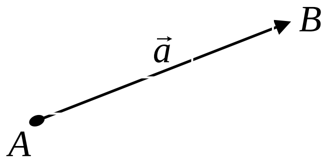
Розділ 1. Векторна алгебра

Основні поняття

О.1. *Вектором* (геометричним вектором) називається сукупність напрямлених відрізків, що мають однакову довжину і напрямок.

Позначення: $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$.



З означення випливає, що вектори можуть переміщуватись паралельно самим собі у просторі, тобто розглядаються так звані *вільні* вектори.

О.2. Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних.

Позначення: $\vec{a} \| \vec{b}$.

О.3. Три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називаються *компланарними*, якщо вони лежать на одній площині або на паралельних площинах. Спеціального позначення немає.

О.4. *Базисом* у просторі називається упорядкована трійка некомпланарних векторів $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$; базисом на площині – упорядкована пара неколінеарних векторів $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$; *базисом* на прямій – будь-який ненульовий вектор $\vec{e}$, що належить прямій.
Вектори, що складають базис, називаються *базисними*.

В подальшому будемо позначати: простір R^3; площина R^2; пряма R.

Т. Будь-який вектор $\vec{a} \in R^3$, може бути представлений у вигляді:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \overrightarrow{e_i}, \quad (1)$$

де $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ – базис; a_i – деякі числа – координати вектора в даному базисі.

Коротко: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

О.5. Базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ називається *ортонормованим*, якщо складаючи його вектори ортогональні (взаємно перпендикулярні) та нормовані (мають одиничну довжину).

У цьому випадку прийнято позначення базисних векторів: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Ці базисні вектори називаються *ортами*. (орт $\vec{i}$, орт $\vec{j}$, орт $\vec{k}$). Їх координати такі:

$\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.

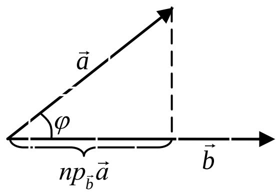
Якщо $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), \ \lambda \in R.$$

О.6. Проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається число $np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi,\ \varphi = \left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)$.

Аналогічно $np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$



Введемо поняття орієнтації системи векторів.

Нехай задано 3 некомпланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, зведені до одного початку.

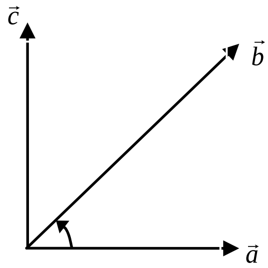


Рис. I

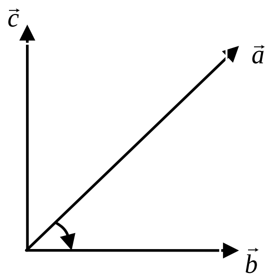


Рис. II

О.7. Кажуть, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють *праву трійку*, якщо *найкоротший поворот* від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки, коли дивитися з кінця вектора $\vec{c}$. В противному разі – ліву.

Згідно з означенням: на рис. I – права трійка, на рис. II – ліва.

Добутки векторів

Скалярний добуток векторів

О. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi, \ (1)$$

де $\varphi = \left(\vec{a},\hat{}\ \vec{b}\right)$.

Інші позначення: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$.

З формули (1) $\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$. (2)

Враховуючи, що $np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi,$$

маємо $\left.\begin{array}{l}(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a} \\ (\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} np_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|} \\ np_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|}\end{array}$. (3)

<u>Властивості скалярного добутку векторів</u>

1^0. $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$ – комутативний закон.

2^0. $(\alpha\vec{a},\vec{b}) = \alpha(\vec{a},\vec{b}),\ \alpha \in R$ – асоціативний закон.

3^0. $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c})$ – дистрибутивний закон.

4^0. Скалярний добуток ортів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \quad \left(\vec{i}\cdot\vec{i} = \underbrace{|\vec{i}|}_{1}\cdot\underbrace{|\vec{i}|}_{1}\cdot\cos 0 = 1\right)$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0 \quad \left(\vec{i}\cdot\vec{j} = \underbrace{|\vec{i}|}_{1}\cdot\underbrace{|\vec{j}|}_{1}\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0\right).$$

5^0. Скалярний добуток векторів, заданих своїми координатами:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ в базисі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$.

Перемноживши за правилами множення многочлена на многочлен, та враховуючи властивість 4^0, отримаємо:

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\ . \quad (4)$$

6^0. Вираження довжини вектора через скалярний добуток.

Покладемо в (4) $\vec{b} = \vec{a}$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ (\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2\end{array}\right\} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ . \quad (5)$$

7^0. Умова перпендикулярності векторів.

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ або

$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

(справедливо, бо $\cos 90^0 = 0$).

Застосування скалярного добутку

1. Знаходження $\cos\varphi$ – формула (2), $пр_{\vec{b}}\vec{a},\ пр_{\vec{a}}\vec{b}$ – формула (3), довжини вектора – формула (5).
2. Знаходження напрямку вектора $\vec{a}$. Напрямок вектора характеризується напрямними косинусами: $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$, $\alpha=\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{i}\right),\ \beta=\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{j}\right),\ \gamma=\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{k}\right).$

   Нехай $\vec{a}=(x,y,z);\ \vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1).$

   Скористаємося формулою (2): $\cos\varphi=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|};$

$$\cos\alpha=\frac{\left(\vec{a},\vec{i}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{i}\right|}=\frac{x}{|\vec{a}|};\quad \cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|};\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}.$$

   Можна перевірити, що $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$

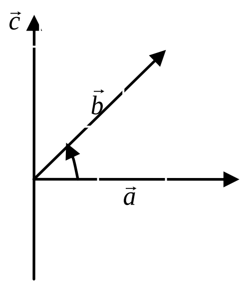
Векторний добуток векторів

<u>О.</u> *Векторним добутком* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє такі умови:

1) довжина вектора $\vec{c}$ $\quad |\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$ (1), $\varphi=\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right).$
2) Вектор $\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$.
3) Вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку.

   Позначення: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left[\vec{a},\vec{b}\right].$

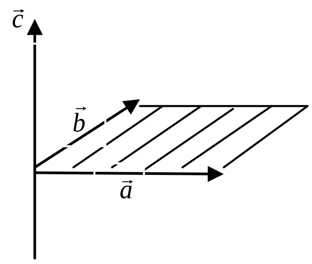
Геометрична інтерпретація:



Аналізуємо:

2) виконано; 3) виконано.

1) з шкільного курсу відомо, що $|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi=S_{парал.}$ – площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.



Отже, $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = S_{пар.}$ (2).

Очевидно, що $S_{тр.} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ (3).

<u>Властивості векторного добутку</u>

1^0. $\vec{a}\times\vec{b} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$ (антикомутативність).

Доведення випливає з того, що вектор $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ і вектор $\vec{c}_1 = \vec{b}\times\vec{a}$ мають однакові довжини та різні напрямки.

2^0. $\left[\alpha\vec{a},\vec{b}\right] = \alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, $\alpha\in R$ – асоціативний закон.

3^0. $\left[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]$ – дистрибутивний закон.

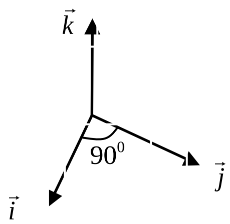
4^0. Векторний добуток ортів.

З означення випливає:

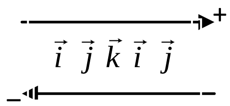
$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$, (бо $\sin 0 = 0$)

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$

$\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$ (за властивістю 1^0)



Правило для запам'ятовування:



5^0. Векторний добуток векторів, заданих своїми координатами:

$\vec{a} = \left(x_1, y_1, z_1\right),\ \vec{b} = \left(x_2, y_2, z_2\right)$ в базисі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

$\vec{a}\times\vec{b} = \left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\times\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)$.

Перемножуємо за правилом множення многочлена на многочлен, далі враховуємо властивість 4^0. Після перетворень отримаємо:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \quad (4)$$

Формула (4) – основна формула для обчислення векторного добутку.

6^0. Умова колінеарності векторів:

$\vec{a}\|\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=0$ або $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$

(справедливо, бо $\sin 0=\sin\pi=0$).

Зауважимо, що векторний добуток застосовується для обчислення площ паралелограма та трикутника, побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (формули (2), (3)).

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається векторний добуток двох з них, помножений скалярно на третій, тобто $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Інші позначення: $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$, $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

Мішаний добуток векторів – це число.

Нехай $\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right),\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right),\vec{c}=\left(x_3,y_3,z_3\right)$ в базисі $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\left(x_3,y_3,z_3\right)=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)\cdot\left(x_3,y_3,z_3\right)=$$

$$=x_3\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}; \ (*)$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \quad (1)$$

Якщо (1) розкласти за елементами 3-го рядка, то отримаємо вираз (*).

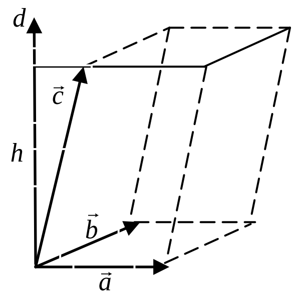
Геометричний зміст мішаного добутку векторів

Нехай вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ некомпланарні. Зведемо їх до одного початку і побудуємо на них паралелепіпед.

Доведемо, що об'єм паралелепіпеда обчислюється за формулою:

$$V_{пар}=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}\right|$$

або в інших позначеннях: $V_{пар}=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$.



Д.

$$\underbrace{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}_{\vec{d}}\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}=\underbrace{\left|\vec{d}\right|}_{S_{пар}}\cdot\underbrace{\left|\vec{c}\right|\cos(\vec{c},\hat{\ }\vec{d})}_{np_{\vec{d}}\vec{c}}=S_{пар}\cdot np_{\vec{d}}\vec{c}=S_{пар}\cdot(\pm h)=\pm S_{пар}\cdot h=\pm V_{парал},$$

«+», якщо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку; «–», якщо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють ліву трійку.

Отже, $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\pm V$; $V_{пар}=\pm\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$; $V_{парал}=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$;

$$V_{пір}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|.$$

Властивості мішаного добутку

1^0. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}$ (випливає з антикомутативності векторного добутку).

2^0. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}x_2&y_2&z_2\\x_1&y_1&z_1\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\\x_1&y_1&z_1\end{vmatrix}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}.$$

Висновок: кругова перестановка векторів вправо не змінює мішаного добутку.

3^0. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

переставили $\vec{a}$, бо для скалярного
добутку має місце комутативний закон

Отже, $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

Висновок: знаки векторного та скалярного добутків можна міняти місцями.

Саме із-за цього існує позначення: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

4^0. Враховуючи наведені властивості, записуємо ланцюжок рівностей:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=-\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right).$$

Правило для запам'ятовування:

$$\xrightarrow{\qquad\qquad} +$$
$$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}$$
$$-\ \xleftarrow{\qquad\qquad}$$

5^0. Умова компланарності векторів:

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ – компланарні } \Leftrightarrow \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0 \text{ або } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Випливає з того, що у випадку компланарності векторів – вони належать площині – об'єм паралелепіпеда =0).

6^0. Якщо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис, то $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\neq 0$,

бо за означенням ці вектори некомпланарні.