Estruturas de Dados II
Grafos[a]

Prof. Leonardo C. R. Soares - *leonardo.soares@ifsudestemg.edu.br*
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

11 de julho de 2024

[a]Este material é fortemente baseado nas notas de aula do professor Marco A M Carvalho - UFOP

Grafos

Introdução

Um grafo é uma estrutura de abstração muito útil na representação e solução de problemas computacionais, por representarem relações de interdependência entre elementos de um conjunto.

Grafos

Introdução

Um grafo é uma estrutura de abstração muito útil na representação e solução de problemas computacionais, por representarem relações de interdependência entre elementos de um conjunto.

Um grafo possui representação gráfica bastante confortável. Os elementos do conjunto são representados por pontos (ou círculos) e denominados **nós** ou **vértices**. As relações entre os elementos do conjunto são caracterizadas por traços ou setas ligando os pontos, denominadas **arestas** ou **arcos**.

Grafos

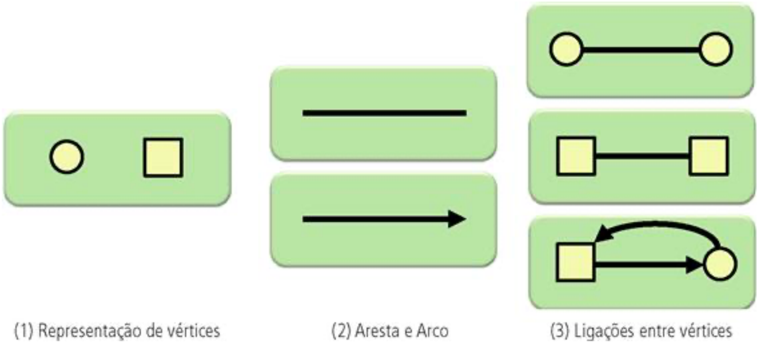


Figura: Elementos de um grafo. Retirada do livro: Grafos - disponível em https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788595155756/

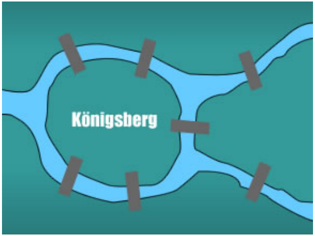
Histórico

A primeira utilização

O primeiro registro de utilização de grafos data de 1736 por Leonhard Euler.

O problema era encontrar um caminho circular por Königsberg (atual Kaliningrado) usando cada uma das pontes sobre o rio Pregel (ou Pregolya, Pregola) exatamente uma vez.

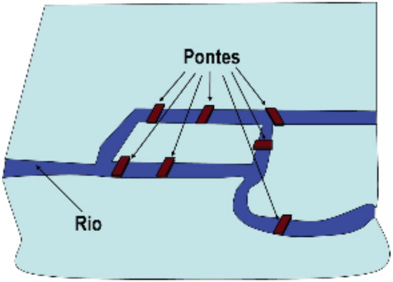
Pontes de Königsberg

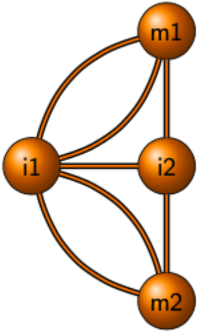


1736: Euler e as Pontes de Königsberg

Partindo de uma das margens, pode-se encontrar um percurso que passe somente **uma vez em cada ponte** e retorne ao ponto de partida?

Pontes de Königsberg - O grafo





Pontes de Königsberg

A solução

O problema não possui solução. Para atravessar qualquer vértice, são gastas duas arestas, uma para entrar no vértice e outra para sair. Entretanto, os vértices do grafo possuem grau ímpar, por isso o problema não tem solução.

Grafos

Definição formal

Grafo $G = (V, A)$

Grafos

Definição formal

$$\text{Grafo } G = (V, A)$$

- Conjunto V com **n** vértices (também chamados nós) $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

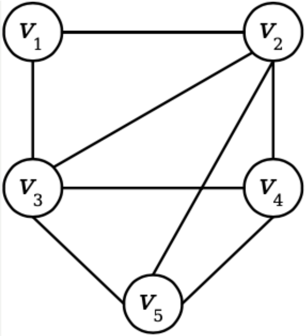
Grafos

Definição formal

Grafo $G = (V, A)$

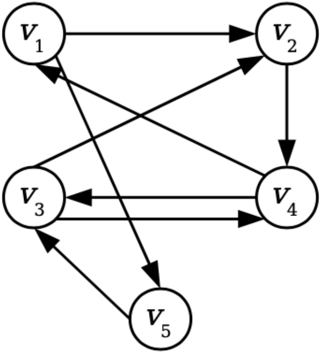
- Conjunto V com **n** vértices (também chamados nós) $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
- Conjunto A com **m** arestas ou arcos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Grafo Não Direcionado - GND



- Ligações expressas em **arestas**;
- Se o vértice *a* está ligado a *b*, o vértice *b* está ligado a *a*;
- Cada aresta é representada por um conjunto $\{v_1, v_2\}$, indicando os dois vértices envolvidos.

Grafo Direcionado - GD



- Ligações expressas em **arcos**;
- Cada aresta é representada por um **par ordenado** (v_1, v_2), indicando os dois vértices envolvidos.

Exemplos: Redes sociais analógicas

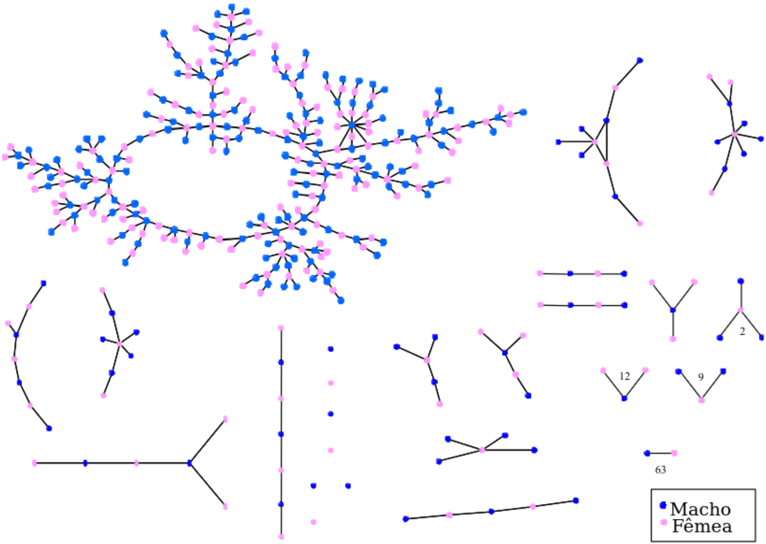
Chains of Affection

Peter Bearman, James Moody, and Katherine Stovel. Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. American Journal of Sociology, 110(1):44- 99, 2004.

Pesquisa com 800 estudantes de uma escola secundária americana.

A estrutura das relações românticas e sexuais da Jefferson High School.

Chains of Affection



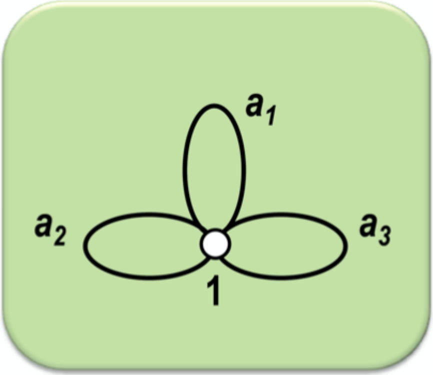
Mapa do metrô de Lisboa

Mapa do Rio Grande do Sul

Topologia

Laço

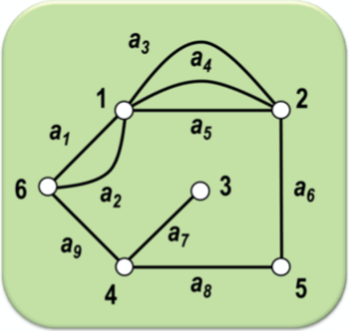
Uma aresta cujas duas extremidades incidem em um mesmo vértice.



Topologia

Arestas paralelas

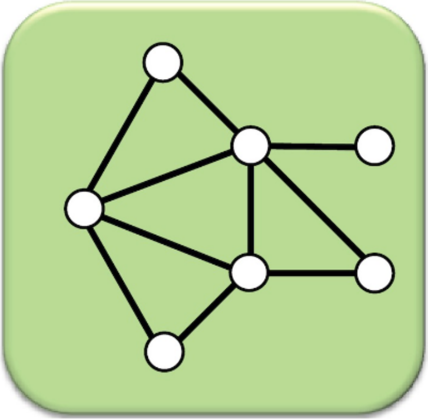
Mais de uma aresta associada ao mesmo par de vértices.



Topologia

Grafo simples

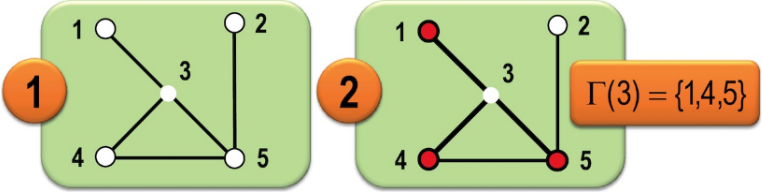
Grafo que não possui laços ou arestas paralelas.



Topologia

Vértices adjacentes

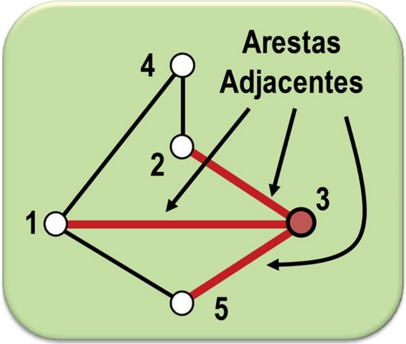
Vértices que são os pontos finais de uma mesma aresta.
A função $\Gamma(i)$ retorna o conjunto de vértices adjacentes ao vértice i.



Topologia

Arestas adjacentes

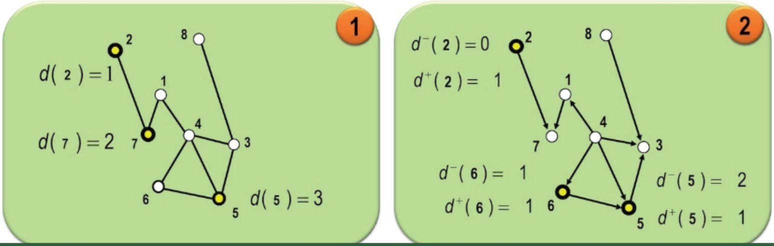
Duas arestas a_i e a_j são adjacentes quando compartilham um vértice.



Topologia

Grau de um vértice

- O **grau** (ou valência) ($d(i)$) de um vértice i em um grafo não direcionado é igual ao número de arestas incidentes a i.
- O **grau de entrada** ($d^-(i)$) de um vértice i em um grafo direcionado é igual ao número de arestas que entram em i.
- O **grau de saída** ($d^+(i)$) de um vértice i em um grafo direcionado é igual ao número de arestas que saem de i.



Fundamento

Teorema do Aperto de Mãos (*Handshaking*)

A soma dos graus de todos os vértices de um GND (grafo não direcionado) G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$

Corolário

O número de vértices de grau ímpar em um GND é par.

Fundamento

Teorema do Aperto de Mãos (*Handshaking*)

A soma dos graus de todos os vértices de um GND (grafo não direcionado) G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$

Corolário

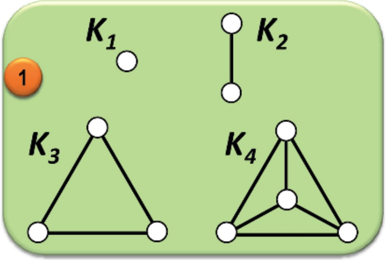
O número de vértices de grau ímpar em um GND é par.

Tente desenhar um grafo com 4 vértices, sendo $d(1) = 3, d(2) = 2, d(3) = 2, d(4) = 2$

Topologia

Grafo Completo

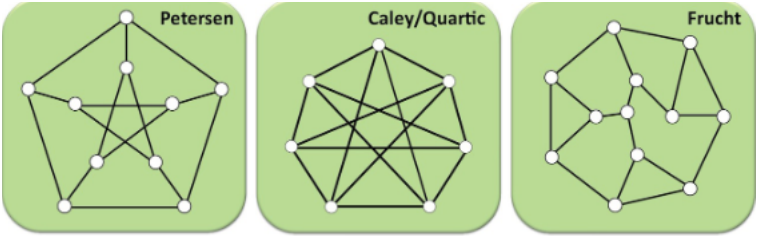
Um grafo completo com n vértices, denominado K_n é um grafo simples contendo exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.



Topologia

Grafo Regular

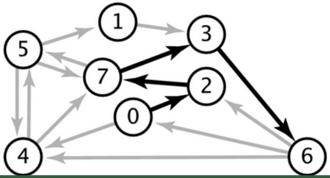
Grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau.
Obs: qualquer grafo completo é regular



Topologia

Caminho

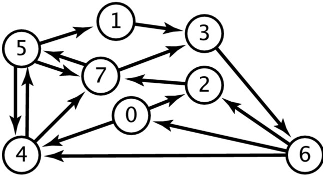
- Um **passeio** em um grafo é uma sequência de vértices dotada da seguinte propriedade: Se v_1 e v_2 são vértices consecutivos na sequência, então (v_1,v_2) é um arco do grafo. Um passeio é **fechado** se tem pelo menos dois arcos e seu primeiro vértice coincide com o último.
- Um **caminho** em um grafo é um passeio sem arcos repetidos. Um caminho é **simples** se não tem vértices repetidos. Por exemplo, 0-2-7-3-6 é um caminho simples no grafo da figura abaixo



Topologia

Caminho e Ciclos

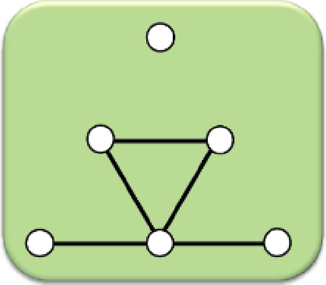
- O **comprimento** de um caminho é o número de arcos dele.
- Um **ciclo** em um grafo é um caminho fechado. Um ciclo é simples se não tem vértices repetidos exceto pelo último.
- Em um grafo não dirigido, um ciclo deve conter pelo menos 3 arestas.



Topologia

Vértice isolado

Vértice com nenhuma aresta incidente.



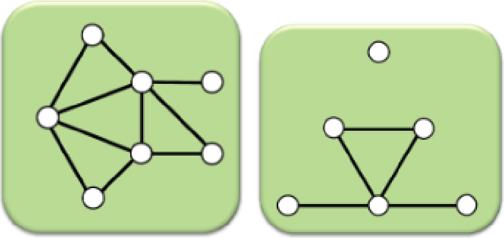
Topologia

Grafo conexo

Para todo par de vértices i e j de G existe **pelo menos** um caminho entre i e j.

Grafo desconexo

Consiste de 2 ou mais grafos conexos, chamados de **componentes**.

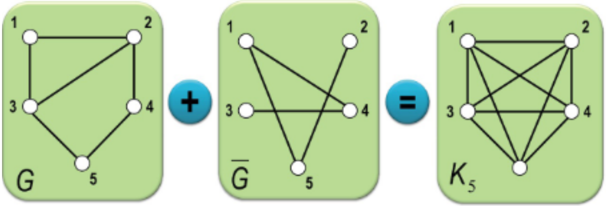


Grafo complemento

Definição

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não direcionado, o **complemento** de G, $\overline{G}$ (ou $C(G)$), é um grafo formado da seguinte maneira:

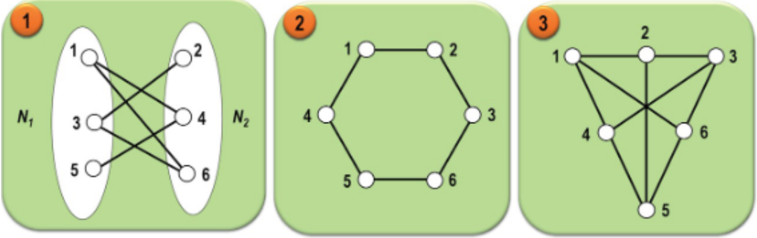
- Os vértices de $\overline{G}$ são todos os vértices de G;
- As arestas de $\overline{G}$ são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo.



Grafo bipartido

Definição

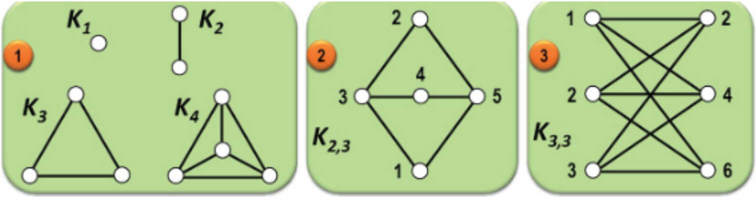
Um grafo é **bipartido** se o conjunto de vértices V pode ser particionado em 2 subconjuntos V_1 e V_2 tal que todas as arestas do grafo são incidentes a um vértice de V_1 e a um vértice de V_2.



Grafo bipartido completo

Definição

Um grafo bipartido é **completo** ($K_{|V1|,|V2|}$) se cada vértice do subconjunto V_1 é adjacente a todos os vértices do subconjunto V_2 e vice-versa.



Exemplo de grafos completos (1) e bipartidos completos (2 e 3).

Representação computacional

Matriz de adjacências

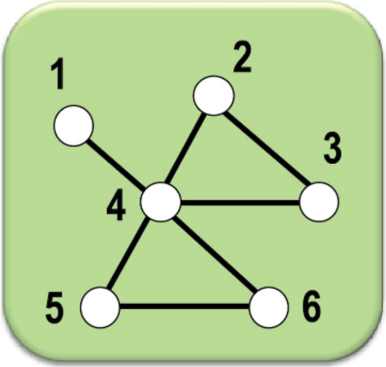
Matriz $A_{n \times n}$, sendo que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Se existe uma aresta/arco } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases} \qquad (1)$$

Propriedades:

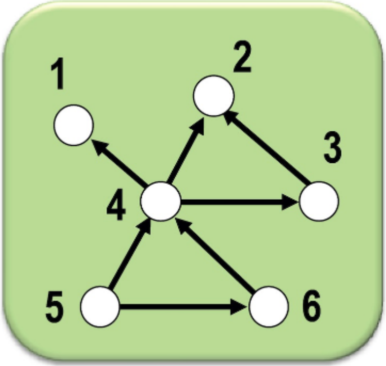
- Simétrica para grafos não direcionados;
- Consulta existência de uma aresta/arco com um acesso à memória $\mathcal{O}(1)$;
- Ocupa $\Theta(n^2)$ de espaço mesmo para grafos esparsos.

Matriz de adjacências - Grafo não direcionado



$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matriz de adjacências - Grafo direcionado



$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Representação computacional

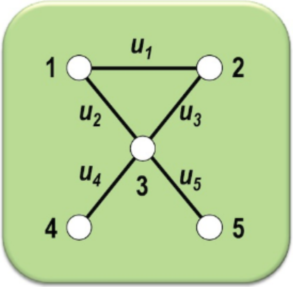
Lista de adjacências

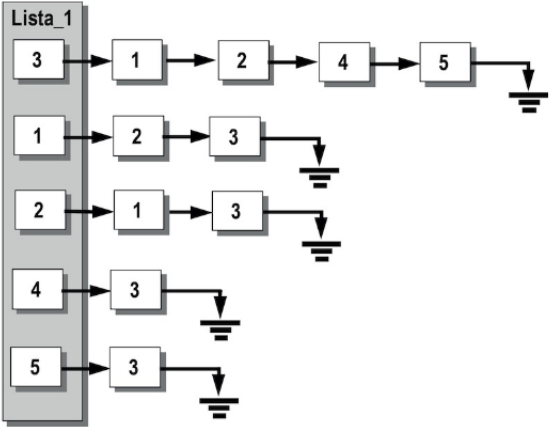
- Usa n listas, uma para cada vértice;
- Lista de v_i contém todos os vértices adjacentes a ele.

Propriedades:

- Ocupa menos memória $\mathcal{O}(m)$;
- Complexidade da operação de determinar uma adjacência é limitada por $\mathcal{O}(n)$.

Lista de adjacências - Grafo direcionado





Dúvidas?

Exercícios

1. Determine o número de vértices para os seguintes grafos:
   - G tem 9 arestas e todos os vértices têm grau 3;
   - G é regular com 15 arestas e grau 5.

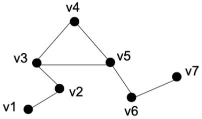
   Desenhe os grafos dos dois exercícios anteriores.
2. Faça uma lista de todos os caminhos simples com exatamente 4 vértices no grafo definido pelos arcos 7-3, 1-4, 7-8, 0-5, 5-2, 3-8, 2-9, 0-6, 4-9, 2-6, 6-4.
3. Faça uma lista de todos os caminhos simples com exatamente 4 vértices no grafo não-dirigido definido pelas arestas 3-7, 1-4, 7-8, 0-5, 5-2, 3-8, 2-9, 0-6, 4-9, 2-6, 6-4.
4. Escreva uma função *booleana* que verifique se uma dada sequência seq[0..k] de vértices de um grafo é um passeio. Faça duas versões da função: uma supõe que o grafo é dado por sua matriz de adjacências e outra supõe que o grafo é dado por suas listas de adjacência.

Exercícios

5. Existe um grafo simples com cinco vértices de graus 1, 2, 3, 4, 5? Se existir, desenhe um possível grafo.
6. Um escultor deseja criar uma escultura que represente a paz mundial. Para isto, ele esculpirá 7 pilares (um para cada continente) e os colocará em um círculo. Depois, ele esticará um fio de ouro entre os pilares, de forma que, cada pilar estará conectado a 3 outros pilares. Embora a idéia seja boa, a escultura é impossível. Porquê?
7. Considere o grafo definido pelos arcos 0-1, 1-2, 2-0, 2-3, 3-1. A sequência 0-1-2-3-1-2-0 é um ciclo?
8. Escreva uma função *booleana* que verifique se uma sequência seq[0..k] de vértices de um grafo é um ciclo. Faça duas versões da função: uma supõe que o grafo é dado por sua matriz de adjacências e outra supõe que o grafo é dado por listas de adjacência.

Exercícios

9. Com relação ao grafo abaixo, responda:



- O grafo é simples?
- Completo?
- Regular?
- Conexo?
- Encontre dois caminhos diferentes entre v3 e v5.
- Indique uma aresta cuja remoção tornará o grafo desconexo.
- Indique a representação deste grafo por lista de adjacências e matriz de adjacências.

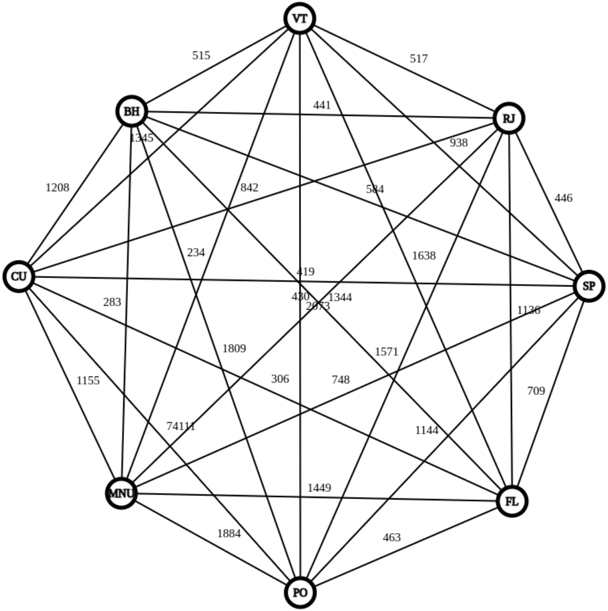
Exercício prático

A *Gulozitos alimentos* precisa que você desenvolva um sistema para indicar a rota a ser seguida por sua carreta para entregas nos centros de distribuições das capitais do sul e sudeste. A carreta sairá da fábrica em Manhuaçu, deve percorrer todas as capitais do sul e sudeste e, retornar à Manhuaçu. Seu sistema deve dizer a rota a ser seguida e qual será a quilometragem rodada.

Exercício prático

A *Gulozitos alimentos* precisa que você desenvolva um sistema para indicar a rota a ser seguida por sua carreta para entregas nos centros de distribuições das capitais do sul e sudeste. A carreta sairá da fábrica em Manhuaçu, deve percorrer todas as capitais do sul e sudeste e, retornar à Manhuaçu. Seu sistema deve dizer a rota a ser seguida e qual será a quilometragem rodada.

A distância entre as cidades pode ser visualizada no grafo a seguir.


VT
BH
RJ
CU
SP
MNU
FL
PO
515
517
441
1345
938
1208
842
584
446
234
1638
419
283
430
1344
2073
1136
1809
1571
1155
306
748
709
74111
1144
1449
1884
463

Exercício prático

Dado o número de vértices, o grafo ficou pouco legível. Entretanto, é possível ver a matriz de adjacências do grafo aqui.

Exercício prático

Dado o número de vértices, o grafo ficou pouco legível. Entretanto, é possível ver a matriz de adjacências do grafo aqui.

Ao terminar o exercício, na mesma planilha (contendo a matriz de distâncias), na guia Resultados, você deverá preencher seu nome, o custo da solução reportada pelo seu programa e a rota gerada. Adicionalmente, você deverá enviar o código fonte para o email do professor. Atenção: Neste momento não é essencial desenvolver uma solução de alta qualidade. O objetivo do exercício é que vocês utilizem um grafo simples na resolução de um problema prático. Elabore o seu algoritmo. Desenvolva seu código. Qualquer consulta ou plágio acarretará na nulidade do exercício.


рахмат
danke
謝謝
spas
ngiyabonga
teşekkür ederim
Баярлалаа
mersi
kia ora
barka
welalin
tack
спасибо
faafetai lava
vinaka
спасибі
blagodaram
dank je
misaotra
matondo
paldies
grazzi
mahalo
tapadh leat
thank you
gracias
kiitos
dankie
dhanyavad
nanni
nandri
bedankt
bayarlalaa
gracie
hvala
mauruuru
koszonom
enkosi
dziękuję
akun
dankon
aciū
хвала
asante
manana
obrigada
tenki
murakoze
djiere dieuf
tau
mochchakkeram
дякую
mamnun
chokrane
chnorakaloutioun
gratias ago
gracies
sulpay
go raibh maith agat
sobodi
děkuji
obrigado
mèsi
sagolun
sukriya
kop khun krap
taiku
arigatô
takk
dakujem
trugarez
najis tuke
ありがとう
tanemirt
rahmet
grazie
didi madloba
kam sah hamnida
rahmat
terima kasih
diolch
dhanyavadagalu
shukriya
merce
мерси
তোমাকে ধন্যবাদ
감사합니다
xiexie
ευχαριστώ
merci