Повышение порядка точности

- Кусочно-постоянная реконструкция решения в каждой расчетной ячейке приводит к схеме первого порядка точности. Очевидный способ повышения точности заключается в представлении решения в виде кусочно-линейной, кусочно-параболической и т.п. функции. Для этого нужно знать не только значения самой искомой функции в центре ячейки, но также значения ее первой, второй и т,д. производных:

$$W_j(x) = U_j + U_j'\,(x - x_j) + \frac{1}{2}\,U_j''\,(x - x_j)^2 + \ldots$$

- Единственный способ вычислить эти производные — воспользоваться значением искомой функции в соседних точках. Например, для первой производной можно записать:

$$U_j' \approx \begin{cases} (U_{j+1} - U_j)/\Delta x, \\ (U_j - U_{j-1})/\Delta x, \\ (U_{j+1} - U_{j-1})/2\Delta x \end{cases}$$

- Однако, если просто использовать так вычисленные производные для восстановления решения внутри расчетных ячеек и вычисления “левых” и “правых” значений функции на гранях между ячейками, то получающийся результат не вполне удовлетворителен. Как мы уже видели, при использовании схем второго и более высоких порядков возникают численные осцилляции вблизи точек разрыва. Далее излагается как избавиться от осцилляций и гарантировать монотонность решения

Монотонные схемы и TVD схемы

Изученная нами теорема Лакса-Вендроффа утверждает, что если при измельчении сетки решение, полученное с помощью консервативной схемы сходится к чему-то, то оно сходится к слабому решению закона сохранения. Она ничего не говорит о том, должно ли оно сходиться. Для этой цели бесполезна и теорема Лакса об эквивалентности, так как она применима только к линейным разностным схемам. Для **скалярного** закона сохранения сходимость удается доказать для определенного класса нелинейно устойчивых (TV-устойчивых) схем.

- Явная, $(p + q + 1)$-точечная схема

$$U_j^{n+1} = G(U_{j-q}^n, \dots, U_{j+p}^n)$$

называется *монотонной*, если G — монотонная возрастающая функция по каждому из $(p + q + 1)$ аргументов.

- Схема называется *TVD (total variation diminishing) схемой*, если

$$TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n), \qquad \text{где } TV(U) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_{j+1} - U_j|$$

- Схема называется *сохраняющей монотонность*, если из монотонности U^n следует монотонность U^{n+1}.

$$\boxed{\text{монотонная} \quad \Rightarrow \quad \text{TVD схема} \quad \Rightarrow \quad \text{сохраняющая монотонность}}$$

Нарушение свойства TVD схемой Лакса-Вендроффа

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \qquad u_j^0 = \begin{cases} 1, & j < 0 \\ 0, & j \geq 0 \end{cases}$$

После одного шага по схеме Лакса-Вендроффа получаем

$$u_j^1 = \begin{cases} 1, & j \leq -1 \\ 1.34, & j = 0 \\ 0.23, & j = 1 \\ 0, & j > 1 \end{cases}$$

$$TV(u^0) = 1, \qquad TV(u^1) = 0.34 + 1.11 + 0.23 = 1.68$$

Монотонные схемы

• **Теорема Годунова.** За исключением тривиального случая, когда оператор G есть чистый перенос, все монотонные схемы самое большое первого порядка точности.

Ошибка аппроксимации τ_n^j схемы

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n)$$

выражается как

$$\tau_n^j = -\Delta t(q(u)u_x)_x + \Delta t O(\Delta t^2 + \Delta x^2), \qquad q(u) = \left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}\sum_{k=-q}^{p} k^2 G_k(u,\ldots,u) - f'(u)^2\right)/2, \quad u \equiv u(t_n, x_j).$$

Можно показать, что для монотонной схемы $q(u) \le 0$ и равенство достигается только в том случае, когда оператор G есть чистая трансляция.

Трехточечные TVD схемы

• Рассмотрим трехточечные схемы ($F_{j+1/2} = F(U_j, U_{j+1})$). Запишем такую схему в виде

$$U_j^{n+1} = U_j^n + C_{j+1/2}\Delta_+ U_j^n - D_{j-1/2}\Delta_- U_j^n, \qquad \Delta_+ U_j = U_{j+1} - U_j,\ \Delta_- U_j = U_j - U_{j-1}.$$

Тогда схема TVD при выполении следующих условий:

$$C_{j+1/2} \geq 0, \quad D_{j-1/2} \geq 0, \quad C_{j+1/2} + D_{j-1/2} \leq 1.$$

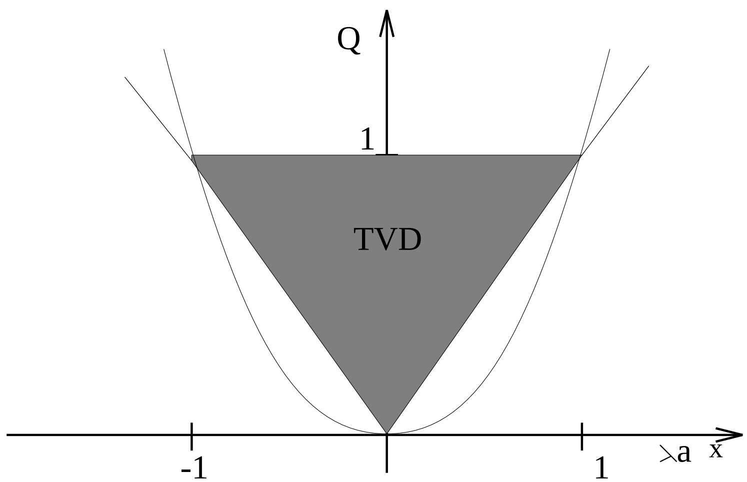
• Перепишем ту же схему в виде

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}), \qquad F_{j+1/2} = \frac{1}{2}(f(u_j) + f(u_{j+1})) - \frac{\Delta x}{\Delta t} Q_{j+1/2}(u_{j+1} - u_j)$$

Схема будет TVD тогда и только тогда, когда численный коэффициент вязкости удовлетворяет условию

$$\lambda|a_{j+1/2}| \leq Q_{j+1/2} \leq 1, \qquad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \qquad a_{j+1/2} = \begin{cases} \dfrac{f(u_{j+1} - f(u_j)}{u_{j+1} - u_j}, & u_j \neq u_{j+1} \\ f'(u_j), & u_j = u_{j+1} \end{cases}$$

Трехточечные TVD схемы



Для схемы Лакса-Вендроффа $Q_{j+1/2} = \lambda^2 a_{j+1/2}^2$, так что она лежит вне TVD области.

- Трехточечные TVD схемы — самое большее первого порядка точности.

Ограничения точности для TVD схем общего вида

• На гладких экстремумах, не являющихся звуковыми точками, TVD схемы первого порядка точности.

$$U_j^{n+1} = U_j^n + C_{j+1/2}\Delta_+ U_j^n - D_{j-1/2}\Delta_- U_j^n, \qquad C_{j+1/2} = C(U_{j-q+1}^n, \ldots, U_{j+p+1}^n),\ D_{j-1/2} = C(U_{j-q}^n, \ldots, U_{j+p}^n).$$

Выписав выражение для ошибки аппроксимации, получаем следующие условия для согласованности и точности второго порядка в точке где $u_x = 0$:

$$C - D = -\lambda f'(u), \qquad C + D = (\lambda f'(u))^2$$

$$2C = (\lambda f'(u))^2 - \lambda f'(u), \qquad 2D = (\lambda f'(u))^2 + \lambda f'(u)$$

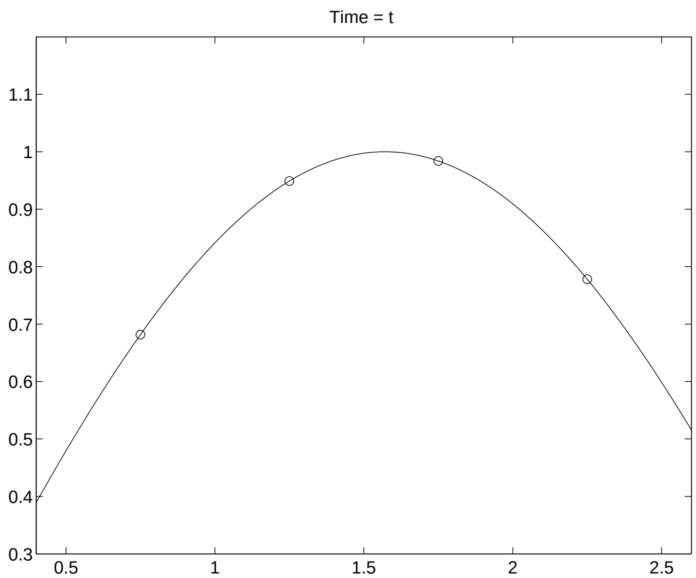
Из условия Куранта $\lambda f'(u) < 1$ вытекает, что C и D не могут быть обе неотрицательными. В то же время это требуется для TVD схемы. Таким образом, если $f'(u) \neq 0$, TVD схема будет первого порядка точности на гладком экстремуме.

• Если линейная разностная аппроксимация

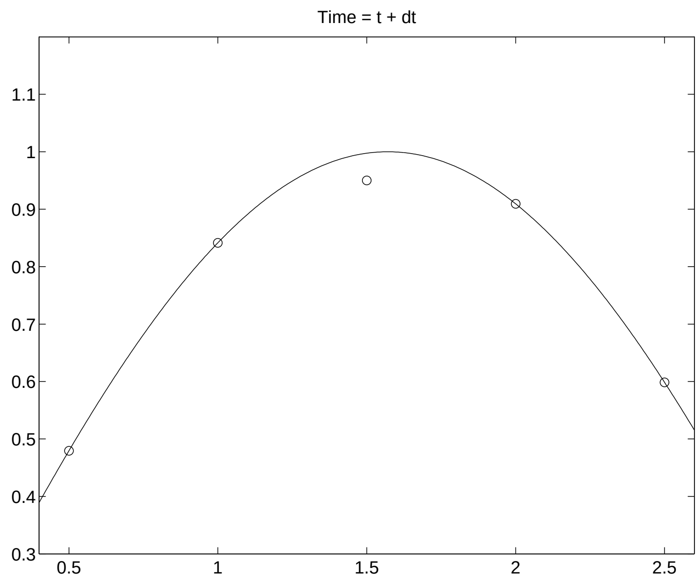
$$U_j^{n+1} = \sum_{k=-q}^{p} a_k U_{j+k}^n$$

есть TVD схема, то она первого порядка точности.

Первый порядок на гладких экстремумах



Время t



Время $t + dt$

Условие невозрастания полной вариации

Рассмотрим схему общего вида (не трехточечную), записанную в виде

$$U_j^{n+1} = U_j^n + C_{j+1/2}\Delta_+ U_j^n - D_{j-1/2}\Delta_- U_j^n, \qquad C_{j+1/2} = C(U_{j-q+1}^n, \ldots, U_{j+p+1}^n),\ D_{j-1/2} = C(U_{j-q}^n, \ldots, U_{j+p}^n).$$

Она будет удовлетворять TVD-свойству, если выполнены условия

$$C_{j+1/2} \ge 0, \qquad D_{j-1/2} \ge 0, \qquad C_{j+1/2} + D_{j-1/2} \le 1.$$

Доказательство

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |(U_{j+1}^n - U_j^n) + C_{j+3/2}(U_{j+2}^n - U_{j+1}^n) - C_{j+1/2}(U_{j+1}^n - U_j^n) - D_{j+1/2}(U_{j+1}^n - U_j^n) + D_{j-1/2}(U_j^n - U_{j-1}^n)| =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |C_{j+3/2}(U_{j+2}^n - U_{j+1}^n) + (1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2})(U_{j+1}^n - U_j^n) + D_{j-1/2}(U_j^n - U_{j-1}^n)|$$

$$\le \sum_{j=-\infty}^{\infty} |C_{j+3/2}(U_{j+2}^n - U_{j+1}^n)| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} |(1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2})(U_{j+1}^n - U_j^n)| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} |D_{j-1/2}(U_j^n - U_{j-1}^n)|$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}| \le \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{j+3/2}|(U_{j+2}^n - U_{j+1}^n)| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2})|(U_{j+1}^n - U_j^n)| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} D_{j-1/2}|(U_j^n - U_{j-1}^n)|$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}| \le \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{1+3/2}|(U_{j+1}^n - U_j^n)| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2})|(U_{j+1}^n - U_j^n)| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} D_{j+1/2}|(U_{j+1}^n - U_j^n)| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_{j+1}^n - U_j^n|$$

$$TV(U^{n+1}) \le TV(U^n)$$

Замечание о стационарном решении

Если выполнены условия предыдущей теоремы, тогда стационарное решение U_j будет монотонным, т.е.

$$\min(U_{j-1}, U_{j+1}) \le U_j \le \max(U_{j-1}, U_{j+1})$$

Доказательство

$$U_j^{n+1} = U_j^n + C_{j+1/2}(U_{j+1}^n - U_j^n) - D_{j-1/2}(U_j^n - U_{j-1}^n), \qquad \Rightarrow$$

$$U_j = \frac{C_{j+1/2}U_{j+1} + D_{j-1/2}U_{j-1}}{C_{j+1/2} + D_{j-1/2}}$$

и искомый результат немедленно следует из положительности коэффициентов.

Ограничители наклона (slope limiters)

$$u_t + f_x = 0, \qquad f(u) = f^+(u) + f^-(u), \quad df^+/du \geq 0,\ df^-/du \leq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^+(U^L_{j-1/2}) - F^+(U^L_{j+1/2}) + F^-(U^R_{j-1/2}) - F^-(U^R_{j+1/2})\right]$$

Рассмотрим следующую реконструкцию:

$$U^L_{j+1/2} = U_j^n + \frac{1}{2}\,\psi(R_j^n)\,(U_j^n - U_{j-1}^n), \qquad U^R_{j-1/2} = U_j^n - \frac{1}{2}\,\psi(\frac{1}{R_j^n})\,(U_{j+1}^n - U_j^n), \qquad R_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{U_j^n - U_{j-1}^n}$$

Здесь $U_j^n \approx \dfrac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(\xi, n\Delta t)\, d\xi$, $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная функция, называемая *лимитером (ограничителем)*.
$\psi = 0$ соответствует схеме первого порядка, $\psi = 1$ — односторонней схеме второго порядка с разностями против потока.

Покажем, что таким образом получается TVD-схема.

Доказательство.

$$C_{j+1/2} = -\frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\frac{F^-(U^R_{j+1/2}) - F^-(U^R_{j-1/2})}{U^R_{j+1/2} - U^R_{j-1/2}}\cdot\frac{U^R_{j+1/2} - U^R_{j-1/2}}{U^n_{j+1} - U^n_j}, \qquad D_{j-1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\frac{F^+(U^L_{j+1/2}) - F^+(U^L_{j-1/2})}{U^L_{j+1/2} - U^L_{j-1/2}}\cdot\frac{U^L_{j+1/2} - U^L_{j-1/2}}{U^n_j - U^n_{j-1}}$$

Чтобы удовлетворить условиям $C_{j+1/2} \geq 0$, $D_{j-1/2} \geq 0$, достаточно потребовать

$$\frac{U^R_{j+1/2} - U^R_{j-1/2}}{U^n_{j+1} - U^n_j} \geq 0, \qquad \frac{U^L_{j+1/2} - U^L_{j-1/2}}{U^n_j - U^n_{j-1}} \geq 0 \qquad (*)$$

Ограничители наклона (slope limiters)

Условие $C_{j+1/2} + D_{j-1/2} \le 1$ будет выполнено, если взять Δt достаточно малым.

Подставив в полученные неравества выражения для $U^{L,R}_{j\pm 1/2}$, получим, что достаточно выполнения условия

$$1 + \frac{1}{2}\,\psi(R) - \frac{1}{2}\,\psi(S)\cdot\frac{1}{S} \ge 0, \qquad \forall R, S \in \mathbb{R}.$$

Равномерная ограниченность левой части (*) получается, если потребовать

$$\psi(R) - \psi(S)\cdot\frac{1}{S} \le 2M, \qquad \forall R, S \in \mathbb{R}, \quad M \in (0, \infty).$$

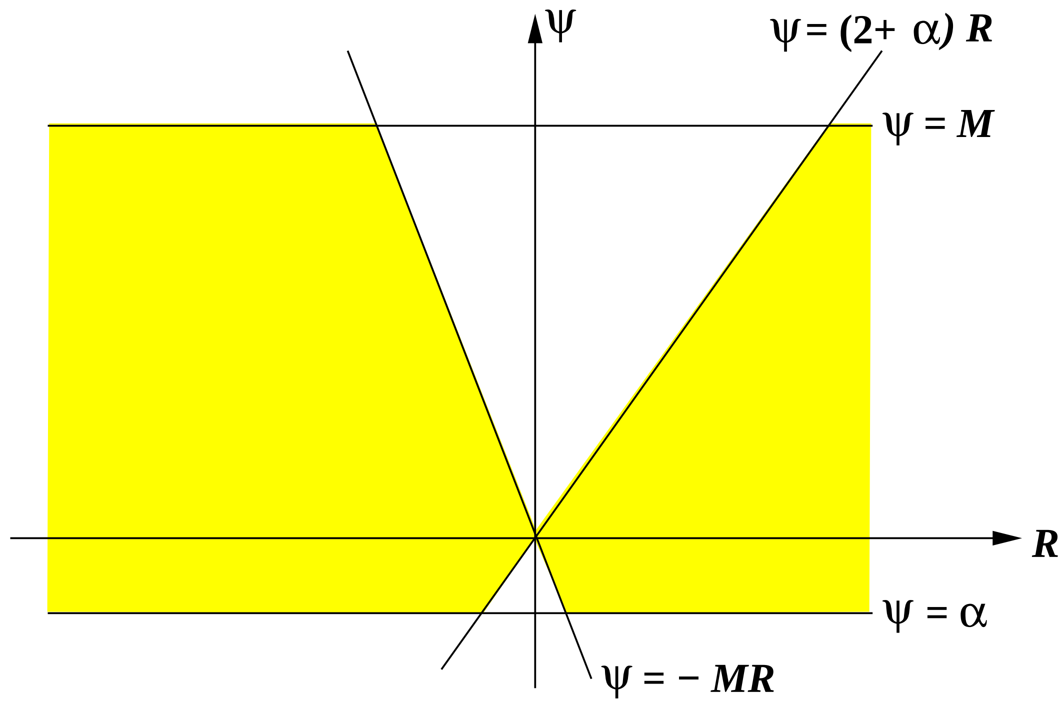
Таким образом, требование выполнения TVD свойства приводит к условию, которому должен удовлетворять лимитер:

$$-2 \le \psi(R) - \psi(S)\cdot\frac{1}{S} \le 2M, \qquad \forall R, S \in \mathbb{R}.$$

Это неравенство удовлетворяется, если

$$\alpha \le \psi(R) \le M, \quad \forall R \in \mathbb{R} \quad \text{и} \qquad -M \le \frac{\psi(R)}{R} \le 2 + \alpha, \quad \forall R \in \mathbb{R} \qquad\qquad (\alpha \in [-2, 0])$$

Область *TVD*



Второй порядок точности

Очевидно, что если $\psi \equiv 0$, то TVD схема — первого порядка. При каких условиях на ограничитель схема будет второго порядка точности? Определим

$$\tilde{U}^L_{j+1/2} = U^n_j + \frac{1}{2}\,(U^n_j - U^n_{j-1}), \qquad U^L_{j+1/2} = U^n_j + \frac{1}{2}\,\psi(R^n_j)\,(U^n_j - U^n_{j-1}), \qquad R^n_j = \frac{U^n_{j+1} - U^n_j}{U^n_j - U^n_{j-1}}$$

$$\tilde{U}^R_{j-1/2} = U^n_j - \frac{1}{2}\,(U^n_{j+1} - U^n_j), \qquad U^R_{j-1/2} = U^n_j - \frac{1}{2}\,\psi(\frac{1}{R^n_j})\,(U^n_{j+1} - U^n_j), \qquad \frac{1}{R^n_j} = \frac{U^n_j - U^n_{j-1}}{U^n_{j+1} - U^n_j}$$

Значения $\tilde{U}^L_{j+1/2}$, $\tilde{U}^R_{j-1/2}$ соответствуют $\psi(R) \equiv 1$, т.е. односторонней противопотоковой схеме 2-го порядка.

- TVD схема будет схемой 2-го порядка, если

$$U^L_{j+1/2} - U^L_{j-1/2} = \tilde{U}^L_{j+1/2} - \tilde{U}^L_{j-1/2} + O(\Delta x^3) \quad \text{и} \quad U^L_{j+1/2} = \tilde{U}^L_{j+1/2} + O(\Delta x^2) \qquad (*)$$

- Далее получаем

$$U^L_{j+1/2} = \tilde{U}^L_{j+1/2} + (\frac{1}{2}\,\psi(R_j) - 1)\,(U_j - U_{j-1})$$

Предполагая, что $\partial u/\partial x$ отграничена от 0, имеем

$$R_j = \frac{U_{j+1} - U_j}{U_j - U_{j-1}} = 1 + \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{U_j - U_{j-1}} = 1 + O(\Delta x)$$

$$\psi(R_j) = \psi(1) + \frac{d\psi}{dR}(1) \cdot (R_j - 1) + O(\Delta x^2)$$

Второй порядок точности

Получаем, что если $\psi(1) = 1$, то второе из условий (*) выполняются. Далее

$$U^L_{j+1/2} = \tilde{U}^L_{j+1/2} + \frac{1}{2}\,\frac{d\psi}{dR}(1)\,\left(\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{U_j - U_{j-1}}\right) \cdot (U_j - U_{j-1}) + O((\Delta x^3) = \tilde{U}^L_{j+1/2} + \frac{1}{2}\,\frac{d\psi}{dR}(1)\,(U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}) + O((\Delta x^3)$$

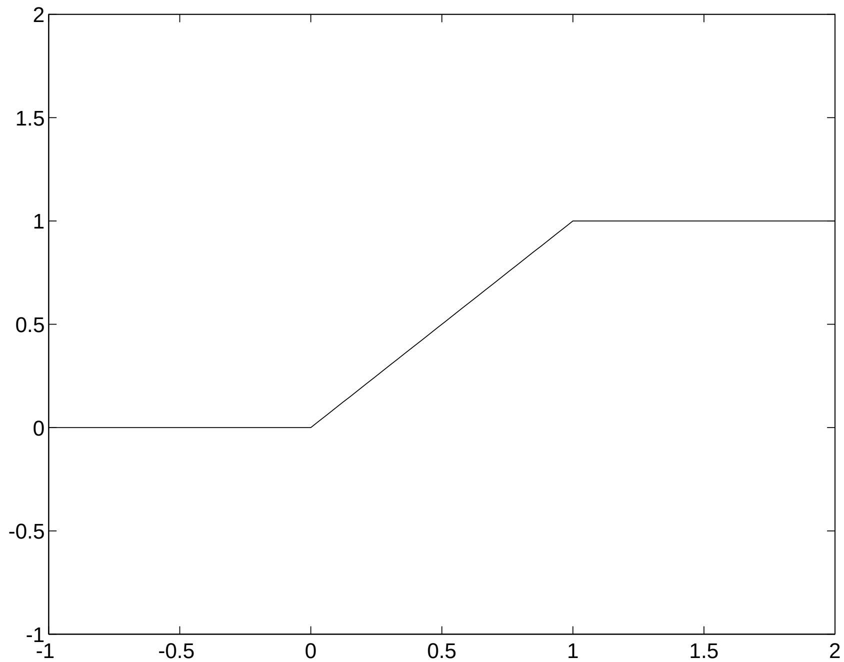
Таким образом и первое условие удовлетворяется.

- Если $\psi(1) = 1$ и $\psi \in C^2$, то TVD схема будет второго порядка точности по пространству.
- Схема будет линейной, если $\psi(R) = a + bR$, $a, b \in \mathbb{R}$. Очевидно, что ни одна линейная схема не может одновременно быть второго порядка точности и удовлетворять TVD свойству.

Примеры ограничителей. MinMod

$$\psi_{MM}(R) = \begin{cases} 0, & R \le 0 \\ \min(1, R), & R > 0 \end{cases}$$

$$\psi_{MM}(1) = 1$$

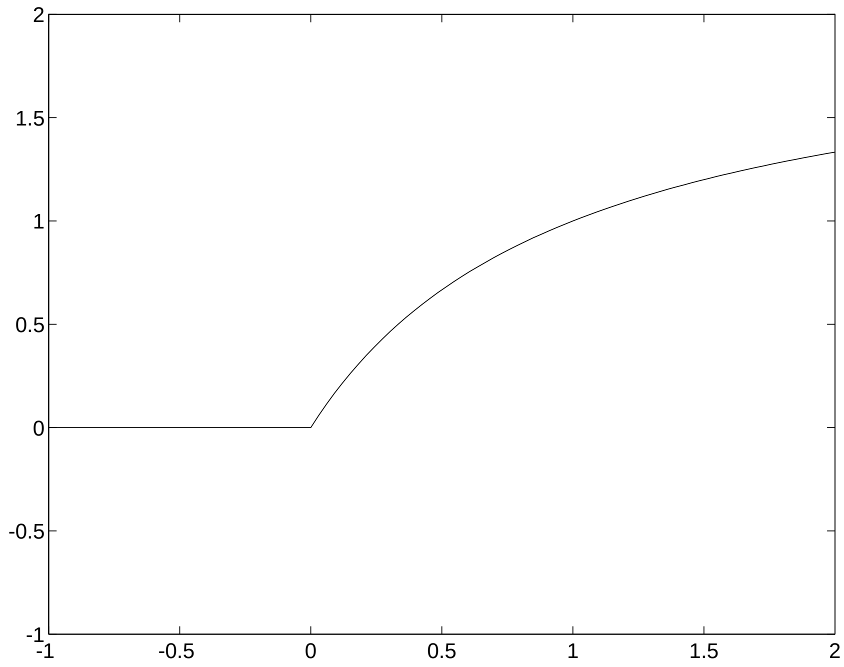


Ограничитель Minmod

Примеры ограничителей. Ограничитель ван Леера

$$\psi_{VL}(R) = \frac{R + |R|}{|R| + 1} = \begin{cases} 0, & R \le 0 \\ \frac{2R}{R+1}, & R > 0 \end{cases}$$

$$M = 2,\ \alpha = 0, \qquad \psi_{VL}(1) = 1$$

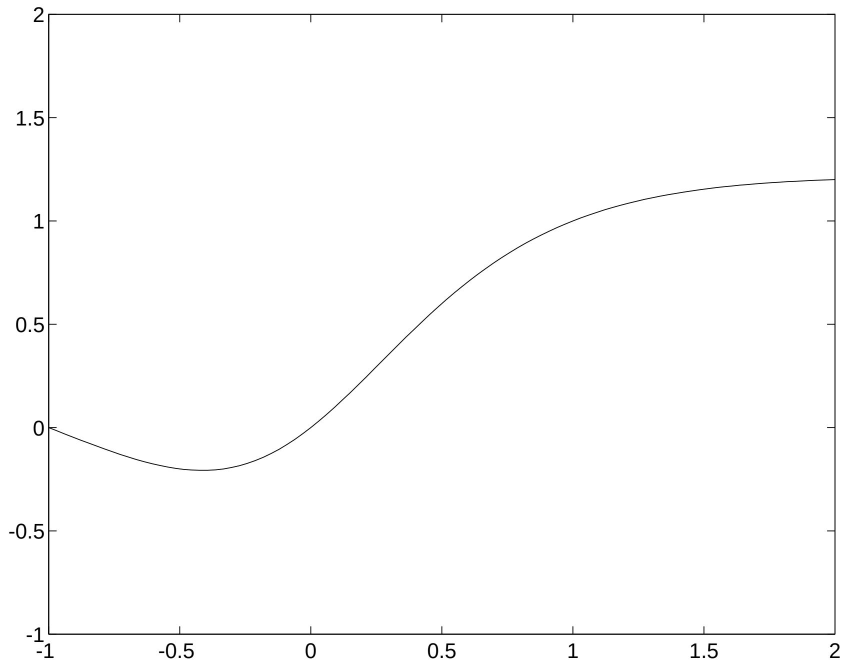


Ограничитель ван Леера

Примеры ограничителей. Ограничитель ван Альбада

$$\psi_{VA}(R) = \frac{R^2 + R}{R^2 + 1}$$

$$M = 2, \ \alpha = -1/2, \qquad \psi_{VA}(1) = 1, \quad \psi_{VA} \in C^\infty$$



Ограничитель ван Альбада

Примеры ограничителей. Superbee

$$\psi_{SB}(R) = \begin{cases} 0, & R \le 0 \\ \max(\min(2R, 1), \min(R, 2)), & R > 0 \end{cases}$$

$$\psi_{SB}(1) = 1$$

Примеры ограничителей. Модифицированный MinMod

$$\psi^c_{MM}(R) = \begin{cases} 0, & R \le 0 \\ \min(c, R), & R > 0, \quad 1 \le c \le 2 \end{cases}$$

$$\psi^c_{MM}(1) = 1$$

Связь с линейной реконструкцией

Если решение представлено в каждой ячейке линейной функцией, тогда

$$U^L_{j+1/2} - U_j = U_j - U^R_{j-1/2} \qquad \Rightarrow \qquad \psi(R_j)\ (U_j - U_{j-1}) = \psi(\frac{1}{R_j})\ (U_{j+1} - U_j) \qquad \Rightarrow \qquad \psi\left(\frac{1}{R_j}\right) = \frac{\psi(R_j)}{R_j}$$

Таким образом, если ограничитель обладает свойством $\psi\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\psi(R)}{R}$, $\forall R \in \mathbb{R}$ тогда можно говорить о линейной реконструкции решения в каждой счетной ячейке. Ограничители ψ_{MM}, ψ_{VL}, ψ_{VA}, ψ_{SB} обладают данным свойством, ψ^c_{MM} — нет.

- В случае линейной реконструкции, TVD свойство эквивалентно

$$\alpha \le \psi(R) \le M, \qquad -M \le \psi(R) \le 2 + \alpha \qquad \forall R \in \mathbb{R}$$

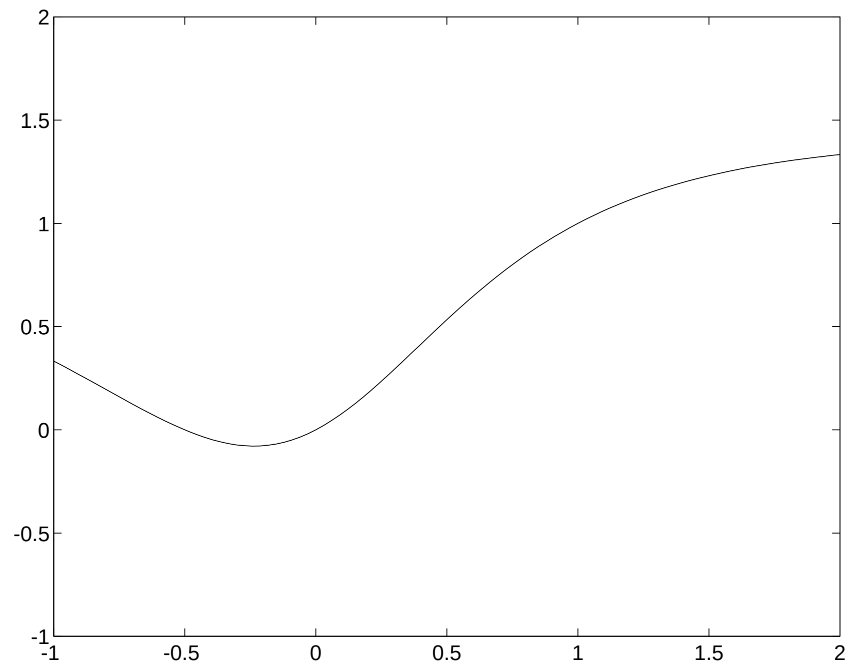
Взяв $M = 2$, сведем это к одному условию

$$\alpha \le \psi(R) \le 2 + \alpha \qquad \forall R \in \mathbb{R}, \quad (\alpha \in [-2, 0]) \qquad \Rightarrow \qquad \psi_{max} - \psi_{min} \le 2$$

Третий порядок точности

Если ограничитель имеет дополнительное свойство $\psi'(1) = 2/3,$ то можно показать, что схема будет иметь третий порядок точности в точках, где производная решения не равна нулю. Поскольку $\psi(R)/R = \psi(1/R)$ влечет $\psi'(1) = 1/2$, то 2/3-ограничитель не может быть линейной реконструкцией. Примеры таких ограничителей

$$\psi^1_{2/3}(R) = \frac{4R^2 + 2R}{3(R^2+1)}, \qquad \psi^2_{2/3}(R) = \frac{2R^2 + R}{2R^2 - R + 2)}$$



2/3-ограничитель

κ-формула ван Леера

В литературе часто встречается так называемая κ-формула ван Леера:

$$U^L_{j+1/2} = U_j + \frac{1}{4}\left[(1-\kappa)\widetilde{\widetilde{\Delta_{j-1/2}}} + (1+\kappa)\widetilde{\Delta_{j+1/2}}\right],$$

$$U^R_{j-1/2} = U_j - \frac{1}{4}\left[(1-\kappa)\widetilde{\Delta_{j+1/2}} + (1+\kappa)\widetilde{\widetilde{\Delta_{j-1/2}}}\right],$$

$$\widetilde{\Delta_{j+1/2}} = \mathrm{Lim}(U_{j+1} - U_j, U_j - U_{j-1}), \quad \widetilde{\widetilde{\Delta_{j-1/2}}} = \mathrm{Lim}(U_j - U_{j-1}, U_{j+1} - U_j)$$

с утверждением, что она дает третий порядок точности при $\kappa = 1/3$. В действительности реконструкция по данной формуле будет третьего порядка, если не применять ограничителей. В противном случае справедливость этого утверждения зависит от свойств используемого ограничителя. Формулу ван Леера можно переписать в стандартном виде, использованном нами, и анализировать также, как это делалось выше.

Обобщение на многомерный случай

$$u_t + f_x + g_y = 0$$

$$\begin{aligned} U_{jk}^{n+1} = U_{jk}^n \quad + \quad & \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^+(U^L_{j-1/2,k}) - F^+(U^L_{j+1/2,k}) + F^-(U^R_{j-1/2,k}) - F^-(U^R_{j+1/2,k})\right] + \\ & \frac{\Delta t}{\Delta y}\left[G^+(U^L_{j,k-1/2}) - G^+(U^L_{j,k+1/2}) + G^-(U^R_{j,k-1/2}) - G^-(U^R_{j,k+1/2})\right] \end{aligned}$$

$$U^L_{j+1/2,k} = U^n_{j,k} + \frac{1}{2}\ \psi(R^n_{j,k})\ (U^n_{j,k} - U^n_{j-1,k}), \qquad U^R_{j-1/2,k} = U^n_{j,k} - \frac{1}{2}\ \psi(\frac{1}{R^n_{j,k}})\ (U^n_{j+1,k} - U^n_{j,k}), \qquad R^n_{j,k} = \frac{U^n_{j+1,k} - U^n_{j,k}}{U^n_{j,k} - U^n_{j-1,k}}$$

$$U^L_{j,k+1/2} = U^n_{j,k} + \frac{1}{2}\ \psi(S^n_{j,k})\ (U^n_{j,k} - U^n_{j,k-1}), \qquad U^R_{j,k-1/2} = U^n_{j,k} - \frac{1}{2}\ \psi(\frac{1}{S^n_{j,k}})\ (U^n_{j,k+1} - U^n_{j,k}), \qquad S^n_{j,k} = \frac{U^n_{j,k+1} - U^n_{j,k}}{U^n_{j,k} - U^n_{j,k-1}}$$

$$U^n_{j,k} \approx \frac{1}{\Delta x \Delta y}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}}\int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} u(\xi,\eta,n\Delta t)\ d\xi d\eta$$

$$U^L_{j+1/2,k}, U^R_{j+1/2,k} \approx \frac{1}{\Delta y}\int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} u(x_{j+1/2},\eta,n\Delta t)\ d\eta$$

Обобщение на систему законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x = 0, \qquad \mathsf{A}(\mathbf{u}) = \partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u} = \mathsf{R}^{-1}(\mathbf{u})\ \Lambda(\mathbf{u})\ \mathsf{R}(\mathbf{u})$$

Определим локальные характеристические переменные

$$\mathbf{W}_{j-q} = \mathsf{R}_j^{-1}\mathbf{U}_{j-q},\ \ldots,\ \mathbf{W}_j = \mathsf{R}_j^{-1}\mathbf{U}_j,\ \ldots,\ \mathbf{W}_{j+p} = \mathsf{R}_j^{-1}\mathbf{U}_{j+p}, \qquad \mathbf{W}_j == \{W_j^{(\alpha)}\} = (W_j^{(1)}, \ldots, W_j^{(n)})^T.$$

Реконструкцию будем делать в локальном характеристическом поле:

$$W_{j+1/2}^{(\alpha)L} = W_j^{(\alpha)} + \frac{1}{2}\ \psi(S_j^{(\alpha)})\ (W_j^{(\alpha)} - W_{j-1}^{(\alpha)}), \qquad W_{j-1/2}^{(\alpha)R} = W_j^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\ \psi(\frac{1}{S_j^{(\alpha)}})\ (W_{j+1}^{(\alpha)} - W_j^{(\alpha)}), \qquad S_j^{(\alpha)} = \frac{W_{j+1}^{(\alpha)} - W_j^{(\alpha)}}{W_j^{(\alpha)} - W_{j-1}^{(\alpha)}}$$

Обратное преобразование к физическим переменным

$$\mathbf{U}_{j+1/2}^L = \mathsf{R}_j\ \mathbf{W}_{j+1/2}^L \qquad \mathbf{U}_{j-1/2}^R = \mathsf{R}_j\ \mathbf{W}_{j-1/2}^R$$