Estruturas de Dados II
Grafos

Prof. Leonardo C. R. Soares - *leonardo.soares@ifsudestemg.edu.br*

Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

9 de agosto de 2024

[a] Este material é fortemente baseado nas notas de aula do professor Marco Antonio Moreira de Carvalho - UFOP

Revisando

Passeio

Sequência finita de vértices e arestas.

Revisando

Passeio

Sequência finita de vértices e arestas.

Cadeia

Um passeio que não repete arestas.

Revisando

Passeio

Sequência finita de vértices e arestas.

Cadeia

Um passeio que não repete arestas.

Caminho

Uma cadeia sem repetição de vértices.

Alcançabilidade

Definição

Um vértice w é **alcançável** a partir do vértice v se houver um caminho entre w e v

Definição

O conjunto de vértices alcançáveis a partir de v é, portanto, formado pelos sucessores de v, os sucessores dos sucessores e assim por diante.

Alcançabilidade

Transitividade

- Se w é alcançável a partir de v;
- E se x é alcançável a partir de w;

Alcançabilidade

Transitividade

- Se w é alcançável a partir de v;
- E se x é alcançável a partir de w;
- Então, x é alcançável a partir de v.

Alcançabilidade

Transitividade

- Se w é alcançável a partir de v;
- E se x é alcançável a partir de w;
- Então, x é alcançável a partir de v.

Transitividade

A relação de alcançabilidade é **transitiva**.

Fecho transitivo de um vértice - Grafo não direcionado

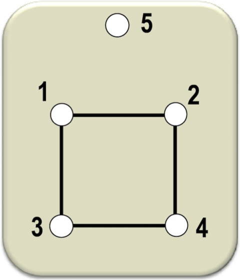
Definição

O **fecho transitivo** de um vértice *v*, denotado por $\widehat{\Gamma}(v)$ é o conjunto dos vértices de um grafo alcançáveis a partir de *v*.

Fecho transitivo de um vértice - Grafo não direcionado

Definição

O **fecho transitivo** de um vértice *v*, denotado por $\widehat{\Gamma}(v)$ é o conjunto dos vértices de um grafo alcançáveis a partir de *v*.

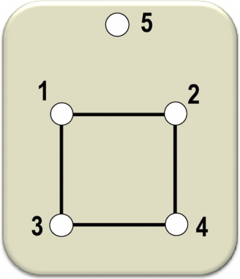


$\widehat{\Gamma}(1) =$

Fecho transitivo de um vértice - Grafo não direcionado

Definição

O **fecho transitivo** de um vértice *v*, denotado por $\widehat{\Gamma}(v)$ é o conjunto dos vértices de um grafo alcançáveis a partir de *v*.

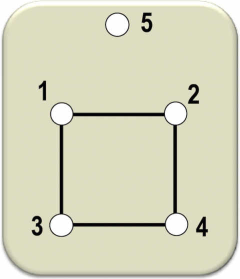


$\widehat{\Gamma}(1) = \{2, 3, 4\}$
$\widehat{\Gamma}(5) =$

Fecho transitivo de um vértice - Grafo não direcionado

Definição

O **fecho transitivo** de um vértice *v*, denotado por $\widehat{\Gamma}(v)$ é o conjunto dos vértices de um grafo alcançáveis a partir de *v*.



$\widehat{\Gamma}(1) = \{2, 3, 4\}$
$\widehat{\Gamma}(5) = \{\}$

Fecho transitivo de um vértice - Grafo direcionado

Fecho transitivo direto

O **fecho transitivo direto** de um vértice *v*, denotado por $\widehat{\Gamma}^{+}(v)$, é o conjunto de vértices de um grafo alcançáveis a partir de *v*.
Os vértices em $\widehat{\Gamma}^{+}(v)$ são chamados de **descendentes** ou **sucessores** de *v*.

Fecho transitivo de um vértice - Grafo direcionado

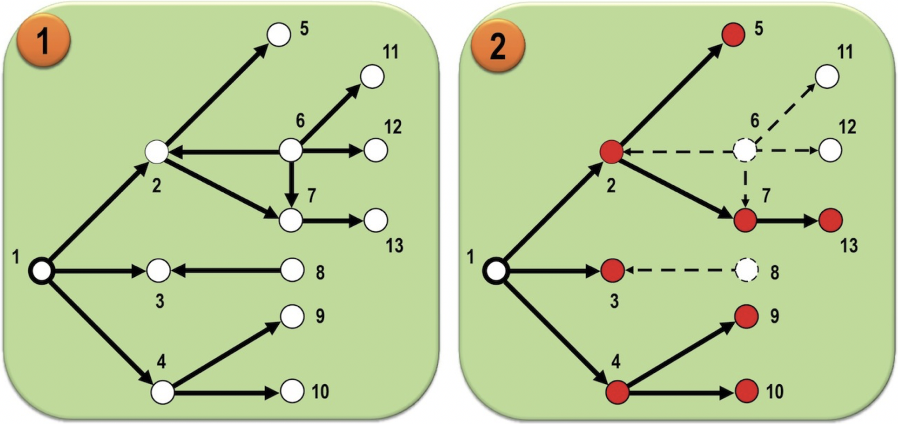
Fecho transitivo direto

O **fecho transitivo direto** de um vértice *v*, denotado por $\widehat{\Gamma}^{+}(v)$, é o conjunto de vértices de um grafo alcançáveis a partir de *v*.
Os vértices em $\widehat{\Gamma}^{+}(v)$ são chamados de **descendentes** ou **sucessores** de *v*.

Fecho transitivo indireto

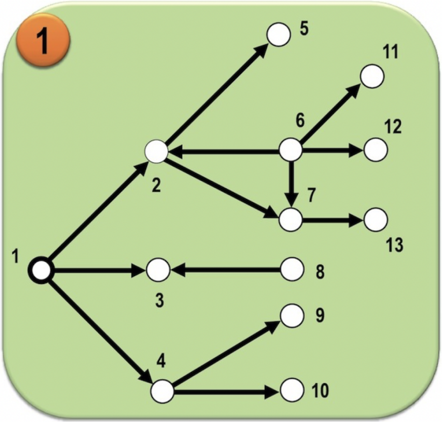
O **fecho transitivo indireto** de um vértice *v*, denotado por $\widehat{\Gamma}^{-}(v)$, é o conjunto de vértices de um grafo a partir dos quais *v* é alcançável.
Os vértices em $\widehat{\Gamma}^{-}(v)$ são chamados de **ascendentes** ou **antecessores** de *v*.

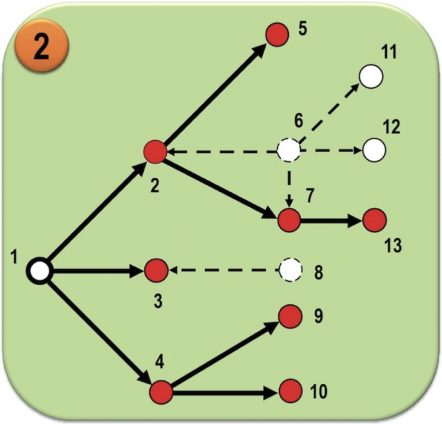
Fecho transitivo direto e indireto



$\widehat{\Gamma}^+(1) =$

Fecho transitivo direto e indireto

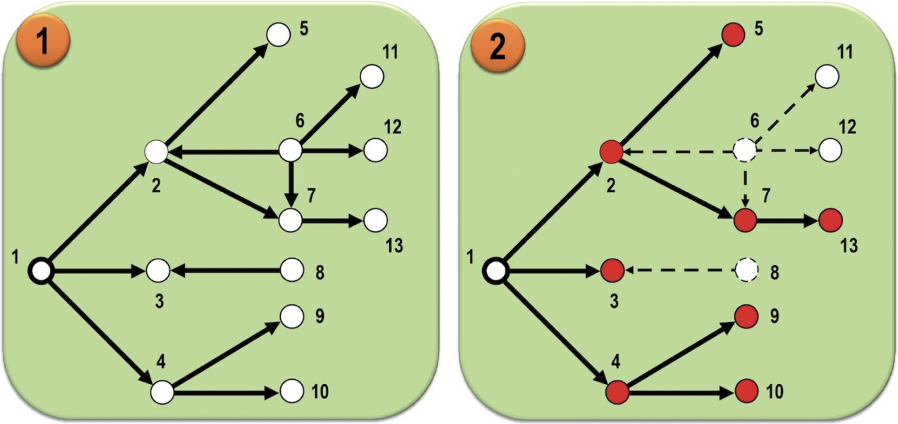




$\widehat{\Gamma}^{+}(1) = \{2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13\}$

$\widehat{\Gamma}^{-}(10) =$

Fecho transitivo direto e indireto

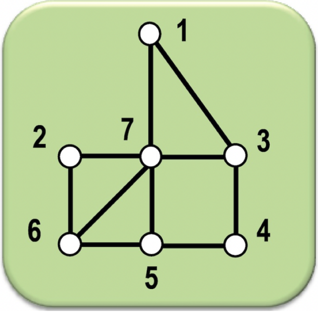


$\widehat{\Gamma}^{+}(1) = \{2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13\}$
$\widehat{\Gamma}^{-}(10) = \{1, 4\}$

Conexidade em grafos não direcionados

Definição

Em um GND conexo, todos os vértices são alcançáveis a partir de qualquer outro vértice.
Em um GND conexo, sempre é possível fazer um passeio fechado que inclua todos os vértices.



Conexidade em grafos direcionados

Definição

Se G é um grafo direcionado, então ele é considerado conexo quando o seu grafo não direcionado subjacente é conexo.

O grafo não direcionado subjacente é o grafo resultante quando a orientação dos arcos de G é ignorada.

Subgrafos maximais

Subgrafo

Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é dito ser um **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de G_s estão em G, ou seja, se $V_s \subseteq V$ e $A_s \subseteq A$.

Subgrafos maximais

Subgrafo

Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é dito ser um **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de G_s estão em G, ou seja, se $V_s \subseteq V$ e $A_s \subseteq A$.

Subgrafo maximal

Um subgrafo G_s de G é dito maximal em relação a uma propriedade τ se não for subgrafo de nenhum outro subgrafo de G que também possua a propriedade τ.

O conceito de maximalidade é relacionado a uma condição de **pertinência**.

Conexidade

Componentes conexos

Um componente conexo de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G.

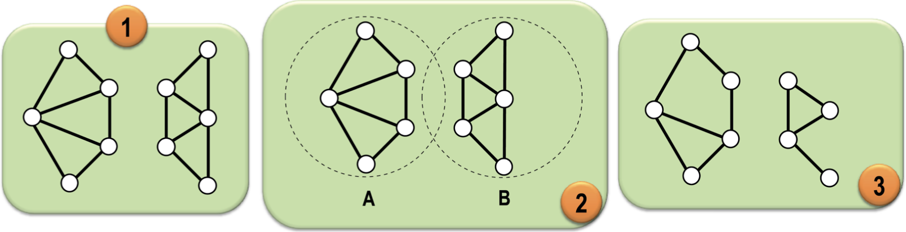
O número de componentes conexos em G é denotado por c.

Grafos conexos possuem apenas um componente conexo.

Conexidade

Componentes conexos

Um componente conexo de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G.
O número de componentes conexos em G é denotado por c.
Grafos conexos possuem apenas um componente conexo.

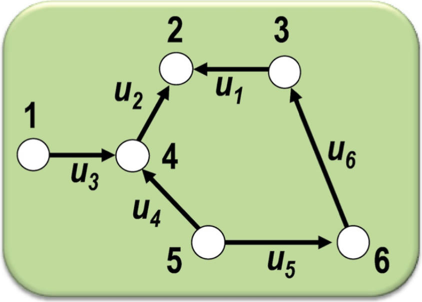


1. Grafo desconexo 2. Componentes conexos. 3. Subgrafos não maximais.

Conexidade em grafos direcionados

Grafo simplesmente conexo: **s-conexo**

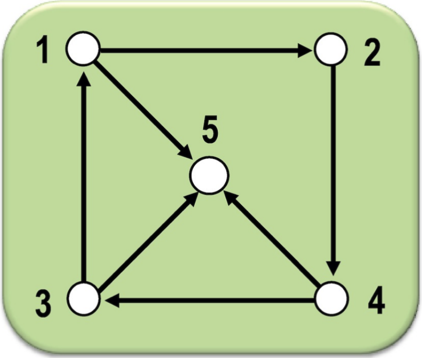
O grafo subjacente não direcionado obtido através da substituição de todos os arcos de G por arestas é um grafo conexo.



Conexidade em grafos direcionados

Grafo semi-fortemente conexo: **sf-conexo**

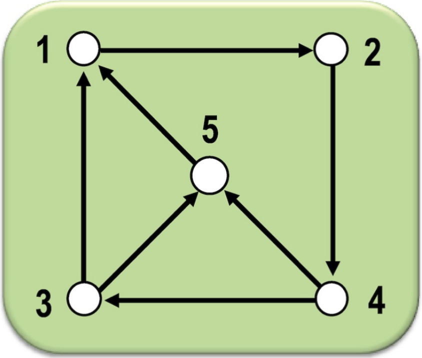
Para cada par de vértices (v_1, v_2), existe um caminho de v_1 para v_2 **ou** de v_2 para v_1.



Conexidade em grafos direcionados

Grafo fortemente conexo: **f-conexo**

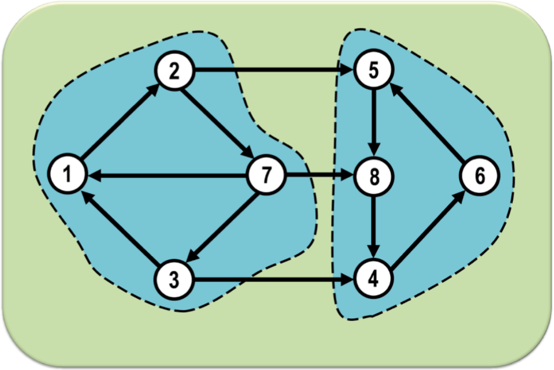
Para cada par de vértices (v_1,v_2), existe um caminho de v_1 para v_2 **e** de v_2 para v_1.



Conexidade em grafos direcionados

Componentes fortemente conexos

Em um grafo direcionado, componentes fortemente conexos são subgrafos maximais f-conexos.



Conexidade ou conectividade em vértices

Definição

A **conexidade** ou **conectividade em vértices** $k(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ é o menor número de vértices cuja remoção desconecta G ou o reduz a um único vértice.

Conexidade ou conectividade em vértices

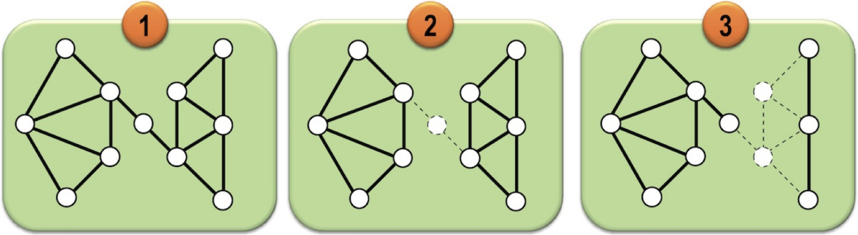
Definição

A **conexidade** ou **conectividade em vértices** $k(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ é o menor número de vértices cuja remoção desconecta G ou o reduz a um único vértice.

Atenção

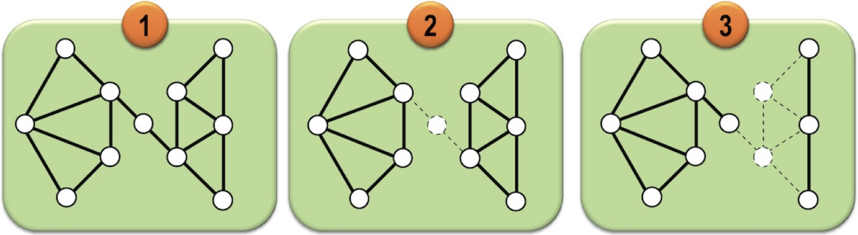
- Conceito aplicado a **grafos não direcionados**;
- Indica o quanto um grafo é conexo.

Conexidade ou conectividade em vértices



Exemplos de remoções de conjuntos de vértices que desconectam o grafo.
Neste caso, $k(G) =$

Conexidade ou conectividade em vértices



Exemplos de remoções de conjuntos de vértices que desconectam o grafo. Neste caso, $k(G) = 1$ (figura 2).

Conexidade ou conectividade em vértices

Grafos completos

Para grafos completos com *n* vértices, $k(K_n) = n - 1$.

Conexidade ou conectividade em vértices

Grafos completos

Para grafos completos com *n* vértices, $k(K_n) = n - 1$.

Grafos não completos

Para grafos não completos haverá um par (v_1, v_2) de vértices não adjacentes, logo:

$$k(G) \leq n - 2 \ \forall G \neq K_n$$

Limite superior para $k(G)$ em qualquer grafo

$$k(G) \leq \delta(G)^a$$

[a] $\delta(G)$: menor grau em um GND.

k-Conexidade ou k-Conectividade

Definição

Um grafo $G = (V, E)$ é **k-conexo** se, e somente se, para todo $v, w \in V, v \neq w$ existirem ao menos k caminhos disjuntos.

k-Conexidade ou k-Conectividade

Definição

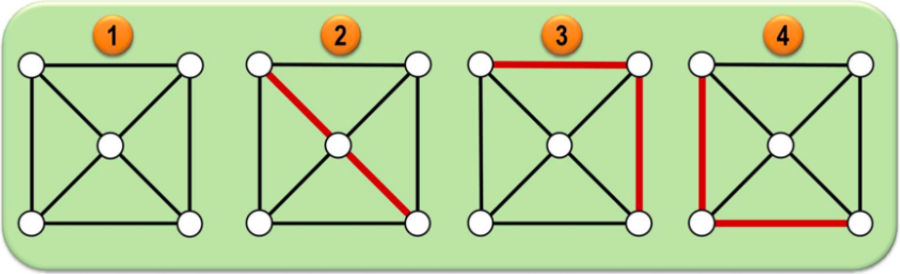
Um grafo $G = (V, E)$ é **k-conexo** se, e somente se, para todo $v, w \in V, v \neq w$ existirem ao menos k caminhos disjuntos.

Caminhos disjuntos

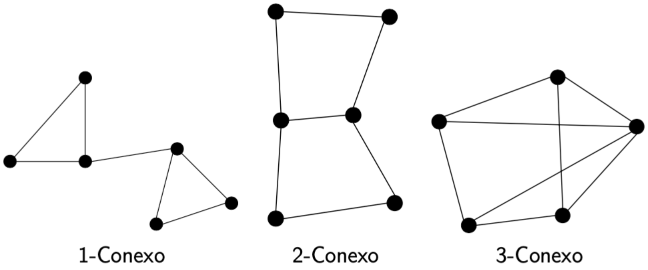
Dois caminhos entre os vértices v e w de um grafo são **disjuntos** se não possuírem arestas em comum.

k-Conexidade ou k-Conectividade

A figura abaixo apresenta um grafo 3-conexo. Para qualquer par de vértices do grafo, existem 3 caminhos disjuntos entre eles.



k-Conexidade ou k-Conectividade

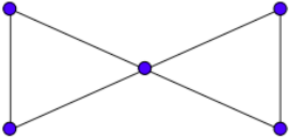


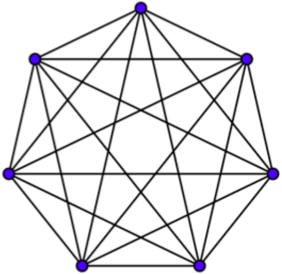
Propriedades

Para todo grafo **k-conexo:**

$$k(G) \leq \delta(G)$$
$$k(G) \leq k$$

k-Conexidade ou k-Conectividade





Propriedades

Grafo borboleta: 2-conexo

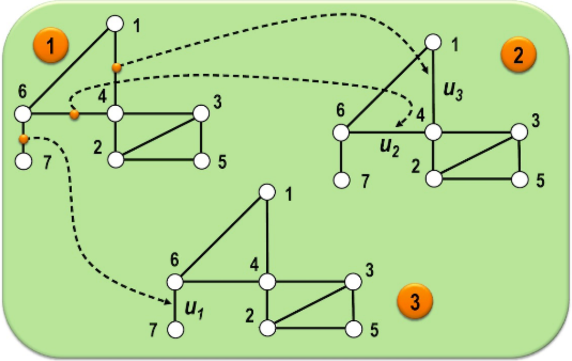
k_7 : 6-conexo, mas também é 1-conexo, 2-conexo, 3-conexo, 4-conexo e 5-conexo

$$k \geq k(G) \leq \delta(G)$$

Articulação

Aresta de articulação (ou ponte)

Uma **aresta de articulação** de um grafo G é uma aresta cuja remoção resulta na desconexão de G.

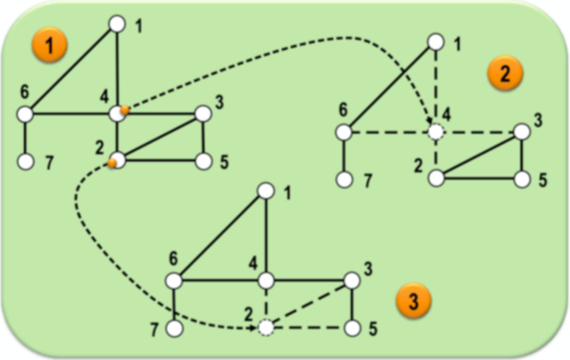


A aresta u_1 é de articulação. As arestas u_2 e u_3 não são.

Articulação

Vértice de articulação

Um **vértice de articulação** de um grafo G é um vértice cuja remoção resulta na desconexão de G.

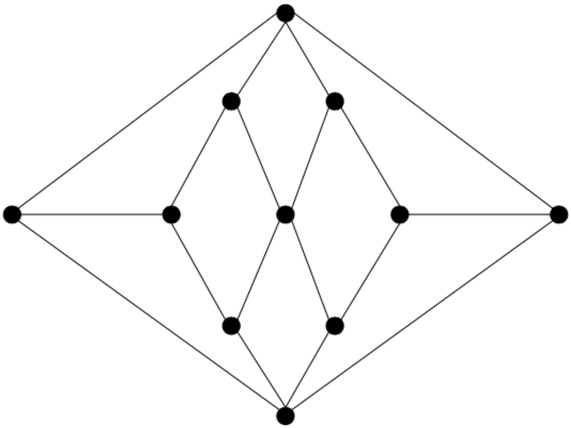


O vértice 4 é de articulação, porém, o vértice 2 não é.

Dúvidas?

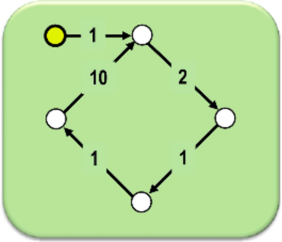
Exercícios

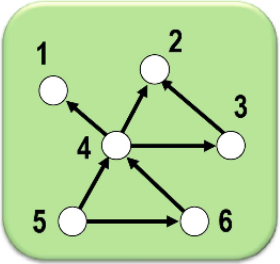
1. Qual a conectividade em vértices do grafo abaixo?

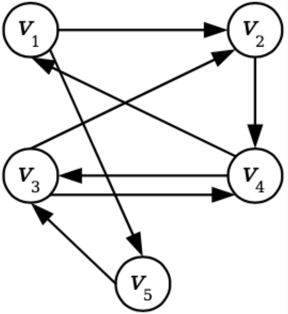


Exercícios

2. Para cada um dos grafos abaixo, determine se é s-conexo, sf-conexo ou f-conexo.







Exercícios

3. Escreva um programa em Java que retorne se o vértice X é ou não alcançável a partir do vértice Y.


thank you
danke
рахмат
謝謝
ngiyabonga
teşekkür ederim
Баярлалаа
спасибо
gracias
tapadh leat
dank je
bedankt
dziękuję
obrigado
merci
sukriya
kop khun krap
go raibh maith agat
mochchakkeram
arigatô
dakujem
terima kasih
grazie
takk
taiku
sagolun
hvala
mauruuru
мерси
хвала
ευχαριστώ
감사합니다
ありがとう
enkosi
mersi
barka
welalin
tack
misaotra
matondo
paldies
grazzi
mahalo
faafetai lava
vinaka
blagodaram
kiitos
dankie
dhanyavad
nanni
nandri
asante
manana
obrigada
tenki
murakoze
djiere dieuf
mamnun
chnorakaloutioun
gracies
sulpay
trugarez
chokrane
sobodi
dekuji
mèsi
najis tuke
kam sah hamnida
tanemirt
rahmet
diolch
dhanyavadagalu
shukriya
xiexie