Задача о рюкзаке

Шевкунов К.С. 594

12 ноября 2017 г.

1 Постановка задачи

1.1 Формулировка условия

Имеется набор из n предметов. У каждого предмета есть положительный вес w и стоимость c. Также дано неотрицательное число W — вместимость рюкзака. Требуется найти такое подмножество предметов M, чтобы оно помещалось в рюкзак, и суммарная стоимость предметов была максимальна. То есть:

$$\sum_{x \in M} w(x) \leq W, \sum_{x \in M} c(x) \to max$$

1.2 Цель

Постройте полиномиальную схему приближения для данной задачи. То есть необходимо придумать и реализовать алгоритм, который получает на вход экземпляр задачи о рюкзаке, а также произвольное (рациональное) $\varepsilon > 0$, и находит $(1+\varepsilon)$ - приближенное решение. Алгоритм должен работать за полиномиальное время относительно размера исходной задачи и $\frac{1}{\varepsilon}$.

1.3 Доказательство NP-трудности

Определим задачу:

$$SUBSET - SUM = \{(n_1, ..., n_k, N) | \exists \alpha \in \{0,1\}^k : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i n_i = N\}$$

В книге (Д.В. Мусатов, "Сложность вычислений. Конспект лекций") дока Конспект лекций) доказано, что задача $SUBSET - SUM$ является NP-полной. Сведём эту задачу полиномиальной к нашей и этим докажем, что она является NP-трудной.

Обозначим предметы натуральными числами $1..N$. Определим $\forall i \in \{1..N\}$: $c(i) := w(i) := n_i$, $W := N$ Тогда исходная задача свелась к поиску M такого, что:

$$\sum_{x \in M} n_i \leq N, \sum_{x \in M} n_i \rightarrow max$$

Или, иначе говоря к задаче поиска $\alpha \in \{0,1\}^k$, такого, что:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i n_i \leq N, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i n_i \rightarrow max \leq N$$

Ясно, что искомый максимум не больше N, и, если равняется N, то $(n_1, ..., n_k, N) \in SUBSET - SUM$. Иначе же оптимального подмножества не существует и $(n_1, ..., n_k, N) \notin SUBSET - SUM$.

Таким образом, с помощью полиномиального сведения мы научились решать задачу $SUBSET - SUM$ с помощью нашей задачи, т.е. с некоторым полиномиальным сведением мы можем решать любую задачу из класса NP с помощью нашей.

Таким образом, мы обосновали уместность рассмотрения приближённых решений для данной задачи. Далее рассмотрим так называемое псевдополиномиальное решение.

2 Псевдополиномиальное решение

Определение 1 *Пусть в постановку задачи входит числовой параметр n (не количественный) и алгоритм работает полиномиальное время от самого n. Тогда такой алгоритм называется псевдополиномиальным.*

В частности, для текущей задачи не известно полиномиального решения (т.е. такого, которое работает за полиномиальное от размера входа время, в частности, для числового параметра N размером входа будет $\log N$), но известно псевдополиномиальное решение.

2.1 Алгоритм

2.2 Доказательство

3 Полиномиальное приближение

3.1 Алгоритм

3.2 Доказательство

3.3 Работа на реальных данных