Estruturas de Dados II
Árvores AVL

Prof. Leonardo C. R. Soares - *leonardo.soares@ifsudestemg.edu.br*
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

22 de março de 2024

Classificação para árvores binárias

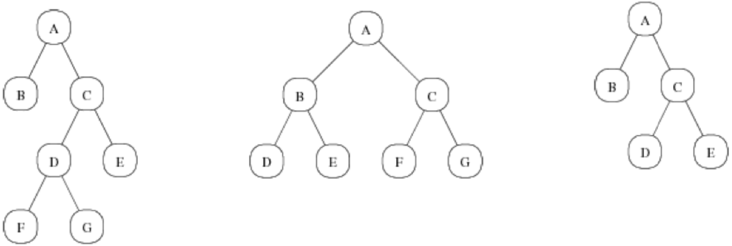
Definição

Árvores binárias são classificadas de acordo com a distribuição de seus nós.

Classificação para árvores binárias

Árvore estritamente binária

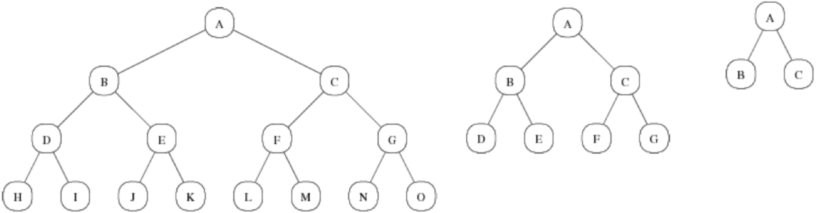
Cada nó **não-folha** em uma árvore binária não tem subárvores esquerda e direita vazias (todo nó tem zero ou duas folhas).



Classificação para árvores binárias

Árvore binária completa

Uma árvore binária completa de nível **n** é uma árvore estritamente binária, onde todos os nós folhas estão no nível **n**.

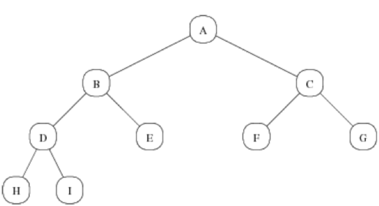


Classificação para árvores binárias

Árvore binária quase completa

Uma árvore binária de nível **n** é uma árvore binária quase completa se:

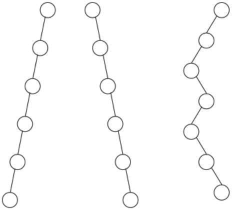
- Cada nó folha na árvore estiver no nível **n** ou no nível **n-1**.
- Para qualquer nó nd em na árvore com um descendente direito no nível d deve ter um filho esquerdo e cada descendente esquerdo de nd ou é uma folha no nível d ou tem dois filhos.



Árvores (quase) balanceadas

Introdução

Quando utilizamos árvores binárias de busca, se não houver preocupação com a distribuição homogênea dos dados, podemos criar árvores que crescem apenas para um lado, como as árvores *zigue-zague* (árvores binárias de altura máxima).



Árvores (quase) balanceadas

Árvores AVL

Uma árvore binária T é denominada AVL[a] quando, para qualquer nó de T, as alturas de suas duas subárvores, esquerda e direita, diferem em módulo de até uma unidade (± 1).

Árvores (quase) balanceadas

Árvores AVL

Uma árvore binária T é denominada AVL[a] quando, para qualquer nó de T, as alturas de suas duas subárvores, esquerda e direita, diferem em módulo de até uma unidade (± 1).

A diferença entre as alturas das subárvores, esquerda e direita, é conhecida como **fator de balanceamento** $f_b = h_{esq} - h_{dir}$

Árvores (quase) balanceadas

Árvores AVL

Uma árvore binária T é denominada AVL[a] quando, para qualquer nó de T, as alturas de suas duas subárvores, esquerda e direita, diferem em módulo de até uma unidade (± 1).

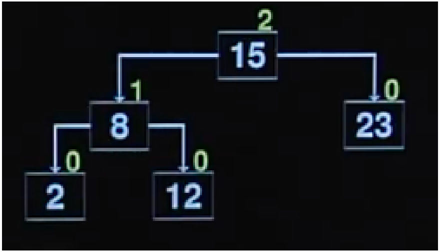
A diferença entre as alturas das subárvores, esquerda e direita, é conhecida como **fator de balanceamento** $f_b = h_{esq} - h_{dir}$

O fator de balanceamento, ou a altura do nó, deve ser armazenado no próprio nó *(lembre-se que a altura de uma árvore vazia é* -1 *e de uma árvore que contém apenas a raiz é zero, pois trata-se de uma folha)*.

[a] O termo AVL é proveniente dos nomes de seus criadores, Georgy **A**delson-**V**elsky e Yevgeniy **L**andis

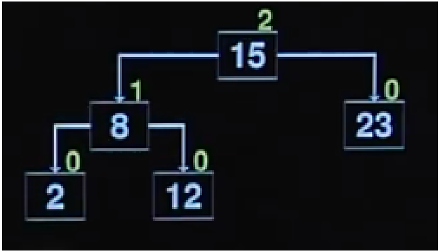
Árvores AVL

A árvore abaixo é uma árvore AVL?



Árvores AVL

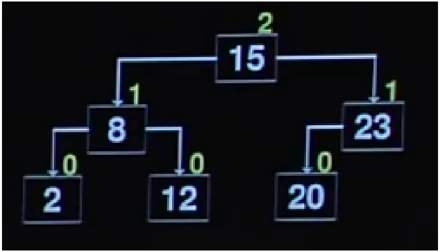
A árvore abaixo é uma árvore AVL?



SIM

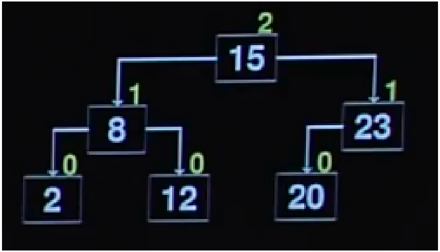
Árvores AVL

A árvore abaixo é uma árvore AVL?



Árvores AVL

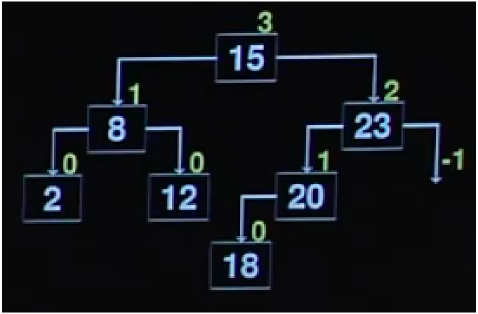
A árvore abaixo é uma árvore AVL?



SIM

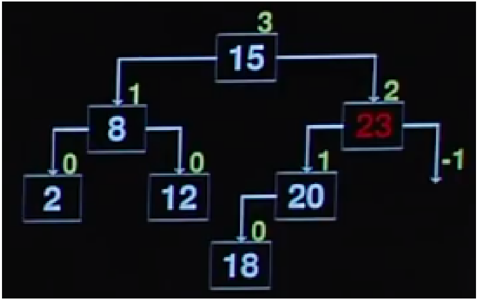
Árvores AVL

A árvore abaixo é uma árvore AVL?



Árvores AVL

A árvore abaixo é uma árvore AVL?



NÃO. O elemento 23 possui fator de balanceamento igual a 2 (1-(-1)).

Árvores AVL

Inserções em árvores AVL

- Uma inserção pode fazer com que o fator de balanceamento de um nó vire ± 2. *Somente os nós no caminho do ponto de inserção até a raiz podem ter mudado sua altura*;

Árvores AVL

Inserções em árvores AVL

- Uma inserção pode fazer com que o fator de balanceamento de um nó vire ± 2. *Somente os nós no caminho do ponto de inserção até a raiz podem ter mudado sua altura*;
- Após a inserção de um novo nó, deve-se voltar até a raiz, nó por nó, atualizando-se as alturas;

Árvores AVL

Inserções em árvores AVL

- Uma inserção pode fazer com que o fator de balanceamento de um nó vire ± 2. *Somente os nós no caminho do ponto de inserção até a raiz podem ter mudado sua altura*;
- Após a inserção de um novo nó, deve-se voltar até a raiz, nó por nó, atualizando-se as alturas;
- Se um novo fator de balanceamento para um determinado nó for ± 2, a árvore deve ser ajustada utilizando-se rotações em torno deste nó.

Árvores AVL

Rotação à esquerda

- O nó raiz da subárvore é deslocado para a posição de seu filho à esquerda, que, por sua vez, continua a ser o filho à esquerda do nó deslocado;

Árvores AVL

Rotação à esquerda

- O nó raiz da subárvore é deslocado para a posição de seu filho à esquerda, que, por sua vez, continua a ser o filho à esquerda do nó deslocado;
- O filho à esquerda do filho à direita da raiz é deslocado para ser o filho à direita da raiz deslocada;

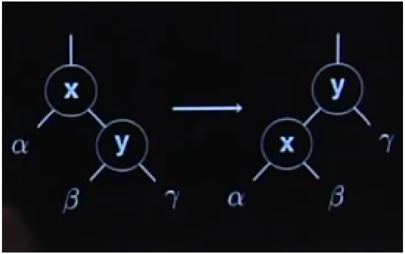
Árvores AVL

Rotação à esquerda

- O nó raiz da subárvore é deslocado para a posição de seu filho à esquerda, que, por sua vez, continua a ser o filho à esquerda do nó deslocado;
- O filho à esquerda do filho à direita da raiz é deslocado para ser o filho à direita da raiz deslocada;
- O filho à direita da raiz passa a ser a nova raiz.

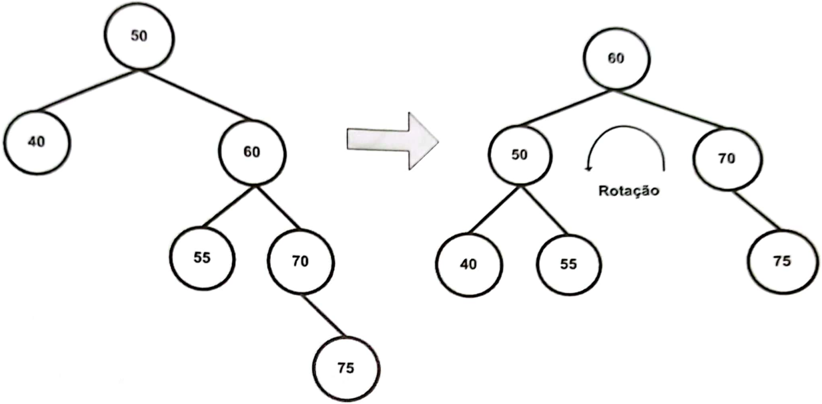
Árvores AVL

Rotação à esquerda



Árvores AVL

Rotação à esquerda



Árvores AVL

Rotação à direita

- O nó raiz da subárvore é deslocado para a posição de seu filho à direita, que, por sua vez, continua a ser o filho à direita do nó deslocado;

Árvores AVL

Rotação à direita

- O nó raiz da subárvore é deslocado para a posição de seu filho à direita, que, por sua vez, continua a ser o filho à direita do nó deslocado;
- O filho à direita do filho à esquerda da raiz é deslocado para ser o filho à esquerda da raiz deslocada;

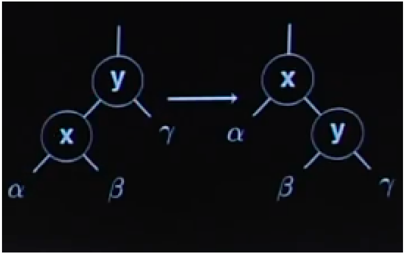
Árvores AVL

Rotação à direita

- O nó raiz da subárvore é deslocado para a posição de seu filho à direita, que, por sua vez, continua a ser o filho à direita do nó deslocado;
- O filho à direita do filho à esquerda da raiz é deslocado para ser o filho à esquerda da raiz deslocada;
- O filho à esquerda da raiz passa a ser a nova raiz.

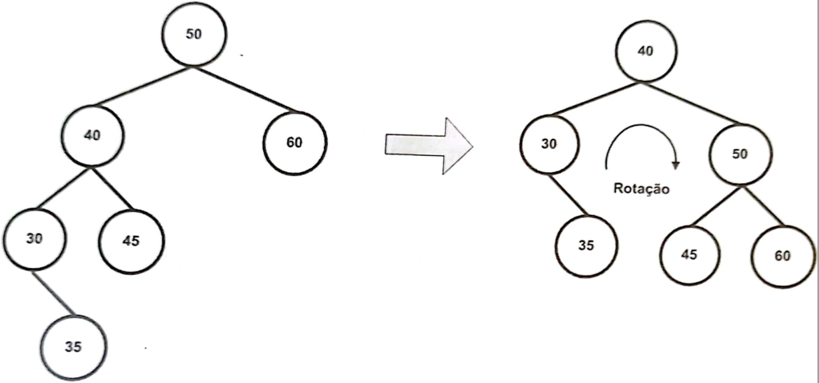
Árvores AVL

Rotação à direita



Árvores AVL

Rotação à direita



Árvores AVL

Rotações simples

Inserções na parte **mais externa** (subárvore esquerda do filho esquerdo do nó desbalanceado ou filho direito da subárvore direita do nó desbalanceado) são resolvidas com rotações simples.

Árvores AVL

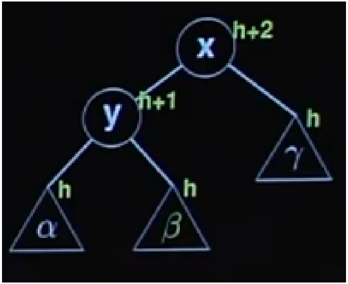
Rotações simples

Inserções na parte **mais externa** (subárvore esquerda do filho esquerdo do nó desbalanceado ou filho direito da subárvore direita do nó desbalanceado) são resolvidas com rotações simples. Entretanto, desbalanceamentos ocasionados por inserções em nós mais internos não são resolvidos por este tipo de movimento.

Árvores AVL

Inserções em nós mais internos

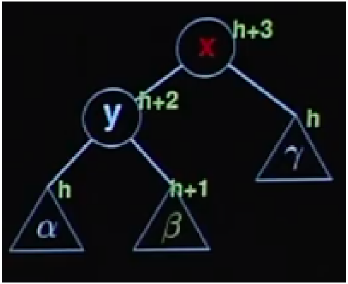
Considere uma inserção de elemento na subárvore de raiz β apresentada abaixo:



Árvores AVL

Inserções em nós mais internos

Considere uma inserção de elemento na subárvore de raiz β apresentada abaixo:

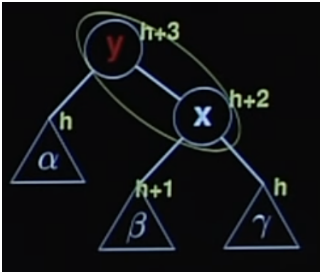


O balanceamento da raiz **X** foi quebrado.

Árvores AVL

Inserções em nós mais internos

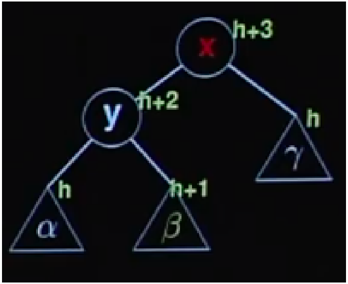
Uma rotação simples à direita apenas transferiria o desbalanceamento de lado.



Árvores AVL

Inserções em nós mais internos

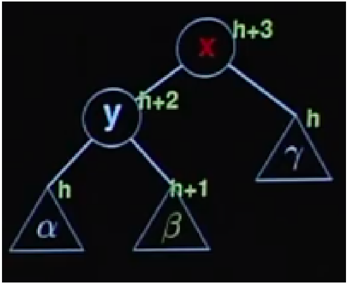
Então como resolver?



Árvores AVL

Inserções em nós mais internos

Então como resolver?

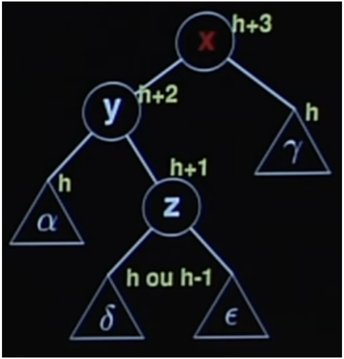


Vamos abrir a subárvore β para facilitar o entendimento.

Árvores AVL

Inserções em nós mais internos

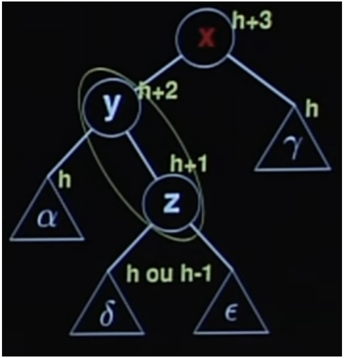
Então como resolver?



Árvores AVL

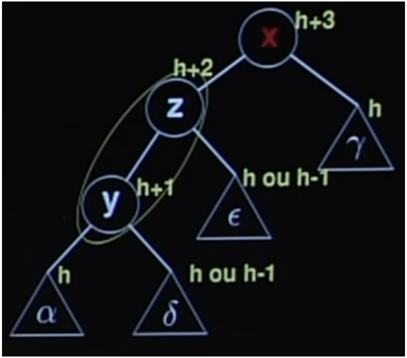
Inserções em nós mais internos

Fazemos uma rotação à esquerda utilizando y como pivô:



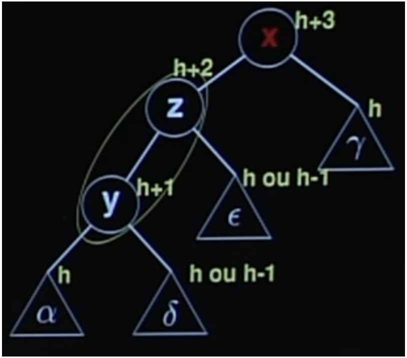
Árvores AVL

Inserções em nós mais internos



Árvores AVL

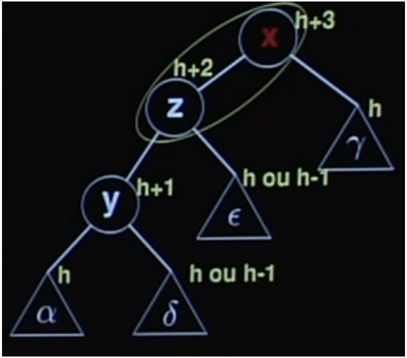
Inserções em nós mais internos



Em seguida, fazemos uma rotação à direita utilizando como pivô o nó desbalanceado.

Árvores AVL

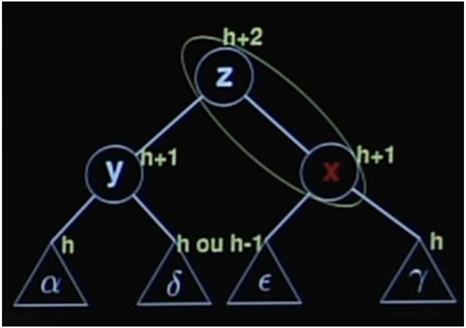
Inserções em nós mais internos



Em seguida, fazemos uma rotação à direita utilizando como pivô o nó desbalanceado.

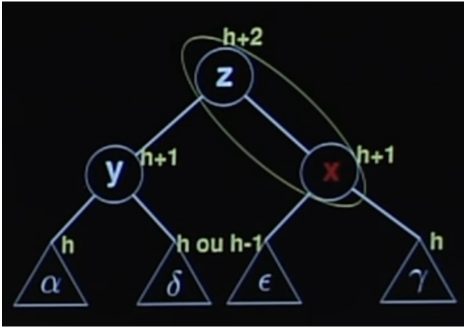
Árvores AVL

Inserções em nós mais internos



Árvores AVL

Inserções em nós mais internos



Quando as inserções ocorrem na parte mais interna da árvore, são necessárias rotações duplas para devolver o balanceamento.

Árvores AVL - Resumo

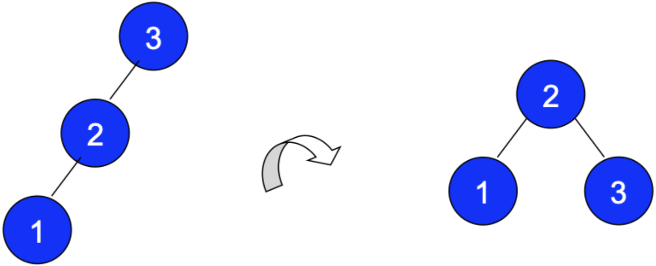
Primeiro caso - rotação simples para a direita

- *Fator de balanceamento* > 1: Subárvore esquerda **maior** que subárvore direita e a subárvore esquerda desta subárvore esquerda é **maior** que a subárvore direita dela.

Árvores AVL - Resumo

Primeiro caso - rotação simples para a direita

- *Fator de balanceamento* > 1: Subárvore esquerda **maior** que subárvore direita e a subárvore esquerda desta subárvore esquerda é **maior** que a subárvore direita dela.
- Rotação simples para a direita.



Árvores AVL - Resumo

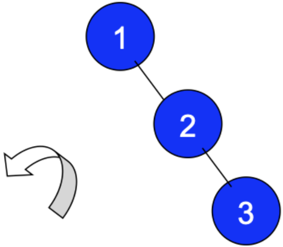
Segundo caso - rotação simples para a esquerda

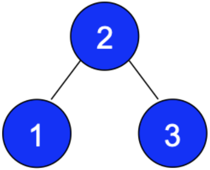
- *Fator de balanceamento* < -1: Subárvore esquerda **menor** que subárvore direita e a subárvore direita desta subárvore direita é **maior** que a esquerda dela.

Árvores AVL - Resumo

Segundo caso - rotação simples para a esquerda

- *Fator de balanceamento* < -1: Subárvore esquerda **menor** que subárvore direita e a subárvore direita desta subárvore direita é **maior** que a esquerda dela.
- Rotação simples para a esquerda.





Árvores AVL - Resumo

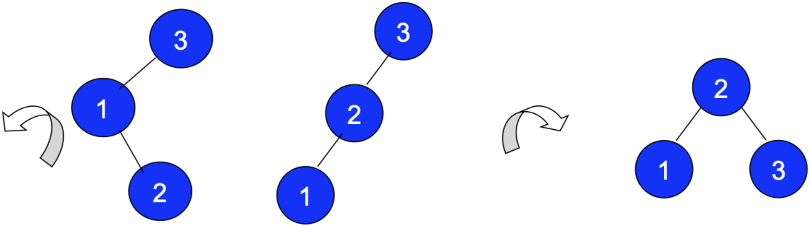
Terceiro caso - rotação dupla para a direita

- *Fator de balanceamento* > 1: Subárvore esquerda **maior** que subárvore direita e a subárvore esquerda desta subárvore esquerda é **menor** que a subárvore direita dela.

Árvores AVL - Resumo

Terceiro caso - rotação dupla para a direita

- *Fator de balanceamento* > 1: Subárvore esquerda **maior** que subárvore direita e a subárvore esquerda desta subárvore esquerda é **menor** que a subárvore direita dela.
- Rotação dupla para direita (ou rotação esquerda-direita).



Árvores AVL - Resumo

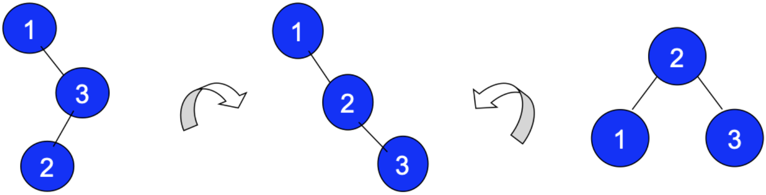
Quarto caso - rotação dupla para a esquerda

- *Fator de balanceamento* $<$ -1: Subárvore esquerda **menor** que subárvore direita e a subárvore direita desta subárvore direita é **menor** que a subárvore esquerda dela.

Árvores AVL - Resumo

Quarto caso - rotação dupla para a esquerda

- *Fator de balanceamento* $<$ -1: Subárvore esquerda **menor** que subárvore direita e a subárvore direita desta subárvore direita é **menor** que a subárvore esquerda dela.
- Rotação dupla para esquerda (ou rotação direita-esquerda).



Árvores AVL

Remoção de elementos

- A remoção se inicia exatamente como feito em uma árvore binária de pesquisa;
- Após a remoção, pode ocorrer desbalanceamento na árvore. Deve-se percorrer do ponto de remoção até a raiz rotacionando os nós desbalanceados.

Árvores AVL - Remoção de elementos

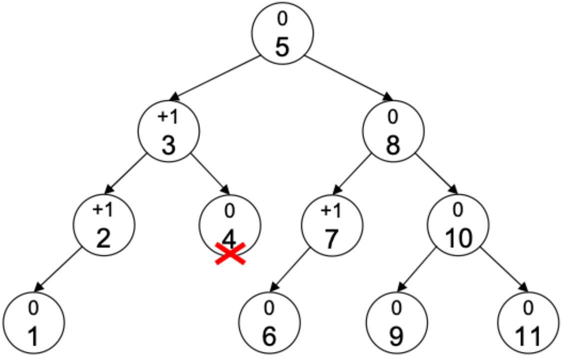


Figura: Antes da exclusão (os valores junto aos nós indicam o fator de balanceamento).

Árvores AVL - Remoção de elementos

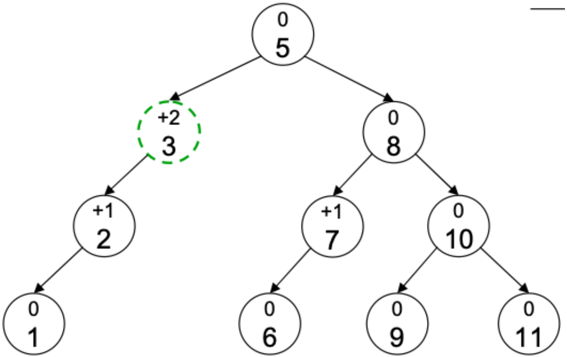


Figura: Depois da remoção (os valores junto aos nós indicam o fator de balanceamento).

Árvores AVL - Remoção de elementos

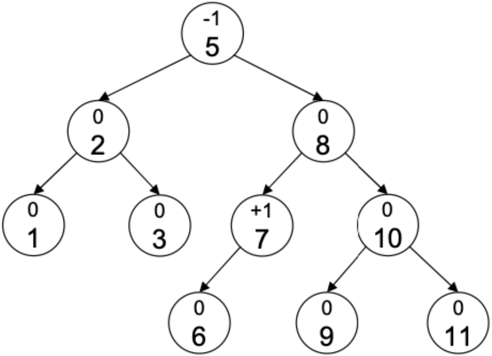


Figura: Depois do rebalanceamento (os valores junto aos nós indicam o fator de balanceamento).

Árvores AVL - Remoção de elementos

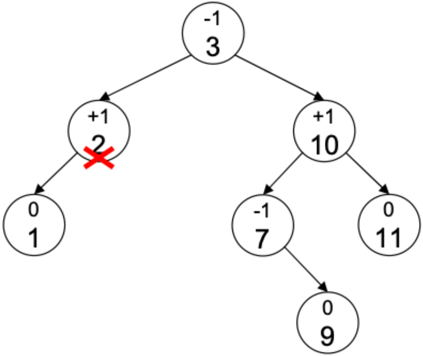


Figura: Antes da exclusão.

Árvores AVL - Remoção de elementos

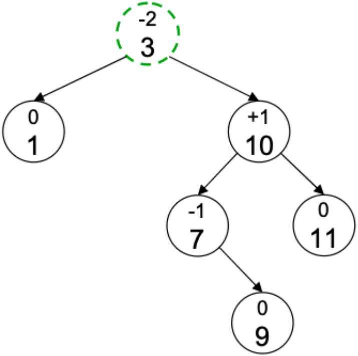


Figura: Depois da remoção. Quarto caso, rotação dupla para esquerda (ou rotação direita-esquerda RL).

Árvores AVL - Remoção de elementos

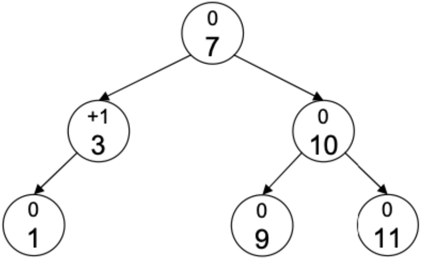


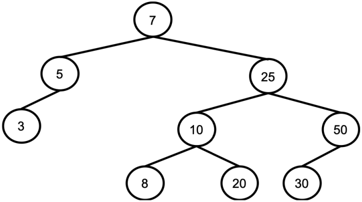
Figura: Depois do rebalanceamento.

Árvores AVL

Um exemplo de implementação em Java de uma árvore AVL pode ser baixado aqui.

Exercícios

1. Insira os elementos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 em uma árvore AVL indicando todas as rotações necessárias.
2. Dada uma AVL contendo apenas uma folha com chave 50, insira os elementos 1, 64, 12, 18, 66, 38, 95, 58, 59, 70, 68, 39, 62, 7, 60, 43, 16, 67, 34, 35 nesta árvore, indicando as rotações necessárias.
3. Considerando a AVL abaixo, insira os elementos 1, 64, 12, 18, 66, 38, 95, 58, 59, 70, 68, 39, 62, 60, 43, 16, 67, 34, 35 indicando as rotações necessárias.



Exercícios

4. Considerando a AVL resultante após o exercício anterior, retire os elementos 35, 34, 67, 16, 43, 60, 62, 39, 68, 70, 59, 58, 95, 38, 66, 18, 12, 64, 1 explicitando as rotações.
5. Implemente um método que verifique se uma determinada árvore é ou não uma árvore AVL. Considere que a altura de cada subárvore de raiz **n** é armazenada junto ao nó **n**.


thank you
danke
рахмат
謝謝
ngiyabonga
teşekkür ederim
gracias
Баярлалаа
спасибо
taafetai lava
mersi
barka
welalin
tack
dank je
misaotra
matondo
paldies
grazzi
mahalo
tapadh leat
хвала
asante
manana
obrigada
tenki
murakoze
vinaka
спасибі
blagodaram
kiitos
dankie
dhanyavad
mauruuru
koszonom
hvala
gracie
bayarlalaa
nandri
nanni
bedankt
enkosi
dziękuję
dankon
akun
djiere dieuf
tau
mochchakkeram
mamnun
дякую
chokrane
chnorakaloutioun
gratias ago
gracies
sulpay
go raibh maith agat
sobodi
dekuji
obrigado
mesi
sagolun
sukriya
kop khun krap
taiku
arigatô
takk
dakujem
trugarez
ありがとう
najis tuke
tanemirt
rahmet
grazie
didi madloba
kam sah hamnida
rahmat
terima kasih
diolch
dhanyavadagalu
shukriya
merce
мерси
감사합니다
xiexie
ευχαριστώ
merci