INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Manhuaçu

Estruturas de Dados II
Algoritmo de Floyd-Warshall

Prof. Leonardo C. R. Soares - *leonardo.soares@ifsudestemg.edu.br*

Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

12 de setembro de 2024

[a] Este material é fortemente baseado nas notas de aula do professor Marco Antonio Moreira de Carvalho - UFOP

Algoritmo de Floyd-Warshall

Histórico

O algoritmo proposto por *Robert Floyd* em 1962 é baseado no algoritmo de *Stephen Warshall* do mesmo ano para cálculo de fechos transitivos em grafos.

- Warshall, Stephen (January 1962). "A theorem on Boolean matrices". Journal of the ACM 9 (1): 11–12. doi:10.1145/321105.321107.
- Floyd, Robert W. (June 1962). "Algorithm 97: Shortest Path". Communications of the ACM 5 (6): 345. doi:10.1145/367766.368168.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Princípio

O algoritmo calcula os caminhos mais curtos entre **todos os pares de vértices** de um grafo direcionado e ponderado que eventualmente possua arcos com peso negativo mas que não possua **ciclos de custo negativo**.

O conceito de relaxação do comprimento dos caminhos mais curtos é novamente empregado: incrementalmente aprimora-se uma estimativa utilizada até que o valor ótimo seja atingido.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Princípio

O algoritmo compara os caminhos entre os vértices i e j passando por k vértices intermediários, $k = 1, \ldots, n$. Ou seja, todos os caminhos entre cada par de vértices são analisados.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Princípio

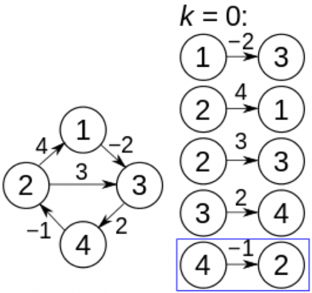
O algoritmo compara os caminhos entre os vértices i e j passando por k vértices intermediários, $k = 1, \ldots, n$. Ou seja, todos os caminhos entre cada par de vértices são analisados.

Uma matriz armazena o valor dos caminhos mais curtos entre os vértices, porém, não há informação sobre composição do caminho.

Exemplo compacto

$k = 0$

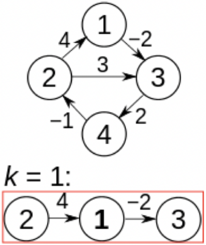
Na iteração $k = 0$, somente os caminhos representados por uma única adjacência no grafo são conhecidos.



Exemplo compacto

$k = 1$

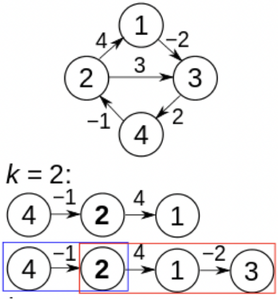
Na iteração $k = 1$, todos os caminhos que passam pelo **vértice 1** são descobertos. Em particular, o caminho $[2, 1, 3]$ substitui o caminho $[2, 3]$



Exemplo compacto

$k = 2$

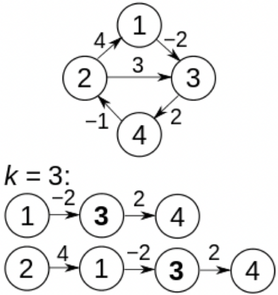
Na iteração $k = 2$, todos os caminhos que passam pelo **vértice 2** ou pelos **vértices 2 e 1** são descobertos. O caminho $[4, 2, 3]$ não é considerado, dado que $[4, 2, 1, 3]$ é um caminho mais curto.



Exemplo compacto

$k = 3$

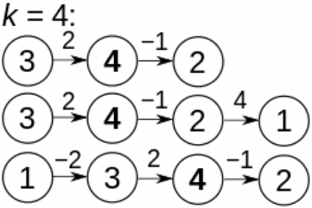
Na iteração $k = 3$, todos os caminhos que passam pelo **vértice 3** ou pelos **vértices 3 e 2 ou 1** são descobertos.



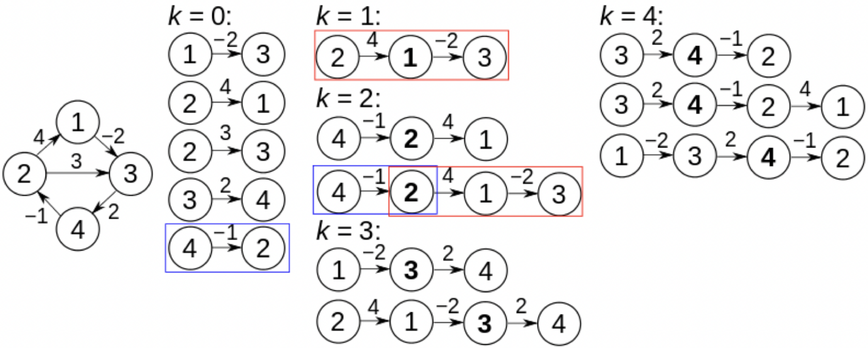
Exemplo compacto

$k = 4$

Na iteração $k = 4$, todos os caminhos mais curtos são determinados.



Exemplo compacto



Algoritmo de Floyd-Warshall

Terminologia

- L: Matriz que armazena os caminhos mais curtos entre os vértices;
  - Inicialmente, L é inicializada com os pesos dos arcos do grafo (d_{ij});
  - Caso não haja arco entre dois vértices i e j, $d_{ij} = \infty$
- l_{ij} : Elemento da matriz L na linha i e coluna j.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Entrada: Grafo $G = (V, E)$ e matriz de pesos D=$\{d_{ij}\}$ para os arcos $\{i, j\}$

$L \leftarrow D$;//Inicializa os elementos da matriz L

para $k \leftarrow 1$ **até** n **faça**

  para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**

    para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**

      se $l_{ij} > l_{ik} + l_{kj}$ **então**

        $l_{ij} \leftarrow l_{ik} + l_{kj}$;

      fim

    fim

  fim

fim

Algoritmo de Floyd-Warshall

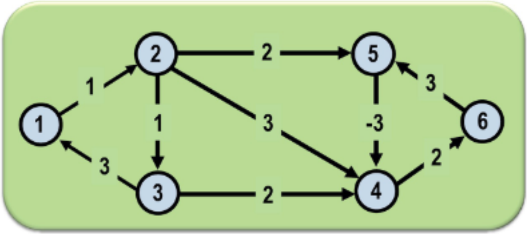
Ciclos de custo negativo

O algoritmo de Floyd-Warshall detecta ciclos de custo negativo. Caso haja valores negativos na diagonal principal da matriz L (inclusive durante a execução do algoritmo), significa que o vértice relacionado está contido em um ciclo de custo negativo.

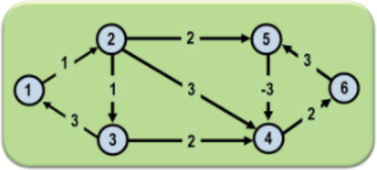
Em outras palavras, é possível sair do vértice, percorrer parte do grafo e retornar ao vértice inicial com custo negativo.

Algumas versões do algoritmo consideram que não haverá ciclos de custo negativo e definem inicialmente a distância de um vértice para si próprio como $-\infty$, implicando em não haver atualização possível.

Exemplo



Exemplo



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	∞	0	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Matriz L inicial.

Exemplo

- j=1, l_{11} = min{l_{11}; (l_{11}+l_{11})}=0
- j=2, l_{12} = min{l_{12}; (l_{11}+l_{12})}=1
- j=3, l_{13} = min{l_{13}; (l_{11}+l_{13})}=∞
- j=4, l_{14} = min{l_{14}; (l_{11}+l_{14})}=∞
- j=5, l_{15} = min{l_{15}; (l_{11}+l_{15})}=∞
- j=6, l_{16} = min{l_{16}; (l_{11}+l_{16})}=∞

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	∞	0	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração k = 1, i=1.
A matriz não é alterada.

Exemplo

- j=1, $l_{21} = \min\{l_{21}; (l_{21}+l_{11})\}=\infty$
- j=2, $l_{22} = \min\{l_{22}; (l_{21}+l_{12})\}=0$
- j=3, $l_{23} = \min\{l_{23}; (l_{21}+l_{13})\}=1$
- j=4, $l_{24} = \min\{l_{24}; (l_{21}+l_{14})\}=3$
- j=5, $l_{25} = \min\{l_{25}; (l_{21}+l_{15})\}=2$
- j=6, $l_{26} = \min\{l_{26}; (l_{21}+l_{16})\}=\infty$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	∞	0	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração k = 1, i=2.
A matriz não é alterada novamente.

Exemplo

- j=1, $l_{31} = \min\{l_{31};\ (l_{31}+l_{11})\}$=3
- j=2, $l_{32} = \min\{l_{32};\ (l_{31}+l_{12})\}$=4
- j=3, $l_{33} = \min\{l_{33};\ (l_{31}+l_{13})\}$=0
- j=4, $l_{34} = \min\{l_{34};\ (l_{31}+l_{14})\}$=2
- j=5, $l_{35} = \min\{l_{35};\ (l_{31}+l_{15})\}=\infty$
- j=6, $l_{36} = \min\{l_{36};\ (l_{31}+l_{16})\}=\infty$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	∞	0	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração k = 1, i=3.

A matriz é alterada!

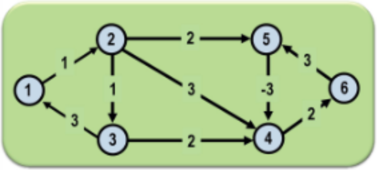
Exemplo

Fast forward

Não há outras alterações para $k = 1$ e $i = 4, 5, 6$.

Nos próximos slides só serão exibidas as iterações do algoritmo em que ocorreram alterações na matriz L.

Exemplo



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Matriz L para $k = 1$.

Exemplo

- j=1, l_{11} = min{l_{11}; (l_{12}+l_{21})}=0
- j=2, l_{12} = min{l_{12}; (l_{12}+l_{22})}=1
- j=3, l_{13} = min{l_{13}; (l_{12}+l_{23})}=2
- j=4, l_{14} = min{l_{14}; (l_{12}+l_{24})}=4
- j=5, l_{15} = min{l_{15}; (l_{12}+l_{25})}=3
- j=6, l_{16} = min{l_{16}; (l_{12}+l_{26})}=∞

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	∞	∞	∞	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração k = 2, i=1.

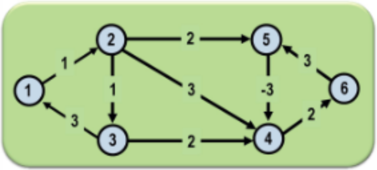
Exemplo

- j=1, $l_{31} = \min\{l_{31}; (l_{32}+l_{21})\}$=3
- j=2, $l_{32} = \min\{l_{32}; (l_{32}+l_{22})\}$=4
- j=3, $l_{33} = \min\{l_{33}; (l_{32}+l_{23})\}$=0
- j=4, $l_{34} = \min\{l_{34}; (l_{32}+l_{24})\}$=2
- j=5, $l_{35} = \min\{l_{35}; (l_{32}+l_{25})\}$=6
- j=6, $l_{36} = \min\{l_{36}; (l_{32}+l_{26})\}$=$\infty$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	∞	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração k = 2, i=3.

Exemplo



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	6	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Matriz L para $k = 2$.

Exemplo

- j=1, l_{11} = min{l_{11}; (l_{13}+l_{31})}=0
- j=2, l_{12} = min{l_{12}; (l_{13}+l_{32})}=1
- j=3, l_{13} = min{l_{13}; (l_{13}+l_{33})}=2
- j=4, l_{14} = min{l_{14}; (l_{13}+l_{34})}=4
- j=5, l_{15} = min{l_{15}; (l_{13}+l_{35})}=3
- j=6, l_{16} = min{l_{16}; (l_{13}+l_{36})}=∞

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	4	3	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	6	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração k = 3, i=1.

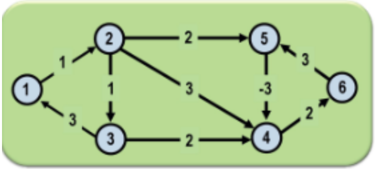
Exemplo

- j=1, l_{21} = min$\{l_{21}; (l_{23}+l_{31})\}$=4
- j=2, l_{22} = min$\{l_{22}; (l_{23}+l_{32})\}$=0
- j=3, l_{23} = min$\{l_{23}; (l_{23}+l_{33})\}$=1
- j=4, l_{24} = min$\{l_{24}; (l_{23}+l_{34})\}$=3
- j=5, l_{25} = min$\{l_{25}; (l_{23}+l_{35})\}$=2
- j=6, l_{26} = min$\{l_{26}; (l_{23}+l_{36})\}$=$\infty$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	∞
2	∞	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	6	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração k = 3, i=2.

Exemplo



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	∞
2	4	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	6	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Matriz L para $k = 3$.

Exemplo

- j=1, l_{11} = min{l_{11}; (l_{14}+l_{41})}=0
- j=2, l_{12} = min{l_{12}; (l_{14}+l_{42})}=1
- j=3, l_{13} = min{l_{13}; (l_{14}+l_{43})}=2
- j=4, l_{14} = min{l_{14}; (l_{14}+l_{44})}=4
- j=5, l_{15} = min{l_{15}; (l_{14}+l_{45})}=3
- j=6, l_{16} = min{l_{16}; (l_{14}+l_{46})}=6

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	∞
2	4	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	6	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração k = 4, i=1.

Exemplo

- j=1, l_{21} = min{l_{21}; (l_{24}+l_{41})}=4
- j=2, l_{22} = min{l_{22}; (l_{24}+l_{42})}=0
- j=3, l_{23} = min{l_{23}; (l_{24}+l_{43})}=1
- j=4, l_{24} = min{l_{24}; (l_{24}+l_{44})}=3
- j=5, l_{25} = min{l_{25}; (l_{24}+l_{45})}=2
- j=6, l_{26} = min{l_{26}; (l_{24}+l_{46})}=5

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	6
2	4	0	1	3	2	∞
3	3	4	0	2	6	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração k = 4, i=2.

Exemplo

- j=1, $l_{31} = \min\{l_{31}; (l_{34}+l_{41})\}$=3
- j=2, $l_{32} = \min\{l_{32}; (l_{34}+l_{42})\}$=4
- j=3, $l_{33} = \min\{l_{33}; (l_{34}+l_{43})\}$=0
- j=4, $l_{34} = \min\{l_{34}; (l_{34}+l_{44})\}$=2
- j=5, $l_{35} = \min\{l_{35}; (l_{34}+l_{45})\}$=6
- j=6, $l_{36} = \min\{l_{36}; (l_{34}+l_{46})\}$=4

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	6
2	4	0	1	3	2	5
3	3	4	0	2	6	∞
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração k = 4, i=3.

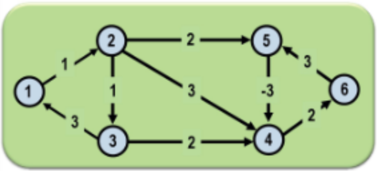
Exemplo

- j=1, l_{51} = min{l_{51}; (l_{54}+l_{41})}=∞
- j=2, l_{52} = min{l_{52}; (l_{54}+l_{42})}=∞
- j=3, l_{53} = min{l_{53}; (l_{54}+l_{43})}=∞
- j=4, l_{54} = min{l_{54}; (l_{54}+l_{44})}=-3
- j=5, l_{55} = min{l_{55}; (l_{54}+l_{45})}=0
- j=6, l_{56} = min{l_{56}; (l_{54}+l_{46})}=-1

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	6
2	4	0	1	3	2	5
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	∞
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração k = 4, i=5.

Exemplo



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	4	3	6
2	4	0	1	3	2	5
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Matriz L para $k = 4$.

Exemplo

- j=1, $l_{11} = \min\{l_{11}; (l_{15}+l_{51})\}$=0
- j=2, $l_{12} = \min\{l_{12}; (l_{15}+l_{52})\}$=1
- j=3, $l_{13} = \min\{l_{13}; (l_{15}+l_{53})\}$=2
- j=4, $l_{14} = \min\{l_{14}; (l_{15}+l_{54})\}$=0
- j=5, $l_{15} = \min\{l_{15}; (l_{15}+l_{55})\}$=3
- j=6, $l_{16} = \min\{l_{16}; (l_{15}+l_{56})\}$=2

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	4	3	6
2	4	0	1	3	2	5
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração k = 5, i=1.

Exemplo

- j=1, l_{21} = min{l_{21}; (l_{25}+l_{51})}=4
- j=2, l_{22} = min{l_{22}; (l_{25}+l_{52})}=0
- j=3, l_{23} = min{l_{23}; (l_{25}+l_{53})}=1
- j=4, l_{24} = min{l_{24}; (l_{25}+l_{54})}=-1
- j=5, l_{25} = min{l_{25}; (l_{25}+l_{55})}=2
- j=6, l_{26} = min{l_{26}; (l_{25}+l_{56})}=1

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	0	3	2
2	4	0	1	3	2	5
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração k = 5, i=2.

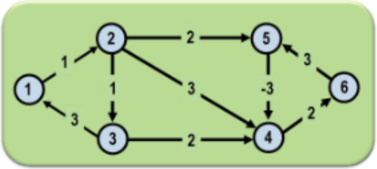
Exemplo

- j=1, $l_{61} = \min\{l_{61}; (l_{65}+l_{51})\}=\infty$
- j=2, $l_{62} = \min\{l_{62}; (l_{65}+l_{52})\}=\infty$
- j=3, $l_{63} = \min\{l_{63}; (l_{65}+l_{53})\}=\infty$
- j=4, $l_{64} = \min\{l_{64}; (l_{65}+l_{54})\}=0$
- j=5, $l_{65} = \min\{l_{65}; (l_{65}+l_{55})\}=3$
- j=6, $l_{66} = \min\{l_{66}; (l_{65}+l_{56})\}=0$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	0	3	2
2	4	0	1	3	2	5
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	-1
6	∞	∞	∞	∞	3	0

Iteração k = 5, i=6.

Exemplo



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	0	3	2
2	4	0	1	-1	2	1
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	-1
6	∞	∞	∞	0	3	0

Matriz L para $k = 5$.

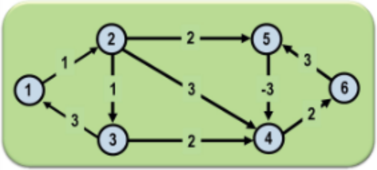
Exemplo

- j=1, l_{41} = min{l_{41}; (l_{46}+l_{61})}=∞
- j=2, l_{42} = min{l_{42}; (l_{46}+l_{62})}=∞
- j=3, l_{43} = min{l_{43}; (l_{46}+l_{63})}=∞
- j=4, l_{44} = min{l_{44}; (l_{46}+l_{64})}=0
- j=5, l_{45} = min{l_{45}; (l_{46}+l_{65})}=5
- j=6, l_{46} = min{l_{46}; (l_{46}+l_{66})}=2

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	0	3	2
2	4	0	1	-1	2	1
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	∞	2
5	∞	∞	∞	-3	0	-1
6	∞	∞	∞	0	3	0

Iteração k = 6, i=4.

Exemplo



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	0	3	2
2	4	0	1	-1	2	1
3	3	4	0	2	6	4
4	∞	∞	∞	0	5	2
5	∞	∞	∞	-3	0	-1
6	∞	∞	∞	0	3	0

Matriz L para $k = 6$.

Algoritmo de Floyd-Warshall

Composição dos caminhos

Conforme visto, não são armazenadas informações sobre quais vértices compõem os caminhos mais curtos calculados, no entanto, o algoritmo pode ser modificado para gerar uma matriz com os caminhos mais curtos.

Algoritmo de Floyd-Warshall

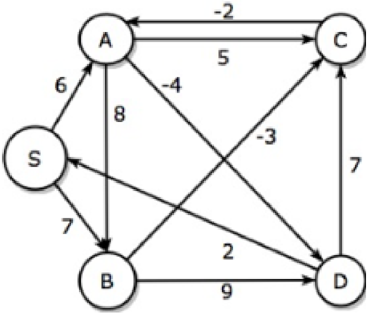
Composição dos caminhos

Conforme visto, não são armazenadas informações sobre quais vértices compõem os caminhos mais curtos calculados, no entanto, o algoritmo pode ser modificado para gerar uma matriz com os caminhos mais curtos.

Applet para execução do algoritmo de Floyd-Warshall:
https://www.cs.usfca.edu/ galles/visualization/Floyd.html

Exercícios

Execute o algoritmo de Floyd-Warshall para o grafo abaixo:



Exercícios práticos

- Implemente o algoritmo de Floyd-Warshall conforme apresentado no pseudo-código.
- Modifique sua implementação para que seja gerada a matriz de rotas.


thank you
danke
рахмат
謝謝
ngiyabonga
teşekkür ederim
Баярлалаа
спасибо
gracias
merci
obrigado
bedankt
dziękuję
go raibh maith agat
mochchakkeram
sukriya
kop khun krap
terima kasih
arigatô
dakujem
grazie
takk
tapadh leat
dank je
mersi
barka
welalin
tack
spas
kia ora
faafetai lava
vinaka
blagodaram
misaotra
matondo
paldies
grazzi
mahalo
хвала
asante
manana
obrigada
tenki
murakoze
mamnun
chokrane
djiere dieuf
tau
дякую
kiitos
dankie
dhanyavad
nanni
nandri
hvala
maururu
köszönöm
bayarlalaa
gracie
enkosi
sobodi
dėkuji
mèsi
sagolun
didi madloba
najis tuke
kam sah hamnida
rahmat
chnorakaloutioun
grafias ago
gracies
sulpay
taiku
ありがとう
tanemirt
rahmet
xièxie
감사합니다
ευχαριστώ
diolch
dhanyavadagalu
shukriya
merce
мерси
trugarez
akun
dankon
aciú
спасибі