Уравнения Навье-Стокса

Мы ограничимся рассмотрением уравнений движения для совершенного газа (идеального газа с постоянными теплоемкостями).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 & \text{Уравнение неразрывности} \\ \rho\,\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho\,(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \nabla p = \nabla\cdot\tau & \text{Уравнение импульса} \\ \rho\,\dfrac{\partial e}{\partial t} + \rho\,(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,e + p\nabla\cdot\mathbf{u} = \Phi - \nabla\cdot\mathbf{q} & \text{Уравнение энергии} \end{cases}$$

Уравнение состояния: $p = \rho R T$, где $R = \mathcal{R}/M$, универсальная газовая постоянная $\mathcal{R} = 8314$ Дж/(кмоль·К).

Тензор вязких напряжений: $\tau_{ij} = \mu\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} - \dfrac{2}{3}\delta_{ij}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)$, вторая (объемная) вязкость $\lambda \equiv 0$.

Первая (сдвиговая) вязкость: $\mu = \mu(T)$, формула Сазерленда $\mu = \dfrac{C_1 T^{3/2}}{C_2 + T}$

Внутренняя энергия: $e = c_v T = RT/(\gamma - 1)$, показатель адиабаты $\gamma = c_p/c_v = \mathrm{const}$.

Диссипативная функция $\Phi = \tau_{ij}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = \dfrac{\mu}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} - \dfrac{2}{3}\delta_{ij}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2$

Поток тепла: $\mathbf{q} = -k\nabla T$, теплопроводность $k = \mu c_p/\,\mathrm{Pr}$, число Прандтля $\mathrm{Pr} = \mathrm{const}$.

Для воздуха: $C_1 = 1,458\cdot 10^{-6}$ кг/(м·с·К$^{1/2}$), $C_2 = 110,4$ К, $\gamma = 1,4$, $\mathrm{Pr} = 0,72$.

Консервативная форма уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{F}_x - \mathbf{F}_x^v)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{F}_y - \mathbf{F}_y^v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{F}_z - \mathbf{F}_z^v)}{\partial z} = 0$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E+p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E+p)v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_z = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (E+p)w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_i^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{ix} \\ \tau_{iy} \\ \tau iz \\ (E+p)u_i + \tau_{ij}u_j - q_i \end{bmatrix}, \qquad \text{полная энергия } E = \rho\left(e + \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right).$$

Интегральная форма

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \mathbf{Q}\, dV + \oint\limits_S (\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_i^v)\, n_i\, dS = 0$$

Уравнения Эйлера

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \ \mathbf{u}\mathbf{u} + p\mathsf{I}) = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E + p)\mathbf{u} = 0 \end{array} \right.$$

Несжимаемые уравнения Навье-Стокса

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \ \mathbf{u} + \dfrac{1}{\rho} \nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \ T = \kappa \nabla^2 T, \quad \kappa = k/\rho c_p \end{array} \right.$$

Гиперболические уравнения

Гиперболические уравнения появляются всюду, где происходят процессы распространения информации с конечной скоростью.

- Самое известное гиперболическое уравнение — волновое уравнение $u_{tt} = c^2\ \nabla^2 u$
- Самое простое гиперболическое уравнение — уравнение переноса $u_t + a\ u_x = 0$
- Очень полезное гиперболическое уравнение — невязкое уравнение Бюргерса (уравнение Хопфа) $u_t + uu_x = 0$

Другие примеры гиперболических уравнений:

- Нестационарные уравнения Эйлера
- Стационарные уравнения Эйлера для сверхзвукового течения
- Уравнения идеальной магнитной гидродинамики
- Уравнения теории упругости

Скалярный закон сохранения

Рассмотрим задачу Коши для скалярного закона сохранения

$$u_t + f(u)_x = 0, \qquad u(0,x) = \phi(x), \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0.$$

Два примера: $f(u) = au$ — линейное уравнение переноса, $f(u) = u^2/2$ — невязкое уравнение Бюргерса.

Продифференцировав f по x, получаем неконсервативную форму

$$u_t + a(u)\ u_x = 0, \quad \text{где } a(u) = f'(u)$$

Проинтегрировав от $x = a$ до $x = b$, получаем интегральную форму

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\ dx = f(u(t,a)) - f(u(t,b))$$

Решение линейного уравнения переноса $u(x,t) = \phi(x - at)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dt} = 0, \quad \text{если} \quad \frac{dx}{dt} = a.$$

Характеристики

Характеристики — это кривые в $x - t$ плоскости, определенные уравнением

$$dx(t)/dt = a(u(t, x(t))).$$

Если решение $u(t, x)$ дифференцируемо, то оно постоянно вдоль характеристик.

$$\frac{du(t, x(t))}{dt} = u_t + \frac{dx(t)}{dt}\ u_x = u_t + a(u)\ u_x = 0.$$

Если решение задачи Коши дифференцируемо, то оно дается неявной формулой $\quad u = \phi(x - a(u)\ t)$.

Это легко проверяется прямым вычислением производных

$$u_t = \phi' \cdot (-a - tu_t\ a') \quad \Rightarrow \quad u_t = -\frac{a\phi'}{1 + \phi' a' t}$$

$$u_x = \phi' \cdot (1 - tu_x\ a') \quad \Rightarrow \quad u_x = \frac{\phi'}{1 + \phi' a' t}$$

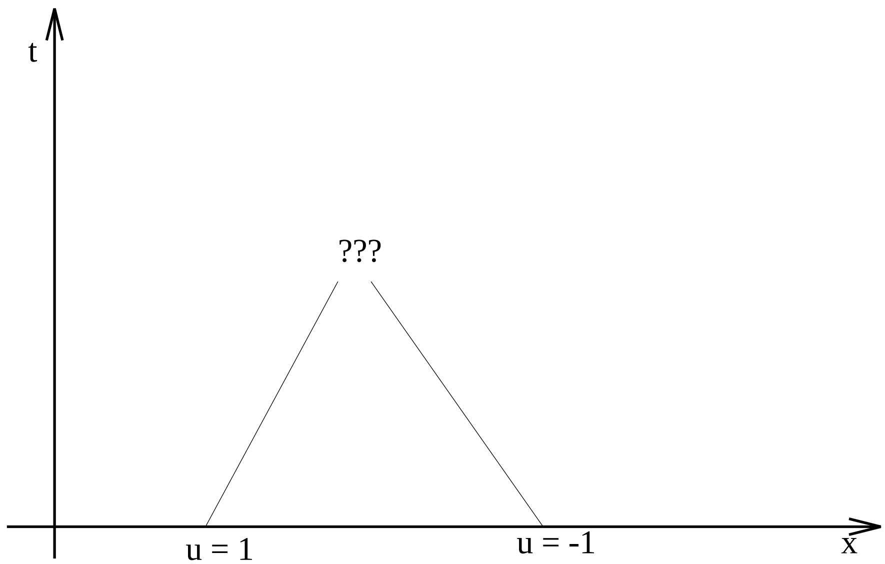
и их подстановкой в уравнение. Что, однако, случится, если знаменатель $(1 + \phi' a' t)$ обратится в нуль?

Нарушение гладкости решения

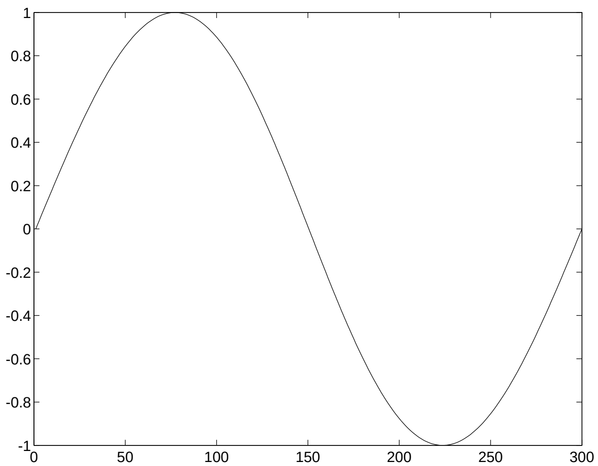
Рассмотрим следующую задачу Коши для невязкого уравнения Бюргерса

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \qquad u(0,x) = \sin(x), \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0.$$

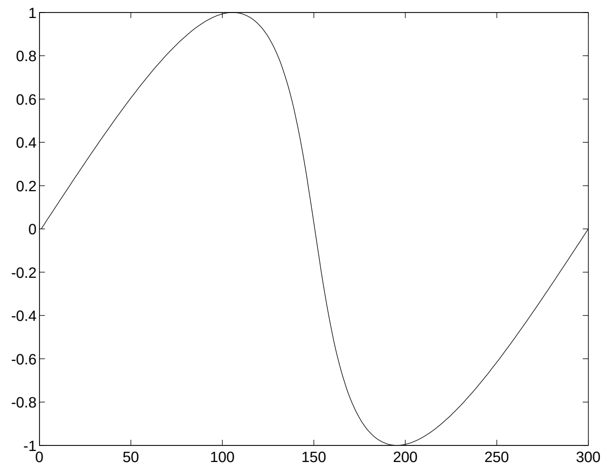
Для нее наклон характеристик суть $a(u) = u$. В начальный момент времени в точке $x = \pi/2$ $u = 1$, тогда как в точке $x = 3\pi/2$ $u = -1$.



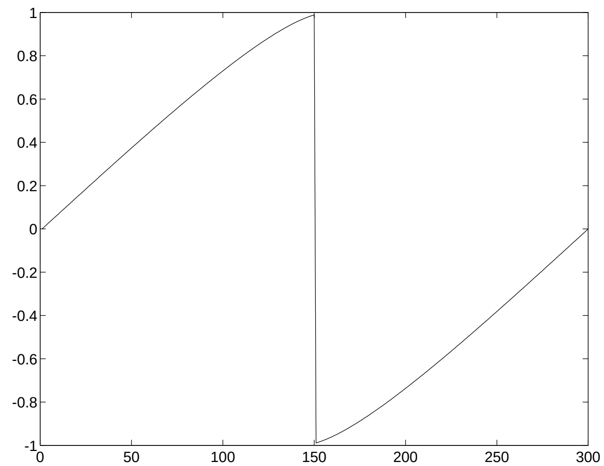
Эволюция решения во времени



$t = 0$



$t = 0,1$



$t = 0,5$

Если начальные данные $\phi(x)$ гладкие, и $\phi'(x)$ где-то отрицательно, то в процессе эволюции гладкость нарушается впервые в момент времени

$$T = \frac{-1}{\min \phi'(x)}$$

Понятие слабого решения

Естественный путь определить обобщенное решение, которое может иметь разрывы — это обратиться к интегральной форме закона сохранения и потребовать, чтобы

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b (u_t + f_x) = 0$$

для всех t_1, t_2, a, b.

Другой, часто более удобный путь — ввести пробные функции $\eta(x,t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+)$ и определить понятие слабого решения.

Слабое решение скалярного закона сохранения — это функция $u(x,t)$, удовлетворяющая соотношению

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \eta_t u + \eta_x f(u)\ dxdt + \int_{-\infty}^\infty \eta(0,x)\varphi(x)\ dx = 0,$$

для всех пробных функций $\eta \in C_0^\infty$. Выписанное соотношение легко получить, умножая закон сохранения на $\eta(x,t)$ и интегрируя по частям (так что все дифференцирования переносятся на пробную функцию) над полуплоскостью (x,t).

Осторожно — следуют помнить, то одному и тому же уравнению, записанному в неконсервативной форме может соответствовать несколько законов сохранения, например

$$(1)\quad u_t + (u^2/2)_x = 0 \qquad \text{и} \qquad (2)\quad (u^2/2)_t + (u^3/3)_x = 0 \qquad \text{для} \qquad u_t + uu_x = 0.$$

Приведенные выше определения вводятся именно для закона сохранения.

Соотношения Рэнкина-Гюгонио

Рассмотрим разрыв решения, движущийся со скоростью s. Пусть траектория движения разрыва суть $x(t)$, значение u слева о разрыва — u_L, справа от разрыва — u_R. Интегральную форму закона сохранения

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\ dx = f(u(t,a)) - f(u(t,b))$$

можно переписать как

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^{x(t)} u(x,t)\ dx + \int_{x(t)}^b u(x,t)\ dx\right) = f(u(t,a)) - f(u(t,b)).$$

Выполняя дифференцирование, получаем

$$\int_a^{x(t)} u_t\ dx + u(t,x(t)-\varepsilon)\ x'(t) + \int_{x(t)}^b u_t\ dx - u(t,x(t)+\varepsilon)\ x'(t) = f(u(t,a)) - f(u(t,b)).$$

Подставив $u_t = -f_x$ и выполняя интегрирование, получаем

$$f(u(t,a)) - f(u(t,x(t)-\varepsilon)) + u(t,x(t)-\varepsilon)\ x'(t) + f(u(t,x(t)+\varepsilon)) - f(u(t,b)) - u(t,x(t)+\varepsilon)\ x'(t) = f(u(t,a)) - f(u(t,b)).$$

Окончательно получаем $\boxed{s(u_L) - u_R) = f(u_L) - f(u_R)}.$

В частности, для невязкого уравнения Бюргерса имеем

$$s = \frac{f_L - f_R}{u_L - u_R} = \frac{u_L^2/2 - u_R^2/2}{u_L - u_R} = \frac{u_L + u_R}{2}.$$

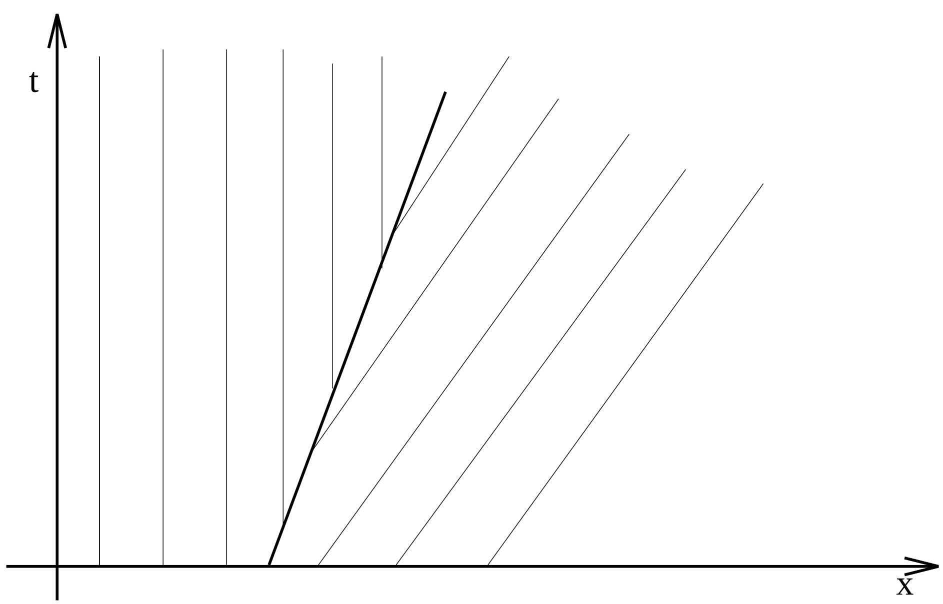
Потеря единственности

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Два обобщенных решения этой задачи:

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0, & x < t/2 \\ 1, & x > t/2 \end{cases} \qquad u_2(x,t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/t, & 0 \le x \le t \\ 1 & x > t \end{cases}$$



Скачок движется со скоростью $s = 1/2$. Решение u_1 неудовлетворительно: оно неустойчиво к возмущениям и не определяется полностью начальными данными. ”Правильным” решением является u_2.

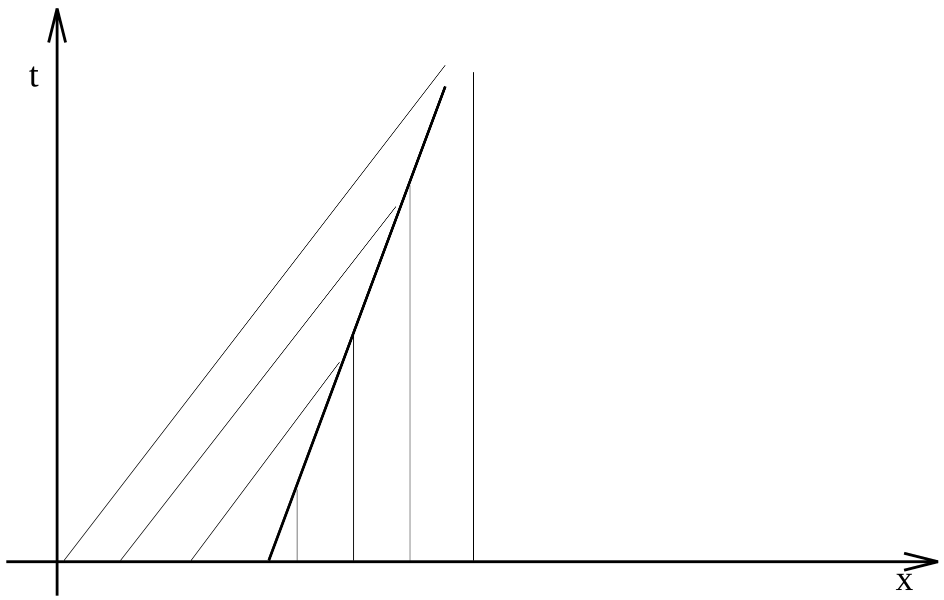
Энтропийное условие

Пример 2. Задача

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \qquad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

имеет решение

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < t/2 \\ 0, & x > t/2 \end{cases}$$



Скачок также движется со скоростью $s = 1/2$. Это решение со сходящимися характеристиками удовлетворяет всем разумным требованиям.

Энтропийное условие

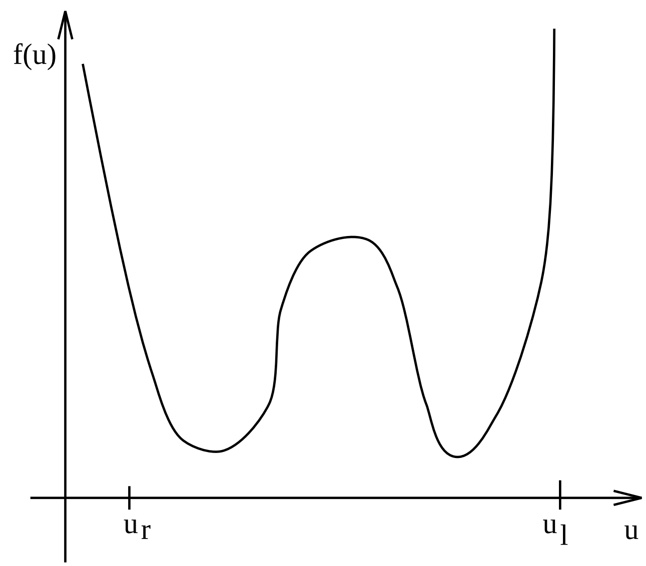
Предположим, что функция $f(u)$ выпуклая: $f''(u) > 0$. Тогда разрыв с левым значением u_L и правым u_R будет удовлетворять энтропийному условию, если

$$f'(u_L) > s > f'(u_R).$$

Задача Коши для закона сохранения с выпуклой функцией потока $f(u)$ и произвольными интегрируемыми начальными данными имеет единственное слабое решение в классе функций, удовлетворяющих энтропийному условию на всех скачках.

Если функция $f(u)$ не является выпуклой, энтропийное условие формулируется более сложным образом:

$$\frac{f(u_L) - f(u)}{u_L - u} \geq \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} \qquad \text{для всех} \quad u \in [u_L, u_R] \text{ или } [u_R, u_L]$$



Исчезающая вязкость.

Отметим, что энтропийное условие нарушает симметрию по отношению к обращению времени.

Альтернативный путь введения энтропийного условия связан с рассмотрением уравнения с вязкостью

$$u_t + f(u)_x = \epsilon u_{xx}, \qquad \epsilon > 0.$$

Слабое решение невязкого уравнения можно тогда ввести как предел при $\epsilon \to 0$ решений вязкого уравнения (последние всегда гладкие).

Пусть $E(u)$ — некоторая строго выпуклая ($E''(u) > 0$) функция (энтропийная функция). Умножим вязкое уравнение на $E'(u)$:

$$E'(u)\ u_t + E'(u)\ f(u)_x = E'(u)\ \epsilon u_{xx} \quad \Rightarrow \quad E(u)_t + F(u)_x = \epsilon E'(u)\ u_{xx}, \quad \text{где } F'(u) = E'(u) f'(u)$$

Далее $\qquad E(u)_{xx} = [E'(u)\ u_x]_x = E''(u)\ (u_x)^2 + E'(u)\ u_{xx},$

$$E(u)_t + F(u)_x = \epsilon[E(u)_{xx} - E''(u)\ (u_x)^2] \le \epsilon E(u)_{xx}$$

При $\epsilon \to 0$, получаем $\boxed{E(u)_t + F(u)_x \le 0}$. $\qquad$ Таким образом, $\dfrac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E dx \le 0.$

Общие определения

Рассмотрим **квазилинейную** систему n уравнений от двух независимых переменных

$$\mathbf{U}_t + \mathsf{A}\ \mathbf{U}_x + \mathbf{B} = 0, \qquad (*)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ij}(x, t, u_1, \ldots, u_n),\ b_i = b_i(x, t, u_1, \ldots, u_n)$$

Система будет **линейной** с переменными коэффициентами, если $a_{ij} = a_{ij}(x, t)$, $b_i = b_i(x, t)$, и с постоянными коэффициентами, если $a_{ij} = \mathrm{const}$, $b_i = \mathrm{const}$.

Система $\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0$ называется системой **законов сохранения**.

$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}_t + \mathsf{A}\ \mathbf{U}_x = 0$, где $\mathsf{A} = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{U}$ — матрица Якоби.

Уравнение на собственные значения: $\mathsf{A}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$. Числа λ_i, такие что $\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}) = 0$, называются собственными значениями, а соответствующие им $\mathbf{r}_i$ — правыми собственными векторами. Аналогично, из уравнения $\mathbf{l}^T\mathsf{A} = \lambda\mathbf{l}^T$, определяются левые собственные векторы $\mathbf{l}_i$.

Определение. Система (*) называется гиперболической в точке (x, t), если матрица A имеет n вещественных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и соответствующий набор n линейно независисых правых собственных векторов $\mathbf{r}_i$. Она будет строго гиперболической, если все λ_i различны.

Гиперболичность уравнений Эйлера

Одномерные уравнения Эйлера можно записать в следующей неконсервативной форме

$$\mathbf{W}_t + \mathsf{A}\ \mathbf{W}_x = 0, \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix},\ \mathsf{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные значения.

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = (u-\lambda)^3 - (u-\lambda)\gamma p/\rho = 0$$

$$\lambda_1 = u - a,\ \lambda_2 = u,\ \lambda_3 = u + a, \qquad \text{где } a = \sqrt{\gamma p/\rho}.$$

Соответствующие собственные векторы

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u-a \\ H-ua \end{bmatrix},\ \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2/2 \end{bmatrix},\ \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u+a \\ H+ua \end{bmatrix}, \qquad H = \frac{E+p}{\rho} \equiv \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho}.$$

Линейные системы

Пример.

$$\mathbf{u}_t + \mathsf{A}\ \mathbf{u}_x = 0: \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_1(x,0) = 0, \quad u_2(x,0) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

Собственные значения и векторы равны

$$\lambda_1 = 1,\ \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -1,\ \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \mathsf{R}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристические переменные $\mathbf{w} = \mathsf{R}^{-1}\mathbf{u}$, $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \mathsf{R}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix}$,

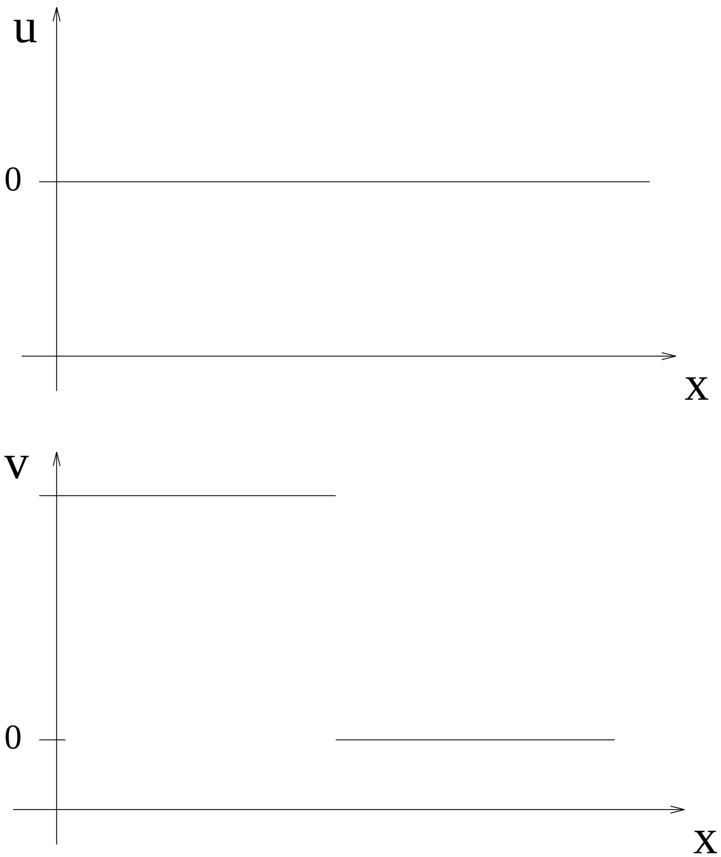
$$\mathsf{R}^{-1}\mathbf{u}_t + \mathsf{R}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{R} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w}_t + \Lambda\ \mathbf{w}_x = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{1t} + \lambda_1 w_{1x} = 0,\ w_{2t} + \lambda_2 w_{2x} = 0.$$

Решение $\quad w_k = w_k^0(x - \lambda_k t)$, где $\quad w_1^0 = w_1(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}, \quad w_2^0 = w_2(x,0) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}.$

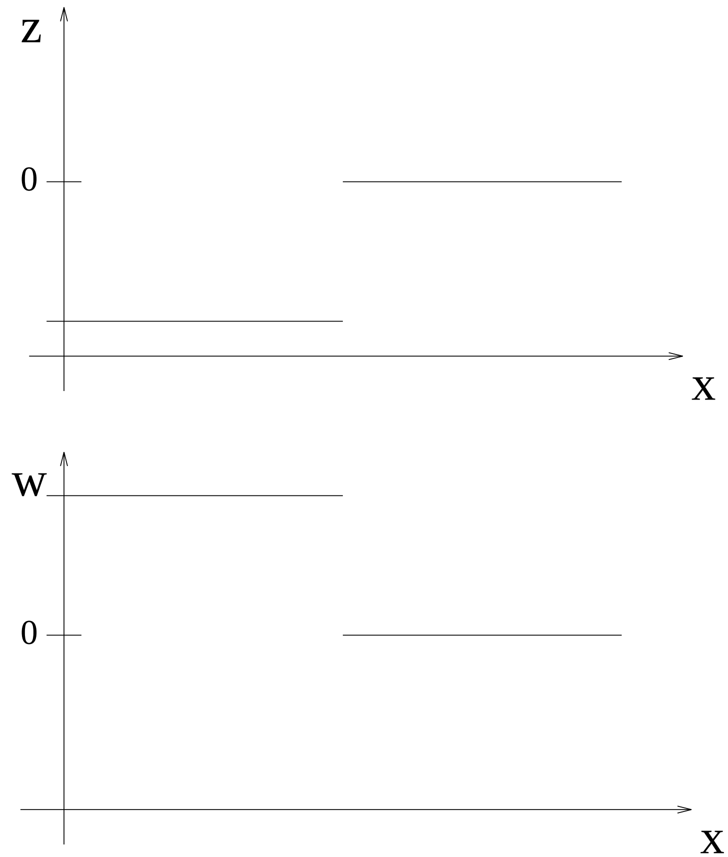
Окончательно получаем $\quad w_1(x,t) = \begin{cases} 1, & x - t < 0 \\ 0, & x - t \geq 0 \end{cases}, \qquad w_2(x,t) = \begin{cases} -1, & x + t < 0 \\ 0, & x + t \geq 0 \end{cases}.$

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0, & x < -t \\ 1, & -t \leq x \leq t \\ 0, & x \geq t \end{cases}, \qquad u_2(x,t) = \begin{cases} 2, & x < -t \\ 1, & -t \leq x \leq t \\ 0, & x \geq t \end{cases},$$

Начальные данные

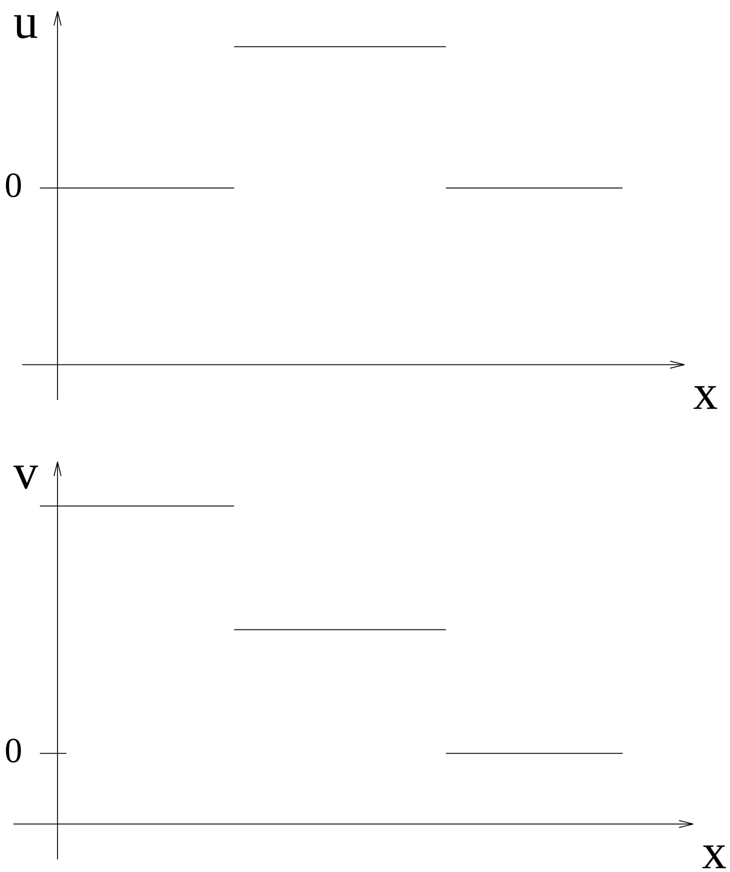


Примитивные переменные

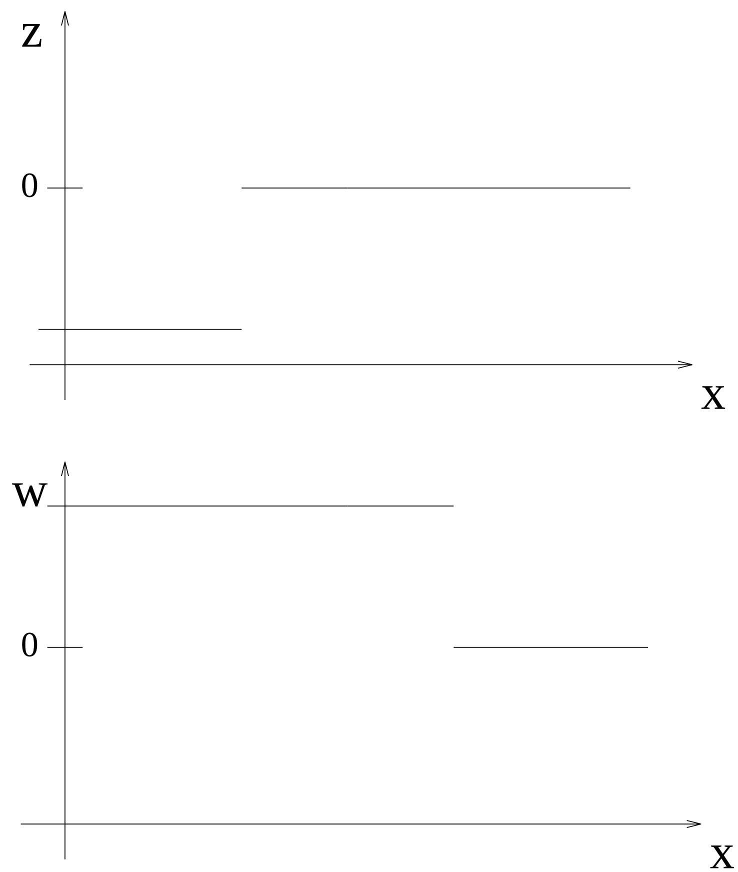


Характеристические переменные

Решение



Примитивные переменные



Характеристические переменные

Общий случай

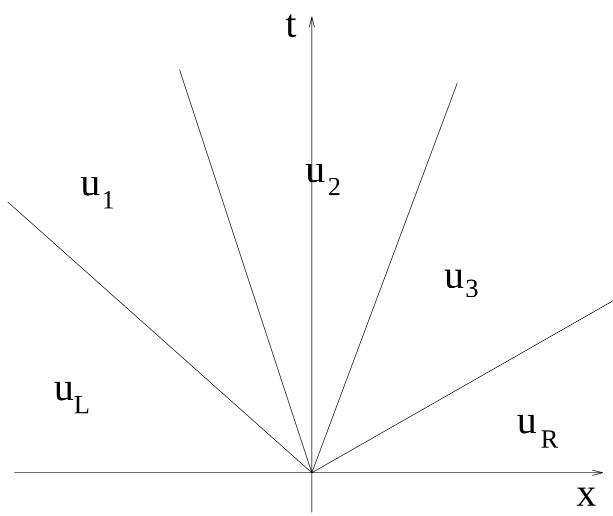
Задача о распаде разрыва (задача Римана).

$$\mathbf{u}_t + \mathsf{A}\ \mathbf{u}_x = 0, \qquad \mathbf{u}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0 \\ \mathbf{u}_R, & x > 0 \end{cases}$$

Решение $\mathbf{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} v_k^0(x - \lambda_k t)\ \mathbf{r}_k$ Обозначим $v_k^0(x) = \begin{cases} v_{kL}, & x < 0 \\ v_{kR} & x > 0 \end{cases}$

Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_n$.

$$\mathbf{u}(x,t) = \sum_{k=1}^{q} v_{kR}\mathbf{r}_k + \sum_{k=q+1}^{n} v_{kL}\mathbf{r}_k = \mathbf{u}_L + \sum_{k=1}^{q} (v_{kR} - v_{kL})\ \mathbf{r}_k, \qquad \lambda_q < x/t < \lambda_{q+1}$$



$$\mathbf{u}_q = \mathbf{u}_L + \sum_{k=1}^{q} (v_{kR} - v_{kL})\ \mathbf{r}_k$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_L, \quad \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_R$$

Нелинейные системы

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathbf{0}, \qquad \text{Матрица Якоби} \quad \mathsf{A} = \partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{u}$$

Собственные значения $\lambda_1(\mathbf{u}) < \lambda_2(\mathbf{u}) < \ldots < \lambda_n(\mathbf{u})$, собственные векторы $\mathbf{r}_1(\mathbf{u}), \mathbf{r}_2(\mathbf{u}), \ldots, \mathbf{r}_n(\mathbf{u})$.

Условие выпуклости $f''(u) \neq 0$ обобщается на системы как:

• k-ое характеристическое поле называется *истинно линейным*, если $\mathbf{r}_r^T \nabla_u \lambda_k(\mathbf{u}) \neq 0$ для всех $\mathbf{u}$.

Для линейного скалярного уравнения $f''(u) = 0$. Аналогом этого условия является следующее

• k-ое характеристическое поле называется *линейно вырожденым*, если $\mathbf{r}_r^T \nabla_u \lambda_k(\mathbf{u}) = 0$ для всех $\mathbf{u}$.

Здесь $\quad \nabla_u a = \left(\dfrac{\partial a}{\partial u_1}, \ldots, \dfrac{\partial a}{\partial u_n} \right).$

Обсудим далее три типа решений:

- Ударные волны
- Волны разрежения
- Контактные разрывы

Ударные волны

Пусть k — истинно нелинейное характеристическое поле. Разрыв называется ударной волной в k-ом характеристическом поле, если выполняются условия Рэнкина-Гюгонио

$$s(\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_R),$$

и имеют место равенства

$$\lambda_k(\mathbf{u}_L) > s > \lambda_k(\mathbf{u}_R), \qquad \lambda_{k-1}(\mathbf{u}_L) < s < \lambda_{k+1}(\mathbf{u}_R)$$

Набор состояний $\mathbf{u}_R$, которые могут быть связаны с $\mathbf{u}_L$ через ударную волну в k-ом характеристическом поле образует гладкое однопараметрическое семейство $\mathbf{u}_R = \mathbf{u}(p), -p_0 \le p \le 0, \mathbf{u}_R(0) = \mathbf{u}_L$.

$$s'(p)(\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_R) - s(p)\mathbf{u}'_R(p) = -\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{u}(\mathbf{u})\ \mathbf{u}'_R(p)$$

$$\mathsf{A}(\mathbf{u}_L)\ \mathbf{u}'_R(0) = s(0)\mathbf{u}'_R(0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}'_R(0) = c\ \mathbf{r}_k(\mathbf{u}_L),\ s(0) = \lambda_k(\mathbf{u}_L)$$

Волны разрежения

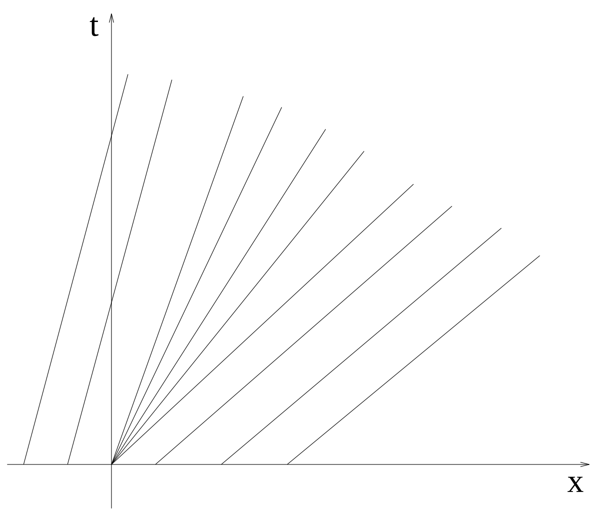
Волны разрежения находятся как автомодельные решения $\mathbf{u}(x,t) = \mathbf{b}(x/t) = \mathbf{b}(\xi)$.

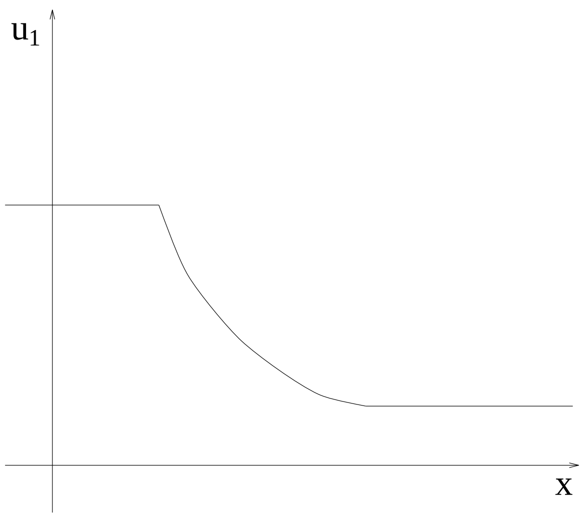
$$-\frac{x}{t^2}\ \mathbf{b}' + \frac{1}{t}\ \mathsf{A}(\mathbf{b})\ \mathbf{b}' = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad (\mathsf{A}(\mathbf{b}) - \xi)\ \mathbf{b}' = \mathbf{0}.$$

Отсюда решение выражается через собственные значения и собственные векторы: $\xi = \lambda(\mathbf{b}(\xi)) \quad \mathbf{b}' = c\mathbf{r}(\mathbf{b})$.
Используя то, что поле истинно нелинейное, можно показать, что $c = 1$. Для заданного состояния $\mathbf{u}_L$ можно решить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\mathbf{b}'(\xi) = \mathbf{r}(\mathbf{b}(\xi)), \qquad \xi_0 \le \xi \le \xi_0 + p, \quad \xi_0 = \lambda\mathbf{b}(\xi_0)).$$

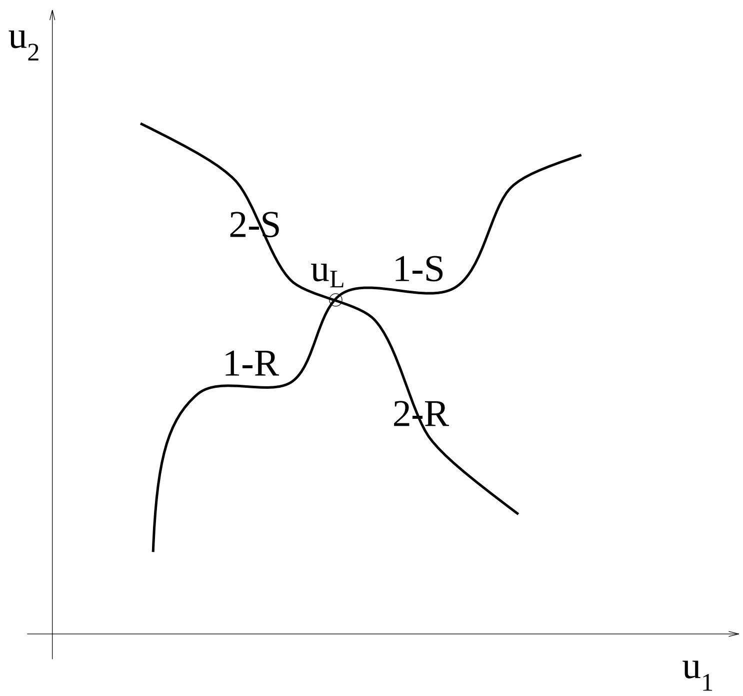
Состояние $\mathbf{u}_R = \mathbf{b}(\xi_0 + p)$ связано с $\mathbf{u}_L = \mathbf{b}(\xi_0)$ через волну разрежения в k-ом характеристическом поле.





Истинно нелинейное поле

Итак, если k-ое поле является истинно нелинейным, тогда для заданного состояния $\mathbf{u}_L$ существует однопараметрическое семейство состояний, $\mathbf{u}_R = \mathbf{u}(p)$, $-p_0 \le p \le p_0$ которые могут быть связаны с посредством ударной волны $p \le 0$ или волны разрежения $p \ge 0$.



Римановы инварианты

k-инвариант Римана — гладкая скалярная функция $w(u_1, \ldots, u_n)$, такая что $\mathbf{r}_k^T \nabla_u w = 0$.

Существует $(n-1)$ k-инвариантов Римана с линейно независимыми градиентами.

Векторное поле $\mathbf{r}_k^T \nabla_u = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i(\mathbf{u}) \dfrac{\partial}{\partial u_i}$ может быть координатным преобразованием $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{u})$ приведено к виду $\dfrac{\partial}{\partial v_1}$, и мы выберем $w_1(\mathbf{v}) = v_2, \ldots, w_{n-1}(\mathbf{v}) = v_n$. Тогда функции $w_i, i = 1, \ldots, n-1$ удовлетворяют уравнению $\dfrac{\partial w_i}{\partial v_1} = 0$ и имеют линейно независимые градиенты. Обратное преобразование дает функции $w_i(\mathbf{u})$ обладают желаемыми свойствами.

k-инварианты Римана постоянны в волне разрежения в k-ом характеристическом поле.

Решение в волне разрежения удовлетворяет соотношению $\mathbf{u}'(\xi) = \mathbf{r}_k(\mathbf{u}(\xi))$. Пусть w — k-инвариант Римана. Тогда $dw/d\xi = 0$ и w постоянна в волне разрежения.

Отсюда получаем следующие соотношения для двух состояний связанных волной разрежения в характеристическом поле:

$$w_i(\mathbf{u}_L) = w_i(\mathbf{u}_R) \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Контактные разрывы

Пусть поле k линейно вырождено. Определим кривую $\mathbf{u}(p)$ так, чтобы $\dfrac{d\mathbf{u}(p)}{dp} = \mathbf{r}_k(\mathbf{u}(p))$. собственное значение постоянно вдоль этой кривой, поскольку из линейной вырожденности следует

$$\frac{d\lambda_k(\mathbf{u})}{dp} = \frac{d\mathbf{u}}{dp}\,\nabla_u \lambda_k = 0.$$

Состояния на кривой $\mathbf{u}(p)$ могут быть связаны с $\mathbf{u}_L$ через разрыв, движущийся со скоростью $s = \lambda_k(\mathbf{u}_L) = \lambda_k(\mathbf{u}(p))$.

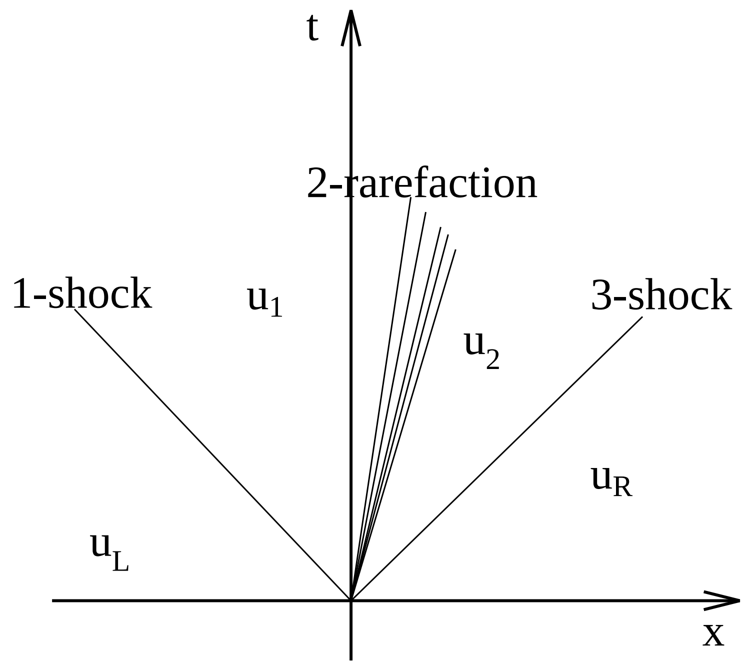
$$\mathbf{G}(\mathbf{u}(p)) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(p)) - s\mathbf{u}(p) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{G}}{dp} = (\mathsf{A}(\mathbf{u}(p)) - s)\,\frac{d\mathbf{u}}{dp} = 0.$$

Отсюда $\mathbf{f}(\mathbf{u}(p)) - s\mathbf{u}(p) = \mathrm{const} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) - s\mathbf{u}_L$ и условия Рэнкина-Гюгонио удовлетворяются.

Такие разрывы называются *контактными разрывами*. Соответствующие характеристики параллельны контактному разрыву. Такие волны во многом подобны решениям линейного уравнения $u_t + au_x = 0$ с разрывом в начальных данных.

Задача Римана для нелинейных гиперболических систем

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \qquad \mathbf{u}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L & x < 0 \\ \mathbf{u}_R & x > 0 \end{cases}$$



Задача Римана для нелинейных гиперболических систем