Случайные процессы. Прикладной поток.

Практическое задание 1

Правила:

- Выполненную работу нужно отправить на почту `probability.diht@yandex.ru`, указав тему письма `"[СП17] Фамилия Имя - Задание 1"`. Квадратные скобки обязательны. Вместо `Фамилия Имя` нужно подставить свои фамилию и имя.
- Прислать нужно ноутбук и его pdf-версию. Названия файлов должны быть такими: `1.N.ipynb` и `1.N.pdf`, где `N` - ваш номер из таблицы с оценками.
- Никакой код из данного задания при проверке запускаться не будет.
- Дедлайн и система оценивания будут объявлены позже.

В Британской империи в Викторианскую эпоху (1837—1901) было обращено внимание на вымирание аристократических фамилий. В связи с этим в своей статье в The Educational Times в 1873 году Гальтон поставил вопрос о вероятности вымирания фамилии. Решение этого вопроса нашел Ватсон и вместе в 1874 году они написали статью "On the probability of the extinction of families". На сайте wikitree.com (http://wikitree.com) в свободно распространяемом формате собрано большое количество данных о родословных различных людей. В коллекции есть как люди, жившие во времена поздней античности, так и наши современники. На основе некоторой части этих данных вам предстоит провести исследование о вымирании фамилий.

Вам предоставляются несколько файлов, в которых содержатся данные о некоторых родословных. Вам предстоит проводить исследование на нескольких из этих файлов (каких именно, см. в таблице). Формат файлов следующий:

```
generation \t name \t gender \t birthday \t deathdate \t parents \t siblings \t spouses \t children
```

Эти данные означают номер поколения, фамилию, пол, дату рождения, дату смерти, родителей, братьев и сестер, супруг, детей соответственно. Если какая-то характеристика неизвестна (кроме номера поколения и фамилии), вместо нее ставится пустая подстрока. Если каких-то характеристик несколько, то они разделены через ";". Все люди представлены некоторым идентификатором `<id>`, который соответствует адресу `http://www.wikitree.com/wiki/<id>`. Например, идентификатор `Romanov-29` соответствует адресу [`http://www.wikitree.com/wiki/Romanov-29` (http://www.wikitree.com/wiki/Romanov-29)](http://www.wikitree.com/wiki/Romanov-29). В файле родословные отделяются друг от друга пустой строкой.

Для облегчения вашей работы мы предоставляем вам код, который считывает данные из этого файла и преобразует их в список ветвящихся процессов. Каждый ветвящийся процесс содержит список списков, в каждом из которых содержатся все люди из соответствующего поколения. Обратите внимание, что одни и те же родословные могут попасть в разные файлы. В таком случае их можно считать разными, но при желании вы можете удалить копии.

В предоставленных данных в каждой родословной для каждого мужчины на следующем поколении содержатся все его дети, которые были указаны на сайте. Для женщин дети в данной родословной не указаны. Это связано с тем, что женщины обычно меняют свою фамилию, когда выходят замуж, тем самым, они переходят в другую ветку. С точки зрения ветвящихся процессов, нужно иметь в виду, что если у мужчины родилось 3 мальчика и 4 девочки, то у него 3 потомка как продолжателя фамилии.

Ваша задача --- исследовать процесс вымирания фамилий на основе предложенных данных. В данном задании вам предстоит сделать оценку закона размножения, а в следующем задании --- провести остальной анализ.

In [1]:
```
import numpy as np
import scipy.stats as sps
from collections import Counter  # это может пригодиться
from BranchingProcess import Person, BranchingProcess, read_from_files

import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import rcParams
rcParams.update({'font.size': 16})
%matplotlib inline
```

1. Описательный анализ

Большая часть кода, необходимая для проведения данного анализа, является технической и основывается на работе с пакетом `BranchingProcess`. Поэтому данный код полностью вам выдается, вам нужно только выполнить его, подставить имена файлов. Кроме того, код анализа позволит вам лучше понять структуру данных.

Считайте данные с помощью предложенного кода. Посчитайте количество родословных.

In [2]:
```
with open("Варианты.txt", "r") as f:
    for s in f.readlines():
        if ("Шевкунов" in s):
            print(s)
```

```
594 Шевкунов Кирилл Сергеевич АД        -=-     P O N I C R T J S E
```

In [3]:
```
first_letters = "P O N I C R T J S E"
fn_prefix = "./data/"
fn_postfix = ".txt"
file_names = []
for c in first_letters:
    if c != " ":
        file_names.append(fn_prefix + c + fn_postfix)

for v in file_names:
    print(v)
```

```
./data/P.txt
./data/O.txt
./data/N.txt
./data/I.txt
./data/C.txt
./data/R.txt
./data/T.txt
./data/J.txt
./data/S.txt
./data/E.txt
```

In [4]:
```
processes = read_from_files(file_names)
print(len(processes))
```

```
55337
```

В имеющихся данных очень много людей, про которых известно лишь то, что они когда-то существовали. Обычно их фамилия неизвестна (вместо фамилии у них может стоять, к примеру, `B-290`), а у некоторых из них неизвестен даже пол, не говоря уже о родителях и детях. Такие данные стоит удалить.

Удалите все процессы, состоящие только из одного поколения (в котором, естественно, будет только один человек). Сколько осталось процессов?

In [5]:
```
for i in range(len(processes))[::-1]:
    if len(processes[i].generations) < 2:
        del processes[i]

print(len(processes))
```

```
15841
```

Для лучшего понимания задачи и предложенных данных посчитайте следующие характеристики: минимальное, максимальное и среднее число поколений в роду, год рождения самого старого и самого молодого человека, среднюю продолжительность жизни.

In [6]:
```python
# Пробный вывод для лучшего понимания происходящего
# str(processes[0])
for generation in processes[0].generations:
    print("___GENERATION__")
    for man in generation:
        print(man)
```

___GENERATION__
Murdoch-533	male	1740--	1822-Feb-18			Rodger-269;Ross-7636	Murdoch-527;Murdoch-534;Murdoch-535;Murdoch-536;Murdoch-537;Murdoch-538
___GENERATION__
Murdoch-527	male	1792-Mar-28	1852-Jun-05	Murdoch-533;Rodger-269	Murdoch-534;Murdoch-535;Murdoch-536;Murdoch-537;Murdoch-538 Richardson-9305 Murdoch-515;Murdoch-528
Murdoch-534	male	1800-Mar-08		Murdoch-533;Ross-7636	Murdoch-527;Murdoch-535;Murdoch-536;Murdoch-537;Murdoch-538
Murdoch-535	female	1804-Feb-11		Murdoch-533;Ross-7636	Murdoch-527;Murdoch-534;Murdoch-536;Murdoch-537;Murdoch-538
Murdoch-536	female	1806-Jan-26	1863--	Murdoch-533;Ross-7636	Murdoch-527;Murdoch-534;Murdoch-535;Murdoch-537;Murdoch-538 Jamieson-955	Jamieson-956;Jamieson-957;Jamieson-958;Jamieson-959;Jamieson-960;Jamieson-961;Jamieson-962
Murdoch-537	female	1807-Dec-13		Murdoch-533;Ross-7636	Murdoch-527;Murdoch-534;Murdoch-535;Murdoch-536;Murdoch-538
Murdoch-538	male	1809-Oct-12		Murdoch-533;Ross-7636	Murdoch-527;Murdoch-534;Murdoch-535;Murdoch-536;Murdoch-537
___GENERATION__
Murdoch-515	male	1816-Feb-09	1864-Jul-24	Murdoch-527;McWhinnie-15	Murdoch-528	McConnell-1855	Murdoch-529;Murdoch-530;Murdoch-531;Murdoch-532;Murdoch-513
Murdoch-528	male	1828--	1873-Jun-17	Murdoch-527;Richardson-9305	Murdoch-515
___GENERATION__
Murdoch-529	male	1849--	1925-Dec-26	Murdoch-515;McConnell-1855	Murdoch-530;Murdoch-531;Murdoch-532;Murdoch-513	Wallace-7710	Murdoch-678
Murdoch-530	male	1852--	1878-Aug-07	Murdoch-515;McConnell-1855	Murdoch-529;Murdoch-531;Murdoch-532;Murdoch-513
Murdoch-531	male	1854--	1885-Jun-22	Murdoch-515;McConnell-1855	Murdoch-529;Murdoch-530;Murdoch-532;Murdoch-513	Wilson-35755;Wilson-34382	Murdoch-740;Murdoch-742;Murdoch-743;Murdoch-716
Murdoch-532	male	1856-Jan-28	1869-Sep-28	Murdoch-515;McConnell-1855	Murdoch-529;Murdoch-530;Murdoch-531;Murdoch-513
Murdoch-513	male	1858-Dec-09	1931-Dec-13	Murdoch-515;McConnell-1855	Murdoch-529;Murdoch-530;Murdoch-531;Murdoch-532	Hutchinson-2956 Murdoch-514;M-1000
___GENERATION__
Murdoch-678	male	1884--	1959-Apr-26	Murdoch-529;Wallace-7710		Fletcher-5489	Murdoch-679
Murdoch-740	male	1879--		Murdoch-531;Wilson-34382	Murdoch-742;Murdoch-743;Murdoch-716

Murdoch-742	female	1879--		Murdoch-531;Wilson-34382	Murdoch-740;Murdoch-743;Murdoch-716	George-4712
Murdoch-743	male	1880--	1945--	Murdoch-531;Wilson-34382	Murdoch-740;Murdoch-742;Murdoch-716	Webb-9670
Murdoch-716	female	1886-Jan-07	1947-Sep-22	Murdoch-531;Wilson-34382	Murdoch-740;Murdoch-

```
742;Murdoch-743 Fraser-3629     Fraser-2380
Murdoch-514     female  1899--  1932-Jul-01     Murdoch-513;Hutchinson-2956     M-1000
M-1000  male                    Murdoch-513;Hutchinson-2956     Murdoch-514             P-445
___GENERATION__
Murdoch-679     female  1916-Oct-19     2013-Oct-09     Murdoch-678;Fletcher-5489               Harvey-6695

P-445   female                  M-1000
```

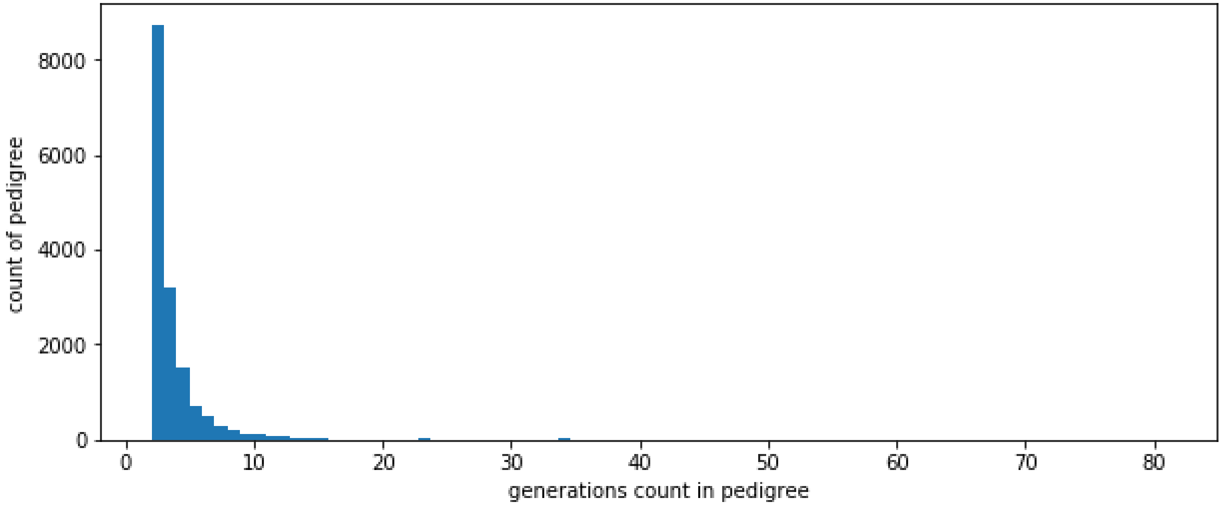
In [7]:

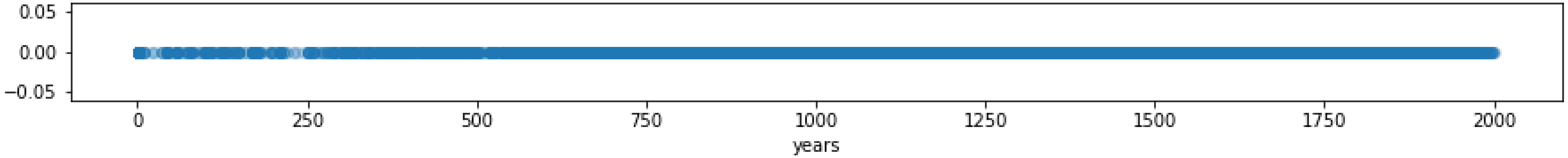
```
generation_counts = []
years = []

for pedigree in processes:
    generation_counts.append(len(pedigree.generations))

    for generation in pedigree.generations:
        for person in generation:
            if person.birthday != '':
                years.append(person.birthday.split('-')[0])

years = np.array(years, dtype=int)
print('Минимальное число поколений в роду:', min(generation_counts))
print('Максимальное число поколений в роду:', max(generation_counts))
print('Среднее число поколений в роду:', round(np.mean(generation_counts), 1))
print('Год рождения самого старого:', min(years))
print('Год рождения самого молодого:', max(years))
```

```
Минимальное число поколений в роду: 2
Максимальное число поколений в роду: 81
Среднее число поколений в роду: 3.4
Год рождения самого старого: 1
Год рождения самого молодого: 2000
```

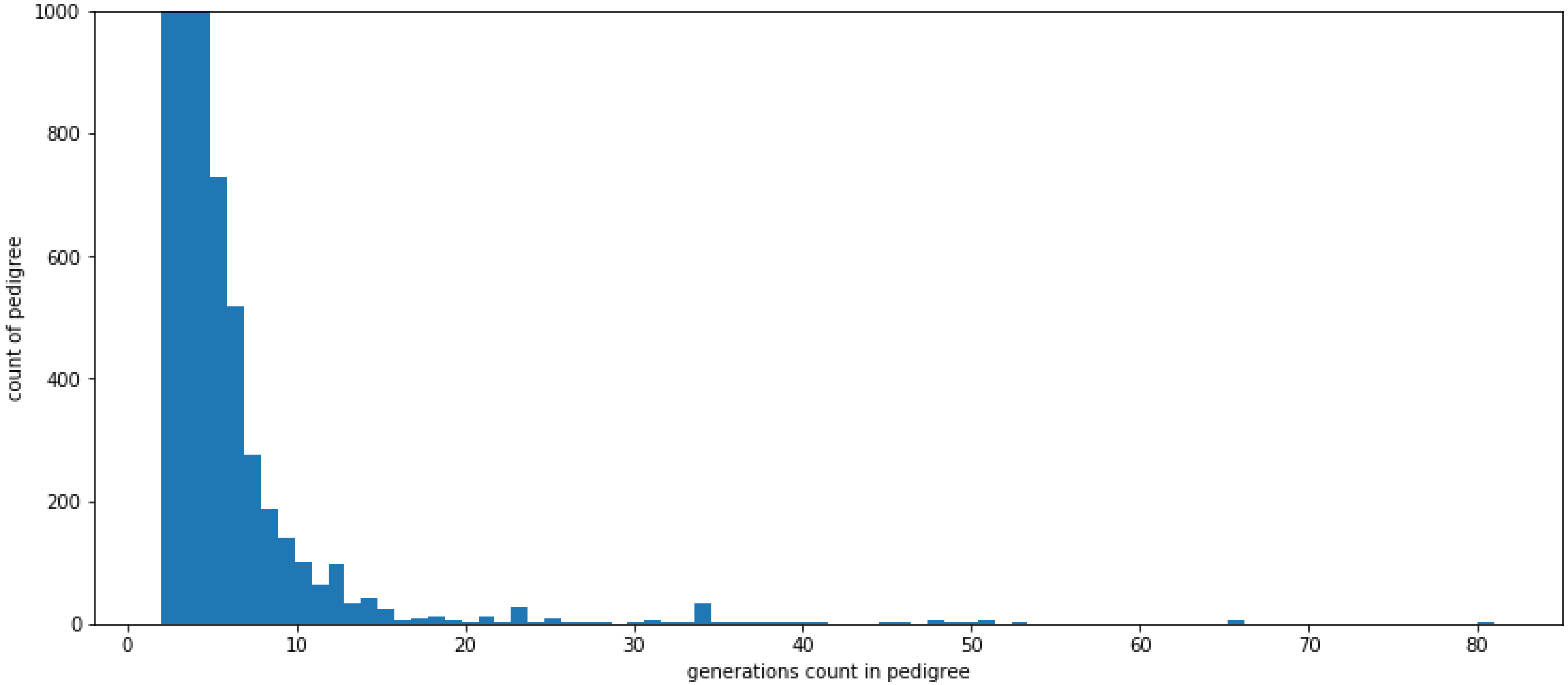
Постройте гистограмму зависимости количества поколений в родословной от количества родословных. На следующем графике отложите на временной оси года рождения всех людей.

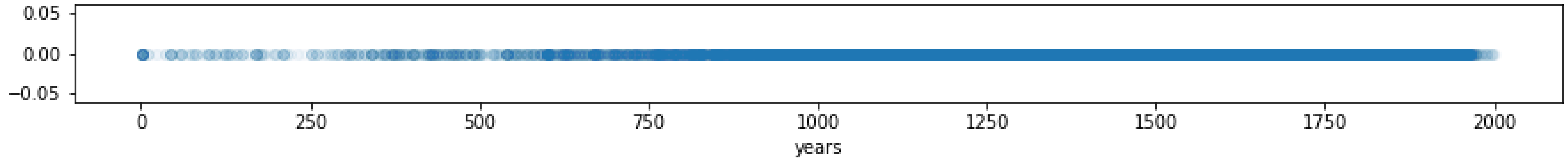
In [8]:
```
plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.hist(generation_counts, bins=80)
plt.xlabel('generations count in pedigree')
plt.ylabel('count of pedigree') # было pedogree
plt.show()

plt.figure(figsize=(15, 1))
plt.scatter(years, np.zeros_like(years), alpha=0.2)
plt.xlabel('years')
plt.show()
```





In [9]:
```
plt.figure(figsize=(14, 6)) # was figsize=(10,4)
plt.ylim(ymax=1000)
plt.hist(generation_counts, bins=80)
plt.xlabel('generations count in pedigree')
plt.ylabel('count of pedigree') # было pedogree

plt.show()

plt.figure(figsize=(15, 1))
plt.scatter(years, np.zeros_like(years), alpha=0.025) # was alpha=0.2
plt.xlabel('years')
plt.show()
```





Посчитайте среднюю продолжительность жизни.

In [10]:
```
ages = []
for pedigree in processes:
    for generation in pedigree.generations:
        for person in generation:
            if person.birthday != '' and person.deathdate != '':
                ages.append(int(person.deathdate.split('-')[0]) - \
                            int(person.birthday.split('-')[0]))

### !  В коде выше мы берём разность года рождения и года смерти,
### ! т.е. продолжительности жизни оценена с ошибкой до года,
### ! хотя среднее должно пострадать не сильно

mean_age = np.mean(ages)
print(round(mean_age, 2))
```

```
56.56
```

2. Оценка закона размножения

Для начала предположим, что все выданные вам процессы являются частью одного большого процесса с общим предком. В следующем задании рассмотрим так же случай, когда все процессы являются разными.

Чтобы проводить какой-либо анализ ветвящегося процесса нужно некоторым образом оценить закон размножения. Кажется, что для этого достаточно посчитать количество сыновей у каждого человека, получив тем самым выборку неотрицательных целых чисел. Однако, проблема в том, что данные неполные, в частности, некоторые поля могут быть не заполнены. Тем не менее обычно у человека указаны либо все дети, либо не указаны вообще. Таким образом, условно мы можем разделить выборку на две части: поле детей заполнено (в т.ч. если у человека на самом деле нет детей), поле детей незаполнено. Если бы первая часть выборки была бы полностью известна, что распределение можно оценить по ней. Нам же неизвестен размер выборки и количество нулевых элементов в ней. Количество положительных элементов известно.

Математическая постановка задачи

P_θ --- неизвестное распределение из некоторого класса распределений $\mathcal{P}$ на $\mathbb{Z}_+$.

$X_1, \dots, X_n$ --- выборка из распределения P_θ, причем n и количество нулей в выборке неизвестны.

$Y_1, \dots, Y_s$ --- положительная подвыборка, которая полностью нам известна. В нашей задаче Y_j --- количество сыновей у j-го человека среди тех, у кого есть хотя бы один сын.

Оценку параметра θ можно найти методом максимального правдоподобия:

$$\prod_{i=1}^{s} \mathsf{P}_\theta(Y_i \,|Y_i > 0) \to \max_\theta$$

В качестве классов распределений $\mathcal{P}$ рассмотрите пуассоновское и геометрическое распределения. По желанию можете рассмотреть другие классы распределений, осмысленные в данной задаче

Внимание! Применение метода `fit` из `scipy.stats` является некорректным в данной задаче, поскольку рассматривается усеченная выборка. Задачу максимизации нужно решить явно, выписав все формулы (которые тоже нужно прислать вместе с кодом).

После оценки параметров проведите проверку принадлежности неизвестного распределения рассматриваемому семейству распределений $\mathcal{P}$ с помощью критерия хи-квадрат, взяв для для него то распределение из $\mathcal{P}$, которое соответствует оценке максимального правдоподобия. Постарайтесь учесть все особенности проверки гипотез, которые обсуждались на семинаре. Для каждого класса постройте также график частот и функции $\mathsf{P}_\theta(y \,|Y > 0)$.

Оценка ММП

1.Геометрическое распределение

$P_p(X = n) = (1-p)^n p$ (Геометрическое распределение с нулём, $X \in \{0, 1, 2, \dots\}$)

Для положительных Y_i имеем: $P_p(Y_i|Y_i > 0) = \frac{P(Y_i)}{P(Y_i>0)} = \frac{P(Y_i)}{1-P(Y_i=0)} = \frac{(1-p)^n p}{1-p} = (1-p)^{n-1}p$, т.е. положительные Y_i распределены по геометрическому распределению без нуля.

$$\prod_{i=1}^{s} P_p(Y_i|Y_i > 0) = \prod_{i=1}^{s}(1-p)^{Y_i-1}p = (1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{s} Y_i - s} p^s$$

$$\Rightarrow (\sum_{i=1}^{s} Y_i - s)\ln(1-p) + s\ln p$$

Возьмём производную для нахождения точки максимума (из вида логарифмической функции правдоподобия ясно, что при $p \in [0,1]$ и положительных Y_i (коэффициенты при логарифмах неотрицательны) наблюдается один максимум):

$$(\sum_{i=1}^{s} Y_i - s)\frac{-1}{1-p} + \frac{s}{p} =: 0$$

$$\frac{s}{1-p} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} Y_i}{1-p} + \frac{s}{p} = 0$$

$$\frac{sp + s - sp}{(1-p)p} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} Y_i}{1-p}$$

$$p = \frac{s}{\sum\limits_{i=1}^{s} Y_i} = \frac{1}{\overline{Y}}$$

Итого: $p^* = 1/\overline{Y}$ - оценка по ММП для геометрического распределения

2.Пуассоновское распределение

$P_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$; $P_\lambda(X = 0) = e^{-\lambda}$; $P_\lambda(X > 0) = 1 - e^{-\lambda}$

$$\prod_{i=1}^{s} P_\lambda(Y_i|Y_i>0) = \prod_{i=1}^{s}\frac{\frac{\lambda^{Y_i}}{Y_i!}e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \frac{\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{s} Y_i}}{\prod_{i=1}^{s} Y_i!}e^{-\lambda n}}{(1-e^{-\lambda})^n}$$

$$\Rightarrow L(\lambda, Y) = \sum_{i=1}^{s} Y_i \ln\lambda - n\lambda - \ln(\prod_{i=1}^{s} Y_i!) - n\ln(1-e^{-\lambda})$$

$$\Rightarrow L'(\lambda, Y) = \sum_{i=1}^{s} Y_i \frac{1}{\lambda} - n - n\frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})} = \sum_{i=1}^{s} Y_i\frac{1}{\lambda} - \frac{n}{(1-e^{-\lambda})} =: 0$$

Оценка по ММП достигается в корне:

$$\overline{Y} = \frac{\lambda}{(1-e^{-\lambda})}$$

Получена возрастающая на $\lambda \in (0, +\infty)$ функция ($\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-e^{-x})} = \frac{e^x(-x+e^x-1)}{(e^x-1)^2} > 0$), при этом $\overline{Y} \geq s \geq 1$, а $\lim\limits_{\lambda\to+0}(\frac{\lambda}{(1-e^{-\lambda})}) = 1$ (по Тейлору), значит у этого уравнения есть корень, при том один. Его можно найти двоичным поиском или поиском по сетке.

Итого: Оценка по ММП достигается в корне (он выражается только через страшные функции и его предлагается искать численными методами, благо функция хорошо для этого подходит):

$$\overline{Y} = \frac{\lambda}{(1-e^{-\lambda})}$$

Проверка теоретических выкладок практическим методом (самодеятельность)

Для проверки предлагается взять числа из некоторых геометрического и пуассоновского распределения и вычислить оценку ММП по сгенерированным данным, сравнить её с исходным параметром "на глаз" (разумно было бы провести проверку множество раз с различными параметрами и размерами выборок, проверяя стат. значимость, например, тем же тестом хи-квадрат, но этот раздел не требуется, его просто жалко удалять)

In [11]:
```
import scipy.stats as sps
import scipy.optimize
import numpy as np # слишком долго листать на верх
```

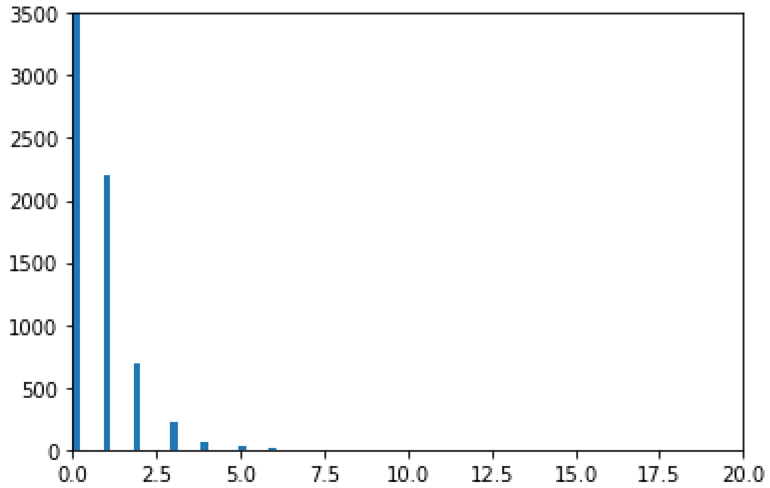
In [12]:
```
X = sps.poisson(mu=777.).rvs(size=1000)
Y = np.array([x for x in X if x > 0])

print(X[:10])
print(Y[:10])

def f(x):
    return x / (1. - np.exp( - x)) - Y.mean()

scipy.optimize.root(f,2.) # найденный x должен ~= mu
```

```
[775 786 785 809 754 704 778 839 794 760]
[775 786 785 809 754 704 778 839 794 760]
```

Out[12]:
```
    fjac: array([[-1.]])
     fun: array([ 0.])
 message: 'The solution converged.'
    nfev: 5
     qtf: array([ 174.81])
       r: array([-1.])
  status: 1
 success: True
       x: array([ 776.81])
```

In [13]:
```
p = 0.1 + np.random.rand() * 0.8 # ~ U[0.1, 0.9]
print("p = ", p)
X = sps.geom(p=p).rvs(size=10000) - 1
Y = np.array([x for x in X if x > 0])
plt.ylim(ymax=3500)
plt.xlim(xmax=20)
plt.hist(X, bins = 40)
plt.show()
print("X[:15] =", X[:15])
print("Y[:10] =", Y[:10])
```

```
p =  0.6843440638275746
```




```
X[:15] = [0 1 1 1 0 2 3 0 0 0 0 1 1 0 0]
Y[:10] = [1 1 1 2 3 1 1 2 3 1]
```

In [14]:
```
theta = 1. / np.array(Y).mean()
print("p = ", p)
print("theta = ", theta) # должны быть приблизительно равны
```

```
p =  0.6843440638275746
theta =  0.683517417162
```

Обработка данных

Составим, для начала Y

In [15]:
```
male = set()

Y_names = list()
for pedigree in processes:
    for generation in pedigree.generations:
        for person in generation:
            if person.gender == "male":
                male.add(person.name)

# male
```

In [16]:
```
Y = list()

for pedigree in processes:
    for generation in pedigree.generations:
        for person in generation:
            if person.gender == "male":
                child_cnt = 0
                for child in person.children:
                    if child in male:
                        child_cnt += 1
                if (child_cnt > 0):
                    Y.append(child_cnt)
print(Y[:10])
```

```
[3, 2, 5, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2]
```

In [17]:
```
print("len(Y)", len(Y))
Y_data_mean = np.array(Y).mean()
```

```
len(Y) 49266
```

Найдём оценку ММП для пуассоновского распределения:

In [18]:
```
def poiss_tf(x):
    assert type(Y) == list # вдруг
    return x / (1. - np.exp(-x)) - Y_data_mean
result = scipy.optimize.root(poiss_tf, 20.)
result
```

Out[18]:
```
    fjac: array([[-1.]])
     fun: array([  8.88178420e-16])
 message: 'The solution converged.'
    nfev: 8
     qtf: array([ -1.01263575e-09])
       r: array([-0.77214533])
  status: 1
 success: True
       x: array([ 1.80957111])
```

In [19]:
```
mu_data = result.x[0]
mu_data
```

Out[19]:
```
1.8095711098638814
```

Найдём оценку ММП для геометрического распределения:

In [20]:
```
p_data = 1. / Y_data_mean
p_data
```

Out[20]:
```
0.46214025740122316
```

In [21]:
```
from scipy.stats import chisquare
print(len(Y))
```

```
49266
```

Применим тест хи-квадрат для полученных данных. Как обсуждалось на семинаре, большой размер выборки нежелателен, в силу ряда причин. Предложено было использовать выборки по сто элементов, что мы и сделаем.

In [22]:
```
from math import factorial
```

In [23]:
```
sub_Y = np.array(np.array(Y)[sps.randint.rvs(0, len(Y), size=100)])


def to_freq_table(sub_Y, ddof=1):
    Y_table = np.zeros(np.array(sub_Y).max() + 1)
    for y in sub_Y:
        Y_table[y] += 1


    YY = []
    for i in range(ddof, len(Y_table)):
        if (Y_table[i] < 5):
            YY = Y_table[ddof:i]
            YY[-1] += Y_table[i:].sum()
            break
    return YY

def sum_up(sub_Y, ddof=1):
    Y_table = np.zeros(np.array(sub_Y).max() + 1)
    for y in sub_Y:
        Y_table[y] += 1
    return Y_table[ddof:]

def round_up_five(Y):
    for i in range(len(Y)):
        if Y[i] < 5.:
            if (np.array(Y[i:]).sum() >= 5.):
                YY = Y[:]
                YY[i] = np.array(Y[i:]).sum()
                return YY[:(i+1)]
            else:
                YY = Y[:]
                YY[i-1] += np.array(Y[i:]).sum()
                return YY[:i]
    return Y

def round_up(Y, l):
    assert len(Y) >= l
    YY_temp = np.array(Y)
    YY_temp[l-1] += np.array(YY_temp[l:]).sum()
    return YY_temp[:l]
```

```
YY = sum_up(sub_Y)

print("Количество отцов с (i+1) детьми = ", YY)

#print("Количество отцов с (i+1) детьми, с увеличенными группами = ", round_up_five(YY))

# p_data = 1. / sub_Y.mean()
```

```
Количество отцов с (i+1) детьми =  [ 54.  20.   8.   6.   5.   4.   1.   0.   1.   1.]
```

In [24]:
```
geom = []
pois = []

def geom_cond_pmf(x,p):
    q = 1. - p
    return q ** (x - 1) * p


def pois_cond_pmf(x,mu):
    e = np.exp(- mu)
    return mu ** x * e / (1. - e) / (factorial(x))

i = 1
while (geom_cond_pmf(x=i, p=p_data)*YY.sum() >= 5.):
    geom.append(geom_cond_pmf(x=i, p=p_data))
    i += 1


i = 1
while (pois_cond_pmf(x=i, mu=mu_data)*YY.sum() >= 5.):
    pois.append(pois_cond_pmf(x=i, mu=mu_data))
    i += 1

geom.append(1. - np.array(geom).sum())
if (geom[-1]*YY.sum() < 5.):
    geom[-2] += geom[-1]
    del geom[-1]

pois.append(1. - np.array(pois).sum())
if (pois[-1]*YY.sum() < 5.):
    pois[-2] += pois[-1]
    del pois[-1]


geom = np.array(geom) * YY.sum()
pois = np.array(pois) * YY.sum()
print("YY (данные выборки для теста) = ", YY)
print("YY (укрупнённые для геометрического распределения) = ", round_up(YY, len(geom)))
print("YY (укрупнённые для пуассоновского распределения) = ", round_up(YY, len(pois)))

print("geom (теоретическая выборка из геометрического) = ", geom)
```

```
print("pois (теоретическая выборка из пуассоновского) = ", pois)

print(round_up(YY, len(geom)))
print("\nТест для геометрического:\n", sps.chisquare(round_up(YY, len(geom)), geom))
print("\nТест для пуассоновского:\n", sps.chisquare(round_up(YY, len(pois)), pois))
```

```
YY (данные выборки для теста) =  [ 54.  20.   8.   6.   5.   4.   1.   0.   1.   1.]
YY (укрупнённые для геометрического распределения) =  [ 54.  20.   8.   6.  12.]
YY (укрупнённые для пуассоновского распределения) =  [ 54.  20.   8.  18.]
geom (теоретическая выборка из геометрического) =  [ 46.21402574  24.85666399  13.3693989    7.19086145   8.
36904993]
pois (теоретическая выборка из пуассоновского) =  [ 35.42741384  32.05421229  19.33479217  13.1835817 ]
[ 54.  20.   8.   6.  12.]

Тест для геометрического:
 Power_divergenceResult(statistic=6.1896513248478771, pvalue=0.18542560672191974)

Тест для пуассоновского:
 Power_divergenceResult(statistic=22.674117629895377, pvalue=4.7217791342859939e-05)
```

In [25]:
```
# вычисленная руками для самопроверки статистика
((round_up(YY, len(geom)) - geom) ** 2 / geom).sum()
```

Out[25]: 6.1896513248478771

Итого: при уровне значимости $\alpha = 0.05$ (он определён заранее, хотя впервые фигурирует здесь)

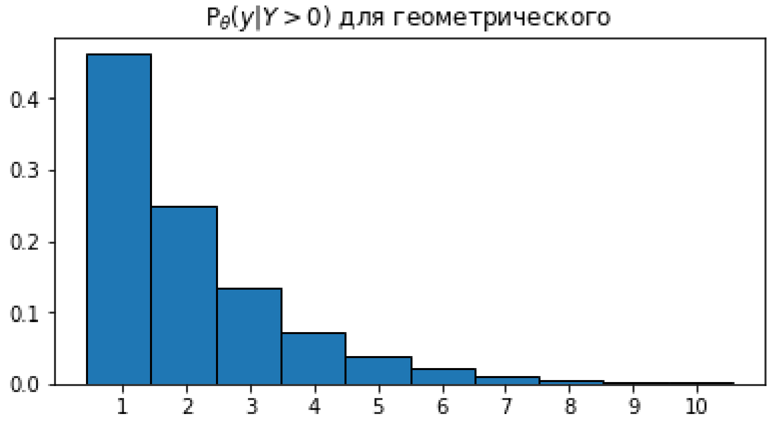
- в первом тесте нулевая гипотеза, состоящая в том, что законом размножения является геометрическое распределение с оценённым выше параметром (на самом деле, некоторое его угрубление), не может быть отвергнута (pvalue > α)
- во втором тесте нулевая гипотеза, состоящая в том, что законом размножения является пуассоновское распределение с оценённым выше параметром (на самом деле, некоторое его угрубление), должно быть от вергнуто (pvalue < α)

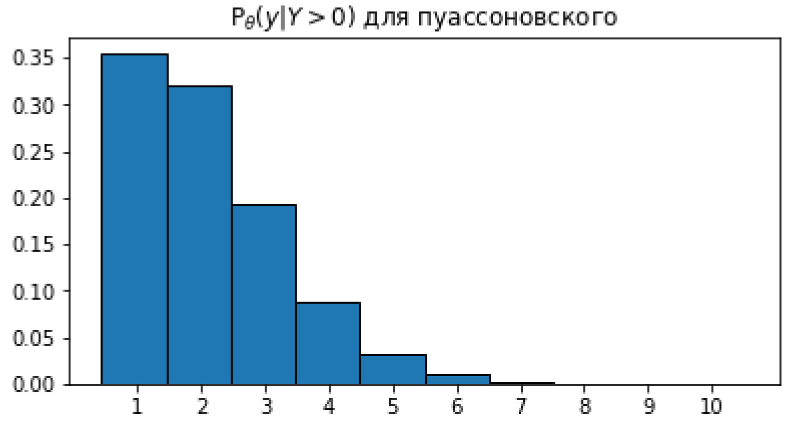
Графики:

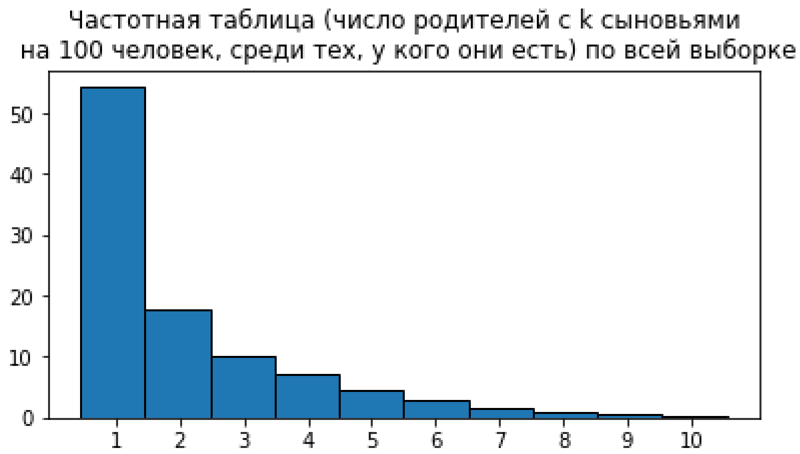
In [54]:
```
P_geom = [geom_cond_pmf(x,p_data) for x in range(1, 11)]
P_pois = [pois_cond_pmf(x,mu_data) for x in range(1, 11)]

plt.figure(figsize=(14,7))

plt.subplot(221)
plt.hist(range(10), weights=P_geom, ls='solid', ec='black')
plt.title("$\\mathsf{P}_\\theta (y \\left| Y > 0 \\right)$ для геометрического")
plt.xticks(np.linspace(0.5, 8.5, 10), range(1, 11))

plt.subplot(222)
plt.hist(range(10), weights=P_pois, ls='solid', ec='black')
plt.title("$\\mathsf{P}_\\theta (y \\left| Y > 0 \\right)$ для пуассоновского")
plt.xticks(np.linspace(0.5, 8.5, 10), range(1, 11))



def top_ten(X):
    X = list(X)
    while (len(X) < 10):
        X.append(0)
    return np.array(X[:10])

plt.show()
plt.figure(figsize=(14,7))

plt.subplot(221)
FT = top_ten(to_freq_table(Y))
FT = FT / FT.sum() * 100.
plt.hist(range(10), weights=FT, ls='solid', ec='black')
plt.title("Частотная таблица (число родителей с k сыновьями\n " +
          "на 100 человек, среди тех, у кого они есть) по всей выборке")
plt.xticks(np.linspace(0.5, 8.5, 10), range(1, 11))

plt.show()
plt.figure(figsize=(14,7))


plt.subplot(221)
FT = [sps.geom(p=p_data).pmf(i+1)*100 for i in range(0, 10)]
plt.hist(range(10), weights=FT, ls='solid', ec='black')
plt.title("Частотная таблица (число родителей с k сыновьями\n на" +
```

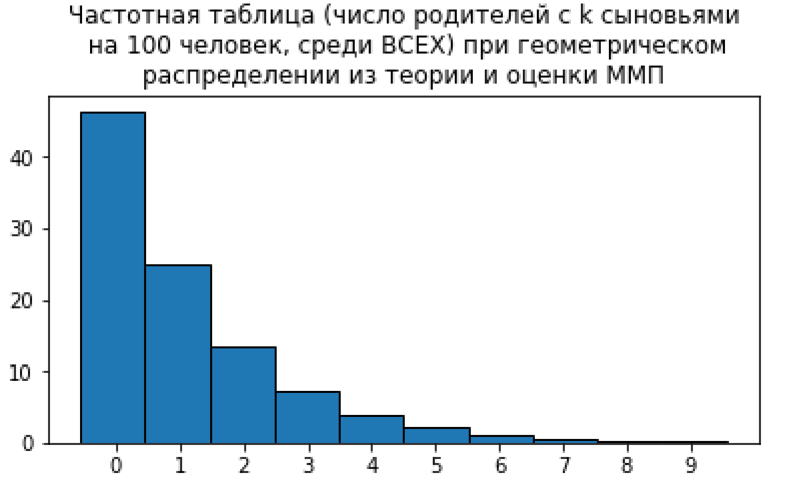
```
          " 100 человек, среди ВСЕХ) при геометрическом\n" +
          "распределении из теории и оценки ММП")
plt.xticks(np.linspace(0.5, 8.5, 10), range(0, 10))

plt.subplot(222)
FT = [sps.poisson(mu=mu_data).pmf(i)*100 for i in range(0, 10)]
plt.hist(range(10), weights=FT, ls='solid', ec='black')
plt.title("Частотная таблица (число родителей с k сыновьями\n на 100 человек, " +
          "среди ВСЕХ) при пуассоновском\n" +
          "распределении из теории и оценки ММП")
plt.xticks(np.linspace(0.5, 8.5, 10), range(0, 10))

plt.show()

print("!!! Данные для теста хи-квадрат: !!!")

hor_len = 0.95
plt.figure(figsize=(14,7))
plt.subplot(221)
plt.hist(range(10), weights=top_ten(round_up(YY, len(geom))), ls='solid', ec='black')
x_grid = np.linspace(0., 8., 10)
plt.hlines(top_ten(geom), x_grid, x_grid+hor_len, color="red")
plt.title("Частотная таблица (число родителей с k сыновьями\n" +
          " на 100 человек, среди тех, у кого они есть) по сокращённой\n"
          +" выборке (сжато под геометрическое: последняя\nгруппа включает все последующие)" +
          "\n[теоретическое сжатое геометрическое\n показано красными полосами]")
plt.xticks(np.linspace(0.5, 8.5, 10), range(1, 11))
plt.subplot(222)
plt.hist(range(10), weights=top_ten(round_up(YY, len(pois))), ls='solid', ec='black')
x_grid = np.linspace(0., 8., 10)
plt.hlines(top_ten(pois), x_grid, x_grid+hor_len, color="red")
plt.title("Частотная таблица (число родителей с k сыновьями\n" +
          " на 100 человек, среди тех, у кого они есть) по сокращённой\n"
          +" выборке (сжато под пуассоновское: последняя\nгруппа включает все последующие)" +
          "\n[теоретическое сжатое пуассоновское\n показано красными полосами]")
plt.xticks(np.linspace(0.5, 8.5, 10), range(1, 11))
plt.show()

print("Те же графики наоборот:")
plt.figure(figsize=(14,7))
plt.subplot(221)
plt.hist(range(10), weights=top_ten(geom), ls='solid', ec='black', color="red")
```

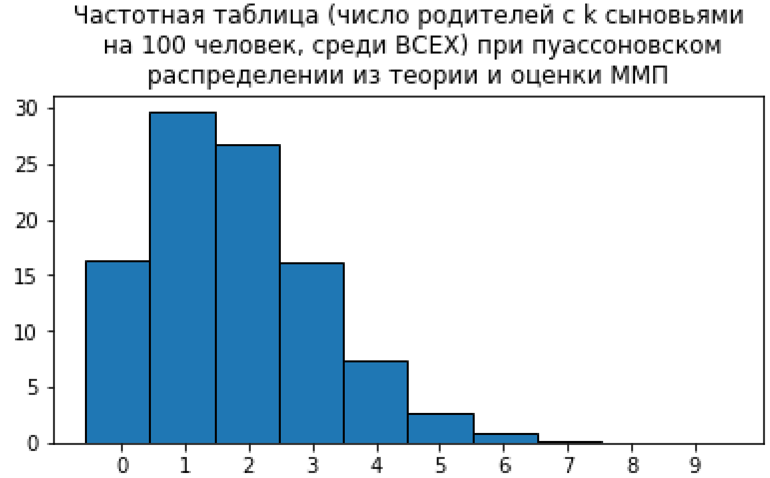
```
x_grid = np.linspace(0., 8., 10)
plt.hlines(top_ten(round_up(YY, len(geom))), x_grid, x_grid+hor_len, color="navy")
plt.title("Частотная таблица (число родителей с k сыновьями\n" +
          " на 100 человек, среди тех, у кого они есть) по теоретическому\n"
          +" геометрическому распределению\n(сокращена до np >= 5:" +
          " последняя\nгруппа включает все последующие)" +
          "\n[укрупнённая выборка\n показана синими полосами]")
plt.xticks(np.linspace(0.5, 8.5, 10), range(1, 11))
plt.subplot(222)
plt.hist(range(10), weights=top_ten(pois), ls='solid', ec='black', color="red")
x_grid = np.linspace(0., 8., 10)
plt.hlines(top_ten(round_up(YY, len(pois))), x_grid, x_grid+hor_len, color="navy")
plt.title("Частотная таблица (число родителей с k сыновьями\n" +
          " на 100 человек, среди тех, у кого они есть) по теоретическому\n"
          +" пуассоновскому распределению\n(сокращена до np >= 5:" +
          " последняя\nгруппа включает все последующие)" +
          "\n[укрупнённая выборка\n показана синими полосами]")
plt.xticks(np.linspace(0.5, 8.5, 10), range(1, 11))
plt.show()
```





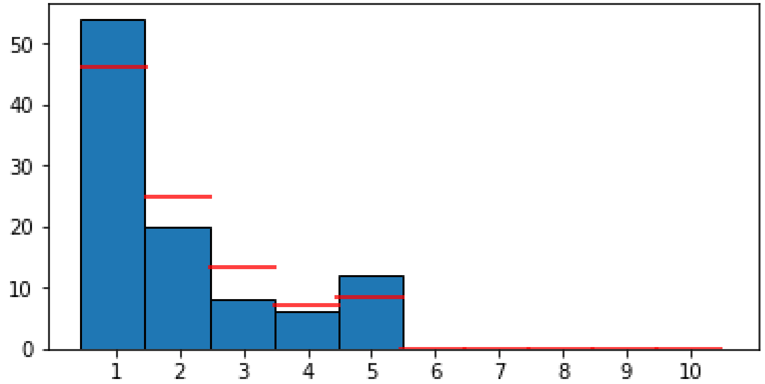




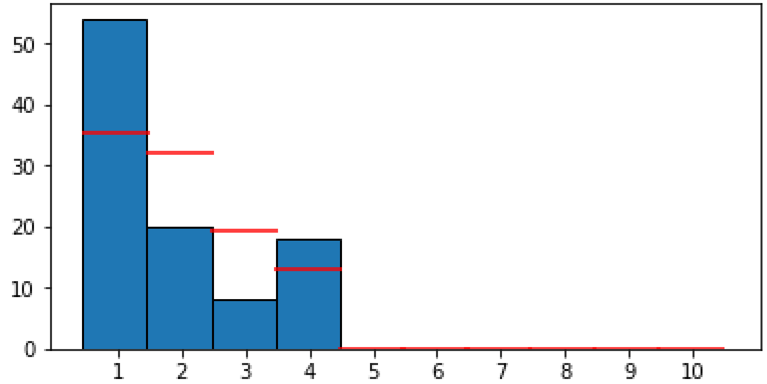



```
!!! Данные для теста хи-квадрат: !!!
```

Частотная таблица (число родителей с k сыновьями
на 100 человек, среди тех, у кого они есть) по сокращённой
выборке (сжато под геометрическое: последняя
группа включает все последующие)
[теоретическое сжатое геометрическое
показано красными полосами]

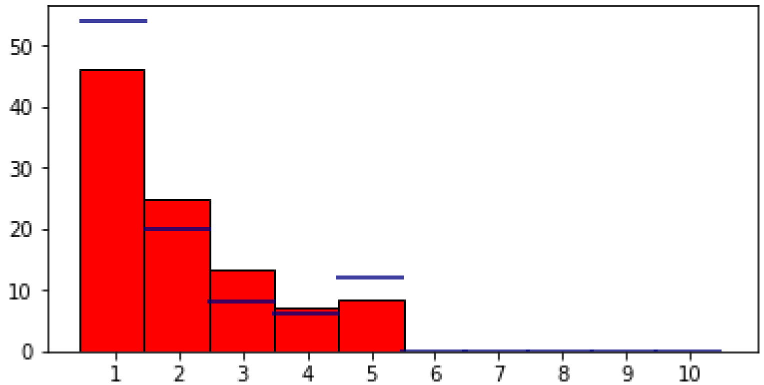


Частотная таблица (число родителей с k сыновьями
на 100 человек, среди тех, у кого они есть) по сокращённой
выборке (сжато под пуассоновское: последняя
группа включает все последующие)
[теоретическое сжатое пуассоновское
показано красными полосами]

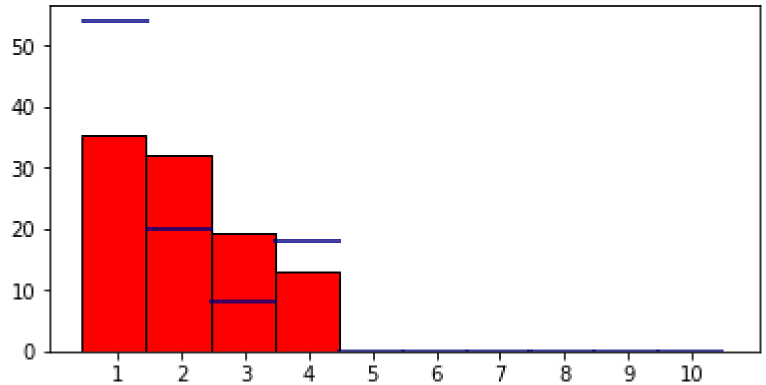


Те же графики наоборот:

Частотная таблица (число родителей с k сыновьями
на 100 человек, среди тех, у кого они есть) по теоретическому
геометрическому распределению
(сокращена до np >= 5: последняя
группа включает все последующие)
[укрупнённая выборка
показана синими полосами]



Частотная таблица (число родителей с k сыновьями
на 100 человек, среди тех, у кого они есть) по теоретическому
пуассоновскому распределению
(сокращена до np >= 5: последняя
группа включает все последующие)
[укрупнённая выборка
показана синими полосами]

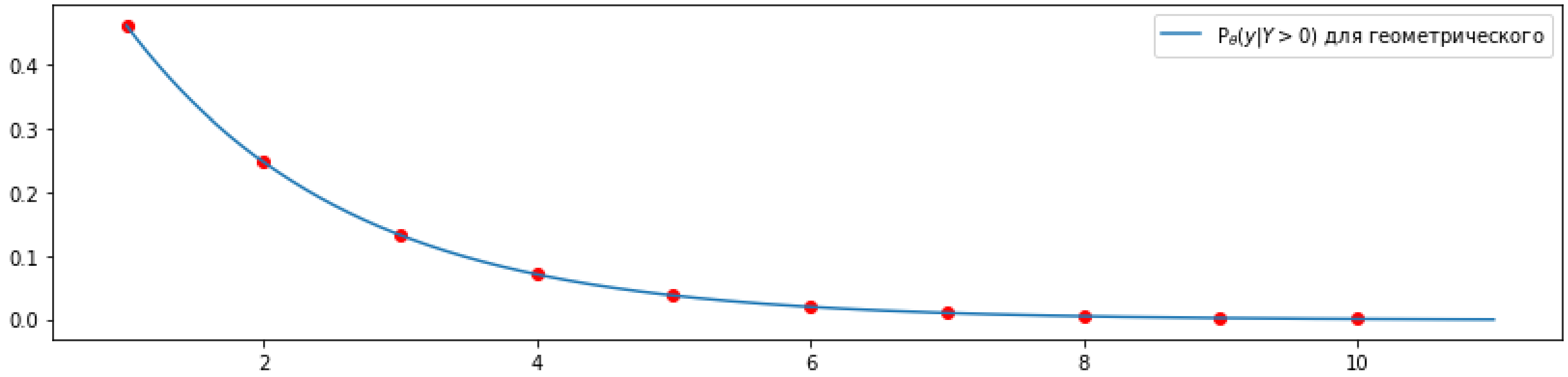


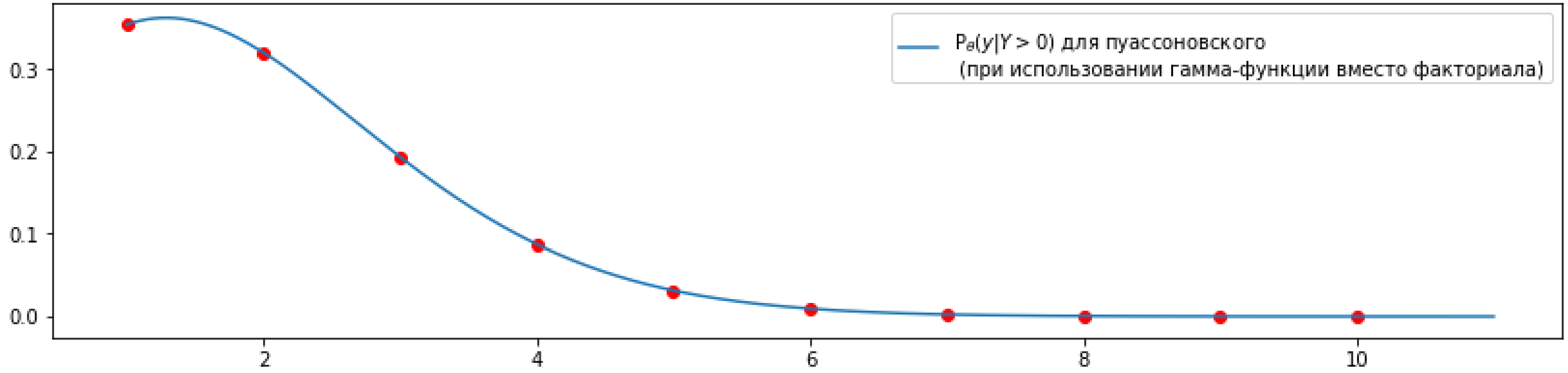
Комментарий к графикам: видно, что геометрическое распределение приближает лучше, и что условная вероятность подсчитана приблизительно корректно (можно вырезать участок из графика с нулями в детях и растянуть их на относительное изменение числа человек в сумме - получится график для условной вероятности)

Построим графики $P_\theta(Y|Y > 0)$, численно считая, что это функция от действительного, а не натурального (с нулём) числа, отмечая значения при целочисленном аргументе точками. (ещё один график для красоты, чтоб был)

In [27]:

```
plt.figure(figsize=(14,7))
from math import gamma
def pois_cond_pmf_gamma(x,mu):
    e = np.exp(- mu)
    return mu ** x * e / (1. - e) / (gamma(x+1))


plt.subplot(211)
grid = np.linspace(1, 11, 1000)
n_grid = np.arange(1, 11, 1)

plt.plot(grid, [geom_cond_pmf(x,p_data) for x in grid], label=
         "$\\mathsf{P}_\\theta (y \\left| Y > 0 \\right)$ для геометрического")
plt.scatter(n_grid, [geom_cond_pmf(x,p_data) for x in n_grid], color="red")
plt.legend()
plt.subplot(212)
plt.plot(grid, [pois_cond_pmf_gamma(x,mu_data) for x in grid], label=
         "$\\mathsf{P}_\\theta (y \\left| Y > 0 \\right)$ для пуассоновского\n" +
         " (при использовании гамма-функции вместо факториала)")
plt.scatter(n_grid, [pois_cond_pmf(x,mu_data) for x in n_grid], color="red")
plt.legend()
plt.show()
```





Множественное тестирование

In [32]:
```
def get_pval(Y, size=100, text=False):
    sub_Y = np.array(np.array(Y)[sps.randint.rvs(0, len(Y), size=100)])

    p_data = 1. / sub_Y.mean()
    def f(x):
        return x / (1. - np.exp( - x)) - sub_Y.mean()

    mu_data = scipy.optimize.root(f,2.).x[0]


    def to_freq_table(sub_Y, ddof=1):
        Y_table = np.zeros(np.array(sub_Y).max() + 1)
        for y in sub_Y:
            Y_table[y] += 1



        YY = []
        for i in range(ddof, len(Y_table)):
            if (Y_table[i] < 5):
                YY = Y_table[ddof:i]
                YY[-1] += Y_table[i:].sum()
                break
        return YY

    def sum_up(sub_Y, ddof=1):
        Y_table = np.zeros(np.array(sub_Y).max() + 1)
        for y in sub_Y:
            Y_table[y] += 1
        return Y_table[ddof:]

    def round_up_five(Y):
        for i in range(len(Y)):
            if Y[i] < 5.:
                if (np.array(Y[i:]).sum() >= 5.):
                    YY = Y[:]
                    YY[i] = np.array(Y[i:]).sum()
                    return YY[:(i+1)]
                else:
                    YY = Y[:]
                    YY[i-1] += np.array(Y[i:]).sum()
                    return YY[:i]
```

```
    return Y

def round_up(Y, l):
    assert len(Y) >= l
    YY_temp = np.array(Y)
    YY_temp[l-1] += np.array(YY_temp[l:]).sum()
    return YY_temp[:l]

YY = sum_up(sub_Y)

if (text):
    print("Количество отцов с (i+1) детьми = ", YY)
#print("Количество отцов с (i+1) детьми, с увеличенными группами = ", round_up_five(YY))

geom = []
pois = []

def geom_cond_pmf(x,p):
    q = 1. - p
    return q ** (x - 1) * p


def pois_cond_pmf(x,mu):
    e = np.exp(- mu)
    return mu ** x * e / (1. - e) / (factorial(x))

i = 1
while (geom_cond_pmf(x=i, p=p_data)*YY.sum() >= 5.):
    geom.append(geom_cond_pmf(x=i, p=p_data))
    i += 1


i = 1
while (pois_cond_pmf(x=i, mu=mu_data)*YY.sum() >= 5.):
    pois.append(pois_cond_pmf(x=i, mu=mu_data))
    i += 1

geom.append(1. - np.array(geom).sum())
if (geom[-1]*YY.sum() < 5.):
    geom[-2] += geom[-1]
    del geom[-1]
```

```
    pois.append(1. - np.array(pois).sum())
    if (pois[-1]*YY.sum() < 5.):
        pois[-2] += pois[-1]
        del pois[-1]


    geom = np.array(geom) * YY.sum()
    pois = np.array(pois) * YY.sum()
    if (text):
        print("YY (данные выборки для теста) = ", YY)
        print("YY (укрупнённые для геометрического распределения) = ", round_up(YY, len(geom)))
        print("YY (укрупнённые для пуассоновского распределения) = ", round_up(YY, len(pois)))

        print("geom (теоретическая выборка из геометрического) = ", geom)
        print("pois (теоретическая выборка из пуассоновского) = ", pois)

        print(round_up(YY, len(geom)))
    pval_geom = sps.chisquare(round_up(YY, len(geom)), geom).pvalue
    pval_pois = sps.chisquare(round_up(YY, len(pois)), pois).pvalue

    if (text):
        print("\nТест для геометрического:\n", pval_geom)
        print("\nТест для пуассоновского:\n", pval_pois)
    return [pval_geom, pval_pois]

print(get_pval(Y))
pvals = np.array([get_pval(Y) for i in range(8)])
pvals
```

```
[0.10077754172364231, 1.090711796599586e-08]
```

Out[32]:

```
array([[  1.28773922e-01,   4.70213026e-05],
       [  1.17260032e-01,   5.70785105e-08],
       [  4.15037553e-02,   1.96099515e-04],
       [  7.39719369e-01,   1.14823347e-04],
       [  1.48828731e-01,   5.30099508e-05],
       [  4.80687051e-02,   2.06355126e-05],
       [  4.96189385e-01,   1.24164639e-05],
       [  3.59361990e-02,   7.36005249e-09]])
```

In [33]:
```
pvals_geom = pvals[:, 0]
pvals_pois = pvals[:, 1]
```

Протестируем на восьми различных выборках гипотезу о том, что распределение - геометрическое.

In [34]:
```
from statsmodels.sandbox.stats.multicomp import multipletests
multipletests(pvals_geom, alpha=0.05, method='bonferroni')
```

Out[34]:
```
(array([False, False, False, False, False, False, False, False], dtype=bool),
 array([ 1.        ,  0.93808025,  0.33203004,  1.        ,  1.        ,
         0.38454964,  1.        ,  0.28748959]),
 0.0063911509545450107,
 0.00625)
```

Теперь протестируем гипотезу о том, что распределение - пуассоновское.

In [35]:
```
multipletests(pvals_pois, alpha=0.05, method='bonferroni')
```

Out[35]:
```
(array([ True,  True,  True,  True,  True,  True,  True,  True], dtype=bool),
 array([  3.76170421e-04,   4.56628084e-07,   1.56879612e-03,
          9.18586775e-04,   4.24079606e-04,   1.65084101e-04,
          9.93317112e-05,   5.88804200e-08]),
 0.0063911509545450107,
 0.00625)
```

Теперь протестируем 16 гипотез одновременно, первые восемь - за геометрическое, последние восемь - за пуассоновское. При этом (в методе Бонферрони) гипотезы, которые не отвергались будут не отвергаться, но те, что отвергались могут начать не отвергаться. При проверке большого числа гипотез этим методом падает мощность и использование этого метода не рекомендуется.

In [38]:
```
pvals_all = list(pvals_geom) + list(pvals_pois)
multipletests(pvals_all, alpha=0.05, method='bonferroni')
```

Out[38]:
```
(array([False, False, False, False, False, False, False, False,  True,
         True,  True,  True,  True,  True,  True,  True], dtype=bool),
 array([  1.00000000e+00,   1.00000000e+00,   6.64060084e-01,
          1.00000000e+00,   1.00000000e+00,   7.69099281e-01,
          1.00000000e+00,   5.74979184e-01,   7.52340842e-04,
          9.13256168e-07,   3.13759224e-03,   1.83717355e-03,
          8.48159213e-04,   3.30168201e-04,   1.98663422e-04,
          1.17760840e-07]),
 0.0032006977101884937,
 0.003125)
```

Вывод: множественное тестирование по варианту, предложенному на семинаре, демонстрирует аналогичный ответ:

- в первом тесте нулевая гипотеза, соответствующая геометрическому распределению **не** отвергается на данном α (все 8 тестов на различных подвыборках не отвергают гипотезу)
- во втором тесте нулевая гипотеза, соответствующая пуассоновскому распределению отвергается на данном α (единогласно отвергнута всеми 8 тестами)
- при одновременной проверке 16 гипотез с поправкой по методу Бонферрони результаты не меняются.

Замечание: число гипотез для множественного тестирования выбрано 8, т.к. метод Бонферрони не рекомендуется использовать при большем числе гипотез из-за потери мощности (сложно отвергнуть неверные гипотезы).

In [ ]:
```

```

In [ ]:
```

```