнений собственные значения матрицы перехода g_μ) должен не превосходит по модулю единицу $|g| \le 1$ для всех фурье-мод.

Пример 1. Разности против потока $u_t + au_x = 0$, $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\dfrac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$ $\quad u_i^{n+1} = u_i^n - \sigma(u_i^n - u_{i-1}^n)$, $\quad \sigma = a\Delta t/\Delta x$

$$\hat{u}_k^{n+1} = \hat{u}_k^n - \sigma(\hat{u}_k^n - e^{-ik\Delta x}\ \hat{u}_k^n) \quad \Rightarrow \quad g = 1 - \sigma + \sigma e^{-ik\Delta x} \quad \Rightarrow \quad gg^* = 1 - 4\sigma(1-\sigma)\sin^2\frac{k\Delta x}{2}$$

Условие устойчивости есть условие Куранта-Фридрихса-Леви: $\sigma = a\Delta t/\Delta x \le 1$.

Пример 2. Разности по потоку $u_t + au_x = 0$, $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\dfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$

$$g = 1 + \sigma - \sigma e^{ik\Delta x} \quad \Rightarrow \quad gg^* = (1+\sigma)^2 + \sigma^2 - 4\sigma(1+\sigma)\cos^2\frac{k\Delta x}{2} > 1$$

Схема всегда неустойчива.

Пример 3. Центральные разности $u_t + au_x = 0$, $\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\dfrac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$

$$g = 1 - i\sigma\sin k\Delta x \quad \Rightarrow \quad gg^* = 1 + \sigma^2\sin^2 k\Delta x > 1$$

Схема всегда неустойчива.

Нахождение слабых решений: осцилляции

Пример. $u_t + (u^2/2)_x = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

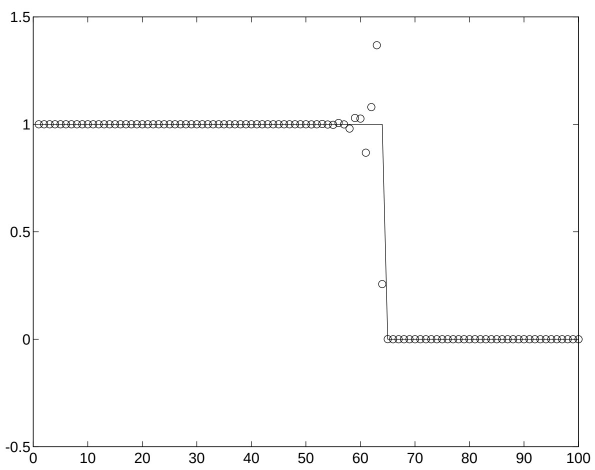


Схема Маккормака

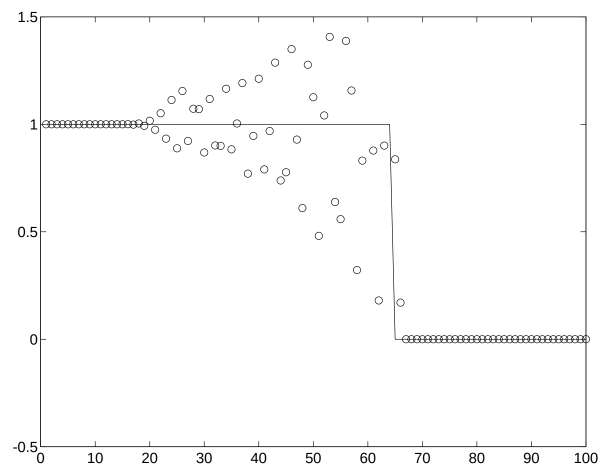


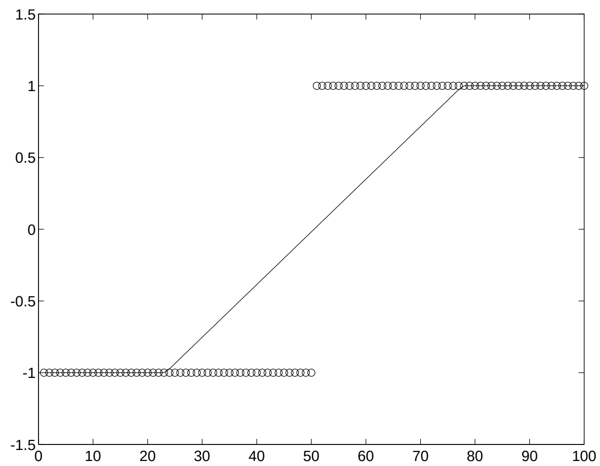
Схема с перешагиванием

Если мы будем вычислять ошибку в норме L_1: $||v|| = \int_{-\infty}^{\infty} v\ dx \approx h \sum_j V_j$, то не получим скорости сходимости, ожидаемой исходя из фомального порядка схем. В случае линейных уравнений, можно показать, для весьма широкого класса начальных данных, что методы "первого порядка"сходятся со скоростью $O(\Delta t^{1/2})$, тогда как методы "второго порядка— в лучшем случае как $O(\Delta t^{2/3})$.

Нарушение энтропийного условия

Пример. $u_t + (u^2/2)_x = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Схема Маккормака



В данном случае схема сходится к слабому решению закона сохранения, но к слабому решению, не удовлетворяющему энтропийному условию.

Непригодность неконсервативных схем

Пример. $u_t + uu_x = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} U_j^n \left(U_j^n - U_{j-1}^n \right), \qquad U_j^0 = \begin{cases} 1, & j < 0 \\ 0, & j \geq 0 \end{cases}$$

Легко проверить, что $U_j^n = U_j^0$ для всех j и n !

В данном примере сходимость вовсе отсутствует, разрыв в решении распространяется с неверной скоростью.

Итак, при попытке найти численно слабые решения законов сохранения мы сталкиваемся с целым рядом трудностей:

- сильное сглаживание решения или осцилляции, скорость сходимости не соответствует порядку точности метода;
- сходимость к слабому решению, не удовлетворяющему энтропийному условию;
- полное отсутствие сходимости, разрывы решения распространяются с неверной скоростью.

Консервативные схемы

Существует простой путь избежать последней проблемы и гарантировать сходимость. Он заключается в требовании консервативности разностной схемы.

Консервативная разностная схема:

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \Rightarrow \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F(U_{j-p}^n, \ldots, U_{j+q}^n) - F(U_{j-p-1}^n, \ldots, U_{j+q-1})\right],$$

где F — некая функция от $p+q+1$ аргументов.

В простейшем случае $p=0, q=1$ $\qquad U_j^{n+1} = U_j^n - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\left[F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j)\right].$

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{1}{\Delta x}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t))\, dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j-1/2}, t))\, dt\right] \quad \Rightarrow \quad F(U_j, U_{j+1}) \sim \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t))\, dt$$

В случае консервативных схем интегральная форма закона сохранения

$$\int_a^b u(x, t_2)\, dx = \int_a^b u(x, t_1)\, dx - \left[\int_{t_1}^{t_2} f(u(b, t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} f(u(a, t)\, dt\right]$$

имеет дискретный аналог: $\qquad \Delta x \sum\limits_{j=J}^{K} U_j^{n+1} = \Delta x \sum\limits_{j=J}^{K} U_j^n - \Delta t \sum\limits_{j=J}^{K}\left[F(U_j^n) - F(U_{j-1}^n)\right] = \Delta x \sum\limits_{j=J}^{K} U_j^n - \Delta t\left[F(U_K^n) - F(U_J^n)\right]$

Чтобы консервативная схнма была согласована с уравнением, необходимо $f(u) = F(u, u, \ldots, u)$.

Теорема Лакса-Вендроффа

Пусть нам дана сеточная функция U_j. Обозначим через $U(x)$ кусочно-непрерывную функцию, такую что $U(x) = U_j$ на каждом интервале $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$. Имеет место

Теорема Лакса-Ведроффа. Рассмотрим последовательность сеток $\{\mathcal{G}_l\}$, для которой $\Delta x, \Delta t \to 0$, когда $l \to \infty$. Пусть $U_l(x,t)$ — численная аппроксимация, вычисленная с помощью согласованного с уравнением и консервативного метода на сетке $\mathcal{G}_l$. Предположим, что при $l \to \infty$ U_l сходится к $u(x,t)$ почти всюду (т.е. за исключением множества меры нуль). Тогда $u(x,t)$ есть слабое решение закона сохранения.

Вместо сходимости почти всюду можно потребовать следующих двух условий

1. Над каждым ограниченным $\Omega = [a,b] \times [0,T]$

$$\int_0^T \int_a^b |U_l(x,t) - u(x,t)| \, dxdt \to 0, \quad \text{когда} \quad l \to 0$$

.

2. Для каждого T существует $R > 0$, такое что

$$TV(U_l(x,t)) < R, \quad \text{для всех} 0 \le t \le T, \; l = 1, 2, \ldots$$

Полная вариация функции определяется как

$TV(v) = \sup \sum_{j=1}^{N} |v(\xi_j)| - v(\xi_{j-1})|$, где sup берется по всем разбиениям вещественной прямой $-\infty = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_N = \infty$.
Для дифференцируемых функций $TV(v) = \int_{-\infty}^{\infty} |v'(x)| \, dx$.

Некоторые консервативные схемы

- **Схема Лакса-Фридрихса.**

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)).$$

$$F(U_j, U_{j+1}) = \frac{1}{2}(f(U_j) + f(U_{j+1})) - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(U_{j+1} - U_j)$$

- **Схема Лакса-Вендроффа.**

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(U_j^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)).$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(U_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(U_{j-1/2}^{n+1/2})).$$

- **Схема Маккормака.**

$$U_j^* = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(U_{j+1}^{n+1/2}) - f(U_j^{n+1/2})).$$

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_j^n + U_j^*) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(U_j^*) - f(U_{j-1}^*)).$$