Случайные процессы. Прикладной поток.

Теоретическое задание 4.

Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновские процессы.

При решении можно пользоваться следующим утверждением.

Пусть $\xi_1, ..., \xi_n$ *— независимые экспоненциальные случайные величины с параметром* λ*,* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$*. Тогда вектор* (S_{n-1}, S_n) *имеет плотность*

$$f(x, y) = p_{S_{n-1}}(x) p_{\xi_n}(y - x).$$

1. Пусть $(X_t, t \geqslant 0)$ — процесс восстановления, построенный по $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$. Верно ли, что процесс X_t всегда имеет независимые приращения?

2. Пусть $N^1 = (N^1_t, t \geqslant 0), \ldots, N^k = (N^k_t, t \geqslant 0)$ — независимые пуассоновские процессы, причем N^i имеет интенсивность λ_i. Докажите, что процесс $N_t = \sum_{i=1}^k N^i_t$ также является пуассоновским, и найдите его интенсивность.

3. Пусть $(\xi_n, n \in \mathbb{N})$ — независимые экспоненциальные случайные величины с параметром λ, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, а $N = (N_t, t \geqslant 0)$ — процесс восстановления, построенный по ним (пуассоновский процесс интенсивности λ). Для каждого $t > 0$ обозначим $V_t = S_{N_t+1} - t$ (“перескок”) и $U_t = t - S_{N_t}$ (“недоскок”).

   а) Вычислите вероятность $\mathsf{P}(V_t > v, U_t > u)$.

   б) Докажите, что V_t и U_t — независимы и что $V_t \sim Exp(\lambda)$.

   в) Вычислите функцию распределения U_t и $\mathsf{E}U_t$.

4. Пусть $(N_t, t \geqslant 0)$ — пуассоновский процесс интенсивности λ. Найдите предел п.н. N_t/t при $t \to \infty$.