INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Manhuaçu

Estruturas de Dados II
Modelando o problema de caminho mínimo como um modelo de programação linear

Prof. Leonardo C. R. Soares - *leonardo.soares@ifsudestemg.edu.br*
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

5 de setembro de 2024

Introdução

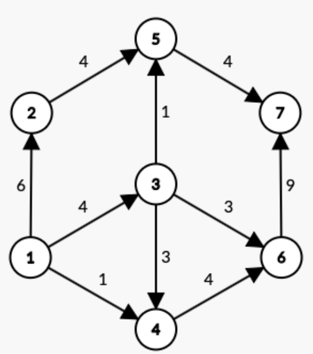
Caminho mais curto

Podemos modelar o problema do caminho mais curto como um modelo de programação linear. Para isso, precisaremos definir a função objetivo, as variáveis de decisão e as restrições do problema.

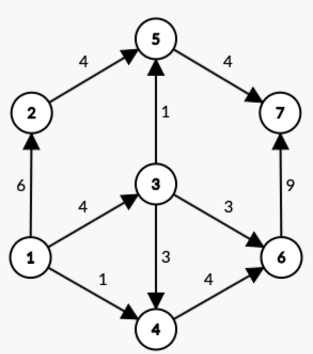
Instância

Caminho mais curto

Consideraremos a instância representada pelo grafo abaixo. O vértice de origem será **1** e o vértice de destino **7**.



Modelando



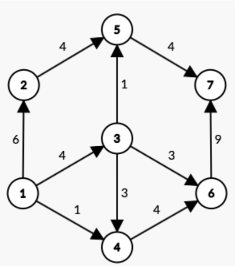
Variáveis de decisão

Nossas variáveis de decisão dirão se um determinado arco faz ou não parte do solução do problema. A instância possui 10 arcos, então teremos 10 variáveis de decisão binárias, $x_{ij} = 1$ indicará que o arco i, j faz parte da solução e $x_{ij} = 0$ o contrário.

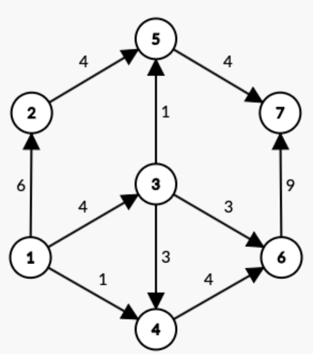
Função objetivo

Como nosso problema é de **minimização**, nossa função objetivo irá minimizar a soma dos pesos de cada arco multiplicado pela variável de decisão que indica se aquele arco faz parte ou não da solução:

$$Z = \min\left\{6x_{12}+4x_{13}+x_{14}+4x_{25}+3x_{34}+x_{35}+3x_{36}+4x_{46}+4x_{57}+9x_{67}\right\} \tag{1}$$



Modelando

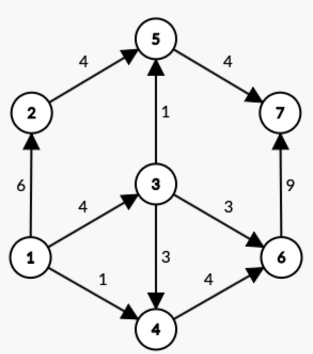


Restrições

Nossa primeira restrição irá garantir que apenas um arco seja escolhido como saída do vértice de origem:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \qquad (2)$$

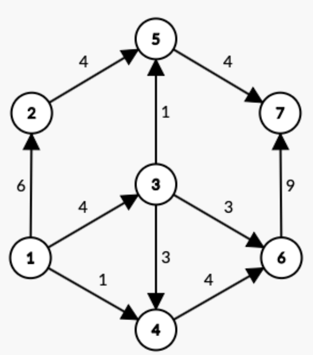
Modelando



Restrições

Para todos os vértices, exceto origem e destino, as restrições devem garantir que só se entra nele por um arco e, de forma análoga, apenas um vértice é escolhido para saída. Logo, a soma dos arcos que escolhidos como entradas (variáveis de decisão), menos a soma dos arcos escolhidos como saída, deve ser igual a zero.

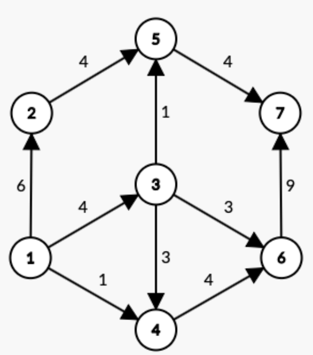
Modelando



Restrições

$$x_{12} - x_{25} = 0 \tag{3}$$

Modelando

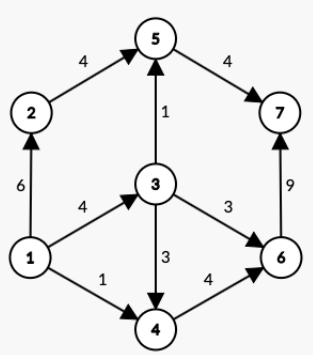


Restrições

$$x_{12} - x_{25} = 0 \tag{3}$$

$$x_{13} - x_{34} - x_{35} - x_{36} = 0 \tag{4}$$

Modelando



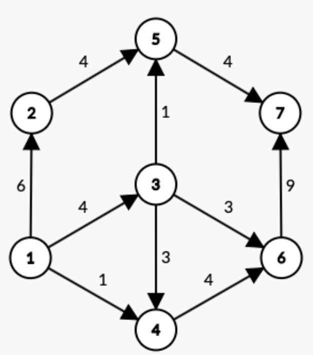
Restrições

$$x_{12} - x_{25} = 0 \tag{3}$$

$$x_{13} - x_{34} - x_{35} - x_{36} = 0 \tag{4}$$

$$x_{14} + x_{34} - x_{46} = 0 \tag{5}$$

Modelando



Restrições

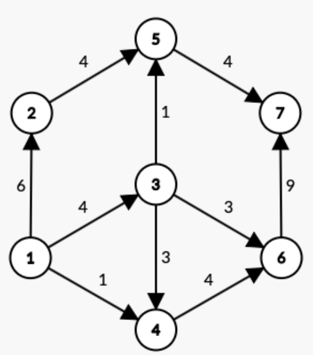
$$x_{12} - x_{25} = 0 \tag{3}$$

$$x_{13} - x_{34} - x_{35} - x_{36} = 0 \tag{4}$$

$$x_{14} + x_{34} - x_{46} = 0 \tag{5}$$

$$x_{25} + x_{35} - x_{57} = 0 \tag{6}$$

Modelando



Restrições

$$x_{12} - x_{25} = 0 \tag{3}$$

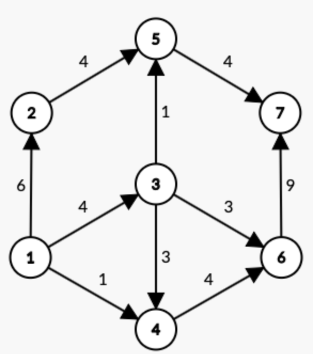
$$x_{13} - x_{34} - x_{35} - x_{36} = 0 \tag{4}$$

$$x_{14} + x_{34} - x_{46} = 0 \tag{5}$$

$$x_{25} + x_{35} - x_{57} = 0 \tag{6}$$

$$x_{36} + x_{46} - x_{67} = 0 \tag{7}$$

Modelando



Restrições

Por último, devemos garantir que um (apenas) arco seja escolhido para se entrar no vértice de destino.

$$x_{67} + x_{57} = 1 \tag{8}$$

Modelo de programação inteira

$$\text{Minimizar} \quad \left\{6x_{12} + 4x_{13} + x_{14} + 4x_{25} + 3x_{34} + x_{35} + 3x_{36} + 4x_{46} + 4x_{57} + 9x_{67}\right\} \tag{9}$$

$$\text{Sujeito a} \quad x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \tag{10}$$

$$x_{12} - x_{25} = 0 \tag{11}$$

$$x_{13} - x_{34} - x_{35} - x_{36} = 0 \tag{12}$$

$$x_{14} + x_{34} - x_{46} = 0 \tag{13}$$

$$x_{25} + x_{35} - x_{57} = 0 \tag{14}$$

$$x_{36} + x_{46} - x_{67} = 0 \tag{15}$$

$$x_{67} + x_{57} = 1 \tag{16}$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{36}, x_{46}, x_{57}, x_{67} \in \{0, 1\} \tag{17}$$

E agora

Nosso modelo está pronto, ou seja, traduzimos as características do problema para uma linguagem matemática. Mas e agora, como resolver?

E agora

Nosso modelo está pronto, ou seja, traduzimos as características do problema para uma linguagem matemática. Mas e agora, como resolver?

Agora devemos implementar o modelo e utilizar um solver de programação linear para resolvê-lo. Podemos fazer isso utilizando uma linguagem de programação ou algum programa pronto (como o Lindo). Para exemplificar, utilizaremos o solver de programação linear disponível como *plugin* para o *Google Planilhas* (tem também no *Excel*).

Implementando

Primeiramente, defina em quais células o solver deverá definir o valor das variáveis de decisão. Embora não seja essencial, é interessante criar *labels* para identificar essas células.

Implementando

Primeiramente, defina em quais células o solver deverá definir o valor das variáveis de decisão. Embora não seja essencial, é interessante criar *labels* para identificar essas células.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Variáveis de decisão	X12	X13	X14	X25	X34	X35	X36	X46	X57	X67			
2														

Implementando

Agora vamos definir nossa função objetivo. Definiremos o peso de cada arco na célula imediatamente abaixo da variável que a representa (para facilitar). Para calcular a função objetivo faremos a soma dos produtos dos pesos dos arcos com as respectivas variáveis de decisão. O valor será exibido na célula L3, cuja conteúdo é $=$ SUMPRODUCT$(B2:K2;B3:K3)$. O objetivo propriamente, minimizar, será definido no solver.

Implementando

Agora vamos definir nossa função objetivo. Definiremos o peso de cada arco na célula imediatamente abaixo da variável que a representa (para facilitar). Para calcular a função objetivo faremos a soma dos produtos dos pesos dos arcos com as respectivas variáveis de decisão. O valor será exibido na célula L3, cuja conteúdo é $=$ SUMPRODUCT$(B2 : K2; B3 : K3)$. O objetivo propriamente, minimizar, será definido no solver.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Variáveis de decisão	X12	X13	X14	X25	X34	X35	X36	X46	X57	X67			
2														
3	Zmin	6	4	1	4	3	1	3	4	4	9	0		

Implementando

Agora definiremos as equações das nossas restrições. Utilizaremos a função de *soma produtos* para todas (=SUMPRODUCT($B$2:$K$2;B5:K5)). O lado direito da equação ficará na coluna N. O símbolo de igualdade na coluna M é apenas para nos ajudar na hora de transcrever para o solver.

Implementando

Agora definiremos as equações das nossas restrições. Utilizaremos a função de *soma produtos* para todas (=SUMPRODUCT($B$2:$K$2;B5:K5)). O lado direito da equação ficará na coluna N. O símbolo de igualdade na coluna M é apenas para nos ajudar na hora de transcrever para o solver.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Variáveis de decisão	X12	X13	X14	X25	X34	X35	X36	X46	X57	X67			
2		0	1	0	0	0	1	0	0	1	0			
3	Zmin	6	4	1	4	3	1	3	4	4	9	9		
4	Sujeito a													
5	(1)	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	=	1
6	(2)	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	=	0
7	(3)	0	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	=	0
8	(4)	0	0	1	0	1	0	0	-1	0	0	0	=	0
9	(5)	0	0	0	1	0	1	0	0	-1	0	0	=	0
10	(6)	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	=	0
11	(7)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	=	1

Implementando

Para resolver o modelo, utilizaremos o *plugin* Solver da *Frontline Systems Inc.* (ou o OpenSolver). Após abrir o complemento, deveremos informar onde está o valor da função objetivo (L3), que tipo de otimização queremos (minimização), onde estão as variáveis de decisão (b2:k2) e onde estão as restrições. **É necessário definir o domínio das variáveis de decisão**, neste caso, elas são binárias.

A24 | fx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Variáveis de decisão	X12	X13	X14	X25	X34	X35	X36	X46	X57	X67			
2		0	1	0	0	0	1	0	0	1	0			
3	Zmin	6	4	1	4	3	1	3	4	4	9	9		
4	Sujeito a													
5	(1)	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	=	1
6	(2)	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	=	0
7	(3)	0	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	=	0
8	(4)	0	0	1	0	1	0	0	-1	0	0	0	=	0
9	(5)	0	0	0	1	0	1	0	0	-1	0	0	=	0
10	(6)	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	0	=	0
11	(7)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	=	1

Solver

Set Objective: L3

To: Max ● Min Value Of:

By Changing: B2:K2

Subject To:
L5 = N5
L6 = N6
L7 = N7
L8 = N8
L9 = N9
L10 = N10
L11 = N11
b2:k2 = binary

Add | Change | Delete

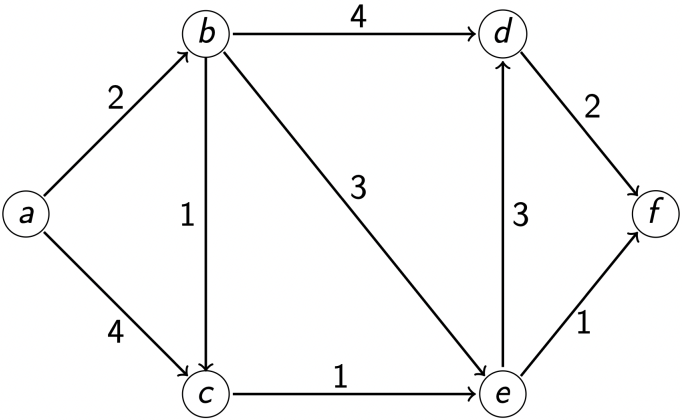
Solving Method: Standard LSGRG Nonlinear

Reset All | Insert Example

Solve | Options

Exercício

Implemente um modelo de programação inteira para o problema de caminho mínimo considerando-se a instância abaixo. O vértice de origem será *a* e o destino *f*.




thank you
danke
謝謝
ngiyabonga
teşekkür ederim
gracias
спасибо
Баярлалаа
рахмат
merci
obrigado
bedankt
dziękuję
sukriya
kop khun krap
go raibh maith agat
mochchakkeram
arigatô
dakujem
terima kasih
grazie
takk
tapadh leat
dank je
감사합니다
ありがとう
мерси
хвала
hvala
mauruuru
sagolun
ευχαριστώ
blagodaram
faafetai lava
kiitos
dankie
dhanyavad
enkosi
mersi
barka
welalin
tack
misaotra
matondo
paldies
grazzi
mahalo
vinaka
asante
manana
obrigada
tenki
murakoze
chokrane
djiere dieuf
mamnun
chnorakaloutioun
gracies
sulpay
taiku
trugarez
shukriya
merce
dhanyavadagalu
diolch
tanemirt
rahmet
xiexie
najis tuke
kam sah hamnida
rahmat
mèsi
dèkuji
sobodi
didi madloba
koszonom
nandri
nanni
gracie
bayarlalaa
spas
kia ora
dankon
aciu
akun
дякую