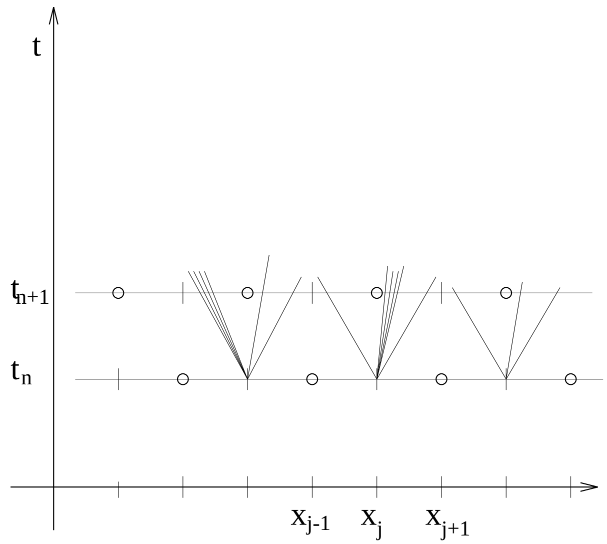
Схема Годунова



Используя численное решение U_j^n в момент времени t_n, определяем кусочно-постоянную функцию $U(x) = \tilde{u}(x, t_n)$. Далее, находим на некотором малом интервале времени точное решение $\tilde{u}(x, t)$ задачи с этими начальными данными. Для этого решаются задачи о распаде разрыва на каждой границе между соседними расчетными ячейками (т.е. между состояниями U_j^n и U_j^{n+1}). Приближенное решение в момент времени t_{n+1} определяется как среднее от точного решения по ячейкам:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}(x, t^{n+1})\, dx.$$

Это среднее легко вычислить, используя интегральную форму законов сохранения и то, что $\tilde{u}$ точное решение:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}(x, t^{n+1})\, dx = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{u}(x, t^{n})\, dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tilde{u}(x_{j-1/2}, t))\, dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tilde{u}(x_{j+1/2}, t))\, dx$$

Схема Годунова

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)\right], \qquad F(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tilde{u}(x_{j+1/2}, t))\, dx$$

Решение задачи о распаде разрыва автомодельно и постоянно вдоль любого луча. Постоянное значение $\tilde{u}$ вдоль линии $x = x_{j+1/2}$ обозначим через u^*, оно зависит только от U_j^n и U_{j+1}^n. Численный поток сводится к $F(U_j^n, U_{j+1}^n) = f(u^*(U_j^n, U_{j+1}^n))$, так что окончательно получаем для схемы Годунова:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[f(u^*(U_j^n, U_{j+1}^n)) - f(u^*(U_{j-1}^n, U_j^n))\right].$$

Очевидно, что поток согласован: $U_j^n = U_{j+1}^n \equiv \tilde{u} \quad \Rightarrow \quad u^*(U_j^n, U_{j+1}^n) = \tilde{u}$.

Шаг по времени должен быть достаточно мал, чтобы волны, возникающие из рапада разрывов на соседних гранях, не взаимодействовали друг с другом. Поскольку скорости волн ограничены собственными згачениями матрицы Якоби, достаточно потребовать, чтобы

$|\Delta t \lambda_p(U_j^n)/\Delta x| \leq 1$ для всех λ_p при каждом U_j^n (условие Куранта-Фридрихса-Леви, CFL).

Одномерные уравнения Эйлера

$$\begin{pmatrix}\rho\\ m\\ E\end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix}m\\ \rho u^2+p\\ (E+p)u\end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad m=\rho u, \quad p=(\gamma-1)\left(E-\frac{\rho u^2}{2}\right)$$

Собственные значения $\lambda_1 = u-a,\ \lambda_2 = u,\ \lambda_3 = u+a,$ где $a=\sqrt{\gamma p/\rho}$.

Собственные векторы $\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix}1\\ u-a\\ H-ua\end{bmatrix},\ \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix}1\\ u\\ u^2/2\end{bmatrix},\ \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix}1\\ u+a\\ H+ua\end{bmatrix},\qquad H=\frac{E+p}{\rho}\equiv\frac{u^2}{2}+\frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho}.$

Легко проверить, что характеристические поля 1 и 3 — истинно нелинейные, а поле 2 — линейно вырожденное:

$$\mathbf{r}_1^T\,\nabla\lambda_1 = -(\gamma+1)\frac{a}{\rho}\neq 0, \qquad \mathbf{r}_2^T\,\nabla\lambda_2\equiv 0, \qquad \mathbf{r}_3^T\,\nabla\lambda_3 = (\gamma+1)\frac{a}{\rho}\neq 0.$$

Условия Рэнкина-Гюгонио $s[\rho]=[m],\quad s[m]=[\rho u^2+p],\quad s[E]=[u(E+p)]$.

Условия через волну разрежения $\mathbf{r}_k^T\nabla w_k = 0$

Для поля 1: $w_1^{(1)} = u+\frac{2a}{\gamma-1},\quad w_1^{(2)} = p\rho^{-\gamma} \qquad\Rightarrow\qquad u_L+\frac{2a_L}{\gamma-1} = u_R+\frac{2a_R}{\gamma-1},\quad p_L\rho_L^{-\gamma} = p_R\rho_R^{-\gamma}$

Для поля 3: $w_3^{(1)} = u-\frac{2a}{\gamma-1},\quad w_3^{(2)} = p\rho^{-\gamma} \qquad\Rightarrow\qquad u_L-\frac{2a_L}{\gamma-1} = u_R-\frac{2a_R}{\gamma-1},\quad p_L\rho_L^{-\gamma} = p_R\rho_R^{-\gamma}$