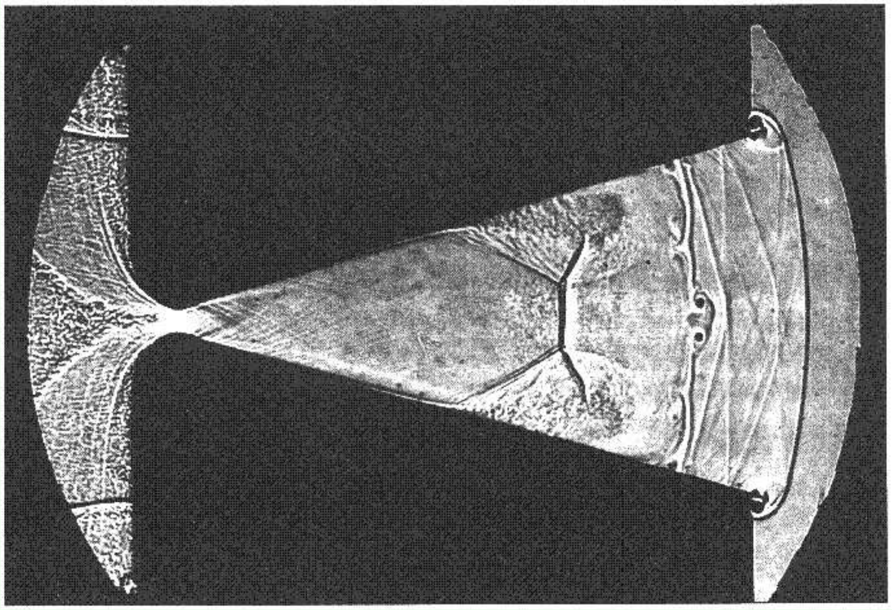
Схемы высокого порядка

- Стандартные TVD схемы, имеющие второй порядок точности вдали от разрывов и экстремумов решения) хорошо подходят для расчета сверхзвуковых течений с небольшим числом изолированных ударных волн. Однако, задачи, содержащие как ударные волны, так и многочисленные сложные структуры в областях, где решение гладкое, требуют применения более точных вычислительных инструментов. Их необходимость особенно очевидна для таких приложений как
  - прямое численное моделирование (DNS) и моделирование методом крупных вихрей (LES) сжимаемых переходных и турбулентных течений,
  - моделирование отрывных и струйных течений,
  - вычислительная аэроакустика,
  - моделирование сверхзвукового горения и детонации,
  - . . . и для многих других!
- Важной целью является развитие алгоритмов и расчетных программ, способных надежно проводить сквозной счет сильных ударных волн и, одновременно, с высокой точностью моделировать гладкую часть сверхзвуковых течений, включающих сложные

взаимодействия ударных волн между собой, с пограничными слоями, вихрями, акустическими волнами и волнами гидродинамической неустойчивости. Современные ENO (essentially non-oscillatory) и WENO (weighted ENO) схемы представляются естественными кандидатами на роль базового вычислительного инструмента в таких алгоритмах и программах.

Пример: стартовый процесс в плоском сопле



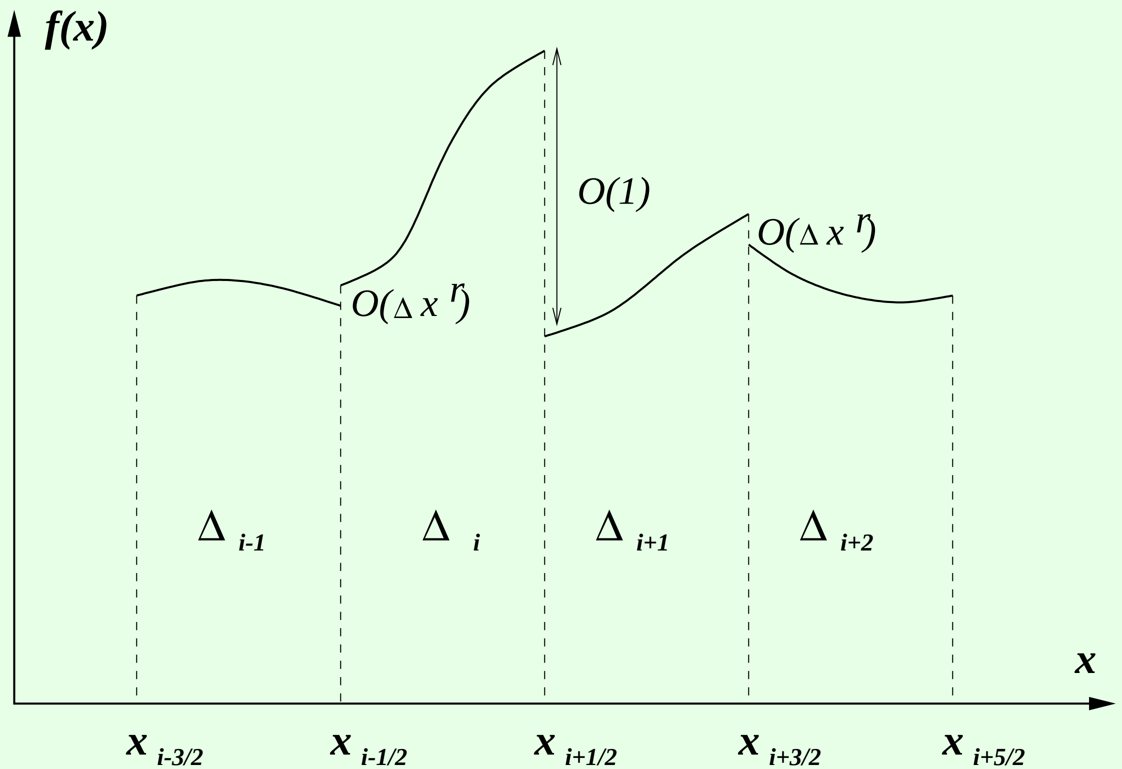
Процесс запуска сопла

Падающая ударная волна, движущаяся с числом Маха скачка, равным 3, только что прошла через плоское сопло. За этой волной имеется несколько контактных поверхностей, содержащих вихри; между этими поверхностями и горлом сопла — вторая ударная волна, направленная против течения, но сносимая вниз по потоку и вызывающая отрыв пограничных слоев.

Идущие от стенко волны Маха указывают на установление сверхзвукового течения вниз по потоку от горла. *(Amann, H.-O., воспроизведено по "Альбому течений жидкости и газа", составленному М. Ван-Дайком).*

ENO схемы

Основная идея: использовать кусочно-полиномиальную реконструкцию и избежать интерполирования через разрывы.



Определение:

Разностный метод является ENO схемой, если выполняется свойство

$$TV(U^{n+1}) \le TV(U^n) + O(\Delta x^r)$$

для всех n и некоторого r.

Сравнение различных ENO и WENO схем

- Конечнообъемные ENO схемы (Harten et al., 1987):
  - использують локальный адаптивный шаблон для реконструкции переменных на границах ячеек $U_{j+1/2}^{L,R}$ из средних по ячейкам $\overline{U}_j$;
  - используют приближенное решение задачи Римана, чтобы вычислить численные потоки $F_{j+1/2} = F(U_{j+1/2}^L, U_{j+1/2}^R)$.
- Конечноразностные ENO схемы (Shu and Osher, 1988):
  - используют расщепление потоков в центрах ячеек, чтобы выделить их "положительную" и "отрицательную" части;
  - используют локальный адаптивный шаблон для реконструкции численных потоков $\widehat{F}_{j+1/2}$ из "расщепленных"потоков в центрах ячеек.
- Конечнообъемные WENO схемы (Liu, Osher and Chan, 1994):
  - используют выпуклую линейную комбинацию шаблонов с адаптивными коэффициентами для реконструкции $U_{j+1/2}^{L,R}$;
  - используют приближенное решение задачи Римана подобно конечнообъемным ENO.

- Конечноразностные WENO schemes (Jiang and Shu, 1996):
  - используют расщепление потоков подобно конечноразностным ENO;
  - используют выпуклую линейную комбинацию шаблонов с адаптивными коэффициентами для реконструкции $\widehat{F}_{i+1/2}$.

Если решение достаточно гладкое:

для конечнообъемных ENO и WENO схем $\longrightarrow$

$$\overline{U}_j = u(x_j) + O(\Delta x^2)$$
$$U^{L,R}_{j+1/2} = u(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^r)$$
$$F_{j+1/2} = f(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^r)$$

для конечноразностных ENO и WENO схем $\longrightarrow$

$$\widehat{F}_{j+1/2} = f(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^2)$$
$$\frac{\widehat{F}_{j+1/2} - \widehat{F}_{j-1/2}}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^r)$$

(где r — порядок аппроксимации схемы).

Две задачи полиномиальной реконструкции

• **Задача 1.** Даны средние по ячейкам от функции $u(x)$:

$$\overline{U}_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(\xi)\, dx, \qquad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Для каждой ячейки $\Delta_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ найти полином $p_j(x)$ степени не выше $k-1$, аппроксимирующий $u(x)$ внутри ячейки с k-ым порядком точности:

$$p_j(x) = u(x) + O(\Delta x^k), \qquad x \in \Delta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

В частности,

$$U^R_{j-1/2} \equiv p_j(x_{j-1/2}) = u(x_{j-1/2}) + O(\Delta x^k), \qquad U^L_{j+1/2} \equiv p_j(x_{j+1/2}) = u(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^k).$$

• **Задача 2.** Даны значения функции $u(x)$ в центрах ячеек $U_j \equiv u(x_j)$. Найти величины $\widehat{U}_{j+1/2} = \widehat{U}(U_{j-r}, \ldots, U_{j+s})$, $\quad j = 0, \ldots, N$, разность которых аппроксимирует производную $u'(x)$ с k-ым порядком точности:

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\widehat{U}_{j+1/2} - \widehat{U}_{j-1/2}\right) = u'(x_j) + O(\Delta x^k), j = 1, 2, \ldots, N.$$

Реконструкция из средних по ячейкам

Пусть k задано. Выберем шаблон $S(j) \equiv \{\Delta_{j-r}, \dots, \Delta_{j+s}\}$, состоящий из ячейки Δ_j, r ячеек слева и s ячеек справа. Существует единственный полином $p(x)$ степени $k-1 = r+s$, чьи средние по каждой ячейке шаблона совпадают со средними функции $u(x)$:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p(\xi)\, d\xi = \overline{U}_i, \qquad i = j-r, \dots, j+s.$$

Этот полином и дает искомую реконструкцию. Что касается значений на гранях ячейки, то они оказываются линейными комбинациями средних по ячейкам, с коэффициентами c_{ri}, $\tilde{c}_{ri}$, не зависящими от самой функции $u(x)$:

$$U^R_{j+1/2} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri}\, \overline{U}_{j-r+i}, \qquad U^L_{j-1/2} = \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{c}_{ri}\, \overline{U}_{j-r+i}.$$

Если мы идентифицируем r не с ячейкой Δ_j, а с точкой $x_{j+1/2}$, т.е. используем шаблон $S(j)$, чтобы аппроксимировать значение в точке $x_{j+1/2}$, тогда можно опустить индексы $\pm$. Очевидно в этом случае $\tilde{c}_{ri} = c_{r-1,i}$. Итак,

$$\overline{U}_{j-r}, \dots, \overline{U}_{j-r+k-1}, \quad \Rightarrow \quad U_{j+1/2} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri} \overline{U}_{j-r+i}, \qquad U_{j+1/2} = U(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^k).$$

Как практически построить $p(x)$ и вычислить коэффициенты c_{ri}?

Использование первообразной функции

Определим первообразную $\mathcal{U}(x) = \int_{-\infty}^{x} u(\xi)\, d\xi$. Очевидно

$$\mathcal{U}(x_{j+1/2}) = \sum_{i=-\infty}^{j} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(\xi)\, d\xi = \sum_{i=-\infty}^{i} \overline{U}_i \Delta x$$

Построим интерполяционный полином Лагранжа $\mathcal{P}(x)$ степени k по значениям $\mathcal{U}(x_{j+1/2})$ в $k+1$ точке $x_{j-r-1/2}, \ldots, x_{j+s+1/2}$ и положим $p(x) = \mathcal{P}'(x)$. Легко проверить, что

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathcal{P}'(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\Delta x} \left(\mathcal{U}(x_{i+1/2} - \mathcal{U}(x_{i+1/2}) \right) =$$

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\int_{-\infty}^{x_{i+1/2}} u(\xi)\, d\xi - \int_{-\infty}^{x_{i-1/2}} u(\xi)\, d\xi \right) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(\xi)\, d\xi = \overline{U}_i, \qquad i = j-r, \ldots, j+s.$$

Для коэффициентов c_{ri} вычисления дают

$$c_{ri} = \sum_{m=i+1}^{k} \frac{\sum_{l=0,\ l\neq m}^{k} \prod_{q=0,\ q\neq m,l}^{k} (r-q+1)}{\prod_{l=0,\ l\neq 0}^{k} (m-l)}$$

Таблица коэффициентов c_{ri}

k	r	i=0	i=1	i=2	i=3
1	-1	1			
	0	1			
2	-1	3/2	-1/2		
	0	1/2	1/2		
	1	-1/2	3/2		
3	-1	11/6	-7/6	1/3	
	0	1/3	5/6	-1/6	
	1	-1/6	5/6	1/3	
	2	1/3	-7/6	11/6	
4	-1	25/12	-23/12	13/12	-1/4
	0	1/4	13/12	-5/12	1/12
	1	-1/12	7/12	7/12	-1/12
	2	1/12	-5/12	13/12	1/4
	3	-1/4	13/12	-23/12	25/12

Примеры:

$\underline{k=2}$

$$r = -1: \quad U_{j+1/2} = \frac{3}{2}\,\overline{U}_{j+1} - \frac{1}{2}\,\overline{U}_{j+2}$$

$$r = 0: \quad U_{j+1/2} = \frac{1}{2}\,\overline{U}_{j} + \frac{1}{2}\,\overline{U}_{j+1}$$

$$r = 1: \quad U_{j+1/2} = -\frac{1}{2}\,\overline{U}_{j-1} + \frac{3}{2}\,\overline{U}_{j}$$

$$+O(\Delta x^2)$$

$\underline{k=3}$

$$r = -1: \quad U_{j+1/2} = \frac{11}{6}\,\overline{U}_{j+1} - \frac{7}{6}\,\overline{U}_{j+2} + \frac{1}{3}\overline{U}_{j+3}$$

$$r = 0: \quad U_{j+1/2} = \frac{1}{3}\,\overline{U}_{j} + \frac{5}{6}\,\overline{U}_{j+1} - \frac{1}{6}\overline{U}_{j+2}$$

$$r = 1: \quad U_{j+1/2} = -\frac{1}{6}\,\overline{U}_{j-1} + \frac{5}{6}\,\overline{U}_{j} + \frac{1}{3}\overline{U}_{j+1}$$

$$r = 2: \quad U_{j+1/2} = \frac{1}{3}\,\overline{U}_{j-2} - \frac{7}{6}\,\overline{U}_{j-1} + \frac{11}{6}\overline{U}_{j}$$

$$+O(\Delta x^3)$$

Консервативная аппроксимация производной

Если можно найти функцию $h(x)$, такую что $u(x) = \frac{1}{\Delta x}\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} h(\xi)\ d\xi$, тогда очевидно $u'(x) = \frac{1}{\Delta x}\left[h\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) - h\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)\right]$ и

$$\widehat{U}_{j+1/2} = h(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^k) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta x}\left(\widehat{U}_{j+1/2} - \widehat{U}_{j-1/2}\right) = u'(x_j) + O(\Delta x^k).$$

Поскольку $u(x)$ — "скользящее среднее" функции $h(x)$, то для нахождения $h(x)$ можно снова использовать реконструкцию через первообразную. Определим $\mathcal{H}(x) = \int_{-\infty}^{x} h(\xi)\ d\xi$, тогда

$$\mathcal{H}(x_{j+1/2}) = \sum_{i=-\infty}^{j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} h(\xi)\ d\xi = \Delta x \sum_{i=-\infty}^{j} U_i.$$

Действуя как раньше, находим аппроксимацию -ого порядка, которую затем берем в качестве "численного потока" :

$$\widehat{U}_{j+1/2} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri} U_{j-r+i}.$$

Например, $\quad \widehat{U}_{j+1/2} = -\frac{1}{6}\,U_{j-1} + \frac{5}{6}\,U_j + \frac{1}{3}\,U_{j+1}, \qquad \frac{1}{\Delta x}\left(\widehat{U}_{j+1/2} - \widehat{U}_{j-1/2}\right) = u'(x_j) + O(\Delta x^3).$

Адаптивный шаблон

- Как выбрать шаблон так, чтобы избежать реконструкции поперек разрывов?
- Определим разделенные разности

$$i = 0: \qquad \mathcal{U}[x_{j-1/2}] \equiv \mathcal{U}(x_{j-1/2})$$

$$i \geq 1: \qquad \mathcal{U}[x_{j-1/2}, \ldots, x_{j-1/2+i}] \equiv \frac{\mathcal{U}[x_{j+1/2}, \ldots, x_{j-1/2+i}] - \mathcal{U}[x_{j-1/2}, \ldots, x_{j-3/2+i}]}{x_{j-1/2+i} - x_{j-1/2}}$$

Очевидно, $\mathcal{U}[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] = \dfrac{\mathcal{U}(x_{j+1/2}) - \mathcal{U}(x_{j-1/2})}{x_{j-1/2+i} - x_{j-1/2}} = \overline{U}_j$, так что высшие разделенные разности $\mathcal{U}$ выражаются через разности $\overline{U}$.

- Разделенные разности могут служить мерой гладкости решения, поскольку

$$\mathcal{U}[x_{j-1/2}, \ldots, x_{j-1/2+i}] = \mathcal{U}^{(i)}(\xi)/i!$$

для некоторого ξ внутри шаблона $x_{j-1/2} < \xi < j - 1/2 + i$, если фунция гладкая, и

$$\mathcal{U}[x_{j-1/2}, \ldots, x_{j-1/2+i}] = O(1/\Delta x^i),$$

если внутри шаблона существует разрыв.

Адаптивный шаблон

Тогда шаблон может быть определен с помощью последовательной процедуры:

1. В ячейке Δ_j начинаем с двухточечного шаблона $\tilde{S}_2(j) = \{x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\}$ для $\mathcal{U}$, который эквивалентен $S_1(j) = \{x_j\}$ для u.
2. Для $l = 2, \ldots, k$, предполагая шаблон $\tilde{S}_l(j) = \{x_{i+1/2}, \ldots, x_{i-1/2+l}\}$ известным, добавляем одну из двух соседних точек, $x_{i-1/2}$ или $x_{i+1/2+l}$ в соответствии с
   - Если $|\mathcal{U}[x_{j-1/2}, \ldots, x_{j-1/2+l}]| < |\mathcal{U}[x_{j+1/2}, \ldots, x_{j+1/2+i}]|$, то добавить $x_{i-1/2}$ к шаблону $\tilde{S}_l(j)$ и получить $\tilde{S}_{l+1}(j) = \{x_{j-1/2}, \ldots, x_{j-1/2+l}\}$.
   - Иначе добавить $x_{j+1/2+i}$ к шаблону $\tilde{S}_l(j)$ и получить $\tilde{S}_{l+1}(j) = \{x_{j+1/2}, \ldots, x_{j+1/2+l}\}$.
3. Определить, используя таблицу коэффициентов, $U^R_{j-1/2}$, $U^L_{j+1/2}$. Если нужно, можно также построить $\mathcal{P}_j(x)$ и $p_j(x)$.

Свойства ENO реконструкции

Для ENO реконструкции выполняются свойства

1. $\mathcal{P}_j(x) = \mathcal{U}(x) + O(\Delta x^{k+1}, \quad x \in \Delta_j$ для любой ячейки, не содержащей разрыва. Полная точность вплоть до разрыва.

2. $\mathcal{P}_j(x)$ монотонна в любой ячейке, содержащей разрыв $\mathcal{U}(x)$.

3. Данная реконструкция TVB (total variation bounded). Это означает, что существует функция $z(x)$, удовлетворяющая

$$z(x) = \mathcal{P}_j(x) + O(\Delta x^{k+1}), \quad x \in \Delta_i$$

для любой ячейки, включая содержащие разрывы, такая что

$$TV(z) \leq TV(\mathcal{U}).$$

WENO реконструкция

- **Ключевая идея:** вместо использования только одного из "шаблонов-кандидатов", использовать их выпуклую комбинацию.

$$S_r(j) = \{x_{j-r}, \dots, x_{j-r+k-1}\}, \qquad \Rightarrow \qquad U^{(r)}_{j+1/2} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri} \overline{U}_{j-r+i}, \qquad r = 0, \dots, k-1$$

$$U_{j+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r U^{(r)}_{j+1/2}, \qquad \omega_r \geq 0, \qquad \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r = 1$$

- Если функция $u(x)$ гладкая, существуют константы Ω_r, такие что

$$U_{j+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} \Omega_r U^{(r)}_{j+1/2} = u(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^{2k-1}).$$

$$\Omega_0 = 1, \qquad k = 1;$$

$$\Omega_0 = 2/3, \quad \Omega_1 = 1/3, \qquad k = 2;$$

$$\Omega_0 = 3/10, \quad \Omega_1 = 3/5, \quad \Omega_2 = 1/10, \qquad k = 3.$$

WENO реконструкция

- Для гладкого случая желательно иметь

$$\omega_r = \Omega_r + O(\Delta x^{k-1}), \qquad \Rightarrow \qquad U_{j+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r U_{j+1/2}^{(r)} = u(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^{2k-1}).$$

- Если какой-то шаблон содержит разрыв, соответствующий весовой коэффициент должен быть близким к нулю.

- Хорошо работают весовые коэффициенты, выбранные как

$$\omega_r = \frac{\sigma_r}{\sum_{s=0}^{k-1} \sigma_s}, \qquad \sigma_r = \frac{\Omega_r}{(\varepsilon + IS^{(r)})^2}, \qquad \varepsilon \approx 10^{-6}, \qquad r = 0, \ldots, k-1.$$

- Для гладкой функции $IS^{(r)} = O(\Delta_x^2), \quad \omega_r = O(1).$

- В случае разрыва $IS^{(r)} = O(1), \quad \omega_r = O(\Delta x^4).$

Индикаторы гладкости

$$IS^{(r)} = \sum_{l=1}^{k-1} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{\partial^l p_r(x)}{\partial x^l} \right)^2 dx$$

<u>k=2:</u>

$$IS^{(0)} = (\overline{U}_{j+1} - \overline{U}_j),$$
$$IS^{(1)} = (\overline{U}_j - \overline{U}_{j-1}.$$

<u>k=3:</u>

$$IS^{(0)} = \tfrac{13}{12}(\overline{U}_j - 2\overline{U}_{j+1} + \overline{U}_{j+2})^2 + \tfrac{1}{4}(3\overline{U}_j - 4\overline{U}_{j+1} + \overline{U}_{j+2})^2,$$
$$IS^{(1)} = \tfrac{13}{12}(\overline{U}_{j-1} - 2\overline{U}_j + \overline{U}_{j+1})^2 + \tfrac{1}{4}(\overline{U}_{j-1} - \overline{U}_{j+1})^2,$$
$$IS^{(0)} = \tfrac{13}{12}(\overline{U}_{j-2} - 2\overline{U}_{j-1} + \overline{U}_j)^2 + \tfrac{1}{4}(\overline{U}_{j-2} - 4\overline{U}_j + 3\overline{U}_j)^2.$$

Конечнообъемные схемы

1. Используя ENO или WENO реконструкцию получить из $\overline{U}_j$ величины $U^L_{j+1/2}$ и $U^R_{j+1/2}$;
2. Вычислить потоки $F_{j+1/2}$, решая (приближенно) задачу о распаде разрыва на гранях между ячейками;
3. Проинтегрировать по времени уравнение

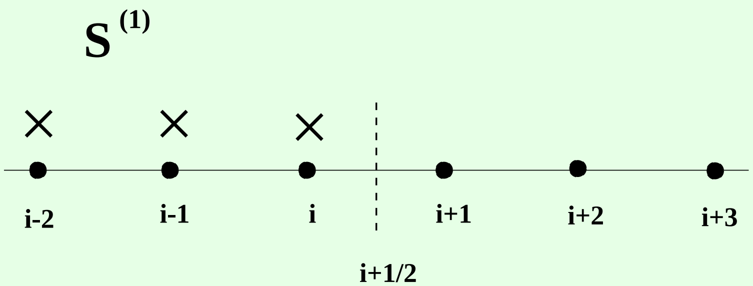
$$\frac{d\overline{U}_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}).$$

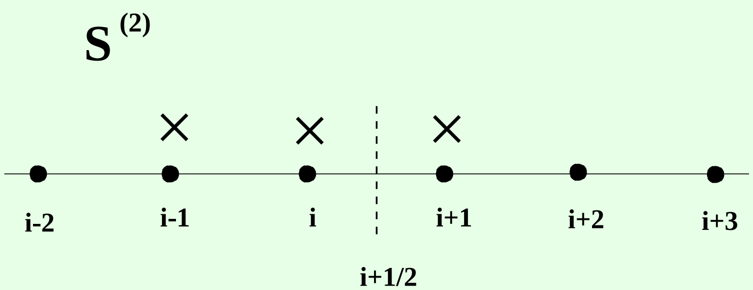
Конечноразностные схемы

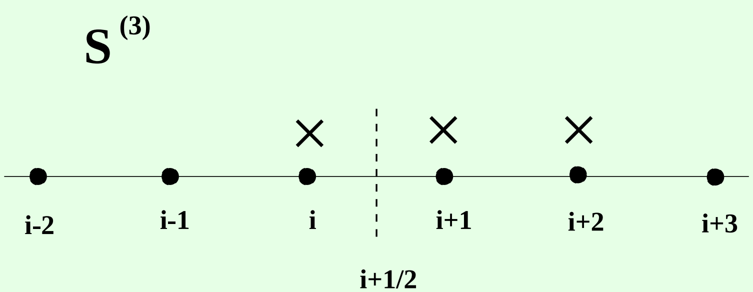
1. Расщепить поток на положительную и отрицательную части: $f(u) = f^+(u) + f^-(u)$, $\partial f^+/\partial u \geq 0$, $\partial f^-/\partial u \leq 0$;
2. Положить $\overline{V}_j = f^+(u_j)$ и используя ENO или WENO реконструкцию получить величины $\widehat{F}^+_{j+1/2} = U^L_{j+1/2}$;
3. Положить $\overline{V}_j = f^-(u_j)$ и используя ENO или WENO реконструкцию получить величины $\widehat{F}^-_{j+1/2} = U^R_{j+1/2}$;
4. Образовать полный поток $\widehat{F}_{j+1/2} = \widehat{F}^+_{j+1/2} + \widehat{F}^-_{j+1/2}$;
5. Проинтегрировать по времени уравнение

$$\frac{dU_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}(\widehat{F}_{j+1/2} - \widehat{F}_{j-1/2}).$$

Конечноразностная WENO схема 5-го порядка







Скалярный закон сохранения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad \lambda = \frac{\partial f}{\partial u} \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \sim \frac{\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}}{\Delta x}$$

ENO:

$$\hat{f}_{i+1/2} = \begin{cases} f^{(1)}_{i+1/2} = \frac{11}{6} f_i - \frac{7}{6} f_{i-1} + \frac{2}{6} f_{i-2} & \text{или} \\ f^{(2)}_{i+1/2} = \frac{2}{6} f_{i+1} + \frac{5}{6} f_i - \frac{1}{6} f_{i-1} & \text{или} \\ f^{(3)}_{i+1/2} = -\frac{1}{6} f_{i+2} + \frac{5}{6} f_{i+1} + \frac{2}{6} f_i & \end{cases}$$

WENO:

$$\hat{f}_{i+1/2} = \sum_{\nu=1}^{3} \omega^{(\nu)} f^{(\nu)}_{i+1/2}$$

Конечноразностная WENO схема 5-го порядка

$$\omega^{(\nu)} = \frac{\sigma^{(\nu)}}{\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)}}, \qquad \sigma^{(\nu)} = \frac{\Omega^{(\nu)}}{\left[\varepsilon + IS^{(\nu)}\right]^p}, \qquad p = 2, \qquad \varepsilon \sim 10^{-6}$$

Оптимальные коэффициенты:

$$\Omega^{(1)} = 1/10$$

$$\Omega^{(2)} = 6/10$$

$$\Omega^{(3)} = 3/10$$

Индикатор гладкости:

$$IS^{(\nu)} = \int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[\Delta x \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \Delta x^3 \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)^2\right] dx$$

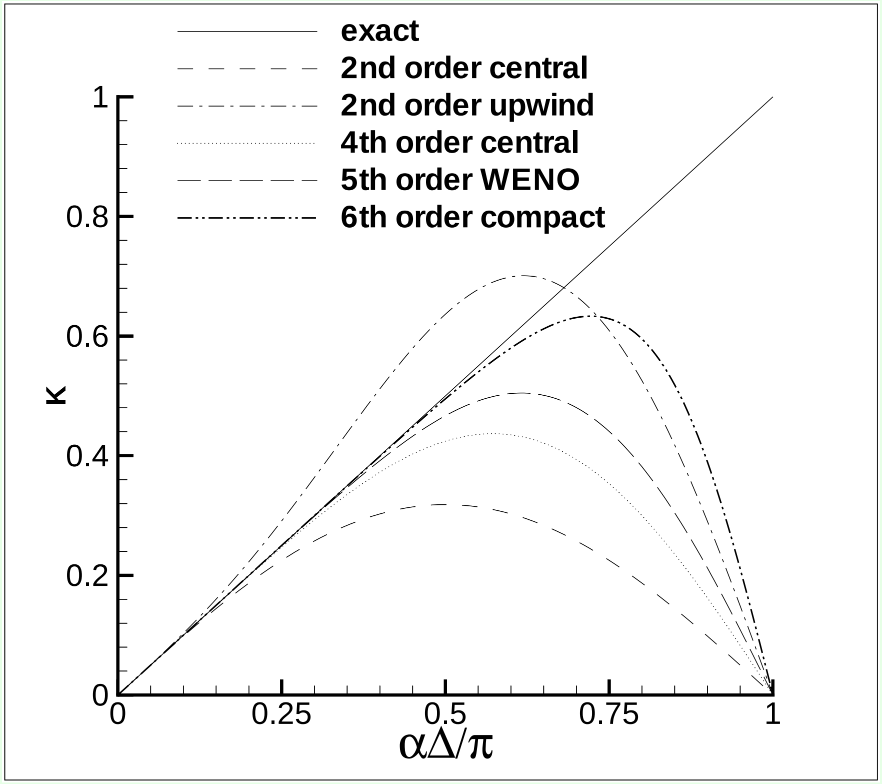
С оптимальными коэффициентами WENO схема эквивалентна несимметричной схеме 5-го порядка:

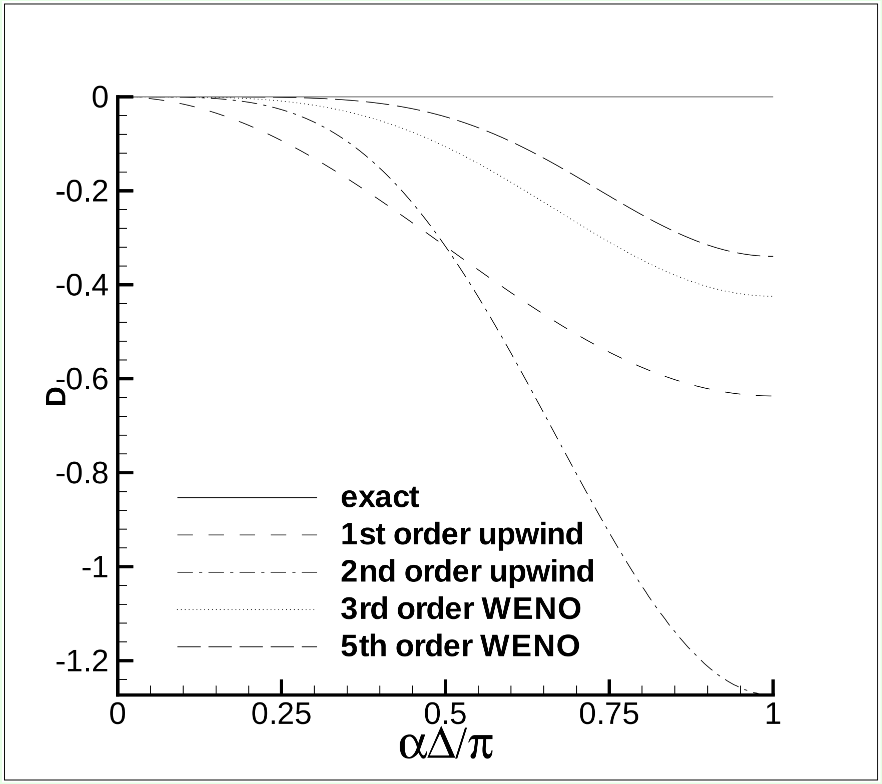
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-3f_{i+2} + 30f_{i+1} + 20f_i - 60f_{i-1} + 15f_{i-2} - 2f_{i-3}}{60\Delta x}$$

При $\lambda = \partial f/\partial u \leq 0$ используются симметрично отраженные формулы.

Дисперсионные и диссипативные свойства

Точное дифференцирование: $\frac{d}{dx}e^{i\alpha x} = i\alpha e^{i\alpha x}$, разностная аппроксимация $= i\alpha'(\alpha,\Delta)\ e^{i\alpha x}$, $\alpha' = k + iD$, Δ – шаг сетки.





Системы законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x = 0, \qquad \mathsf{A}(\mathbf{u}) = \partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u} = \mathsf{R}^{-1}(\mathbf{u})\,\Lambda(\mathbf{u})\,\mathsf{R}(\mathbf{u})$$

- Найдем среднее состояние $\widetilde{\mathbf{U}}_{j+1/2}$ (обычно с помощью усреднения по Роу)
- Определим локальные характеристические переменные

$$\overline{\mathbf{W}}_{j-r} = \widetilde{\mathsf{R}}^{-1}_{j+1/2}\overline{\mathbf{U}}_{j-r}, \ \ldots, \ \overline{\mathbf{W}}_{j+s} = \widetilde{\mathsf{R}}^{-1}_{j+1/2}\overline{\mathbf{U}}_{j+s}.$$

- Реконструкцию делаем в локальном характеристическом поле:

$$\overline{\mathbf{W}}_j \quad \rightarrow \quad \mathbf{W}^{L,R}_{j+1/2}$$

- Обратное преобразование к физическим переменным

$$\mathbf{U}^{L,R}_{j+1/2} = \widetilde{\mathsf{R}}_{j+1/2}\,\mathbf{W}^{L}_{j+1/2}$$

- В случае конечноразностных (W)ENO схем реконструкция применяется к локальным характеристичеким потокам:

$$\mathbf{\Phi}_{j-r} = \widetilde{\mathsf{R}}^{-1}_{j+1/2}\mathbf{f}_{j-r}, \ \ldots, \ \mathbf{\Phi}_{j+s} = \widetilde{\mathsf{R}}^{-1}_{j+1/2}\mathbf{f}_{j+s}.$$

Способы расщепления потока

$$\mathbf{\Phi} = \{\Phi^\alpha\}, \quad \alpha = 1, \ldots, n, \qquad \widetilde{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\widetilde{\lambda}^\alpha_{i+1/2}\}, \quad \alpha = 1, \ldots, n,$$

- Расщепление Роу

$$\Phi_i^{\alpha+} = \begin{cases} \Phi_i^\alpha, & \widetilde{\lambda}^\alpha_{j+1/2} \geq 0 \\ 0, & \widetilde{\lambda}^\alpha_{j+1/2} < 0 \end{cases} \qquad \Phi_i^{\alpha-} = \begin{cases} \Phi_i^\alpha, & \widetilde{\lambda}^\alpha_{j+1/2} < 0 \\ 0, & \widetilde{\lambda}^\alpha_{j+1/2} \geq 0 \end{cases}$$

- Локальное расщепление Лакса-Фридрихса

$$\Phi_i^{\alpha+} = (\Phi_i^\alpha + \beta W_i^\alpha)/2, \qquad \Phi_i^{\alpha-} = (\Phi_i^\alpha - \beta W_i^\alpha)/2, \qquad \beta = \min(\lambda_j^\alpha, \lambda_{j+1}^\alpha)$$

- Глобальное расщепление Лакса-Фридрихса

$$\Phi_i^{\alpha+} = (\Phi_i^\alpha + \beta W_i^\alpha)/2, \qquad \Phi_i^{\alpha-} = (\Phi_i^\alpha - \beta W_i^\alpha)/2, \qquad \beta = \min_{1 \leq m \leq N}(\lambda_m^\alpha)$$

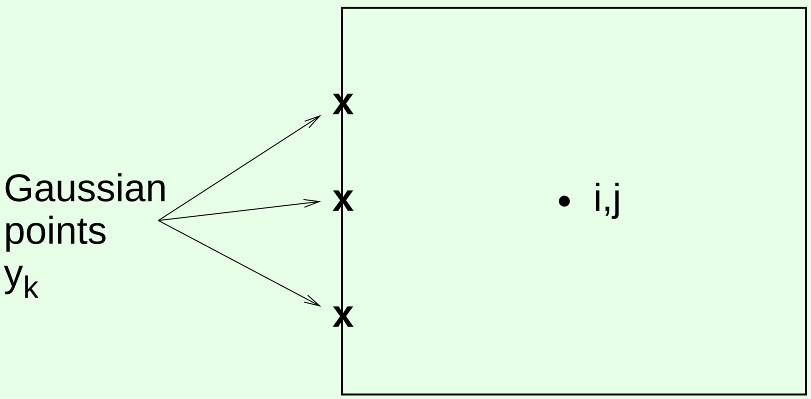
От одномерных задач к многомерным

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = 0$$

- Конечнообъемные схемы:

$$\Delta x \, \Delta y \, \frac{\partial \overline{\mathbf{U}}_{i,j}}{\partial t} + \left(\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}\right) + \left(\mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}\right) = 0$$

$$\overline{\mathbf{U}}_{i,j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(x,y) \, dx \, dy$$



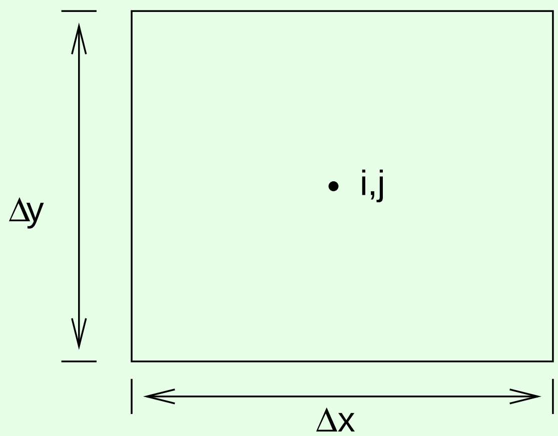
$$\mathbf{F}_{i-1/2,j} = \sum_k C_k \, \mathbf{F}(x_{i-1/2}, y_k)$$

От одномерных задач к многомерным

- Конечноразностные схемы:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{i,j}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\widehat{\mathbf{F}}_{i+1/2,j} - \widehat{\mathbf{F}}_{i-1/2,j}}{\Delta x}} + \frac{\widehat{\mathbf{G}}_{i,j+1/2} - \widehat{\mathbf{G}}_{i,j-1/2}}{\Delta y} = 0$$

$$= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\Big|_{i,j} + O(\Delta x^k)$$



$$\widehat{\mathbf{F}}_{i+1/2,j} = \mathbf{f}(x_{i+1/2}, y_j) + O(\Delta x^2)$$
$$\widehat{\mathbf{F}}_{i,j+1/2} = \mathbf{f}(x_i, y_{j+1/2}) + O(\Delta y^2)$$

- Время счета для конечнообъемных схем в 3.7 раза больше, чем для конечноразностных (Casper et al., 1993)

Интегрирование по времени

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Пространственная дискретизация} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}_t = \mathsf{L}(\mathbf{U})$$

Пусть схема устойчива и TVD при интегрировании методом Эйлера

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \mathsf{L}(\mathbf{U}^n), \qquad \Delta t \le \Delta t_1$$

Тогда можно попытаться найти методы Рунге-Кутты, также устойчивые и TVD при условии $\Delta t \le c\Delta t_1$

- Общий метод Рунге-Кутты

$$\mathbf{U}^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} \left(\alpha_{ik} \mathbf{U}^{(k)} + \Delta t \beta_{ik} \, \mathsf{L}(\mathbf{U}^{(k)}) \right), \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{U}^n, \qquad \mathbf{U}^{(m)} = \mathbf{U}^{n+1}$$

будет TVD схемой, если $\alpha_{ik} \ge 0, \quad \beta_{ik} \ge 0, \quad c = \min\limits_{i,k} \dfrac{\alpha_{ik}}{\beta_{ik}}.$

TVD схемы Рунге-Кутты

Удается построить TVD схемы Рунге-Кутты вплоть до третьего порядка. При этом $c = 1$.

- Схема второго порядка

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \mathsf{L}(\mathbf{U}^n),$$

$$\mathbf{U}^{n+1)} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^n + \frac{1}{2}\mathbf{U}^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t \mathsf{L}(\mathbf{U}^{(1)})$$

- Схема третьего порядка

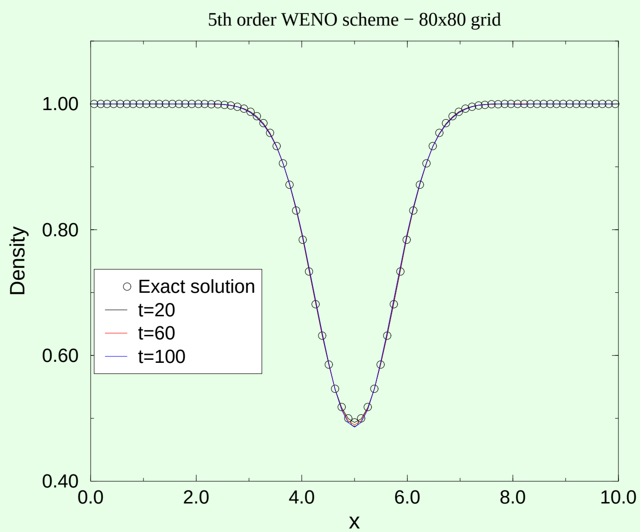
$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \mathsf{L}(\mathbf{U}^n),$$

$$\mathbf{U}^{(2)} = \frac{3}{4}\mathbf{U}^n + \frac{1}{4}\mathbf{U}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \mathsf{L}(\mathbf{U}^{(1)})$$

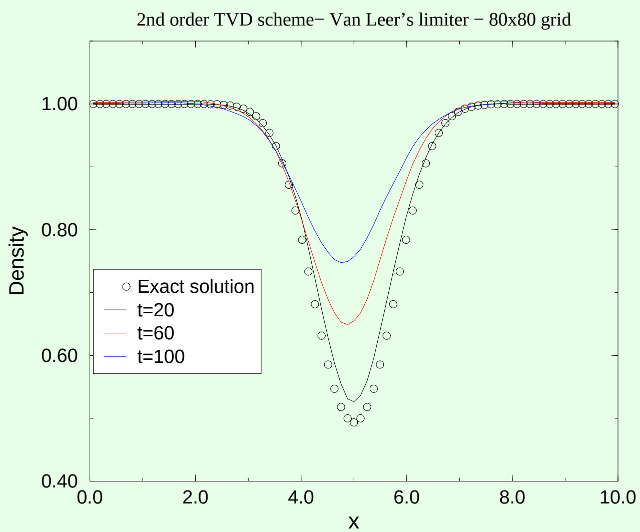
$$\mathbf{U}^{n+1)} = \frac{1}{3}\mathbf{U}^n + \frac{2}{3}\mathbf{U}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t \mathsf{L}(\mathbf{U}^{(2)})$$

Пример: диагональная конвекция вихря

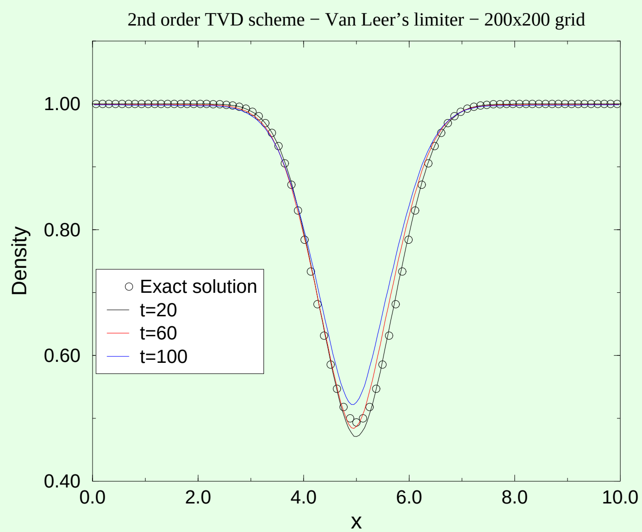
Изэнтропический вихрь переносится средним полем скорости $u = 1, v = 1$



5th order WENO, 80×80



2nd order TVD, 80×80



2nd order TVD, 200×200