Случайные процессы. Прикладной поток.

Теоретическое задание 5.

Гауссовские процессы. Винеровский процесс.

1. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что следующие процессы тоже винеровские:

   а) $X_t = -W_t$;

   б) $X_t = W_t\, I\{t < T\} + (2W_T - W_t)I\{t \geqslant T\}$.

2. Пусть $(Y_t, t \in [0, 1])$ — гауссовский процесс с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией $r(s, t) = \min(s, t) - st$. Докажите, что такой процесс существует и что процесс $(X_t = (t + 1)Y_{t/(t+1)},\ t \geqslant 0)$ является винеровским.

3. Пусть $W_t^1, \ldots, W_t^d$ — независимые винеровские процессы. Докажите, что с вероятностью 1 процесс $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^d)$ (многомерный винеровский процесс) выйдет из шара произвольного фиксированного радиуса r с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^d$.

4. Докажите, что существует гауссовский процесс $X = (X_t, t \in \mathbb{R}_+^d)$ с нулевой функцией среднего и ковариационной функцией

$$R(s, t) = \prod_{k=1}^{d} \min(s_k, t_k),$$

   где $s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d$.

5. Пусть $(W_t, t \geqslant 0)$ — винеровский процесс. Докажите, что с вероятностью 1 его траектория имеет неограниченную вариацию на произвольном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, т.е. что

$$\sup_T \sum_{i=1}^{n} |W_{t_{i+1}} - W_{t_i}| = +\infty \text{ п.н.},$$

   где $T = \{a = t_0 < \ldots < t_n = b\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$.