Случайные процессы. Прикладной поток.

Теоретическое задание 3.

Скрытые марковские модели.

1. Пусть (X, Y) — скрытая марковская модель. Докажите формулы (см. презентацию с семинара)
$$\beta_k(t) = \sum_{l=1}^{r} p_{kl} f_l(Y_{t+1}) \beta_l(t+1).$$
$$L_k(t) = \frac{\alpha_k(t)\beta_k(t)}{\mathsf{P}(Y_1 = y_1, ..., Y_T = y_Y)},$$
$$H_{kl}(t) = \frac{p_{kl} f_l(y_{t+1}) \alpha_k(t) \beta_l(t+1)}{\mathsf{P}(Y_1 = y_1, ..., Y_T = y_Y)}.$$

2. Пусть (X, Y) — скрытая марковская модель. Для двух последовательностей скрытых состояний x и z (которые соответствуют некоторой траектории на графе развертки) определим величину $\rho(x, z) = \sum\limits_{t=1}^{T} I\{x_t = z_t\}$ — количество общих состояний. Обозначим $X_{1..T} = (X_1, ..., X_T)$ и $Y_{1..T} = (Y_1, ..., Y_T)$.
   - (a) Докажите, что величина $\mathsf{E}(\rho(X_{1..T}, z)|Y_{1..T})$ достигает максимума по z, если z — траектория forward-backward.
   - (b) Опишите полиномиальный алгоритм, вычисляющий $\mathsf{E}(\rho(X_{1..T}, z)|Y_{1..T})$ и $\mathsf{D}(\rho(X_{1..T}, z)|Y_{1..T})$ для произвольной траектории z.

3. Приведите пример скрытой марковской модели, для которой
   - (a) условная вероятность траектории forward-backward равна нулю при условии наблюдаемой последовательности.
   - (b) траектории forward-backward и Витерби имеют долю общих вершин меньше любого наперед заданного числа

4. Пусть $X = (X_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — однородная марковская цепь с двумя состояниями, матрицей переходных вероятностей P и стационарным распределением Π, а $Y = (Y_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ — наблюдаемый случайный процесс. Пусть пара (X, Y) образует скрытую марковскую модель, причем условная плотность Y_n при условии $X_n = 1$ равна $f_1(y)$, а при условии $X_n = 2$ равна $g_2(y) = \alpha f_2(y) + (1-\alpha) f_3(y)$, где $f_2(x)$ и $f_3(x)$ — некоторые плотности, а $\alpha \in (0, 1)$. Задайте марковскую цепь $Z = (Z_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ так, что пара (Z, Y) будет образовывать скрытую марковскую модель, причем условная плотность Y_n при условии $Z_n = i$ равна $f_i(y)$. Покажите, что (Z, Y) действительно является скрытой марковской моделью.