Математическая статистика

Практическое задание 5

В данном задании предлагается провести некоторое исследование модели линейной регрессии и критериев для проверки статистических гипотез, в частности применить этим модели к реальным данным.

Правила:

- Выполненную работу нужно отправить на почту `probability.diht@yandex.ru`, указав тему письма `"[номер группы] Фамилия Имя - Задание 5"`. Квадратные скобки обязательны. Вместо `Фамилия Имя` нужно подставить свои фамилию и имя.
- Прислать нужно ноутбук и его pdf-версию. Названия файлов должны быть такими: `5.N.ipynb` и `5.N.pdf`, где `N` - ваш номер из таблицы с оценками.
- Никакой код из данного задания при проверке запускаться не будет.
- Некоторые задачи отмечены символом *. Эти задачи являются дополнительными. Успешное выполнение большей части таких задач (за все задания) является необходимым условием получения бонусного балла за практическую часть курса.
- Баллы за каждую задачу указаны далее. Если сумма баллов за задание меньше 25% (без учета доп. задач), то все задание оценивается в 0 баллов.

Баллы за задание:

- Задача 1 - 7 баллов
- Задача 2 - 2 балла
- Задача 3* - 3 балла
- Задача 4 - 2 балла
- Задача 5* - 10 баллов
- Задача 6 - 5 баллов
- Задача 7 - 4 балла
- Задача 8* - 4 балла
- Задача 9* - 10 баллов

In [414]:
```
import numpy as np
import scipy.stats as sps
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.linalg
import sklearn
import sklearn.cross_validation
from IPython.display import display, HTML
```

1. Линейная регрессия

Задача 1. По шаблону напишите класс, реализующий линейную регрессию. Интерфейс этого класса в некоторой степени соответствует классу [`LinearRegression` (http://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.linear_model.LinearRegression.html#sklearn.linear_model.LinearRegression)](http://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.linear_model.LinearRegression.html#sklearn.linear_model.LinearRegression) из библиотеки `sklearn`.

In [169]:
```
X = np.array([
    [1., 0],
    [0, 1.],
    [1., 1.]
])

Y = np.array([1., 2., 1.])
class fool:
    pass
alpha = 0.95
self = fool
self.n, self.k = X.shape

self.theta = np.linalg.inv(X.T @ X) @ (X.T) @ Y
    # МНК-оценка = (Z.T * Z)^-1 * Z.T * Y

vector = Y - X @ self.theta
self.sigma_sq = 1. / (self.n - self.k) * (vector @ vector.T)
    # несмещенная оценка для sigma^2 = 1 / (n - k) * || Y - X * self.theta || ^2

a = np.linalg.inv(X.T @ X)
u_upper = sps.t.ppf((1. + alpha) / 2., self.n - self.k)
u_lower = sps.t.ppf((1. - alpha) / 2., self.n - self.k)
ci = [
    [self.theta[i] - np.sqrt(a[i][i] * self.sigma_sq) * u_upper,
     self.theta[i] - np.sqrt(a[i][i] * self.sigma_sq) * u_lower]
    for i in range(self.k)
]
self.conf_int = np.array(ci)
    # (\theta_i - sqrt(a_{i,i} * self.sigma_sq) * U_{(1+alpha)/2},
    #   \theta_i - sqrt(a_{i,i} * self.sigma_sq) * U_{(1-alpha)/2})
    #доверительные интервалы для коэффициентов (матрица размера k x 2)
print(self.theta)
print(self.sigma_sq)
print(self.conf_int)
print(self.n, self.k)
print(a)
```

```
[ 0.33333333  1.33333333]
1.33333333333
[[-11.64619138  12.31285804]
 [-10.64619138  13.31285804]]
3 2
[[ 0.66666667 -0.33333333]
 [-0.33333333  0.66666667]]
```

In [170]:
```
class LinearRegression:
    def __init__(self):
        super()

    def fit(self, X, Y, alpha=0.95):
        ''' Обучение модели. Предполагается модель Y = X * theta + epsilon,
            где X --- регрессор, Y --- отклик,
            а epsilon имеет нормальное распределение с параметрами N(0, sigma^2 * I_n).
            alpha --- уровень доверия для доверительного интервала.
        '''

        self.n, self.k = X.shape

        self.theta = np.linalg.inv(X.T @ X) @ (X.T) @ Y
            # МНК-оценка = (Z.T * Z)^-1 * Z.T * Y

        vector = Y - X @ self.theta
        self.sigma_sq = 1. / (self.n - self.k) * (vector @ vector.T)
            # несмещенная оценка для sigma^2 = 1 / (n - k) * || Y - X * self.theta || ^2

        a = np.linalg.inv(X.T @ X)
        u_upper = sps.t.ppf((1. + alpha) / 2., self.n - self.k)
        u_lower = sps.t.ppf((1. - alpha) / 2., self.n - self.k)
        ci = [
            [self.theta[i] - np.sqrt(a[i][i] * self.sigma_sq) * u_upper,
             self.theta[i] - np.sqrt(a[i][i] * self.sigma_sq) * u_lower]
            for i in range(self.k)
        ]
        self.conf_int = np.array(ci)

        return self

    def summary(self):
        print('Linear regression on %d features and %d examples' % (self.k, self.n))
        print('Sigma: %.6f' % self.sigma_sq)
        print('\t\tLower\t\tEstimation\tUpper')
        for j in range(self.k):
            print('theta_%d:\t%.6f\t%.6f\t%.6f' % (j, self.conf_int[j, 0],
                                                   self.theta[j], self.conf_int[j, 1]))

    def predict(self, X):
```

```
        ''' Возвращает предсказание отклика на новых объектах X. '''

        Y_pred = X @ self.theta
        return Y_pred
```

In [171]:
```
Z = np.array([[9., 3.], [9., 5.], [7.,6.]])
LR = LinearRegression()
LR.fit(X=X, Y=Y)
LR.summary()
print(LR.predict(Z))

import sklearn.linear_model
SLR = sklearn.linear_model.LinearRegression()
SLR.fit(X=X,y=Y)
print(SLR.coef_)
print(SLR.predict(Z))
```

```
Linear regression on 2 features and 3 examples
Sigma: 1.333333
                Lower           Estimation      Upper
theta_0:        -11.646191      0.333333        12.312858
theta_1:        -10.646191      1.333333        13.312858
[  7.           9.66666667  10.33333333]
[ -1.00000000e+00   3.39934989e-16]
[-7. -7. -5.]
```

Загрузите данные о потреблении мороженного в зависимости от температуры воздуха и цены (файл `ice_cream.txt`). Примените реализованный выше класс линейной регрессии к этим данным предполагая, что модель имеет вид $ic = \theta_1 + \theta_2\ t$, где t --- температура воздуха (столбец `temp`), ic --- постребление мороженного в литрах на человека (столбец `IC`). Значения температуры предварительно переведите из Фаренгейта в Цельсий [(Фаренгейт — 32) / 1,8 = Цельсий].

К обученной модели примените фунцию `summary` и постройте график регрессии, то есть график прямой $ic = \widehat{\theta}_1 + \widehat{\theta}_2\ t$, где $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2$ --- МНК-оценки коэффициентов. На график нанесите точки выборки. Убедитесь, что построейнный график совпадает с графиком из презентации с первой лекции, правда, с точностью до значений температура (она была неправильно переведена из Фаренгейта в Цельсий).

In [280]:

```
df = pd.read_csv("ice_cream.txt", sep="\t")
Y = df.IC.values
temp = df.temp.values
temp = (temp - 32) / 1.8
X = np.array([np.ones(temp.size), temp]).T
print(df)
print(X.T)
print(Y)
```

```
    date     IC  price  income  temp  Lag-temp  Year
0      1  0.386  0.270      78    41        56     0
1      2  0.374  0.282      79    56        63     0
2      3  0.393  0.277      81    63        68     0
3      4  0.425  0.280      80    68        69     0
4      5  0.406  0.272      76    69        65     0
5      6  0.344  0.262      78    65        61     0
6      7  0.327  0.275      82    61        47     0
7      8  0.288  0.267      79    47        32     0
8      9  0.269  0.265      76    32        24     0
9     10  0.256  0.277      79    24        28     0
10    11  0.286  0.282      82    28        26     1
11    12  0.298  0.270      85    26        32     1
12    13  0.329  0.272      86    32        40     1
13    14  0.318  0.287      83    40        55     1
14    15  0.381  0.277      84    55        63     1
15    16  0.381  0.287      82    63        72     1
16    17  0.470  0.280      80    72        72     1
17    18  0.443  0.277      78    72        67     1
18    19  0.386  0.277      84    67        60     1
19    20  0.342  0.277      86    60        44     1
20    21  0.319  0.292      85    44        40     1
21    22  0.307  0.287      87    40        32     1
22    23  0.284  0.277      94    32        27     1
23    24  0.326  0.285      92    27        28     2
24    25  0.309  0.282      95    28        33     2
25    26  0.359  0.265      96    33        41     2
26    27  0.376  0.265      94    41        52     2
27    28  0.416  0.265      96    52        64     2
28    29  0.437  0.268      91    64        71     2
29    30  0.548  0.260      90    71         0     2
[[  1.           1.           1.           1.           1.           1.
    1.           1.           1.           1.           1.           1.
    1.           1.           1.           1.           1.           1.
    1.           1.           1.           1.           1.           1.
    1.           1.           1.           1.           1.           1.        ]
 [  5.          13.33333333  17.22222222  20.          20.55555556
   18.33333333  16.11111111   8.33333333   0.          -4.44444444
   -2.22222222  -3.33333333   0.           4.44444444  12.77777778
   17.22222222  22.22222222  22.22222222  19.44444444  15.55555556
    6.66666667   4.44444444   0.          -2.77777778  -2.22222222
    0.55555556   5.          11.11111111  17.77777778  21.66666667]]
```

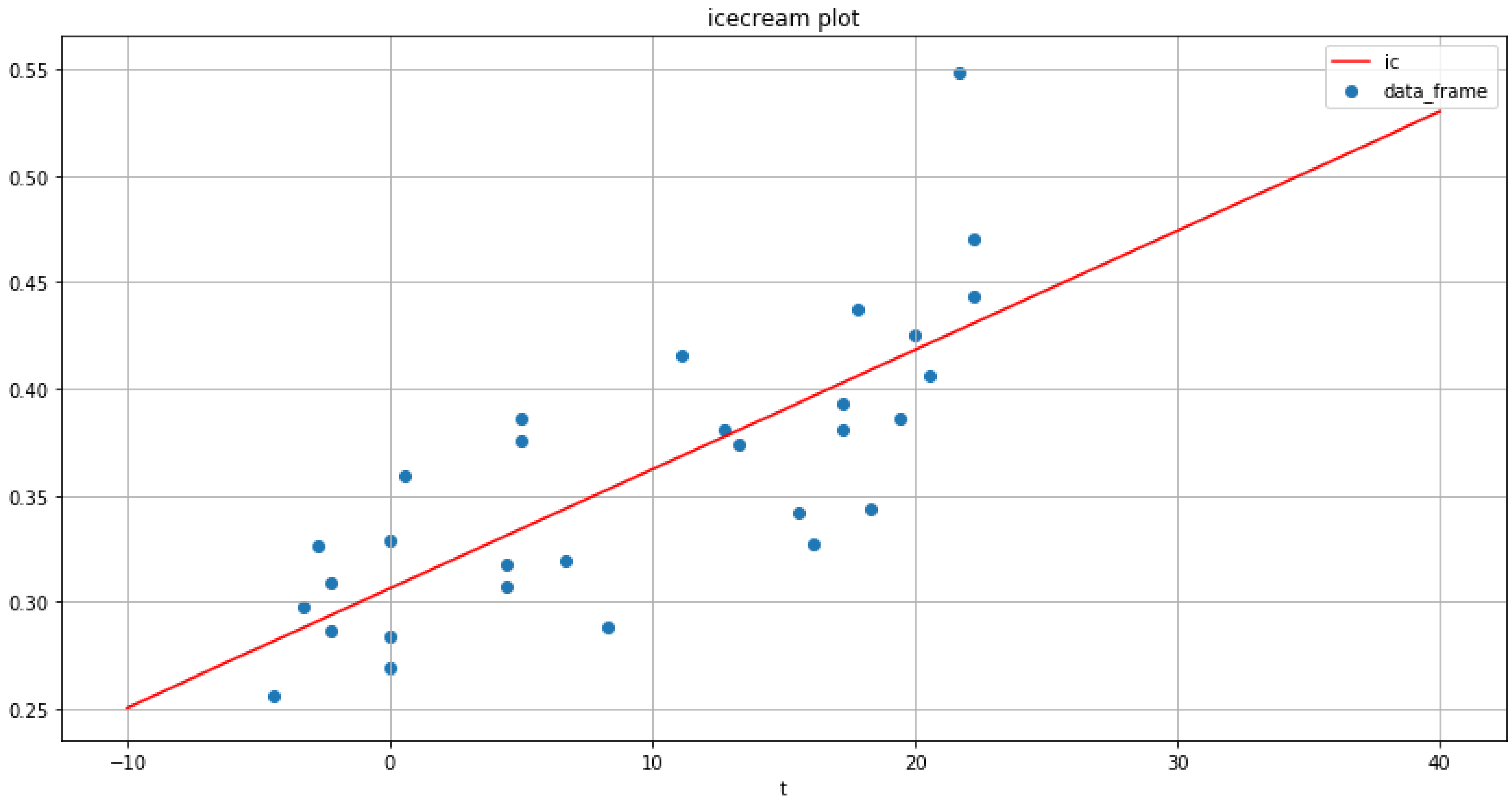
```
[ 0.386  0.374  0.393  0.425  0.406  0.344  0.327  0.288  0.269  0.256
  0.286  0.298  0.329  0.318  0.381  0.381  0.47   0.443  0.386  0.342
  0.319  0.307  0.284  0.326  0.309  0.359  0.376  0.416  0.437  0.548]
```

In [185]:
```
LR = LinearRegression()
LR.fit(X=X, Y=Y)
LR.summary()
```

```
Linear regression on 2 features and 30 examples
Sigma: 0.001786
                Lower           Estimation      Upper
theta_0:        0.283276        0.306298        0.329319
theta_1:        0.003831        0.005593        0.007355
```

In [186]:

```
grid = np.linspace(-10., 40, 1000)
X = X_cn_2 = np.array([np.ones(grid.size), grid]).T
ic = LR.predict(X)

plt.figure(figsize=(14,7))
plt.title("icecream plot")
plt.plot(grid, ic, label="ic", color="red")
plt.scatter(temp, df.IC.values, label="data_frame")
plt.xlabel("t")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

LR.summary()
```



```
Linear regression on 2 features and 30 examples
Sigma: 0.001786
                Lower           Estimation      Upper
theta_0:        0.283276        0.306298        0.329319
theta_1:        0.003831        0.005593        0.007355
```

Теперь учтите влияние года (столбец `Year`) для двух случаев:

- модель $ic = \theta_1 + \theta_2\ t + \theta_3 y_1 + \theta_4 y_2$, где $y_1 = I\{1\ \text{год}\}, y_2 = I\{2\ \text{год}\}$. Поясните, почему нельзя рассмативать одну переменную y --- номер года.
- для каждого года рассматривается своя линейная зависимость $ic = \theta_1 + \theta_2\ t$.

В каждом случае нарисуйте графики. Отличаются ли полученные результаты? От чего это зависит? Как зависит потребление мороженного от года?

Комментарий: Использование одной переменной для номера года означало бы, что мало того, что в разные годы один и тот же коэффициент, так ещё и потребление мороженного линейно (как $ic = C(t) + ky$) зависит от номера года(в произвольной системе отсчёта), что совершенно не верно. Разумно ввести три константы для трёх лет, но при этом можно вычесть константу для нулевого года из двух других, прибавить в θ_1 и считать, что константа нулевого года равна нулю

In [187]:

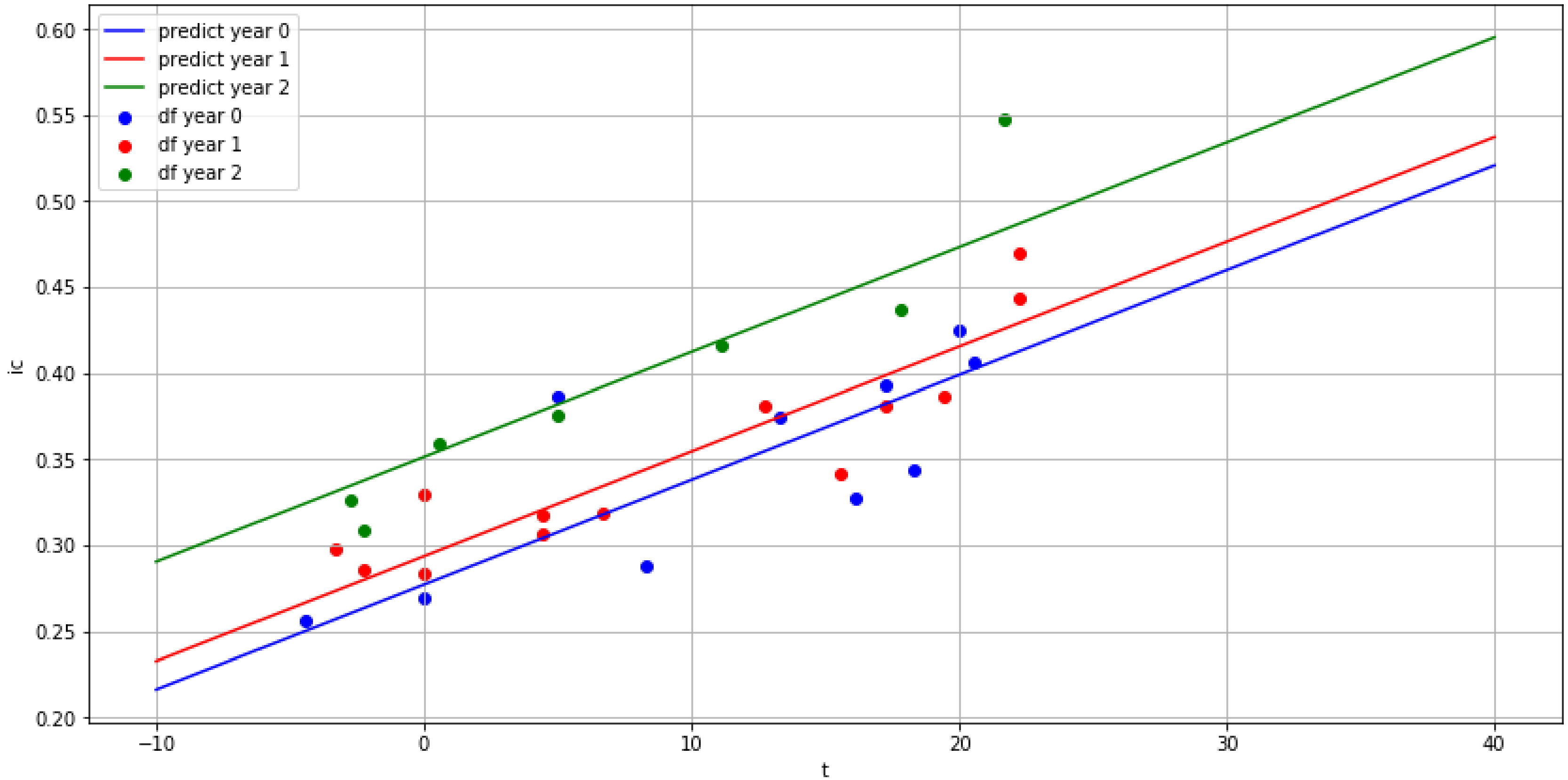
```
df2 = df[["date", "IC", "price", "income", "temp", "Lag-temp"]]
for y in [0, 1, 2]:
    df2["Year=%d" % (y)] =  1 * (df.Year.values == y)
print(df2)



X = np.array(
    [np.ones(temp.size), temp, df2["Year=1"].values, df2["Year=2"].values]
).T
Y = df.IC.values
LR = LinearRegression()
LR.fit(X=X, Y=Y)
```

	date	IC	price	income	temp	Lag-temp	Year=0	Year=1	Year=2
0	1	0.386	0.270	78	41	56	1	0	0
1	2	0.374	0.282	79	56	63	1	0	0
2	3	0.393	0.277	81	63	68	1	0	0
3	4	0.425	0.280	80	68	69	1	0	0
4	5	0.406	0.272	76	69	65	1	0	0
5	6	0.344	0.262	78	65	61	1	0	0
6	7	0.327	0.275	82	61	47	1	0	0
7	8	0.288	0.267	79	47	32	1	0	0
8	9	0.269	0.265	76	32	24	1	0	0
9	10	0.256	0.277	79	24	28	1	0	0
10	11	0.286	0.282	82	28	26	0	1	0
11	12	0.298	0.270	85	26	32	0	1	0
12	13	0.329	0.272	86	32	40	0	1	0
13	14	0.318	0.287	83	40	55	0	1	0
14	15	0.381	0.277	84	55	63	0	1	0
15	16	0.381	0.287	82	63	72	0	1	0
16	17	0.470	0.280	80	72	72	0	1	0
17	18	0.443	0.277	78	72	67	0	1	0
18	19	0.386	0.277	84	67	60	0	1	0
19	20	0.342	0.277	86	60	44	0	1	0
20	21	0.319	0.292	85	44	40	0	1	0
21	22	0.307	0.287	87	40	32	0	1	0
22	23	0.284	0.277	94	32	27	0	1	0
23	24	0.326	0.285	92	27	28	0	0	1
24	25	0.309	0.282	95	28	33	0	0	1
25	26	0.359	0.265	96	33	41	0	0	1
26	27	0.376	0.265	94	41	52	0	0	1
27	28	0.416	0.265	96	52	64	0	0	1
28	29	0.437	0.268	91	64	71	0	0	1
29	30	0.548	0.260	90	71	0	0	0	1

```
Out[187]: <__main__.LinearRegression at 0x7fd4ced8deb8>
```

In [188]:

```
def plot(LR):
    grid = np.linspace(-10., 40, 1000)

    X_year_0 = np.array([np.ones(grid.size), grid, np.zeros(grid.size), np.zeros(grid.size)]).T
    X_year_1 = np.array([np.ones(grid.size), grid, np.ones(grid.size), np.zeros(grid.size)]).T
    X_year_2 = np.array([np.ones(grid.size), grid, np.zeros(grid.size), np.ones(grid.size)]).T

    df_year = np.array([
        np.array([[temp[i], df.IC[i]] for i in range(temp.size) if df.Year[i] == y])
        for y in [0, 1, 2]
    ])
    plt.figure(figsize=(14,7))
    plt.scatter((df_year[0]).T[0], (df_year[0]).T[1], color="blue", label="df year 0")
    plt.scatter((df_year[1]).T[0], (df_year[1]).T[1], color="red", label="df year 1")
    plt.scatter((df_year[2]).T[0], (df_year[2]).T[1], color="green", label="df year 2")

    plt.plot(grid, LR.predict(X_year_0), color="blue", label="predict year 0")
    plt.plot(grid, LR.predict(X_year_1), color="red", label="predict year 1")
    plt.plot(grid, LR.predict(X_year_2), color="green", label="predict year 2")
    plt.ylabel("ic")
    plt.xlabel("t")
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()

plot(LR)
```



Комментарий: полученные данные для годов отличаются на константу: т.е. изменение потребления при изменении на градус не изменилась, но констата в уравнении прямой увеличилась. (т.е. меняется параметр θ_1 от года, тогда как θ_2 остаётся постоянным). (Собственно, что и описано в модели)

Наконец, обучите модель на предсказание потребления мороженного в зависимости от всех переменных. Не забудьте, что для года нужно ввести две переменных. Для полученной модели выведите `summary`.

Комментарий: если мы обучим модель от всех переменных, т.е. будем предсказывать IC по данным, содержащим IC, то придёт Виктор Кантор и начнёт рассказывать историю про танки

In [189]:
```
LG = LinearRegression()
LG.fit(X=df2.values, Y=df2.IC.values)
LG.summary()
```

```
Linear regression on 9 features and 30 examples
Sigma: 0.000000
                Lower           Estimation      Upper
theta_0:        -0.000000       -0.000000       0.000000
theta_1:        1.000000        1.000000        1.000000
theta_2:        -0.000000       -0.000000       0.000000
theta_3:        -0.000000       0.000000        0.000000
theta_4:        -0.000000       -0.000000       0.000000
theta_5:        -0.000000       -0.000000       0.000000
theta_6:        -0.000000       -0.000000       0.000000
theta_7:        -0.000000       -0.000000       0.000000
theta_8:        -0.000000       -0.000000       0.000000
```

Комментарий: Как мы видим, модель оказалась достаточно умна, чтобы понять, что прогнозируемые данные есть в выборке. Обучим модель теперь нормально

In [190]:
```
X = df2[["date", "price", "income", "temp", "Lag-temp", "Year=1", "Year=2"]].values
Y = df2.IC.values
LG = LinearRegression()
LG.fit(X=X, Y=Y)
LG.summary()
```

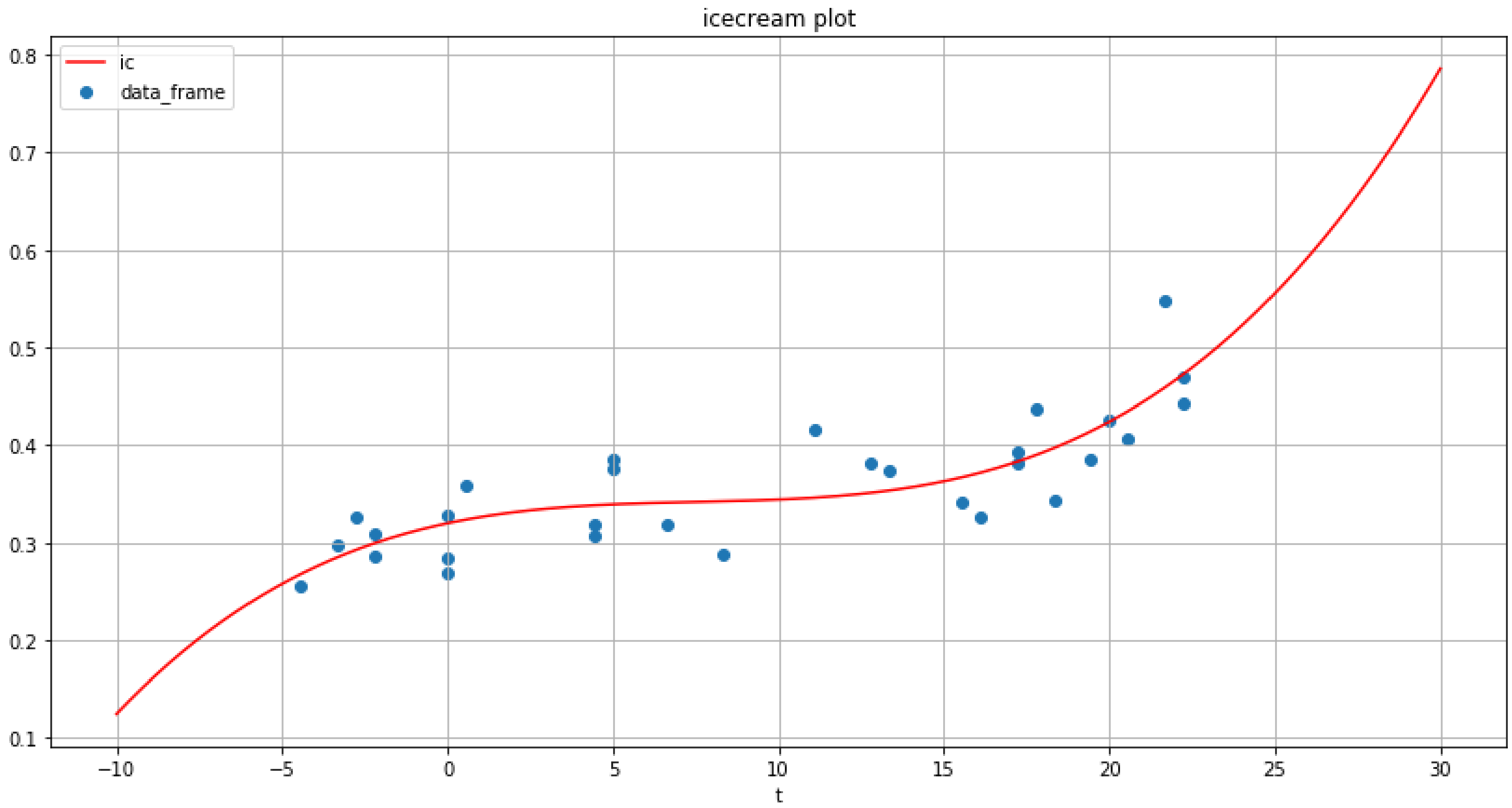
```
Linear regression on 7 features and 30 examples
Sigma: 0.000961
                Lower           Estimation      Upper
theta_0:        -0.009674       -0.005242       -0.000809
theta_1:        -0.631974       0.459136        1.550245
theta_2:        -0.002855       0.000845        0.004545
theta_3:        0.003089        0.004105        0.005122
theta_4:        -0.001544       -0.000636       0.000271
theta_5:        0.014490        0.070345        0.126200
theta_6:        0.076402        0.175412        0.274423
```

Комментарий: Если мы как-нибудь отнормируем данные - сможем оценивать полезность параметров

Но это еще не все. Постройте теперь линейную регрессию для модели $ic = \theta_1 + \theta_2\ t + \theta_3\ t^2 + \theta_4\ t^3$. Выведите для нее summary и постройте график предсказания, то есть график кривой $ic = \widehat{\theta}_1 + \widehat{\theta}_2\ t + \widehat{\theta}_3\ t^2 + \widehat{\theta}_4\ t^3$. Хорошие ли получаются результаты?

In [192]:
```
grid = np.linspace(-10., 30, 1000)
X = X_cn =  np.array([np.ones(temp.size), temp, temp**2, temp**3]).T
Y = df.IC.values

LR = LinearRegression()
LR.fit(X=X, Y=Y)
LR.summary()

grid = np.linspace(-10., 30, 1000)
X = np.array([np.ones(grid.size), grid, grid**2, grid**3]).T
ic = LR.predict(X)

plt.figure(figsize=(14,7))
plt.title("icecream plot")
plt.plot(grid, ic, label="ic", color="red")
plt.scatter(temp, df.IC.values, label="data_frame")
plt.xlabel("t")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

LR.summary()
```

```
Linear regression on 4 features and 30 examples
Sigma: 0.001529
                Lower           Estimation      Upper
theta_0:        0.295294        0.319902        0.344510
theta_1:        0.000388        0.007200        0.014013
theta_2:        -0.001861       -0.000855       0.000152
theta_3:        0.000002        0.000038        0.000073
```




```
Linear regression on 4 features and 30 examples
Sigma: 0.001529
                Lower           Estimation      Upper
theta_0:        0.295294        0.319902        0.344510
theta_1:        0.000388        0.007200        0.014013
theta_2:        -0.001861       -0.000855       0.000152
theta_3:        0.000002        0.000038        0.000073
```

Комментарий: Получилась оценка, визуально очень крутая. Можно расширить пространство признаков, добавив, например цену, и, возможно, получить очень точные значения

Чтобы понять, почему так происходит, выведите значения матрицы $(X^T X)^{-1}$ для данной матрицы и посчитайте для нее индекс обусловленности $\sqrt{\lambda_{max} / \lambda_{min}}$, где $\lambda_{max}, \lambda_{min}$ --- максимальный и минимальный собственные значения матрицы $X^T X$. Собственные значения можно посчитать функцией `scipy.linalg.eigvals` (https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.linalg.eigvals.html).

Прокомментируйте полученные результаты. Помочь в этом может следующая статья (https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE_%D0%BE%D0%B1%D1%83%D1%81%D0%BB%D0%BE%D0%B2%

In [193]:

```
def condition_number_calc(X):
    eigs = scipy.linalg.eigvals(np.linalg.inv(X.T @ X))
    #print("eigs = ", eigs)
    condition_number = np.sqrt(eigs.max() / eigs.min())
    print("condition_number = ", condition_number)



print("Последний график (c t, t**2, ...)")
condition_number_calc(X_cn)

print("Первый график (самый первый)")
condition_number_calc(X_cn_2)
```

```
Последний график (c t, t**2, ...)
condition_number =  (8140.3947489+0j)
Первый график (самый первый)
condition_number =  (30.0570169914+0j)
```

Комментарий: (вывод размазан по задаче на комментарии) Здесь (http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%90%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7_%D0%BC%D1%83%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%
(http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%90%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7_%D0%BC%D1%83%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%
написано что и почему большое число обусловленности указывает на зависимость близкую к линейной между признаками и чем больше максимальное число обусловленности, тем сильнее зависимость. Т.е. возможно, несмотря на меньшую сигму, такой набор признаков не оптимален.

Задача 2. В данной задаче нужно реализовать функцию отбора признаков для линейной регрессии. Иначе говоря, пусть есть модель $y = \theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k$. Нужно определить, какие θ_j нужно положить равными нулю, чтобы качество полученной модели было максимальным.

Для этого имеющиеся данные нужно случайно разделить на две части --- обучение и тест (train и test). На первой части нужно обучить модель регресии, взяв некоторые из признаков, то есть рассмотреть модель $y = \theta_{j_1} x_{j_1} + \ldots + \theta_{j_s} x_{j_s}$. По второй части нужно посчитать ее качество --- среднеквадратичное отклонение (mean squared error) предсказания от истинного значения отклика, то есть величину

$$MSE = \sum_{i \in test} \left(\widehat{y}(x_i) - Y_i\right)^2,$$

где $x_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,k})$, Y_i --- отклик на объекте x_i, а $\widehat{y}(x)$ --- оценка отклика на объекте x.

Если k невелико, то подобным образом можно перебрать все поднаборы признаков и выбрать наилучший по значению MSE.

Для выполнения задания воспользуйтесь следующими функциями:

- `sklearn.linear_model.LinearRegression` (http://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.linear_model.LinearRegression.html#sklearn.linear_model.LinearRegression) --- реализация линейной регрессии. В данной реализации свободный параметр θ_1 по умолчанию автоматически включается в модель. Отключить это можно с помощью `fit_intercept=False`, но это не нужно. *В данной задаче требуется, чтобы вы воспользовались готовой реализацией линейной регрессии, а не своей. Ведь на практике важно уметь применять готовые реализации, а не писать их самостоятельно.*
- `sklearn.cross_validation.train_test_split` (http://scikit-learn.org/0.16/modules/generated/sklearn.cross_validation.train_test_split.html) --- функция разбиения данных на train и test. Установите параметр `test_size=0.3`.
- `sklearn.metrics.mean_squared_error` (http://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.metrics.mean_squared_error.html) --- реализация MSE.

Для перебора реализуйте функцию.

In [256]:
```
def best_features(X_train, X_test, Y_train, Y_test):
    mses = []  # сюда записывайте значения MSE
    k = X_train.shape[1]

    for j in range(1, 2 ** k):  # номер набора признаков
        mask = np.array([j & (1 << s) for s in range(k)], dtype=bool)
        features_numbers = np.arange(k)[mask]  # набор признаков

        X_train_cutted = X_train[:, mask]
        X_test_cutted = X_test[:, mask]
        #print(X_train_cutted[0])
        #print(X_train_cutted.shape, X_test_cutted.shape)
        regressor = sklearn.linear_model.LinearRegression()
        regressor.fit(X=X_train_cutted,y=Y_train)
        Y_predicted = regressor.predict(X_test_cutted)

        mse = sklearn.metrics.mean_squared_error(Y_test, Y_predicted)
            # MSE для данного набора признаков
        mses.append(mse)

    # Печать 10 лучших наборов
    print('mse\t features')
    mses = np.array(mses)
    best_numbres = np.argsort(mses)[:10]
    for j in best_numbres:
        mask = np.array([j & (1 << s) for s in range(k)], dtype=bool)
        features_numbers = np.arange(k)[mask]
        print('%.3f\t' % mses[j], features_numbers)
```

Примените реализованный отбор признаков к датасетам

- Yacht Hydrodynamics (http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Yacht+Hydrodynamics) --- для парусных яхт нужно оценить остаточное сопротивление на единицу массы смещения (последний столбец) в зависимости от различных характеристик яхты.
- Boston Housing Prices (http://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.datasets.load_boston.html#sklearn.datasets.load_boston) --- цены на дома в Бостоне в зависимости от ряда особенностей.

In [200]:
```
!wget http://archive.ics.uci.edu/ml/machine-learning-databases/00243/yacht_hydrodynamics.data
```

```
--2017-05-20 20:41:29--  http://archive.ics.uci.edu/ml/machine-learning-databases/00243/yacht_hydrodynamics.
data (http://archive.ics.uci.edu/ml/machine-learning-databases/00243/yacht_hydrodynamics.data)
Распознаётся archive.ics.uci.edu (archive.ics.uci.edu)... 128.195.10.249
Подключение к archive.ics.uci.edu (archive.ics.uci.edu)|128.195.10.249|:80... соединение установлено.
HTTP-запрос отправлен. Ожидание ответа... 200 OK
Длина: 11487 (11K) [text/plain]
Сохранение в каталог: ««yacht_hydrodynamics.data.2»».

yacht_hydrodynamics 100%[===================>]  11,22K  --.-KB/s    in 0,004s

2017-05-20 20:41:29 (3,08 MB/s) - «yacht_hydrodynamics.data.2» сохранён [11487/11487]
```

In [275]:
```
df = pd.read_fwf("yacht_hydrodynamics.data", sep=' ', header=None)
print(df.values, df.values.shape) # we just removed "\n" from
X = df.values[:, 0:6]
Y = df.values[:, 6]
print(X.shape, Y.shape) #, X, Y)
for i in range(3):
    print("Run %d:" % (i))
    X_train, X_test, Y_train, Y_test = sklearn.cross_validation.train_test_split(X, Y, test_size=0.3)
    best_features(X_train, X_test, Y_train, Y_test)
```

```
[[ -2.3     0.568   4.78  ...,   3.17    0.125   0.11 ]
 [ -2.3     0.568   4.78  ...,   3.17    0.15    0.27 ]
 [ -2.3     0.568   4.78  ...,   3.17    0.175   0.47 ]
 ...,
 [ -2.3     0.6     4.34  ...,   2.73    0.4    19.59 ]
 [ -2.3     0.6     4.34  ...,   2.73    0.425  30.48 ]
 [ -2.3     0.6     4.34  ...,   2.73    0.45   46.66 ]] (308, 7)
(308, 6) (308,)
Run 0:
mse      features
83.212   [0 1 2 5]
83.220   [0 1 2 4 5]
83.253   [0 1 2 3 4]
83.291   [3 5]
83.291   [0 1 2 3 5]
83.300   [3 4 5]
83.321   [0 1 3 5]
83.333   [5]
83.374   [4 5]
83.390   [2 3 5]
Run 1:
mse      features
75.028   [0 5]
75.175   [0 1 2 3 4]
75.224   [0 2 5]
75.348   [0 1 5]
75.699   [0 1 2 5]
76.000   [0 3 5]
76.200   [0 1 3 5]
76.724   [0 2 3 5]
77.039   [0 4 5]
77.043   [0 1 2 4 5]
Run 2:
mse      features
70.222   [0 1 2 3 4]
70.294   [0 1 2 3 5]
70.569   [0 1 2 5]
70.613   [0 1 3 4 5]
70.651   [0 1 5]
70.702   [0 1 4 5]
70.742   [0 1 3 5]
70.811   [0 1 2 4 5]
```

70.928	[0 5]
71.029	[0 3 5]

In [272]:
```
from sklearn.datasets import load_boston
boston = load_boston()
#print(boston.data, boston.data.shape)

for i in range(3):
    print("Run %d:" % (i))
    X_train, X_test, Y_train, Y_test = (
        sklearn.cross_validation.train_test_split(boston.data, boston.target, test_size=0.3) #, random_state=
    )
    best_features(X_train, X_test, Y_train, Y_test)
```

```
Run 0:
mse      features
23.439   [ 1  4  5  7  8 10 11 12]
23.440   [ 1  4  5  6  7  8 10 11 12]
23.702   [ 1  3  4  5  7  8 10 11 12]
23.703   [ 1  3  4  5  6  7  8 10 11 12]
23.719   [ 4  5  7  8 10 11 12]
23.735   [ 4  5  6  7  8 10 11 12]
23.882   [ 1  4  5  6  7  9 10 11 12]
23.883   [ 1  4  5  6  7 10 11 12]
23.885   [ 1  4  5  7  9 10 11 12]
23.886   [ 1  4  5  7 10 11 12]
Run 1:
mse      features
31.258   [ 0  2  3  4  5  7  8  9 10 11 12]
31.262   [ 1  2  3  4  5  7  8  9 10 11 12]
31.276   [ 1  3  4  5  7  8  9 10 11 12]
31.290   [ 0  3  4  5  7  8  9 10 11 12]
31.746   [ 0  3  4  5  7  8 10 11 12]
31.785   [ 1  3  4  5  7  8 10 11 12]
31.854   [ 0  2  3  4  5  7  8 10 11 12]
31.890   [ 1  2  3  4  5  7  8 10 11 12]
31.955   [ 1  2  4  5  7  8  9 10 11 12]
31.992   [ 1  4  5  7  8  9 10 11 12]
Run 2:
mse      features
21.954   [ 1  3  4  5  6  7  8 10 11]
22.048   [ 1  2  3  4  5  6  7  8 10 11]
22.152   [ 1  3  4  5  6  7 10 11]
22.158   [ 1  3  4  5  6  7  8  9 10 11]
22.190   [ 1  3  4  5  6  7  9 10 11]
22.201   [ 1  3  4  5  7  8  9 10 11 12]
22.234   [ 1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11]
22.243   [ 1  2  3  4  5  7  8  9 10 11 12]
22.258   [ 1  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12]
22.275   [ 1  2  3  4  5  6  7  9 10 11]
```

Вывод: Мы смогли выделить несколько признаков, оказавшихся лучшими. Хорошей идеей является множественный запуск, т.к. такой "рейтинг признаков" весьма случаен и может вызван "удачным" разделением на _test и _train, т.е. первый признак в списке может не являться действительно хорошим.

Задача 3*. Загрузите датасет (http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/datasets/regression/x01.txt), в котором показана зависимость веса мозга от веса туловища для некоторых видов млекопитающих. Задача состоит в том, чтобы подобрать по этим данным хорошую модель регрессии. Для этого, можно попробовать взять некоторые функции от значения веса туловища, например, степенную, показательную, логарифмическую. Можно также сделать преобразование значений веса мозга, например, прологарифмировать. Кроме того, можно разбить значения веса туловища на несколько частей и на каждой части строить свою модель линейной регрессии.

Задача 4. Пусть $X_1, \dots, X_n$ --- выборка из распределения $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Постройте точную доверительную **область?** для параметра $\theta = (a, \sigma^2)$ уровня доверия $\alpha = 0.95$ для сгенерированной выборки размера $n \in \{5, 20, 50\}$ из стандартного нормального распределения. Какой вывод можно сделать?

Построим сначала доверительные интервалы для параметров, всё-таки области мы не строили и это что-то новое

$\forall i : X_i \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2) \Rightarrow \forall i X_i = 1 \cdot a + \xi, \xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \Rightarrow$ это же задача линейной гауссовской регрессионной модели!

Более того, это задача 9.4 из домашнего задания из "методички" и она разобрана как задача 9.2 в теоретической части. Мы уже строили доверительные интервалы для theta из линейной регрессии, так что для оценки $a \equiv \theta_0$ вызовем написанный класс

Для оценки σ^2 (построения доверительного интервала) используем интервал $(0, \frac{(n-k)\hat{\sigma}^2}{z_{1-\gamma}})$ уровня доверия γ, где $z_{1-\gamma}$ - γ-квантиль распределения χ^2_{n-k} (это доказано в методичке в задаче 9.2)

In [306]:
```
alpha = 0.95
for n in [5, 20, 50]:
    print("\n_____Run:(n = %d) (a == \\theta_0)_________" %  n)
    Y = sps.norm.rvs(size=n)
    LR = LinearRegression()
    LR.fit(X=np.array(np.array([np.ones(n)]).T), Y=Y,alpha=alpha)
    LR.summary()

    print("Confidence interval for \widehat{\sigma}^2:")

    z = sps.chi2.ppf(1. - alpha, LR.n - LR.k)
    sigma_upper = (LR.n - LR.k) * LR.sigma_sq / z
    print("(0, %f)" % sigma_upper)
```

```
_____Run:(n = 5) (a == \theta_0)_________
Linear regression on 1 features and 5 examples
Sigma: 0.230079
                Lower           Estimation      Upper
theta_0:        -0.818595       -0.223011       0.372573
Confidence interval for \widehat{\sigma}^2:
(0, 1.294904)

_____Run:(n = 20) (a == \theta_0)_________
Linear regression on 1 features and 20 examples
Sigma: 0.843730
                Lower           Estimation      Upper
theta_0:        -0.503770       -0.073877       0.356017
Confidence interval for \widehat{\sigma}^2:
(0, 1.584546)

_____Run:(n = 50) (a == \theta_0)_________
Linear regression on 1 features and 50 examples
Sigma: 0.805630
                Lower           Estimation      Upper
theta_0:        -0.514836       -0.259749       -0.004663
Confidence interval for \widehat{\sigma}^2:
(0, 1.163440)
```

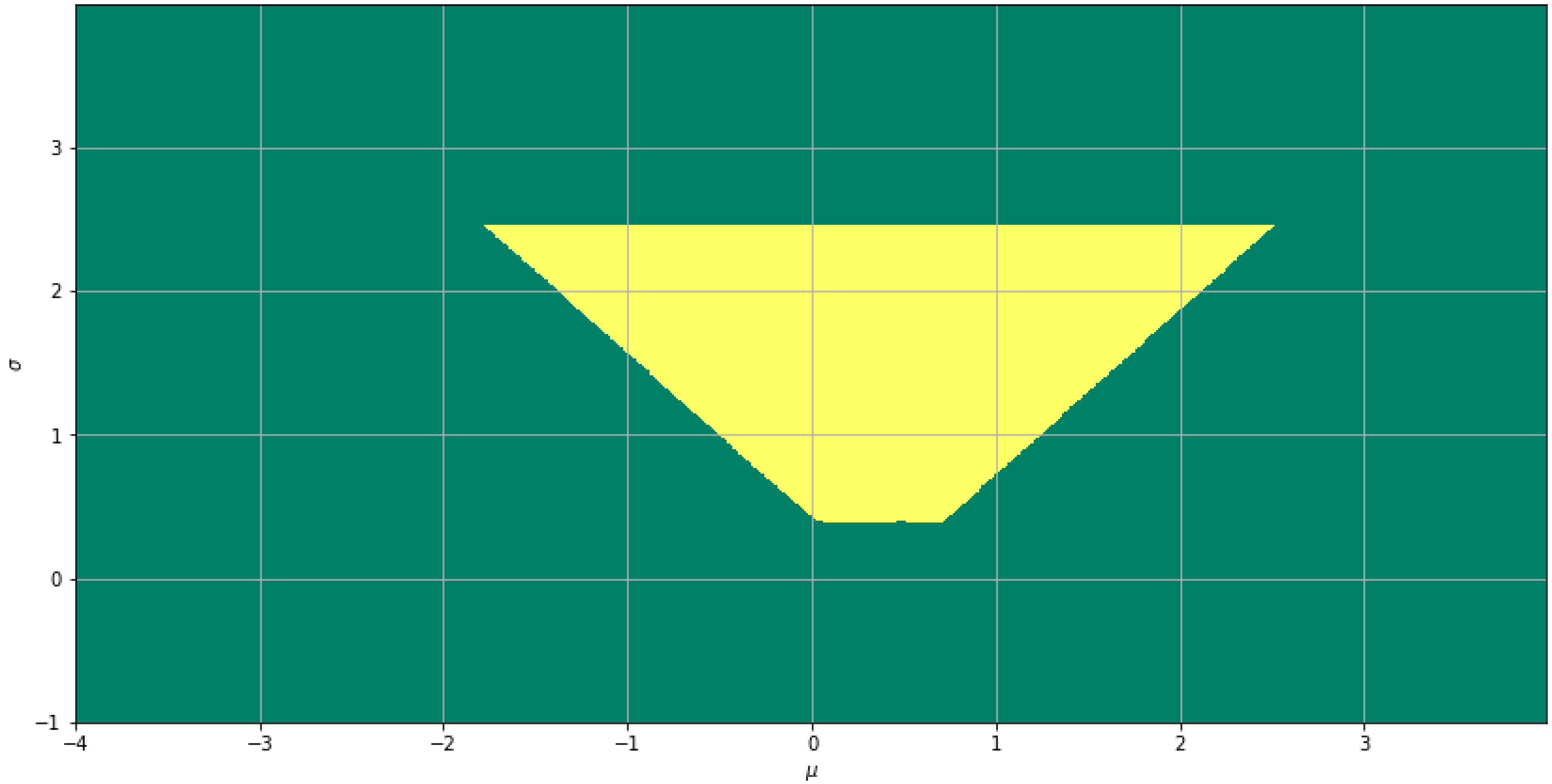
Если всё-таки требуются области то, случайно, открыв книгу "Ллойд Э., Ледерман У. (ред.). Справочник по прикладной статистике. Том 1. М.: Финансы и статистика, 1989. - 510 с. " на 182ой странице, увидим там доверительный интервал для двумерного параметра:

$$\begin{cases} \mu - u_0\sigma/\sqrt{n} \le \overline{X} \\ \mu + u_0\sigma/\sqrt{n} \ge \overline{X} \\ (n-1)^{1/2}S/b \le \sigma \le (n-1)^{1/2}S/a \end{cases}$$

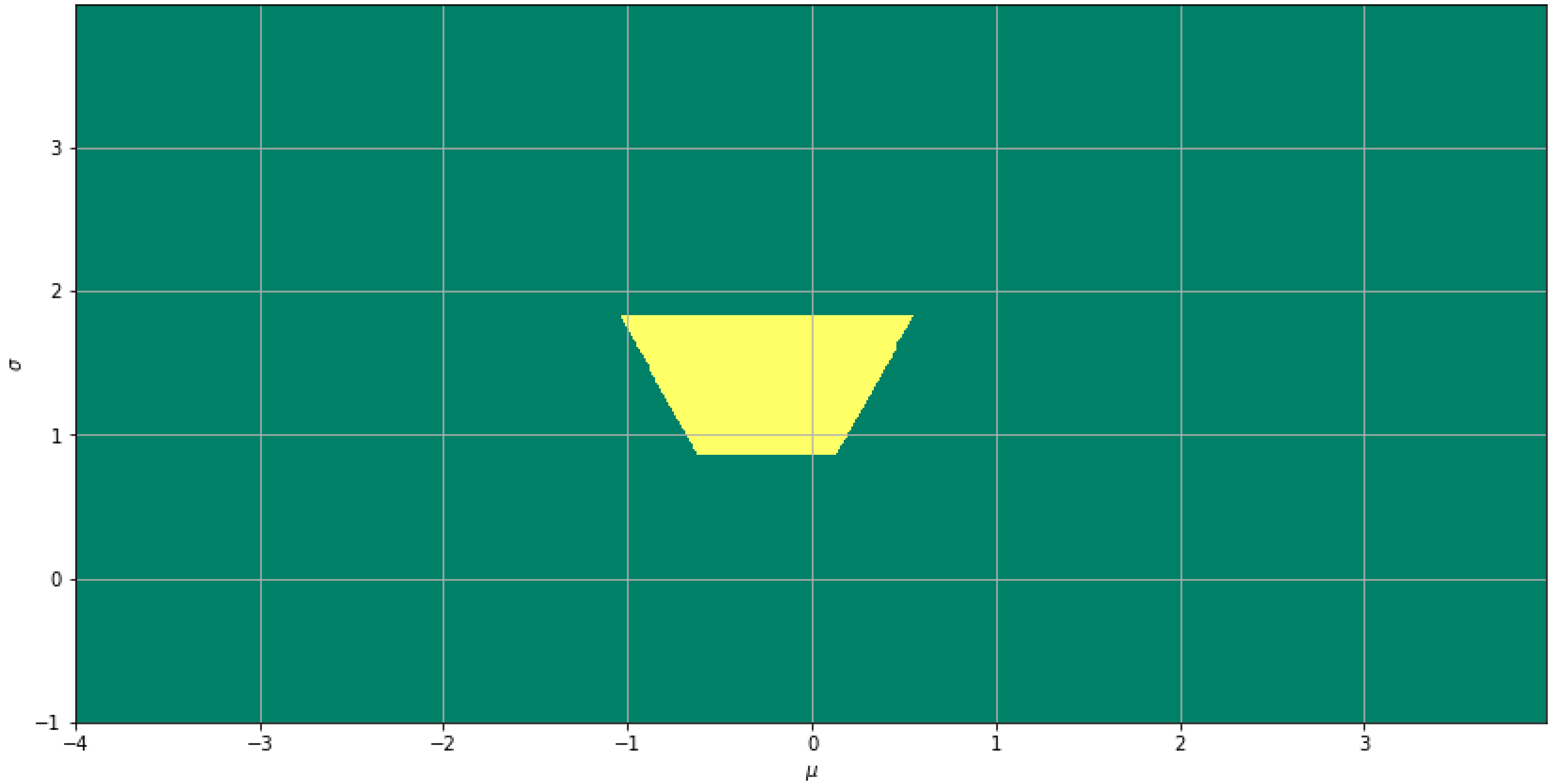
Где μ_0 - квантиль уровня $\sqrt{0.95}$ из нормального распределения, a, b - квантили уровней $(1-\sqrt{0.95})/2$ и $(1+\sqrt{0.95})/2$ соответственно из распределения χ^2_{n-1} (этот интервал построен, исходя из независимости статистик $\overline{X}, S$, так, что по каждому параметру получается уровень $\sqrt{0.95}$ с целью получить 0.95 в итоге

In [333]:
```python
alpha = 0.95
u0 = sps.norm.ppf(np.sqrt(0.95))
for n in [5, 20, 50]:

    a = sps.chi2.ppf((1. - np.sqrt(0.95))/2, n-1.)
    b = sps.chi2.ppf((1. + np.sqrt(0.95))/2, n-1.)
    print("\n_____Run:(n = %d)_________" %  n)
    X = sps.norm.rvs(size=n)
    X_mean = X.mean()
    S2 = (X*X).mean() - X_mean**2

    mgrid = np.mgrid[-4:4:0.01, -1:4:0.01]
    grid = np.empty(mgrid[0].shape + (2,))
    grid[:, :, 0] = mgrid[0]
    grid[:, :, 1] = mgrid[1]

    def check(mu, sig):
        fst = mu - u0*sig/np.sqrt(n) <= X_mean
        snd = mu + u0*sig/np.sqrt(n) >= X_mean
        thr = np.sqrt((n - 1) *S2/b) <= sig
        fth = sig <= np.sqrt((n-1) * S2 / a)
        return fst and snd and thr and fth

    CI = np.array([
        [1 if check(grid[x, y, 0], grid[x, y, 1]) else 0 for y in range(grid.shape[1])]
        for x in range(grid.shape[0])
    ])
    print(grid.shape)
    print(CI.shape)
    plt.figure(figsize=(14,7))
    plt.pcolormesh(mgrid[0], mgrid[1], CI, label="Confidence interval", cmap='summer')
    plt.grid()
    plt.xlabel(r"$\mu$")
    plt.ylabel(r"$\sigma$")
    plt.show()
```

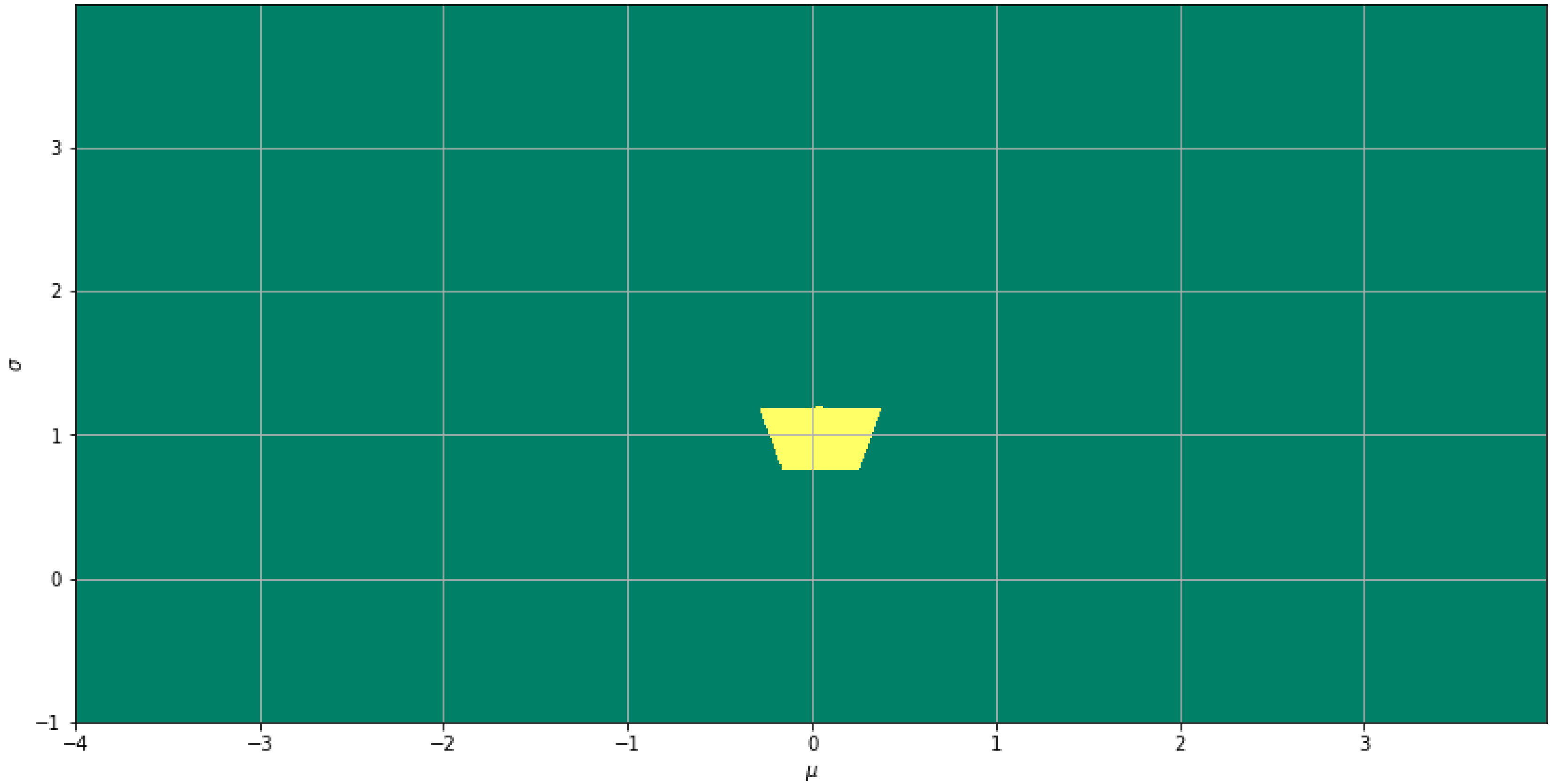
```
_____Run:(n = 5)_________
(800, 500, 2)
(800, 500)
```




```
______Run:(n = 20)__________
(800, 500, 2)
(800, 500)
```




```
______Run:(n = 50)___________
(800, 500, 2)
(800, 500)
```



Вывод: Раз уж мы свели задачу к задаче линейной регрессии в гауссовской модели, то можно сказать, что для неё важен размер выборки - чем он больше, тем меньше доверительные интервалы.

Комментарий: картинка совпадает с картинкой (по форме) из книги

Задача 5*. Пусть дана линейная гауссовская модель $Y = X\theta + \varepsilon$, где $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \beta^{-1} I_n)$. Пусть θ имеет априорное распределение $\mathcal{N}(0, \alpha^{-1} I_k)$. Такая постановка задачи соответствует Ridge-регрессии. Оценкой параметров будет математическое ожидание по апостериорному распределению, аналогично можно получить доверительный интервал. Кроме того, с помощью апостериорного распределения можно получить доверительный интервал для отклика на новом объекте, а не только точечную оценку.

Реализуйте класс RidgeRegression подобно классу LinearRegression, но добавьте в него так же возможность получения доверительного интервала для отклика на новом объекте. Примените модель к некоторых датасетам, которые рассматривались в предыдущих задачах. Нарисуйте графики оценки отклика на новом объекте и доверительные интервалы для него.

2. Проверка статистических гипотез

Задача 6. Существует примета, что если перед вам дорогу перебегает черный кот, то скоро случится неудача. Вы же уже достаточно хорошо знаете статистику и хотите проверить данную примету. Сформулируем задачу на математическом языке. Пусть $X_1, \dots, X_n \sim Bern(p)$ --- проведенные наблюдения, где $X_i = 1$, если в i-м испытании случилась неудача после того, как черный кот перебежал дорогу, а p --- неизвестная вероятность такого события. Нужно проверить гипотезу $H_0 : p = 1/2$ (отсутствие связи между черным котом и неудачей) против альтернативы $H_1 : p > 1/2$ (неудача происходит чаще если черный кот перебегает дорогу).

Известно, что $S = \{T(X) > c_\alpha\}$, где $T(X) = \sum X_i$, является равномерно наиболее мощным критерием для данной задачи. Чему при этом равно c_α? При этом p-value в данной задаче определяется как $p(t) = \mathsf{P}_{0.5}(T(X) > t)$, где $t = \sum x_i$ --- реализация статистики $T(X)$.

Для начала проверьте, что критерий работает. Возьмите несколько значений n и реализаций статистики $T(X)$. В каждом случае найдите значение c_α и p-value. Оформите это в виде таблицы.

Пользуйтесь функциями из `scipy.stats`, про которые подробно написано в файле `python_5`. Внимательно проверьте правильность строгих и нестрогих знаков.

$P_{\theta_0=\frac{1}{2}}(T(X) > c_\alpha) = \alpha = 1 - P_{\theta_0=\frac{1}{2}}(T(X) \leq c_\alpha)$ (Это из теоремы о мнотонном отношении правдоподобия)

$c_\alpha = z_{1-\alpha}$, где z - квантиль из распределения $Bin(p = \theta_0, n)$

In [371]:
```
theta_0 = 0.5
alpha=0.5
df = []
for n,p in [(5, 0.5), (20,0.5), (50,0.5), (100, 0.5), (100, 0.7), (100, 0.6), (100, 0.2)]:
    X = sps.bernoulli(p=p).rvs(size=n)
    t = X.sum()
    ca = sps.binom(n=n,p=theta_0).ppf(alpha)
    pval = 1. - sps.binom(n=n,p=theta_0).cdf(t)
    df.append([n, p, t, ca, pval])

df = pd.DataFrame(df, columns= ["n", "p", "t", "ca", "pvalue"])
df
```

Out[371]:

	n	p	t	ca	pvalue
0	5	0.5	4	2.0	0.031250
1	20	0.5	11	10.0	0.251722
2	50	0.5	33	25.0	0.007673
3	100	0.5	48	50.0	0.617823
4	100	0.7	72	50.0	0.000002
5	100	0.6	60	50.0	0.017600
6	100	0.2	28	50.0	0.999994

Комментарий: пример №6 демонстрирует, что будет, если реальное p < 0.5 (наши гипотезы всё-таки $H_0 : p <= 1/2, H_1 : p > 1/2$)

Для каких истинных значений p с точки зрения практики можно считать, что связь между черным котом и неудачей есть? Теперь сгенерируйте 10 выборок для двух случаев: 1). $n = 5, p = 0.75$; 2). $n = 10^5, p = 0.51$. В каждом случае в виде таблицы выведите реализацию статистики $T(X)$, соответствующее p-value и 0/1 - отвергается ли H_0 (выводите 1, если отвергается). Какие выводы можно сделать?

In [381]:

```
theta_0 = 0.5
alpha=0.5
for n,p in [(5, 0.75), (10**5, 0.5)]:
    X = sps.bernoulli(p=p).rvs(size=(10, n))

    df = []
    for Xi in X:
        t = Xi.sum()
        ca = sps.binom(n=n,p=theta_0).ppf(alpha)
        pval = 1. - sps.binom(n=n,p=theta_0).cdf(t)
        accepted = not(t > ca)
        df.append([n, p, t, ca, pval, accepted, 1 * (not accepted)])

    df = pd.DataFrame(df, columns= ["n", "p", "t", "ca", "pvalue", "accepted", "H_i"])
    display(df)
```

	n	**p**	**t**	**ca**	**pvalue**	**accepted**	**H_i**
0	5	0.75	4	2.0	0.03125	False	1
1	5	0.75	4	2.0	0.03125	False	1
2	5	0.75	5	2.0	0.00000	False	1
3	5	0.75	5	2.0	0.00000	False	1
4	5	0.75	4	2.0	0.03125	False	1
5	5	0.75	5	2.0	0.00000	False	1
6	5	0.75	4	2.0	0.03125	False	1
7	5	0.75	1	2.0	0.81250	True	0
8	5	0.75	3	2.0	0.18750	False	1
9	5	0.75	3	2.0	0.18750	False	1

	n	**p**	**t**	**ca**	**pvalue**	**accepted**	**H_i**
0	100000	0.5	49957	50000.0	0.605956	True	0
1	100000	0.5	49938	50000.0	0.651347	True	0

	n	p	t	ca	pvalue	accepted	H_i
2	100000	0.5	50063	50000.0	0.343986	False	1
3	100000	0.5	50205	50000.0	0.096852	False	1
4	100000	0.5	50122	50000.0	0.219241	False	1
5	100000	0.5	49831	50000.0	0.856718	True	0
6	100000	0.5	49945	50000.0	0.634836	True	0
7	100000	0.5	49872	50000.0	0.789988	True	0
8	100000	0.5	49943	50000.0	0.639580	True	0
9	100000	0.5	50059	50000.0	0.353343	False	1

Комментарий: При малом размере выборки даже при явно не подходящем значении p случаются ложные срабатывания. При этом, даже при большом размере выборки при близких значениях p критерий выдаёт произвольный ответ, похожий в данном примере на Bern(0.5)

Возникает задача подбора оптимального размера выборки.

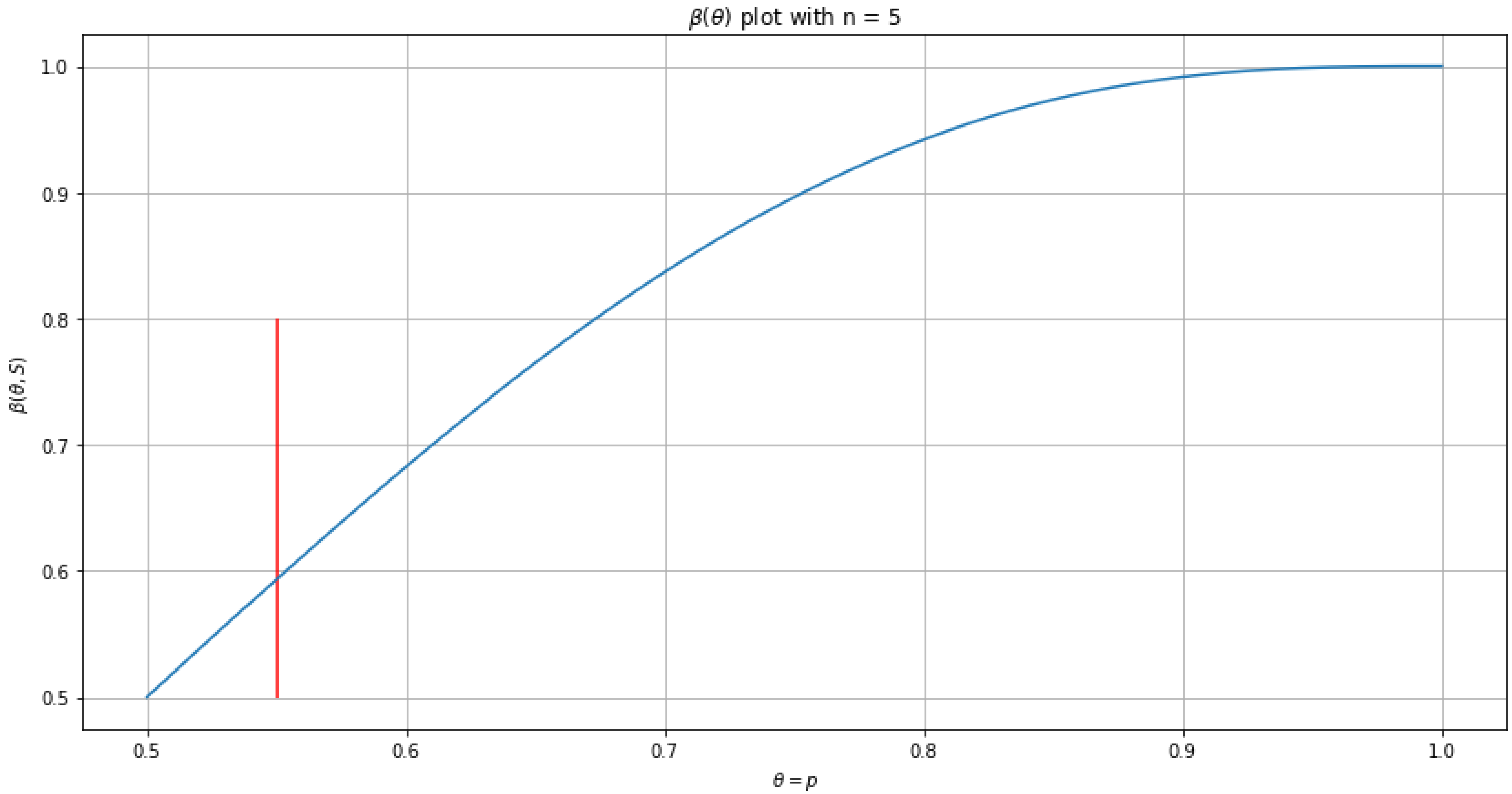
Для этого сначала зафиксируйте значение $p^* > 1/2$, которое будет обладать следующим свойством. Если истинное $p > p^*$, то такое отклонение от $1/2$ с практической точки зрения признается существенным, то есть действительно чаще случается неудача после того, как черный кот перебегает дорогу. В противном случае отклонение с практической точки зрения признается несущественным.

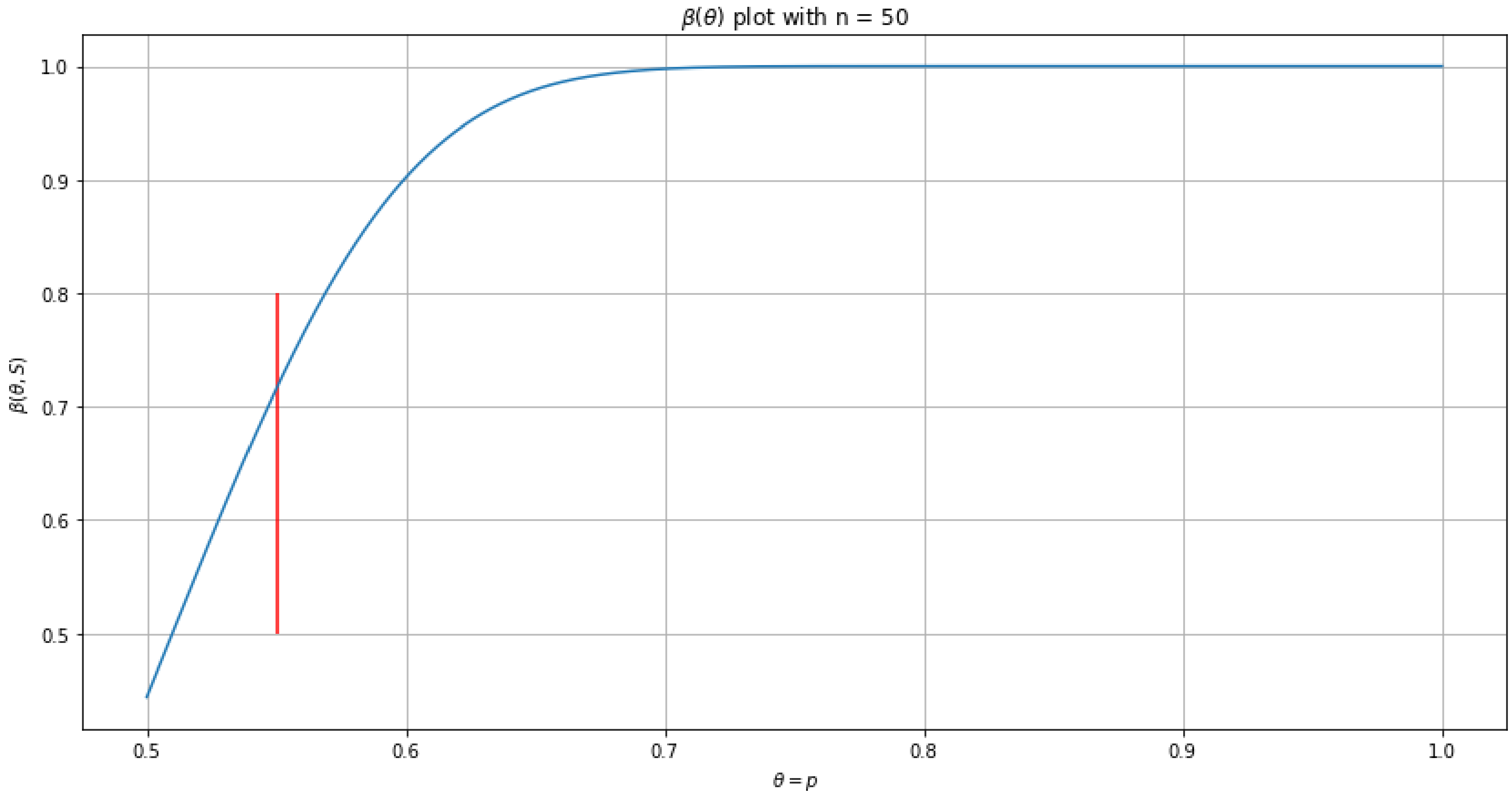
Теперь для некоторых n постройте графики функции мощности критерия при $1/2 < p < 1$ и уровне значимости 0.05. Выберите такое n^*, для которого функция мощности дает значение 0.8 при p^*. Для выбранного n^* проведите эксперимент, аналогичный проведенным ранее экспериментам, сгенерировав выборки для следующих истинных значений p: 1). $1/2 < p < p^*$; 2). $p > p^*$. Сделайте вывод.

$$\beta(\theta, S) = P_\theta(X \in S)$$

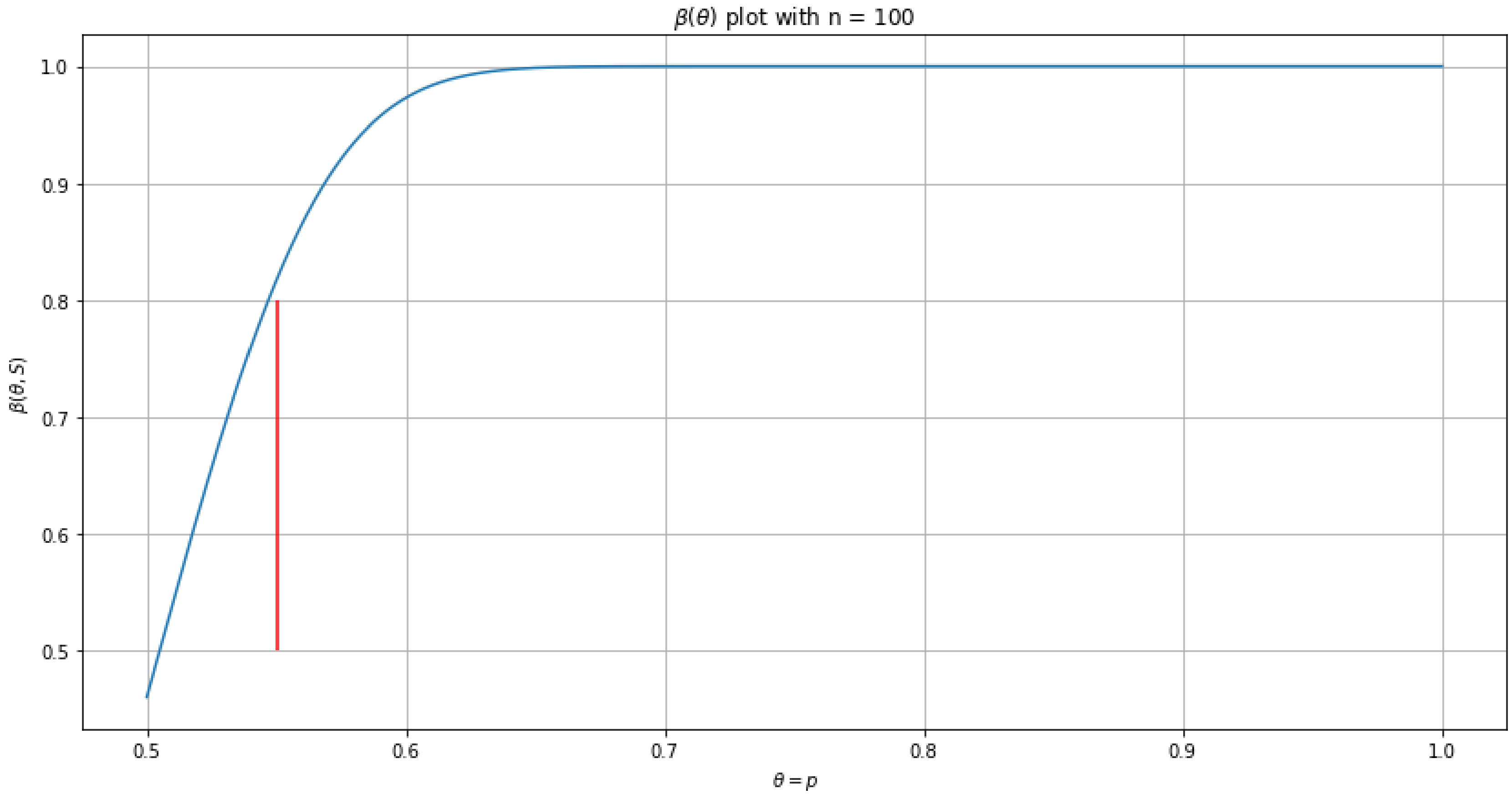
$$\beta(\theta, S) = P_\theta(T(X) > c_\alpha) = 1 - P_\theta(T(X) \leq c_\alpha)$$

In [416]:
```
pstar = 0.55 # мы же его сами выбираем, с помощь "оракула" ?
def beta(theta, ca):
    return 1. - sps.binom(n=n, p=theta).cdf(ca)


for n in [5, 50, 100, 150, 77]:
    ca = sps.binom(n=n,p=theta_0).ppf(alpha)
    grid = np.linspace(0.5, 1, 1000)
    f = np.array([
        beta(i, ca) for i in grid
    ])
    #print(f ,ca)
    plt.figure(figsize=(14, 7))
    plt.plot(grid, f)
    plt.grid()
    plt.vlines(0.55, 0.5, 0.8, color="red")
    plt.title(r"$\beta(\theta)$ plot with n = %d" % n)
    plt.ylabel(r"$\beta(\theta, S)$")
    plt.xlabel(r"$\theta = p$")
    plt.show()

nstar = 5
for n in range(5, 500):
    ca = sps.binom(n=n,p=theta_0).ppf(alpha)
    if (beta(pstar, ca) >= 0.8):
        nstar = n
        print("nstar = %d" % n)
        break
```

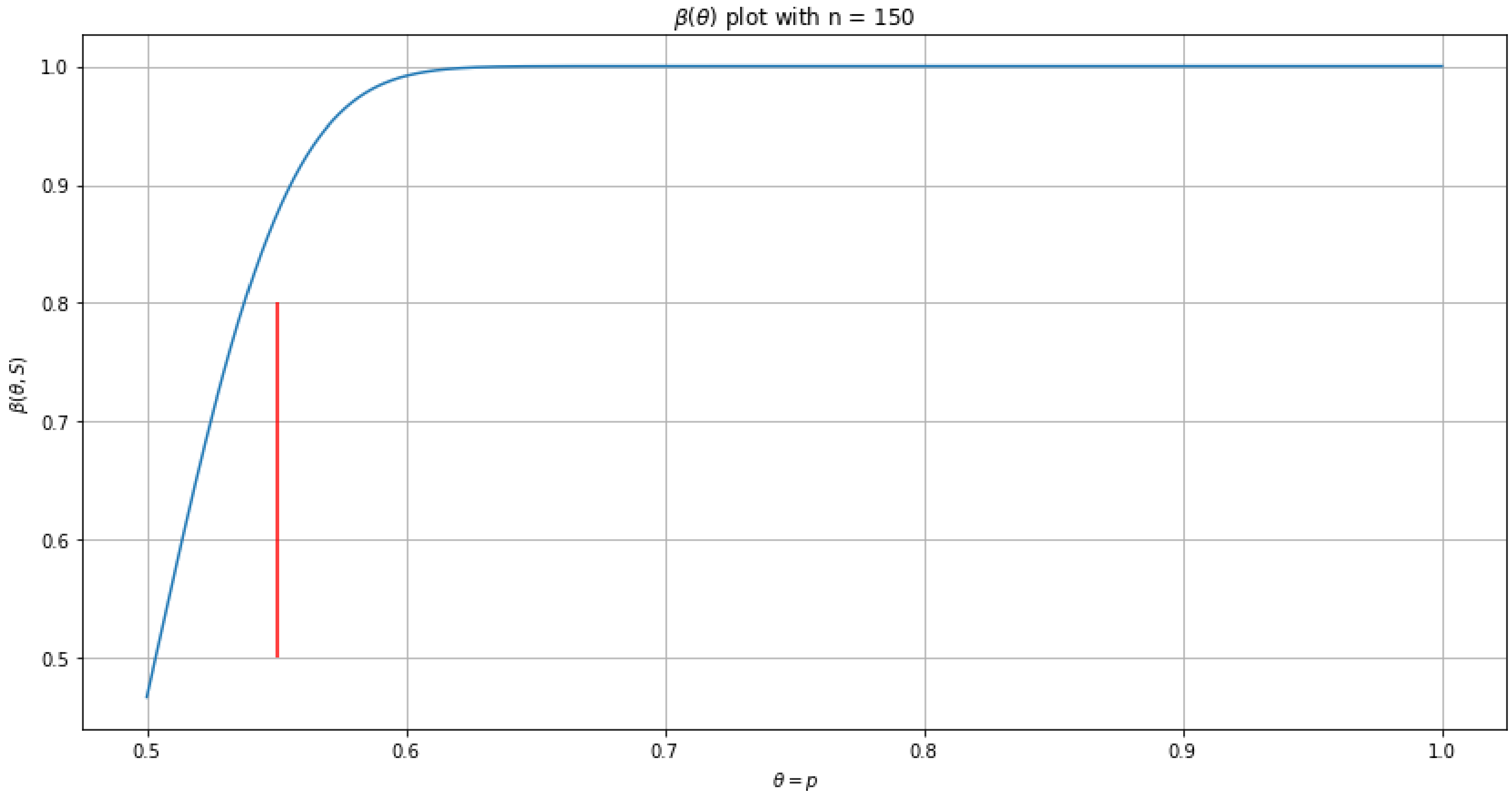

$\beta(\theta)$ plot with n = 5
$\beta(\theta, S)$
$\theta = p$
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0



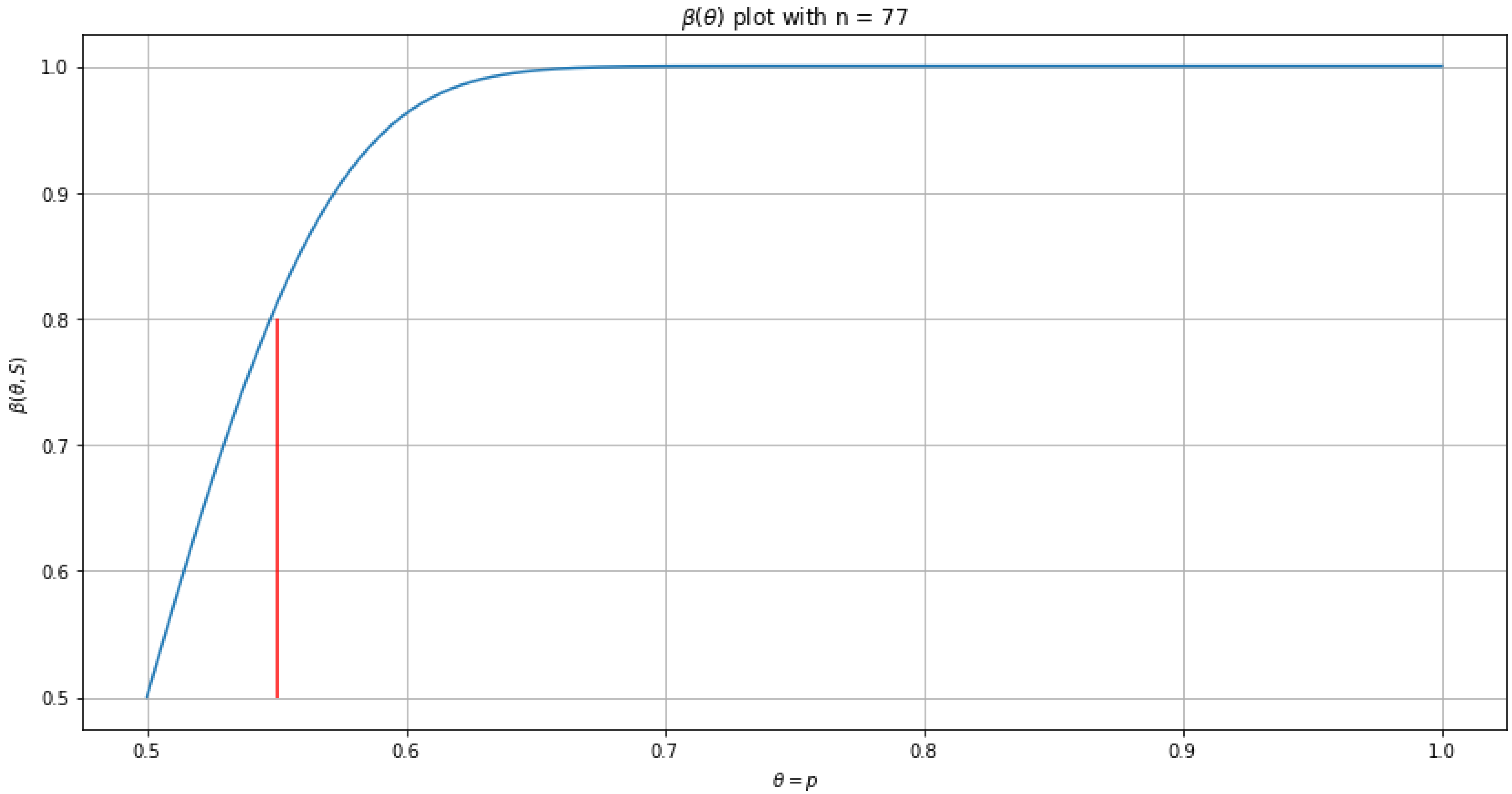
$\beta(\theta)$ plot with n = 50
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
$\beta(\theta, S)$
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
$\theta = p$



$\beta(\theta)$ plot with n = 100
$\beta(\theta, S)$
$\theta = p$
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0



$\beta(\theta)$ plot with n = 150
$\beta(\theta, S)$
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
$\theta = p$




```
nstar = 77
```

Имеем $n^* = 77$ (минимальное такое, что можность на p^* даёт 0.8)

In [436]:

```
theta_0 = pstar #0.5
alpha=0.5
print(nstar, pstar)
for n,xp in [(nstar, pstar - (pstar - 0.5) /2.), (nstar, pstar), (nstar, pstar + (pstar - 0.5) /2.) , (nstar,
    X = sps.bernoulli(p=xp).rvs(size=(10, n))

    df = []
    for Xi in X:
        t = Xi.sum()
        ca = sps.binom(n=n,p=theta_0).ppf(alpha)
        pval = 1. - sps.binom(n=n,p=theta_0).cdf(t)
        accepted = not(t > ca)
        df.append([n, xp, t, ca, pval, accepted, 1 * (not accepted)])

    df = pd.DataFrame(df, columns= ["n", "xp", "t", "ca", "pvalue", "accepted", "H_i"])
    display(df)
```

```
77 0.55
```

	n	xp	t	ca	pvalue	accepted	H_i
0	77	0.525	44	42.0	0.312362	False	1
1	77	0.525	42	42.0	0.487840	True	0
2	77	0.525	39	42.0	0.743651	True	0
3	77	0.525	42	42.0	0.487840	True	0
4	77	0.525	39	42.0	0.743651	True	0
5	77	0.525	53	42.0	0.004762	False	1
6	77	0.525	40	42.0	0.665145	True	0
7	77	0.525	39	42.0	0.743651	True	0
8	77	0.525	39	42.0	0.743651	True	0
9	77	0.525	43	42.0	0.397594	False	1

	n	xp	t	ca	pvalue	accepted	H_i
0	77	0.55	50	42.0	0.029921	False	1
1	77	0.55	42	42.0	0.487840	True	0
2	77	0.55	33	42.0	0.978424	True	0
3	77	0.55	47	42.0	0.118655	False	1
4	77	0.55	36	42.0	0.909583	True	0
5	77	0.55	49	42.0	0.049724	False	1
6	77	0.55	43	42.0	0.397594	False	1
7	77	0.55	48	42.0	0.078657	False	1
8	77	0.55	38	42.0	0.811264	True	0
9	77	0.55	37	42.0	0.866584	True	0

	n	xp	t	ca	pvalue	accepted	H_i
0	77	0.575	47	42.0	0.118655	False	1
1	77	0.575	36	42.0	0.909583	True	0
2	77	0.575	44	42.0	0.312362	False	1
3	77	0.575	46	42.0	0.171016	False	1
4	77	0.575	49	42.0	0.049724	False	1
5	77	0.575	43	42.0	0.397594	False	1
6	77	0.575	38	42.0	0.811264	True	0
7	77	0.575	41	42.0	0.578554	True	0
8	77	0.575	48	42.0	0.078657	False	1
9	77	0.575	45	42.0	0.235969	False	1

	n	xp	t	ca	pvalue	accepted	H_i

0	77	0.775	57	42.0	1.837348e-04	False	1
1	77	0.775	54	42.0	2.309977e-03	False	1
2	77	0.775	58	42.0	6.951970e-05	False	1
3	77	0.775	60	42.0	8.081576e-06	False	1
4	77	0.775	57	42.0	1.837348e-04	False	1
5	77	0.775	58	42.0	6.951970e-05	False	1
6	77	0.775	54	42.0	2.309977e-03	False	1
7	77	0.775	59	42.0	2.456498e-05	False	1
8	77	0.775	60	42.0	8.081576e-06	False	1
9	77	0.775	62	42.0	6.961105e-07	False	1

Вывод: мощность критерия есть (1 - (вероятность ошибки второго рода)) (принять неверную H_0), что видно из предпоследней таблицы $(1 - 7/10 = 0,3 \sim 0.2)$ ошибок второго рода совершено. Для значений $p \in (0.5, p^*)$ имеем 7 из 10 принятых, т.е. при приближении p = 0.5 вероятность принятия стабильна, что позволяет избежать "болтанки" критерия, как это было выше.

Справка для выполнения следующих задач

Критерий согласия хи-квадрат

`scipy.stats.chisquare` (https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.chisquare.html#scipy.stats.chisquare)`(f_obs, f_exp=None, ddof=0)`

`f_obs` --- число элементов выборки, попавших в каждый из интервалов

`f_exp` --- ожидаемое число элементов выборки (по умолчанию равномерное)

`ddof` --- поправка на число степеней свободы. Статистика асимптотически будет иметь распределение хи-квадрат с числом степеней свободы $k - 1 - ddof$, где k --- число интервалов.

Возвращает значение статистики критерия и соответствующее p-value.

Критерий согласия Колмогорова

`scipy.stats.kstest` [(https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.kstest.html#scipy.stats.kstest)](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.kstest.html#scipy.stats.kstest)`(rvs, cdf, args=())`

`rvs` --- выборка

`cdf` --- функция распределения (сама функция или ее название)

`args` --- параметры распределения

Возвращает значение статистики критерия и соответствующее p-value.

Задача 7.

- Проверьте, что ваша выборка значений скорости ветра из задания 2 действительно согласуется с распределением Вейбулла.
- Проверьте, что при больших n распределение статистики из задач 3 и 4 задания 2 действительно хорошо приближают предельное распределение.
- Проверьте, что остатки в регрессии из задач выше нормальны.
- Подберите класс распределений для выборки количества друзей из задания 1.

Использовать можно два описанных выше критерия, либо любой другой критерий, если будет обоснована необходимость его применения в данной задаче, а так же будет приведено краткое описание критерия. Уровень значимости взять равным 0.05.

In [467]:
```
X = [2,1,2,3,3,4,2,5,1,2,1,1,2,4,1,1,1,2,1,3,4,2,3,3,4,4,5,3,4,3,4,1,2,3,2,1,6,1,1,4,4,4,2,2,1,3,2,4,5,2,4,4,
X = np.array(X,dtype=float) # weather in Ufa, Russia (Nov 1 2016 - Mar 26 2017)
print(X.shape)

K = 1.92224
L = 3.111
scipy.stats.kstest(X, sps.weibull_min(c=K, scale=L).cdf, args=() )
```

```
(146,)
```

Out[467]:
```
KstestResult(statistic=0.16124337305586867, pvalue=0.00087636147853897839)
```

Как видим, результат прошлых лет так себе. Попробуем подогнать:

In [468]:

```
pvmax = 0
args = (-1, -1)
for K in np.linspace(1.8, 1.9, 100):#1.8, 2.1, 100):
    for L in np.linspace(3.2, 3.3, 100):#2.9, 3.3, 100):
        pvalue = scipy.stats.kstest(X, sps.weibull_min(c=K, scale=L).cdf, args=() ).pvalue
        if (pvmax < pvalue):
            pvmax = pvalue
            args = (K,L)
print(pvmax, args)
```

```
0.0139731999675 (1.8686868686868687, 3.2646464646464648)
```

Комментарий: Имеем плохой результат (гипотеза должна быть отвергнута, pvalue<0.05). Возможно, это связано с грубым округлением значений до целых.

In [464]:
```
def Tn_prep(n, J, X, mean):
    ES = X[:]
    ES = ES.cumsum(axis=1) / np.arange(1, ES.shape[1] + 1)

    Tn = np.tile(np.arange(1, n + 1), (J, 1))
    Tn = np.sqrt(Tn) * (ES - mean)

    # SELF-CHECK (TODO REMOVE THIS)
    # Z = [[math.sqrt(j) * ((X[i][0:j]).mean() - mean) for j in range(1, X.shape[1] + 1)] for i in range(X.sh
    # Z = np.array(Z)
    # print("Tn - Z = ", Tn - Z) # should be zeroes
    # END SELF-CHECK

    return Tn

def plot1(n, J, Tn):
    plt.figure(figsize=(14,5))
    plt.title("$T_{j} (n)$")
    for T in Tn:
        plt.plot(np.arange(1, T.size + 1), T, alpha=0.2, color="black")
    plt.show()

J = 200
n = 300
Tn = Tn_prep(n=n, J=J, X=sps.norm.rvs(size=(J,n), loc=0., scale=1.), mean=0.)

#plot1(n, J, Tn)
print(Tn.shape)
X = Tn[:, -1]
scipy.stats.kstest(X, sps.norm().cdf, args=() )
```

```
(200, 300)
```

Out[464]:
```
KstestResult(statistic=0.048961873978044745, pvalue=0.74241334650099944)
```

Комментарий: Успех! pvalue достатчно большое, мы можем принять гипотезу (№3 а) (**можем принять гипотезу здесь и далее означает "что нулевую гипотезу нельзя отвергнуть"**)

In [469]:
```
J = 200
n = 500
Tn = Tn_prep(n=n, J=J, X=sps.poisson.rvs(size=(J,n), mu=1.), mean=1.)
X = Tn[:, -1]
scipy.stats.kstest(X, sps.norm().cdf, args=() )
```

Out[469]:
```
KstestResult(statistic=0.062164704135159954, pvalue=0.40913488492880878)
```

Комментарий: Успех! pvalue достатчно большое (>>0.05), мы можем принять гипотезу (№3 б)

In [470]:
```
n = 300
J = 200
theta = 1.

X = sps.uniform.rvs(size=(J, n), loc=0., scale=theta)
ES = X[:]
ES = np.maximum.accumulate(ES, axis=1)

Tn = np.tile(np.arange(1, n + 1), (J, 1))
Tn = Tn * (theta - ES) # n(\theta - X_{(n)})

# SELF-CHECK (TODO REMOVE THIS)
# Z = [[j * (theta - (X[i][0:j]).max()) for j in range(1, X.shape[1] + 1)] for i in range(X.shape[0])]
# Z = np.array(Z)
# print("Tn - Z = ", Tn - Z) # should be zeroes
# END SELF-CHECK

#plt.figure(figsize=(14,5))
#plt.title("$T_{j} (n)$")
#for T in Tn:
#    plt.plot(np.arange(1, T.size + 1), T, alpha=0.2, color="black")
#plt.show()

T300 = Tn[:,-1]
#dens = KDEUnivariate(T300)
#dens.fit()
#grid = np.linspace(T300.min() - 1., T300.max() + 1., 100)
#plt.figure(figsize=(14,5))
#plt.plot(grid, sps.expon.pdf(grid, scale=1./theta), color="green", label="$Exp(\\theta=1) density $")
#plt.plot(grid, dens.evaluate(grid), color="red", label="$T_{i, 300} kde$")
#plt.hist(T300, bins=10, normed=True, alpha=0.4, label="$T_{i, 300} histogram$")
#plt.scatter(T300, np.ones(J) * -0.01, alpha=0.2, color="blue", label="$T_{i, 300} values$")
#plt.legend()
#plt.show()
X = T300
scipy.stats.kstest(X, sps.expon().cdf, args=() )
```

Out[470]:
```
KstestResult(statistic=0.060529743707874673, pvalue=0.44382195759181409)
```

Комментарий: Предположение подтверждается kstest-ом (0.44 >> 0.05)

In [478]:
```
df = pd.read_csv("ice_cream.txt", sep="\t")
Y = df.IC.values
temp = df.temp.values
temp = (temp - 32) / 1.8
X = np.array([np.ones(temp.size), temp]).T
#print(df)
#print(X.T)
#print(Y)

LR = LinearRegression()
LR.fit(X=X, Y=Y)
LR.summary()

X_kstest = Y - LR.predict(X)
mean = X_kstest.mean()
S2 = (X_kstest*X_kstest).mean() - (mean**2)
scipy.stats.kstest(X_kstest, sps.norm(loc=mean, scale=np.sqrt(S2)).cdf, args=() )
```

```
Linear regression on 2 features and 30 examples
Sigma: 0.001786
                Lower           Estimation      Upper
theta_0:        0.283276        0.306298        0.329319
theta_1:        0.003831        0.005593        0.007355
```

Out[478]:
```
KstestResult(statistic=0.10018504045522847, pvalue=0.9240805293274845
2)
```

Комментарий: в качестве параметров используем оценки, которые мы много раз доказывали, что хорошие. Kstest возращает pvalue~0.9 >> 0.05, что говорит о верности предположения (это первая модель задачи о мороженом)

In [479]:
```
df = pd.read_fwf("yacht_hydrodynamics.data", sep=' ', header=None)
# print(df.values, df.values.shape) # we just removed "\n" from
X = df.values[:, 0:6]
Y = df.values[:, 6]
# print(X.shape, Y.shape)

LR = LinearRegression()
LR.fit(X=X, Y=Y)
LR.summary()

X_kstest = Y - LR.predict(X)
mean = X_kstest.mean()
S2 = (X_kstest*X_kstest).mean() - (mean**2)
scipy.stats.kstest(X_kstest, sps.norm(loc=mean, scale=np.sqrt(S2)).cdf, args=() )
```

```
Linear regression on 6 features and 308 examples
Sigma: 80.142563
                Lower           Estimation      Upper
theta_0:        -0.470390       0.194335        0.859059
theta_1:        -67.111403      -35.615932      -4.120461
theta_2:        -19.470413      -4.163103       11.144207
theta_3:        -5.114255       1.374728        7.863711
theta_4:        -14.213253      3.323200        20.859653
theta_5:        111.528380      121.474511      131.420641
```

Out[479]:
```
KstestResult(statistic=0.092603828329746896, pvalue=0.009490111456521122)
```

Комментарий: используя те же оценки, получаем, что pvalue < 0.05, т.е. гипотеза о нормальности остатков должна быть отвергнута. (Это задача про гидродинамику яхт, и MSE ~ 80 при значениях от 0 до 40 ($sqrt(80) > 8) подтверждает, что использование предположения о линейности остатков не уместно)

In [ ]:
```
import vk
import time

session = vk.Session()
api = vk.API(session)

def getFiendsCount(users):
    res = []
    for user in users:
        try:
            res.append(len(api.friends.get(user_id=user)))
        except Exception:
            pass
    return res

MiptOfficialGroupMembers = api.groups.getMembers(group_id="miptru")
print("We have reached", len(MiptOfficialGroupMembers["users"]),
      "https://vk.com/miptru members")
# https://vk.com/dev/groups.getMembers - we cannot get more than 1e3 members ...

MiptOfficialGroupMembersFriendsCount = getFiendsCount(MiptOfficialGroupMembers["users"])
print("We have reached info about",
      len(MiptOfficialGroupMembersFriendsCount), "of them")
# somebody close info or deleted...

X = np.array(MiptOfficialGroupMembersFriendsCount, dtype=float)

def plotPeople(X, drawNorm = None, drawGamma = None):
    print("min =", X.min(), ", max =", X.max())
    xMin = X.min()
    xMax = X.max()
    delta = (xMax - xMin) / 20. # for KDE tie
    grid = np.linspace(xMin - delta, X.max() + delta, 1000) # for
    ecdf = ECDF(X)

    density = KDEUnivariate(X)
    density.fit()

    plt.figure(figsize=(14, 7))
    plt.plot(grid, density.evaluate(grid), color="green", label="kde")
    plt.plot(grid, ecdf(grid), color="red", label = "ecdf")
```

```
    if drawGamma != None:
        plt.plot(grid, sps.gamma.cdf(grid, a=drawGamma[0],
                scale=drawGamma[1]), color="yellow",
                label = "Gamma(" + str(drawGamma[0]) +
                 "," + str(drawGamma[1]) + ") cdf")

    if drawNorm != None:
        plt.plot(grid, sps.norm.cdf(grid, loc=drawNorm[0],
                scale=drawNorm[1]), color="magenta",
                label = "N(" + str(drawNorm[0]) + "," +
                 str(drawNorm[1]) + ") cdf")

    plt.scatter(X, np.zeros(X.size), alpha=0.1)
    plt.grid(ls=":")
    plt.legend()
    plt.show()

    plt.figure(figsize=(14, 7))

    if drawGamma != None:
        plt.plot(grid, sps.gamma.pdf(grid, a=drawGamma[0],
                scale=drawGamma[1]), color="yellow",
                label = "Gamma(" + str(drawGamma[0]) + "," +
                 str(drawGamma[1]) + ") pdf")

    if drawNorm != None:
        plt.plot(grid, sps.norm.pdf(grid, loc=drawNorm[0],
                scale=drawNorm[1]), color="magenta",
                label = "N(" + str(drawNorm[0]) + "," +
                 str(drawNorm[1]) + ") pdf")

    plt.plot(grid, density.evaluate(grid), color="green", label="kde")
    plt.scatter(X, np.zeros(X.size), alpha=0.1)
    plt.grid(ls=":")
    plt.legend()
    plt.show()

# plotPeople(X)

import heapq
XCut = X[:]
```

```
#val = heapq.nlargest(20, XCut)[-1]
val = 1000 # this is false that somebody have more than thousand of people
print("Let's remove people, who has more than", val, "friends")
willBeDeleted = (XCut >= val).sum()
print("We have deleted", willBeDeleted ,
      "(",willBeDeleted / XCut.size * 100.,"%)" )
XCut = XCut[XCut < val]

import math
x1 = XCut.mean()
x2 = (XCut * XCut).mean()

def gauMoments(x1, x2): # оценки по методу моментов
    second = (x2 - x1*x1) / x1
    return (x1 / second, second)
def normMoments(x1, x2):
    return (x1, math.sqrt(x2 - x1*x1)) # аргумент scale - в sps под корнем
```

In [483]:

```
#print("Подберём подходящее значение и распределение руками")
#plotPeople(XCut, drawNorm = (178, 138), drawGamma = (2.8, 96))

scipy.stats.kstest(XCut, sps.norm(loc=178, scale=138).cdf, args=() )
```

Out[483]:

```
KstestResult(statistic=0.15205468206999018, pvalue=0.0)
```

In [484]:

```
scipy.stats.kstest(XCut, sps.gamma(a=2.8, scale=96).cdf, args=() )
```

Out[484]:

```
KstestResult(statistic=0.045632139136575656, pvalue=0.040814335925567047)
```

Комментарий: Ожидалось, что у числа друзей будет нормальное распределение. Однако, подобранное ручками gamma-распределение даёт близкий к приемлемому результат.

In [485]:
```
#print("Ещё раз, но по методу моментов")
#plotPeople(XCut, drawNorm = normMoments(x1, x2),
 #          drawGamma = gauMoments(x1, x2))
drawNorm = normMoments(x1, x2)
scipy.stats.kstest(XCut, sps.norm(loc=drawNorm[0], scale=drawNorm[1]).cdf, args=() )
```

Out[485]: KstestResult(statistic=0.11986002516525207, pvalue=4.6149750687618507e-12)

In [486]:
```
drawGamma = gauMoments(x1, x2)
scipy.stats.kstest(XCut, sps.norm(loc=drawGamma[0], scale=drawGamma[1]).cdf, args=() )
```

Out[486]: KstestResult(statistic=0.6211226024706422, pvalue=0.0)

In [496]:
```
pvmax = 0
args = (-1, -1)
for loc in np.linspace(245, 250, 100):# итеративный подгон
    for scale in np.linspace(165, 170, 100):# итеративный подгон
        pvalue = scipy.stats.kstest(XCut, sps.norm(loc=loc, scale=scale).cdf, args=() ).pvalue
        if (pvmax < pvalue):
            pvmax = pvalue
            args = (loc,scale)
print(pvmax, args)
```

0.000265257624611 (247.87878787878788, 167.27272727272728)

In [502]:
```
pvmax = 0
args = (-1, -1)
for loc in np.linspace(0.01, 20, 200):# итеративный подгон
    for scale in np.linspace(0.01, 200, 200):# итеративный подгон
        pvalue = scipy.stats.kstest(XCut, sps.gamma(a=loc, scale=scale).cdf, args=() ).pvalue
        if (pvmax < pvalue):
            pvmax = pvalue
            args = (loc,scale)
print(pvmax, args)
```

0.571569993504 (2.1194974874371857, 126.63683417085429)

In [504]:
```
pvmax = 0
args = (-1, -1)
for loc in np.linspace(0.01, 1000, 100):# итеративный подгон
    for scale in np.linspace(0.01, 1000, 100):# итеративный подгон
        pvalue = scipy.stats.kstest(XCut, sps.lognorm(loc, scale).cdf, args=() ).pvalue
        if (pvmax < pvalue):
            pvmax = pvalue
            args = (loc,scale)
print(pvmax, args)
```

```
0 (-1, -1)
```

Комментарий: Ожидалось, что у числа друзей будет нормальное распределение. (Так на лекции говорили, нет?) Однако, из рассмотренных мной нормального и гамма-распределений только gamma нельзя отвергнуть (и его нужно принять! 0.57 >> 0.05)

Задача 8*. Проведите исследование согласно примеру 2 параграфа 2 главы 18 книги М.Б. Лагутина "Наглядная математическая статистика".

Задача 9*. Изучите Q-Q plot и критерий Шапиро-Уилка для проверки нормальности, напишите их теоретическое пояснение. В изучении могут помочь материалы курса ПСАД (http://wiki.cs.hse.ru/%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D1%81%D1%82%D0%B0

Постройте графики Q-Q plot для различных распределений и дайте к ним пояснение. Проверьте различные данные на нормальность с помощью различных критериев и Q-Q plot. Данные можно использовать из задачи 7 или какие-либо еще, например, отдельные компоненты из Ирисов Фишера. Постарайтесь так же правильно контролировать вероятность общей ошибки первого рода.