Цель работы: Изучение устойчивости маятника капицы с точки зрения аналитической механики, получение условия резонсанса и проверка с помощью модели.

1 Теоретическая справка

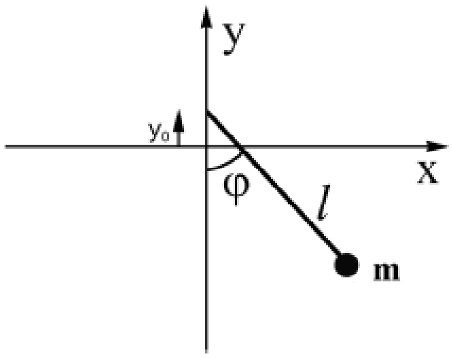


Рис. 1: Модель маятника

Маятником Капицы называется система, состоящая из грузика, прикреплённого к лёгкой нерастяжимой спице, которая крепится к вибрирующему подвесу. Маятник носит имя академика и нобелевского лауреата П. Л. Капицы, построившего в 1951 году теорию для описания такой системы.

В работе рассматривался случай маятника Капицы с вертикально осциллирующим подвесом с колебаниями малой амплитуды. Модель изображена на рис. 1: ϕ - угол отклонения маятника от вертикали, y_0 - амплитуда малых колебаний, m - масса маятника, l - длина маятника, $\omega_0 = \frac{g}{l}$ - частота собственных колебаний маятника, ω - частота колебаний подвеса. Также для гашения малых отклонений в модель был добавлен коэфициент трения в шарнире γ.

Перейдём в систему отсчёта, связанную с осциллирущим подвесом. Тогда на груз будет действовать вертиклаьная сила инерции $y_0\omega^2 cos(\omega t)$. После проекции сил на ось, перпендикулярную маятнику, уравнение движения:

$$\ddot{\phi} + 2\gamma(\dot{\phi} - \omega_p) + (\frac{g}{l} - \frac{y_0\omega^2}{l} cos(\omega t))sin(\phi) = 0$$

1.1 Резонанс 0:1

Рассмотрим случай, при котором маятник стремится к положению равновесия с нулевой угловой скоростью. Тогда член с γ равен нулю.

Сделаем замену $\phi = \psi + \beta$, где ψ - медленная компонента угла, а β - быстрая. Поскольку β - быстрая компонента:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\beta} = \ddot{\phi},\\
&\ddot{\beta} = -\left(\omega_0^2 - \frac{y_0}{l}\omega^2\cos(\omega t)\right)\sin(\psi + \beta),\\
&\ddot{\beta} = -\frac{\omega^2 y_0}{l}\sin(\psi)\cos(\omega t).
\end{aligned}$$

Усредняя по периоду $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\phi} = \ddot{\psi},\\
&\ddot{\psi} = -\frac{1}{T}\int_0^T \left(\omega_0^2 - \frac{y_0}{l}\omega^2\cos(\omega t)\sin(\phi)\left(\sin(\psi)\cos(\beta) + \cos(\gamma)\sin(\beta)\right)\right) dt.
\end{aligned}$$

Приближения $\sin(\beta) = \beta$, $\cos(\beta) = 1 - \frac{\beta^2}{2}$:

$$\ddot{\psi} = -\frac{1}{T}\int_0^T \Bigg(\omega_0^2 \sin(\psi)\left(1 - \frac{y_0^2\sin(\psi)}{l^2}\cos^2(\omega t)\right) + \frac{y_0}{l}\omega^2\left(\frac{y_0^2\sin^2(\psi)}{2l^2}\cos^3(\omega t) + \frac{a\sin(2\psi)}{2l}\cos^2(\omega t)\right)\Bigg)dt.$$

Учтём малость $\frac{y_0^2}{l^2}$ и проинтегрируем:

$$\ddot{\psi} = -\left(\omega_0^2\sin(\psi) + \frac{y_0^2\omega^2\sin(2\psi)}{4l}\right).$$

Найдём усреднённый за период момент всех сил M:

$$ml^2\ddot{\phi} = M,$$
$$\ddot{\phi} = \ddot{\psi},$$
$$M = -ml\left(g\sin(\psi) + \frac{y_0^2\omega^2\sin(2\psi)}{4l}\right).$$

Введём функцию потенциала $V(\psi)$ такую, что $\frac{dV}{d\psi} = -M$:

$$V(\psi) = ml\int\left(g\sin(\psi) + \frac{y_0^2\omega^2\sin(2\psi)}{4l}\right)d\psi,$$
$$V(\psi) = -mgl\cos(\psi) - \frac{my_0^2\omega^2\cos^2(\psi)}{4} + C.$$

Полученное выражение — парабола от $\cos(\psi)$. Минимум при

$$\cos(\psi) = -\frac{b}{2a} = -\frac{2gl}{(y_0\omega)^2},$$

так как $\cos(\psi) > -1$ следует $(y_0\omega)^2 > 2gl$.

Условия равновесия и устойчивости:

$$\frac{dV}{d\psi} = -M = 0,$$
$$\frac{d^2V}{d\psi^2} > 0.$$

Найдём производные:

$$\frac{dV}{d\psi} = ml\left(g\sin(\psi) + \frac{y_0^2\omega^2\sin(2\psi)}{4l}\right),$$
$$\frac{d^2V}{d\psi^2} = ml\left(g\cos(\psi) + \frac{y_0^2\omega^2\cos(2\psi)}{2l}\right).$$

Отсюда положения равновесия: $\psi = 0; \pi$ - устойчивые.

1.2 Резонанс 1:1

Рассмотрим случай резонанса, при котором ω_p частота вращения маятника совпадает с частотой осцилляций подвеса ω. Для этого сделаем замену $\psi = \phi - \omega t$:

$$\ddot{\psi} + 2\gamma(\dot{\psi}) + (\omega_0^2 - \frac{y_0}{l}\omega^2 cos(\omega t))sin(\psi + \omega t) = 0$$

Так как рассматриваем случай совпадения угловых скоростей, член с $\dot{\psi}$ зануляется ввиду малости отклонений. Рассмотрим вклад члена с $sin(\psi + \omega t)$ за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T sin(\omega t + \psi)\, dt = 0 \rightarrow \text{вклад за период от g} = 0.$$

Член с $sin(\psi + \omega t)cos(\omega t)$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T sin(\omega t + \psi)cos(\omega t)\, dt = \frac{1}{2T}\int_0^T (sin(\psi) + sin(2\omega t + \psi))dt = sin(\psi)/2$$

Уравнение движения в приближении за период:

$$\ddot{\psi} + \frac{y_0\omega^2}{2l}sin(\psi) = 0$$

Отсюда положения равновесия $\psi = 0$ - устойчивое, $\psi = \pi$ - неустойчивое. Причем условие устойчивости первого положения равновесия - то, что маятник может сделать оборот вокруг своей оси. Из ЗСЭ:

$$\begin{aligned} mg \cdot 2l &< m\frac{\omega^2 l^2}{2} \\ \frac{\omega^2 l}{4g} &> 1 \\ \frac{\omega}{\omega_0} &> 2 \quad \text{(условие устойчивости)} \end{aligned}$$

1.3 Резонанс n:1

Рассмотрим резонансы при скорости вращения маятника больше скорости осцилляций подвеса. Уравнение движения:

$$\ddot{\phi} + (\frac{g}{l} - \frac{y_0\omega^2}{l}cos(\omega t))sin(\phi) = 0$$

Замена $\phi = n\omega t + \psi$:

$$\ddot{\phi} + (\omega_0^2 - \frac{y_0\omega^2}{l}cos(\omega t))sin(n\omega t + \psi) = 0$$

Усредняя за $T = \frac{2\pi}{n\omega}$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin(n\omega t + \psi)dt = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\sin(n\omega t + \psi)dt &= \frac{1}{2T}\int_0^T \big[\sin((n+1)\omega t + \psi) \\
&\quad - \sin((1-n)\omega t - \psi)\big]dt \\
&= -\frac{1}{2\omega T}\left[\frac{\cos((n+1)\omega t + \psi)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)\omega t - \psi)}{n-1}\right]_0^T \\
&= -\frac{n}{4\pi}\Bigg[\frac{\cos(2\pi + \psi + \frac{2\pi}{n})}{n+1} + \frac{\cos(2\pi - \psi - \frac{2\pi}{n})}{n-1} \\
&\quad - \frac{\cos\psi}{n+1} - \frac{\cos\psi}{n-1}\Bigg] \\
&= \frac{n}{4\pi(n^2-1)}\Big[2n\cos\psi - (n-1)\cos\left(2\pi + \psi + \tfrac{2\pi}{n}\right) \\
&\quad - (n+1)\cos\left(2\pi - \psi - \tfrac{2\pi}{n}\right)\Big] \\
&= \frac{n^2}{2\pi(n^2-1)}\left[\cos\psi - \cos\left(\tfrac{2\pi}{n} + \psi\right)\right] \\
&= \frac{n^2}{\pi(n^2-1)}\sin\left(\tfrac{\pi}{n} + \psi\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

Подставляя в уравнение движения:

$$\ddot{\psi} + \frac{y_0\omega^2}{2l}\frac{n^2}{\pi(n^2-1)}sin(\frac{\pi}{n})sin(\frac{\pi}{n} + \psi) = 0$$

Из уравнения видно, что при $n > 1$ резонанс возможен при сдвиге фазы на $\frac{\pi}{n}$, причем так же будет 2 противоположных положения равновесия, как в случае Резонанса 1:1, с такой же устойчивостью/неустойчивостью.

2 Пояснение кода

Мы не будем подробно оставливаться на каждом случае, а лишь рассмотрим пример для 1:1. Остальные вариации отличаются незначильно, с ними можно будет ознакомиться в приложении к работе.

2.1 Код для резонанса 1:1

2.1.1 Импорт библиотек

Для начала импортируем необходимые библиотеки:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
```

- `numpy` для численных вычислений
- `matplotlib.pyplot` для визуализации
- `solve_ivp` из SciPy для решения дифференциальных уравнений

2.1.2 Функция для моделирования уравнений

Для моделирования маятника необходимо написать функцию, которая содержит в себе систему дифференциальных уравнений движения для маятника.

```
def equation_of_rotation(t, y, omega0, omega, gamma, a, L):
    theta, phi = y
    dydt = [
        phi,
        -2 * gamma * (phi - omega) +
        (omega0**2 - (a/L) * omega**2 * np.cos(omega*t)) * np.sin(theta)
    ]
    return dydt
```

Где:

- theta - угол отклонения
- phi - угловая скорость
- Уравнение включает:
  - Демпфирование с коэффициентом gamma
  - Воздействие вибрации с амплитудой a и частотой omega
  - Гравитационное воздействие с частотой omega0

2.1.3 Функция для матрицы устойчивости

Для того, чтобы посмотреть на устойчивость системы, необходимо посчитать собственные значения матрицы. Эту задачу решает следующая функция:

```
def sustainability_matrix(params, T, sol_main):
    omega = params['omega']
    omega0 = params['omega0']
    gamma = params['gamma']
    a = params['a']
    L = params['L']

    def variational_eq(t, y):
        xi, dxi = y  # xi = theta - theta0, dxi = phi - phi0
        theta0 = sol_main.sol(t)[0]
        coeff = (omega0**2 - (a/L)*omega**2 *
                 np.cos(omega*t)) * np.cos(theta0)

        return [
            dxi,
            -2*gamma*dxi + coeff*xi
        ]

    sol1 = solve_ivp(variational_eq, [0, T],
                     [1, 0], method='RK45', rtol=1e-8)
    sol2 = solve_ivp(variational_eq, [0, T],
                     [0, 1], method='RK45', rtol=1e-8)
```

```
    M = np.array([
        [sol1.y[0, -1], sol2.y[0, -1]],
        [sol1.y[1, -1], sol2.y[1, -1]]
    ])
    return M
```

- Решает вариационные уравнения для двух начальных условий.
- Строит матрицу из конечных состояний решений
- Возвращаемая матрица **M** позволяет определить устойчивость:
  - Если все $|\lambda(M)| < 1$ - система устойчива
  - Если $\exists|\lambda(M)| \geq 1$ - система неустойчива

2.1.4 Функции для создания графиков

Хотя детали численного решения и физических уравнений могут быть достаточно сложными, визуализационная часть представляет собой относительно стандартную задачу:

- Строятся четыре взаимосвязанных графика: временная зависимость угла отклонения, временная зависимость угловой скорости, фазовый портрет, график бесконечно малой добавки $\xi(t)$
- Используются стандартные методы matplotlib (subplot, plot, grid) и настройки оформления (подписи осей, легенды) следуют типовым шаблонам

2.1.5 Основной блок выполнения

Эта функция задает параметры модели и при запуске программы вызывает функции, описанные выше:

```
if __name__ == "__main__":
    params = {
        'omega0': np.sqrt(9.8),
        'omega': 4 * np.sqrt(9.8),
        'gamma': 0.1,
        'a': 0.01,
        'L': 1.0
    }
    y0 = [0, params['omega']]
    simulate_and_analyze(params, y0, t_span=(0, 30), save_gif=False)
```

2.2 Пример работы для двух положений равновесия для 0:1

- Рассмотрим систему сначальными данными y0 и omega (см. рис. 3). Тогда получим следующие результаты:

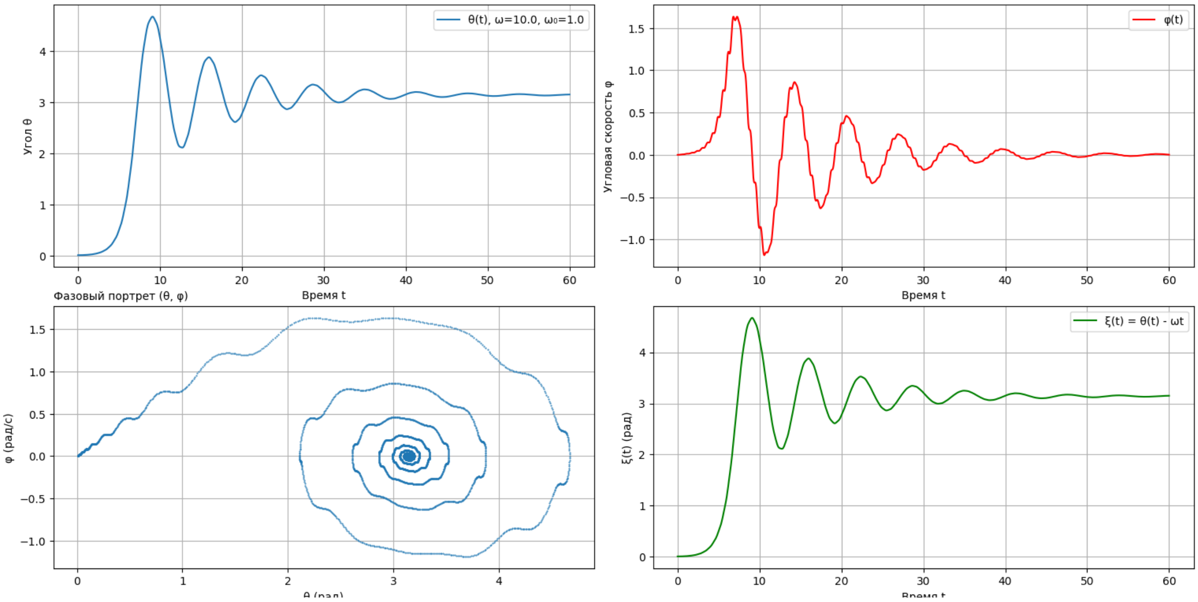


Рис. 2: Графики зависимостей для w = 10

Из теории вытекает, что при таких НУ система должна быть неустойчивой, что согласуется с нашим кодом:

```
if __name__ == "__main__":
    params = {
        'omega0': 1,
        'omega': 10 * 1,
        'gamma': 0.1,
        'a': 0.01,
        'L': 1.0,
        'n': 0
    }
    y0 = [0.01, params['omega']*params['n']]
    simulate_and_analyze(params, y0, t_span=(0, 60))
```

```
ulate_and_analyze() › else
script_not_ani × script_4 ×
C:\Users\User\PycharmProjects\stepik\venv\Scripts\python.exe C:\Users\User\Desktop\script_4.py
Собственные значения: 1.7631, 0.5002
Модули: 1.7631, 0.5002
Система неустойчива
```

Рис. 3: Анализ устойчивости для w = 10

- Теперь возьмем другие начальные условия(см. рис. 5). Тогда получим:

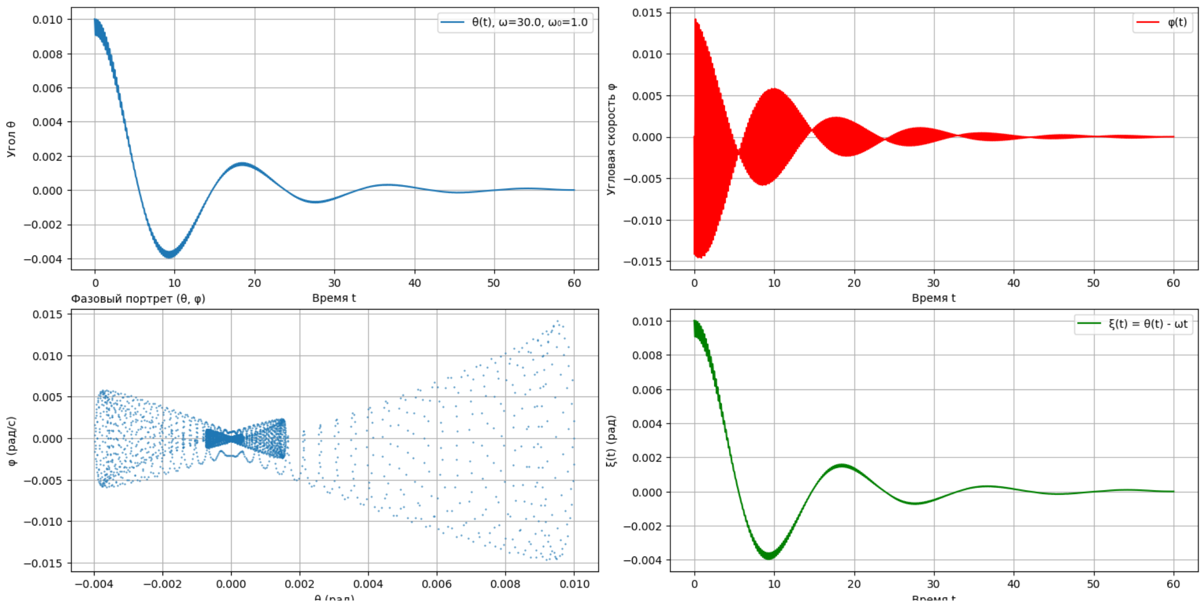


Рис. 4: Графики зависимостей для w = 30

Из теории вытекает, что при таких НУ система должна быть устойчивой, что вновь согласуется с нашим кодом:

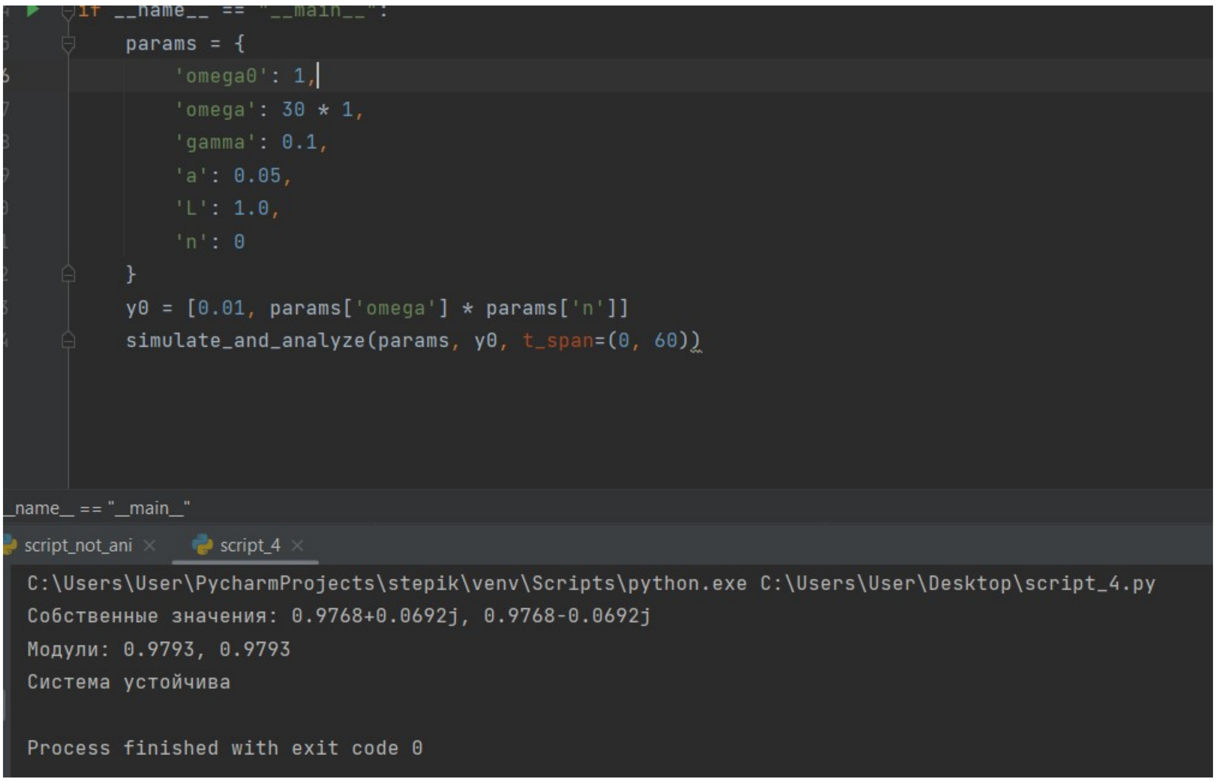


Рис. 5: Анализ устойчивости для w = 30

2.3 Пример работы для двух положений равновесия для 1:1

- Рассмотрим сначала систему со следующими начальными данными: начальный угол равен 0 и начальная угловая скорость равна возбуждающей скорости. Тогда получим следующие результаты:

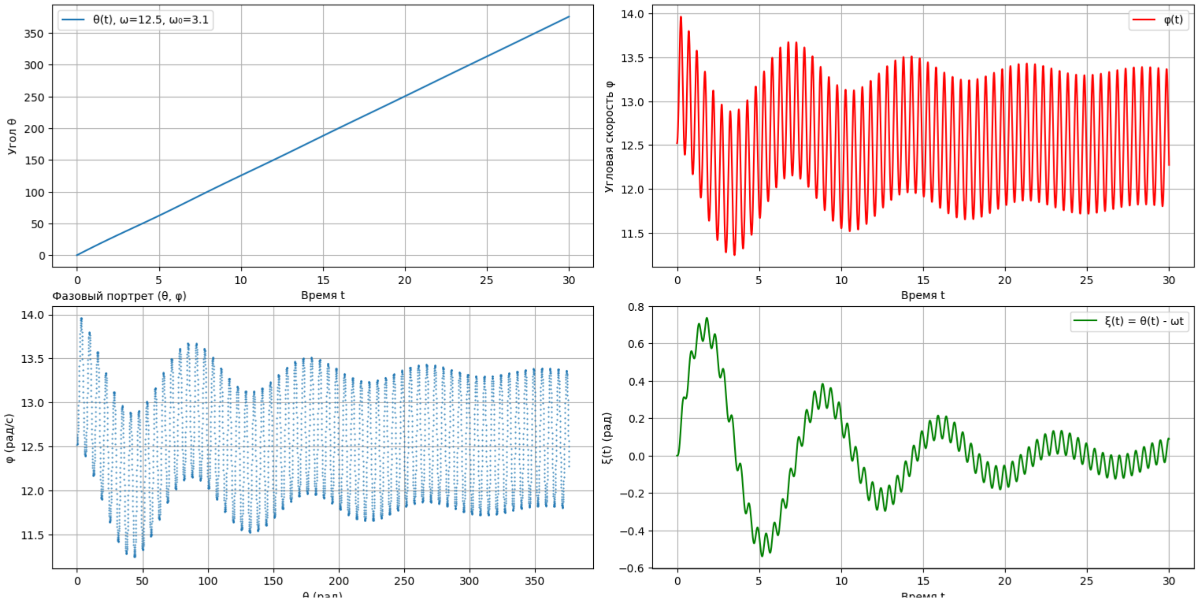
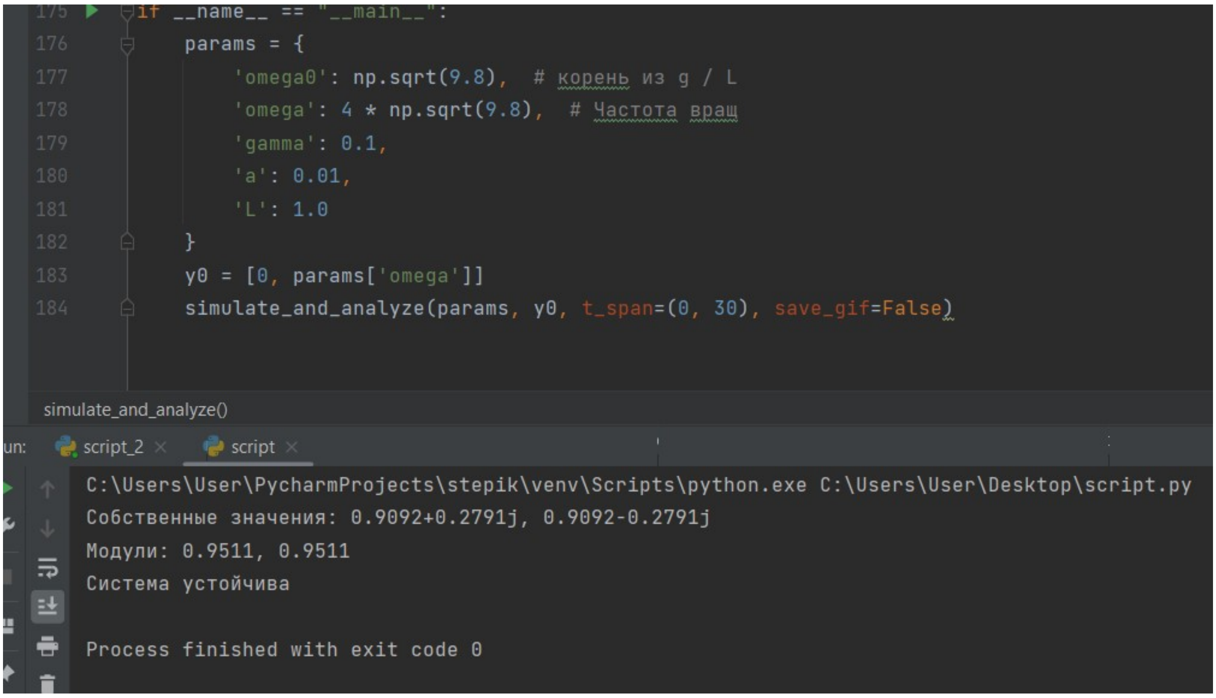


Рис. 6: Графики зависимостей для 0

Из теории вытекает, что при таких НУ система должна быть устойчивой, что согласуется с нашим кодом:



```
if __name__ == "__main__":
    params = {
        'omega0': np.sqrt(9.8),  # корень из g / L
        'omega': 4 * np.sqrt(9.8),  # Частота вращ
        'gamma': 0.1,
        'a': 0.01,
        'L': 1.0
    }
    y0 = [0, params['omega']]
    simulate_and_analyze(params, y0, t_span=(0, 30), save_gif=False)
```

```
C:\Users\User\PycharmProjects\stepik\venv\Scripts\python.exe C:\Users\User\Desktop\script.py
Собственные значения: 0.9092+0.2791j, 0.9092-0.2791j
Модули: 0.9511, 0.9511
Система устойчива

Process finished with exit code 0
```

Рис. 7: Анализ устойчивости для 0

- Теперь рассмотрим аналогичную систему, но изменим в ней начальный угол на π. Тогда:

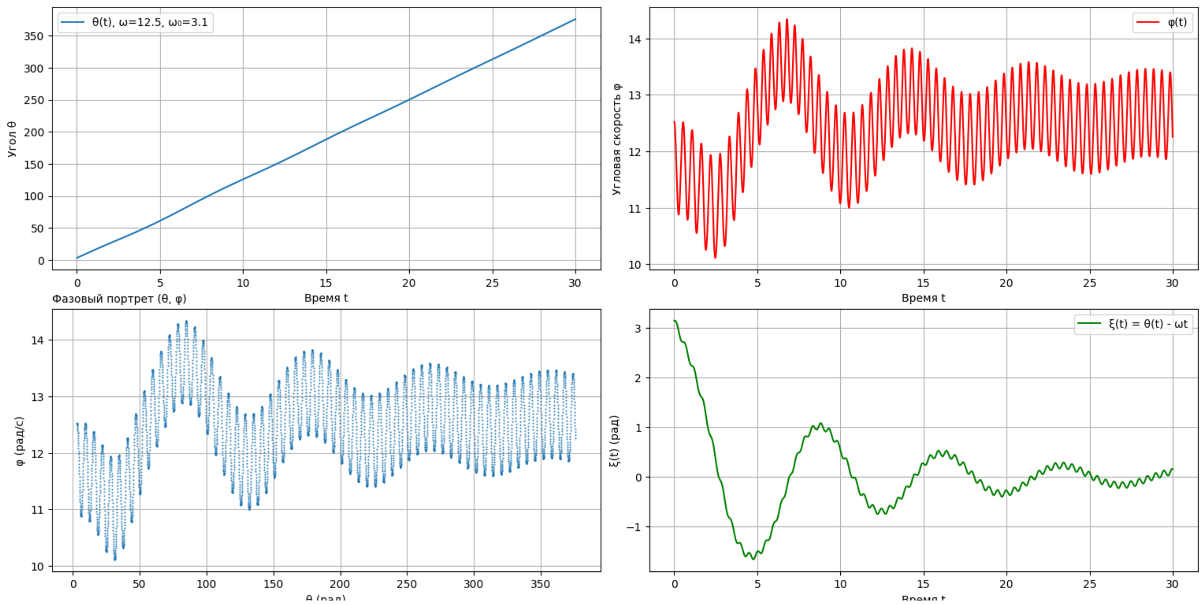


Рис. 8: Графики зависимостей для π

Из теории вытекает, что при таких НУ система должна быть неустойчивой, что также следует из нашего кода:

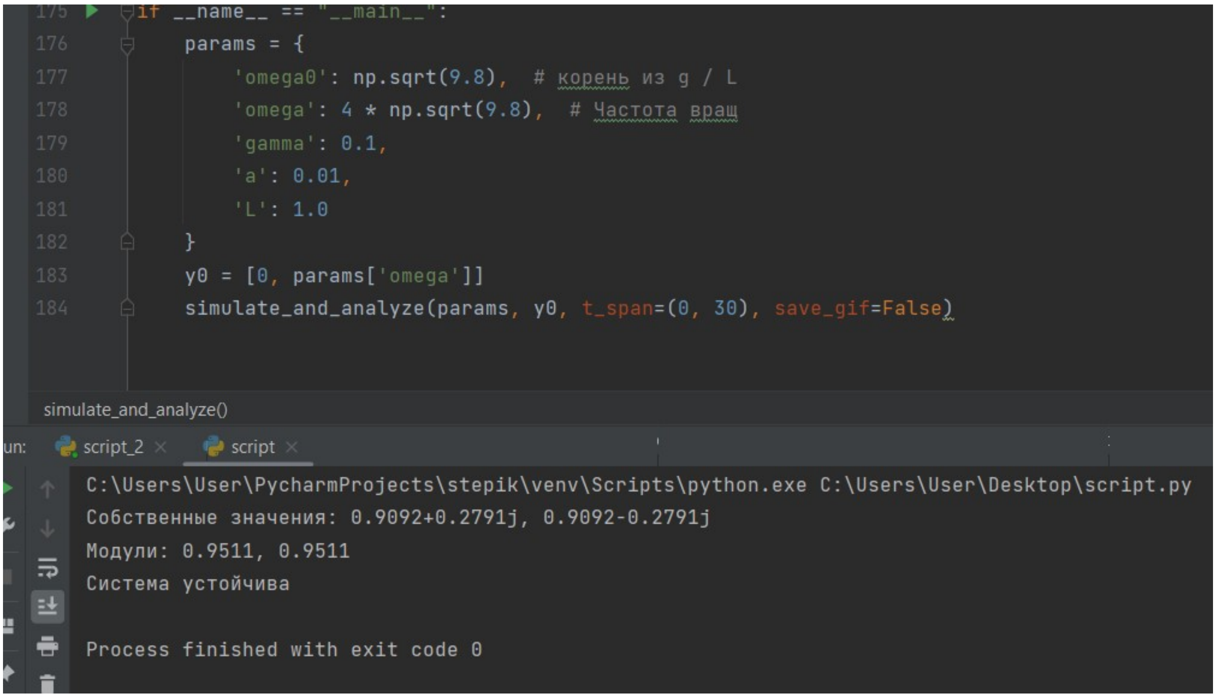


Рис. 9: Анализ устойчивости для π

3 Приложение

3.1 Полный код для резонанса 0:1 и n:1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

def equation_of_rotation(t, y, omega0, omega, gamma, a, L, n):
    theta, phi = y
    dydt = [
        phi,
        -2*gamma*(phi - n*omega) +
        (omega0**2 - (a/L)*omega**2*np.cos(omega*t))*np.sin(theta)
    ]
    return dydt

def sustainability_matrix(params, T, sol_main):
    omega = params['omega']
    omega0 = params['omega0']
    gamma = params['gamma']
    a = params['a']
    L = params['L']

    def variational_eq(t, y):
        xi, dxi = y  # xi = theta - theta0, dxi = phi - phi0
        theta0 = sol_main.sol(t)[0]
        coeff = (omega0**2 -
            100↪ (a/L)*omega**2*np.cos(omega*t))*np.cos(theta0)
        return [dxi, -2*gamma*dxi + coeff*xi]

    sol1 = solve_ivp(variational_eq, [0,T], [1,0],
                     method='RK45', rtol=1e-8)
    sol2 = solve_ivp(variational_eq, [0,T], [0,1],
                     method='RK45', rtol=1e-8)

    M = np.array([
        [sol1.y[0,-1], sol2.y[0,-1]],
        [sol1.y[1,-1], sol2.y[1,-1]]
    ])
    return M

def simulate_and_analyze(params, y0, t_span=(0,50)):
    sol_main = solve_ivp(equation_of_rotation, t_span, y0,
              args=(params['omega0'], params['omega'],
                   params['gamma'], params['a'], params['L'],
                      100↪ params['n']),
              method='RK45', dense_output=True, rtol=1e-6)

    t = np.linspace(t_span[0], t_span[1], 5000)
    theta, phi = sol_main.sol(t)

    plt.figure(figsize=(12,8))
    plt.subplot(2,2,1)
    plt.plot(t, theta, label=f'θ(t), ω={params["omega"]:.1f}')
    plt.xlabel('Время t'); plt.ylabel('Угол θ')
    plt.grid(True); plt.legend()

    plt.subplot(2,2,2)
    plt.plot(t, phi, 'r', label='ϕ(t)')
```

```
    plt.xlabel('Время t'); plt.ylabel('Угловая скорость ϕ')
    plt.grid(True); plt.legend()

    plt.subplot(2,2,3)
    plt.plot(theta, phi, '.', markersize=1)
    plt.xlabel('θ (рад)'); plt.ylabel('ϕ (рад/с)')
    plt.title('Фазовый портрет (θ, ϕ)'); plt.grid(True)

    plt.subplot(2,2,4)
    plt.plot(t, theta-params['n']*params['omega']*t, 'g', label='ξ(t)')
    plt.xlabel('Время t'); plt.ylabel('ξ(t) (рад)')
    plt.grid(True); plt.legend()

    plt.tight_layout()
    plt.show()

    T = 2*np.pi/params['omega']
    M = sustainability_matrix(params, T, sol_main)
    eigvals = np.linalg.eigvals(M)
    print(f"Собственные значения: {eigvals[0]:.4f}, {eigvals[1]:.4f}")
    print(f"Модули: {np.abs(eigvals[0]):.4f}, {np.abs(eigvals[1]):.4f}")
    print("Система устойчива" if all(np.abs(eigvals) < 1)
          else "Система неустойчива")

if __name__ == "__main__":
    params = {
        'omega0': 1.0,
        'omega': 10.0,
        'gamma': 0.1,
        'a': 0.01,
        'L': 1.0,
        'n': 0
    }
    y0 = [0.01, params['omega']*params['n']]
    simulate_and_analyze(params, y0, (0,60))
```

3.2 Полный код для резонанса 1:1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

def equation_of_rotation(t, y, omega0, omega, gamma, a, L):
    theta, phi = y
    dydt = [
        phi,
        -2*gamma*(phi - omega) +
        (omega0**2 - (a/L)*omega**2*np.cos(omega*t))*np.sin(theta)
    ]
    return dydt

def sustainability_matrix(params, T, sol_main):
    omega = params['omega']
    omega0 = params['omega0']
    gamma = params['gamma']
    a = params['a']
    L = params['L']

    def variational_eq(t, y):
```

```python
        xi, dxi = y
        theta0 = sol_main.sol(t)[0]
        coeff = (omega0**2 -
            100↪ (a/L)*omega**2*np.cos(omega*t))*np.cos(theta0)
        return [dxi, -2*gamma*dxi + coeff*xi]

    sol1 = solve_ivp(variational_eq, [0,T], [1,0],
                    method='RK45', rtol=1e-8)
    sol2 = solve_ivp(variational_eq, [0,T], [0,1],
                    method='RK45', rtol=1e-8)

    return np.array([
        [sol1.y[0,-1], sol2.y[0,-1]],
        [sol1.y[1,-1], sol2.y[1,-1]]
    ])

def simulate_and_analyze(params, y0, t_span=(0,50)):
    sol_main = solve_ivp(equation_of_rotation, t_span, y0,
              args=(params['omega0'], params['omega'],
                   params['gamma'], params['a'], params['L']),
              method='RK45', dense_output=True, rtol=1e-6)

    t = np.linspace(t_span[0], t_span[1], 5000)
    theta, phi = sol_main.sol(t)

    plt.figure(figsize=(12,8))
    plt.subplot(2,2,1)
    plt.plot(t, theta, label=f'θ(t), ω={params["omega"]:.1f}')
    plt.xlabel('Время t'); plt.ylabel('Угол θ')
    plt.grid(True); plt.legend()

    plt.subplot(2,2,2)
    plt.plot(t, phi, 'r', label='φ(t)')
    plt.xlabel('Время t'); plt.ylabel('Угловая скорость φ')
    plt.grid(True); plt.legend()

    plt.subplot(2,2,3)
    plt.plot(theta, phi, '.', markersize=1)
    plt.xlabel('θ (рад)'); plt.ylabel('φ (рад/с)')
    plt.title('Фазовый портрет (θ, φ)'); plt.grid(True)

    plt.subplot(2,2,4)
    plt.plot(t, theta-params['omega']*t, 'g', label='ξ(t)')
    plt.xlabel('Время t'); plt.ylabel('ξ(t) (рад)')
    plt.grid(True); plt.legend()

    plt.tight_layout()
    plt.show()

    T = 2*np.pi/params['omega']
    M = sustainability_matrix(params, T, sol_main)
    eigvals = np.linalg.eigvals(M)
    print(f"Собственные значения: {eigvals[0]:.4f}, {eigvals[1]:.4f}")
    print(f"Модули: {np.abs(eigvals[0]):.4f}, {np.abs(eigvals[1]):.4f}")
    print("Система устойчива" if all(np.abs(eigvals) < 1)
          else "Система неустойчива")

if __name__ == "__main__":
    params = {
        'omega0': np.sqrt(9.8),
```

```
        'omega': 4*np.sqrt(9.8),
        'gamma': 0.1,
        'a': 0.01,
        'L': 1.0
    }
    simulate_and_analyze(params, [np.pi, params['omega']], (0,30))
```