



Новосибирский государственный университет, 2003 г.

# Численные методы механики сплошной среды. Механика жидкости и газа

*Введение в вычислительную гидродинамику*

А. Н. Кудрявцев



Лаборатория вычислительной аэродинамики  
ИТПМ СО РАН, Новосибирск, Россия

<http://www.itam.nsc.ru/users/alex/lectures>

## *Зачем это нужно ?*

- **Зачем нужна гидродинамика?** Много лет назад американский математик Г.Биркгоф в предисловии к одной из своих книг заметил, что гидродинамика описывает два из трех известных состояний вещества, так что появление еще одной книги, посвященной этой науке, совсем неудивительно. С тех пор изменилось очень многое, появилось даже четвертое состояние вещества — плазма, и что же? Оказалось, что это новое состояние вещества тоже допускает гидродинамическое описание. От течения крови в мельчайших капиллярах до галактических струй — вот диапазон, в котором работает гидродинамика.
- **Зачем нужна вычислительная гидродинамика?** К сожалению (или к счастью!?) уравнения гидродинамики нелинейны. Это означает, что лишь в очень редких случаях можно найти их аналитическое решение. Таким образом, использование численных методов при решении задач гидродинамики абсолютно необходимо. Почти фантастически быстрый рост быстродействия и объема памяти ЭВМ, создание все более "умных" алгоритмов привел к бурному развитию вычислительной гидродинамики и надеждам, что в не столь далеком будущем компьютерные расчеты заменят дорогостоящие эксперименты в аэродинамических трубах. Сегодня программы для расчета течений жидкостей и газа — это не только наука, это также продукт, который активно продается, покупается и используется в очень многих отраслях промышленности.

## *Немного истории*

- **1917 г.** Первая попытка Л.Ф.Ричардсона предсказать погоду путем численного решения (вручную!) уравнений в частных производных. "Пока что я платил за расчет одного координатного узла лапласиана по расценке  $n/18$  пенсов, где  $n$  — число цифр, с которыми проводятся вычисления. Основная ошибка вычислителей состояла в том, что они путали знаки "плюс" и "минус". Что касается скорости расчетов, то один из самых быстрых работников рассчитывал за неделю в среднем 2000 узлов лапласиана с трехзначными числами; ошибочные расчеты не оплачивались."
- **1950 г.** После создания ЭВМ, они были почти немедленно использованы для численного решения задач гидромеханики. Для рассматриваемого нами предмета особый интерес представляет статья Дж. фон Неймана и Р.Рихтмайера, в которой они предложили использовать явную искусственную вязкость для расчета течений с ударными волнами.
- **1959 г.** Первая открытая публикация С.К.Годунова, в которой была описана знаменитая схема Годунова, основанная на решении задачи о распаде разрыва. Эта схема и ее почти бесчисленные модификации и модернизации были успешно применены к огромному количеству различных задач.
- **1983 г.** В статье А.Хартена предложены TVD (total variation diminishing) схемы, являющиеся, пожалуй, основным рабочим инструментом, используемым сейчас учеными, работающими в области вычислительной аэродинамики.

## ***Программа курса***

1. Место и роль вычислительной аэрогидродинамики в современной науке и в технических приложениях. Краткий исторический обзор. Основные уравнения механики сплошной среды. Консервативная форма уравнений. Гиперболичность уравнений Эйлера, характеристики. Понятие слабого решения. Ударные волны и условия Рэнкина-Гюгонио.
2. Основные способы дискретизации уравнений движения сплошной среды. Методы конечных разностей, конечных объемов и конечных элементов, спектральные методы. Понятия аппроксимации, устойчивости и сходимости. Нахождение слабых решений гиперболических уравнений, подходы с выделением разрывов и метод сквозного счета, теорема Лакса-Вендроффа.
3. Задача о распаде произвольного разрыва и схема Годунова. Вычисление потоков в современных схемах сквозного счета. Расщепление вектора потоков, схемы Стегера-Уорминга и ван Леера. Расщепление разности потоков, схема Роу. Метод Хартена-Лакса-ван Леера.
4. Повышение порядка аппроксимации в схемах сквозного счета. Теорема Годунова. Схемы с реконструкцией потоков и с реконструкцией зависимых переменных. Формулы реконструкции различного порядка точности. Лимитеры.
5. Методы аппроксимации вязких членов. Особенности численной постановки различных типов граничных условий. Интегрирование уравнений по времени. Явные и неявные схемы. TVD схемы Рунге-Кутты. Методы приближенной факторизации. Решение стационарных задач. Маршевые методы.

## ***Рекомендуемая литература***

1. А.Г.Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М: Физматлит, 2001.
2. В.И.Пинчуков, Ч.-В. Шу. Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
3. R.J.LeVeque. Numerical Methods for Conservation Laws. Basel et al.: Birkhäuser Verlag, 1992.
4. E.F.Toro. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.
5. P.Colella, E.G.Puckett. Modern Numerical Methods for Fluid Flow. University of California, 1994.  
<http://www.rzg.mpg.de/~bds/numerics/cfd-lectures.html>
6. C.-W.Chu. Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. NASA/CR-97-206253, ICASE Report No. 97-65, 1997.  
<http://techreports.larc.nasa.gov/icasel/1997/icasel-1997-65.pdf>