Случайные процессы. Прикладной поток.

Теоретическое задание 2.

Марковские цепи с дискретным временем. PageRank.

1. Марковская цепь $(\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ имеет начальное состояние $\xi_0 = 0$ и переходные вероятности $\mathsf{P}(\xi_{n+1} = k+1 |\ \xi_n = k) = p$, $\mathsf{P}(\xi_{n+1} = k |\ \xi_n = k) = 1-p$, $k, n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$. Найдите распределение ξ_n. Докажите, что последовательность $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \min\{n :\ \xi_n = k\}$ также является цепью Маркова и найдите ее переходные вероятности.

2. * Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — марковская цепь с фазовым пространством $S = \{1,2,3\}$, начальным состоянием $\xi_0 = 1$ п.н. и матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 4/11 & 6/11 \end{pmatrix}.$$

Положим $\eta_n = I\{\xi_n = 1\} + 2I\{\xi_n \neq 1\}$. Докажите, что η_n — тоже марковская цепь, и найдите ее матрицу переходов.

3. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — марковская цепь с фазовым пространством $S = \{1, ..., N\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & ... & 0 \\ q & 0 & p & 0 & ... & 0 \\ q & 0 & 0 & p & ... & 0 \\ ... & & & & & \\ q & 0 & 0 & 0 & ... & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

где $0 < p < 1, q = 1 - p$. Нарисуйте граф, соответствующей данной марковской цепи, и найдите предельное распределение.

4. Приведите пример такой однородной марковской цепи с дискретным временем, что

   (a) у нее есть ровно одно стационарное распределение, но нет предельного;

   (b) у нее все распределения являются стационарными, но нет предельного;

   (c) у нее нет стационарного распределения, но есть пределы переходных вероятностей при $n \to \infty$.

   Докажите, что если однородная марковская цепь с дискретным временем имеет несколько стационарных распределений, то их, на самом деле, бесконечно много.

5. Пусть в модели PageRank пользователь браузера в дополнение к кликам по ссылкам один раз может перейти по кнопке *Назад* и вернуться на предыдущую страницу. Можно ли такую модель описать с помощью однородной марковской цепи? Если да, опишите, если нет, докажите.