

# Задача о рюкзаке

Шевкунов К.С. 594

16 декабря 2017 г.

## 1 Постановка задачи

### 1.1 Формулировка условия

Имеется набор из  $n$  предметов. У каждого предмета есть положительный вес  $w$  и стоимость  $c$ . Также дано неотрицательное число  $W$  — вместимость рюкзака. Требуется найти такое подмножество предметов  $M$ , чтобы оно помещалось в рюкзак, и суммарная стоимость предметов была максимальна. То есть:

$$\sum_{x \in M} w(x) \leq W, \sum_{x \in M} c(x) \rightarrow \max$$

### 1.2 Цель

Постройте полиномиальную схему приближения для данной задачи. То есть необходимо придумать и реализовать алгоритм, который получает на вход экземпляр задачи о рюкзаке, а также произвольное (рациональное)  $\varepsilon > 0$ , и находит  $(1 - \varepsilon)$  - приближенное решение. Алгоритм должен работать за полиномиальное время относительно размера исходной задачи и  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

### 1.3 Доказательство NP-трудности

Определим задачу:

$$SUBSET - SUM = \{(n_1, \dots, n_k, N) | \exists \alpha \in \{0, 1\}^k : \sum_{i=1}^k \alpha_i n_i = N\}$$

В книге (Д.В. Мусатов, "Сложность вычислений. Конспект лекций") доказано, что задача  $SUBSET - SUM$  является NP-полной. Сведём эту задачу полиномиально к нашей и этим докажем, что она является NP-трудной.

Обозначим предметы натуральными числами  $1..N$ . Определим  $\forall i \in \{1..N\}$  :  $c(i) := w(i) := n_i$ ,  $W := N$  Тогда исходная задача свелась к поиску  $M$  такого, что:

$$\sum_{x \in M} n_i \leq N, \sum_{x \in M} n_i \rightarrow \max$$

Или, иначе говоря к задаче поиска  $\alpha \in \{0, 1\}^k$ , такого, что:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i n_i \leq N, \sum_{i=1}^k \alpha_i n_i \rightarrow \max \leq N$$

Ясно, что искомый максимум не больше  $N$ , и, если равняется  $N$ , то  $(n_1, \dots, n_k, N) \in SUBSET - SUM$ . Иначе же оптимального подмножества не существует и  $(n_1, \dots, n_k, N) \notin SUBSET - SUM$ .

Таким образом, с помощью полиномиального сведения мы научились решать задачу  $SUBSET - SUM$  с помощью нашей задачи, т.е. с некоторым полиномиальным сведением мы можем решать любую задачу из класса  $NP$  с помощью нашей.

Таким образом, мы обосновали уместность рассмотрения приближённых решений для данной задачи. Далее рассмотрим так называемое псевдополиномиальное решение.

## 2 Псевдополиномиальное решение $O(nW)$

**Определение 1** Пусть в постановку задачи входит числовой параметр  $n$  (не количественный; например, в задаче о рюкзаке веса объектов будут числовыми параметрами, т.к. их вклад в длину задачи - логарифм по основанию системы счисления от веса, но число объектов влияет на длину задачи линейно и будет количественным параметром). При этом алгоритм работает полиномиальное время от  $n$  и количественных параметров. Тогда такой алгоритм называется псевдополиномиальным.

В частности, для текущей задачи не известно полиномиального решения (т.е. такого, которое работает за полиномиальное от размера входа время, в частности, для числового параметра  $N$  размером входа будет  $\log N$ ), но известно псевдополиномиальное решение.

### 2.1 Алгоритм

Пусть исходные объекты задачи пронумерованы числами  $1..n$ ,  $W$  - ограничение на размер рюкзака. Применим метод динамического программирования:

#### 2.1.1 Подсчёт таблицы

`knapsack_pseudopolynomial_nw`

1. Инициализируем матрицу  $A$  размера  $(n+1, W+1)$  (индексы  $[0..n, 0..W]$ ) нулями.

2. for  $i$  in  $1 \dots n$ :  
  for  $s$  in  $1 \dots W$ :  
     $A[i, s] := A[i - 1, s]$   
    if  $(w(i) \leq s)$  and  $(A[i, s] > A[i - 1, s - w(i)] + c(i))$ :  
       $A[i, s] := A[i - 1, s - w(i)] + c(i)$
3. Вернуть  $A[n, W]$ , если нужна стоимость и/или восстановить подмножество за  $O(nW)$  по таблице  $A$  из ячейки  $A[n, W]$  описанным ниже способом.

### 2.1.2 Восстановление ответа по таблице

Несложно заметить, что, в каждую ячейку таблицы записывается максимум из двух (или из одной, если координаты второй ячейки выходят за границу таблицы) ранее подсчитанных ячеек.

Восстановим путь из начальной ячейки, в нашем случае любой ячейке с нулевой первой координатой, в ячейку, хранящую оптимальное значение, в нашем случае  $A[n, W]$ . Для этого, начиная из последней ячейки в этом пути, будем находить координаты одной или двух ячеек, максимум из которых записан в текущей (из описания выше ясно, что они определены однозначно для каждой ячейки; в нашем случае для  $A[i, s]$  это будут  $A[i-1, s]$  и  $A[i-1, s-w(i)]$  (последняя только если её координаты неотрицательны)) и смотреть, в каких ячейках достигается этот максимум, после чего перейдём в любую такую ячейку.

Будем повторять эти действия до тех пор, пока не придём в какую-нибудь из начальных ячеек. Одновременно с этим, при каждом переходе из строки  $i$  в строку  $i - 1$ , при котором уменьшается значение в ячейке (увеличивалось при построении таблицы, т.к. мы изменили направление движения) будем добавлять предмет  $i$  в ответ. Как следует прямо из доказательства, так мы восстановим один из оптимальных наборов.

Для восстановления достаточно один раз пройти по таблице, поэтому итоговое время работы алгоритма с восстановлением будет  $O(nW)$

## 2.2 Доказательство

Докажем по индукции, что  $A[i, s]$  - максимальная стоимость предметов, которые поместятся в рюкзак размера  $s$ , если использовать только предметы с номерами  $1..i$ , назовём это подзадачей  $[i, s]$  нашей задачи.

База индукции:  $\forall x \in N : A[0, x] = A[x, 0] = 0$ . Очевидно, она выполнена, в рюкзак нулевого размера ничего нельзя положить (в условии все веса и стоимости строго положительны). С другой стороны, если предметов нет, то положить в рюкзак нечего.

Переход: пусть  $\forall 0 < j \leq i : \forall 0 < p \leq s : ((j, p) \neq (i, s)) \rightarrow A[j, p]$  вычислено корректно. Докажем, что  $A[i, s]$  вычисленное из подсчитанных значений как алгоритме корректно.

Заметим, что оптимальный набор не обязательно единственен, например, для рюкзака размера 2 и предметами с массой и стоимостью 1, 1 и 2 можно положить как два предмета веса 1, так и один веса 2.

Рассмотрим множество оптимальных наборов для подзадачи  $[i, s]$ . Выполнен хотя бы один из двух вариантов:

- Существует оптимальный набор, в котором лежит предмет с номером  $i$ . Тогда  $A[i, s] = A[i - 1, s - w(i)] + c(i)$  и  $A[i, s] \geq A[i - 1, s]$ . Первое утверждение прямо следует из того, что оптимальность набора гарантирует оптимальность поднабора. Иначе поднабор можно улучшить и получить противоречие с оптимальностью набора. Отрицание второго условия означает, что существует набор без предмета с номером  $i$  лучше нашего и приводит к противоречию.
- Существует оптимальный набор, в котором не лежит предмет с номером  $i$ . Аналогично получаем, что  $A[i, s] \geq A[i - 1, s - w(i)] + c(i)$  (если  $s \geq w(i)$ ) и  $A[i, s] = A[i - 1, s]$ .

Таким образом, наш алгоритм, который по-сути выбирает максимум из двух величин  $A[i, s] = \max(A[i - 1, s], A[i - 1, s - w(i)] + c(i))$  (если обе существуют - иначе возможен только один вариант  $A[i, s] = A[i - 1, s]$ ), вычисляет оптимальное значение в обоих случаях.

Итого, корректность  $A[i, s]$  доказана по индукции для всех  $0 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq s \leq W$ , в том числе и для  $A[n, W]$ . Решение, очевидно, работает за  $O(nW)$ .

Восстановление ответа явно разбирает варианты из доказательства и так строит оптимальный набор, давая в сумме решение за  $O(nW)$ .

### 3 Псевдополиномиальное решение $O(nC)$

#### 3.1 Алгоритм

Для получения полиномиального приближения приведём очень похожее на классическое решение за  $O(nW)$  решение за  $O(nC)$

##### 3.1.1 Подсчёт таблицы

knapsack\_pseudopolynomial\_nc

1.  $C = \sum_{i=1}^n c(i)$
2. Инициализируем матрицу  $A$  размера  $(n+1, C+1)$  (индексы  $[0..n, 0..C]$ ) символом  $+\infty$ , который будем считать большим любого числа.
3.  $A[0, 0] := 0$

4. for  $i$  in  $1..n$ :  
 for  $s$  in  $1..C$ :  
 $A[i, s] = A[i - 1, s]$   
 if  $(s \geq c(i))$  and  $(A[i - 1, s - c(i)] + w(i) \leq \min(W, A[i, s]))$ :  
 $A[i, s] := A[i - 1, s - c(i)] + w(i)$
5.  $k := \operatorname{argmax}_k (A[n, k] < +\infty)$
6. вернуть  $k$ , если нужна стоимость и/или восстановить подмножество за  $O(nC)$  по таблице  $A$  из ячейки  $A[n, k]$

### 3.1.2 Восстановление ответа по таблице

Восстановление ответа идейно полностью аналогично восстановлению ответа для решения за  $O(nW)$ . Отличие состоит в том, что начальная ячейка одна -  $A[0, 0]$ , конечная -  $A[n, k]$  и изменились правила переходов. Приведём код для более подробного описания.

1.  $answer := []$   
 $\bar{k} := k$
2. for  $i$  in  $(n - 1) .. 0$ :  
 if  $A[i + 1, \bar{k}] \neq A[i, \bar{k}]$ :  
 $\bar{k} = \bar{k} - costs[i]$   
 $answer.append(i)$
3. return  $k, answer$

## 3.2 Доказательство

Докажем по индукции, что  $A[i, s]$  - минимальный вес подмножества предметов, которые можно поместить в рюкзак или  $+\infty$ , если такого нет, что использованы только предметы с номерами  $1..i$  и их суммарная стоимость равна  $s$ .

База индукции:  $A[0, 0] = 0$  - пустое множество предметов оптимально.  $\forall x > 0 : A[0, x] = +\infty$  - из пустого множества предметов нельзя выбрать подмножество с положительной стоимостью.

Переход: пусть  $\forall 0 < j \leq i : \forall 0 < p \leq s : ((j, p) \neq (i, s)) \rightarrow A[j, p]$  вычислено корректно. Докажем, что  $A[i, s]$  вычисленное из подсчитанных значений как алгоритме корректно.

Возможны два случая (хотя бы один из них выполнен, возможно, оба):

- Пусть существует оптимальный (в смысле  $A[i, s]$  как минимума) набор предметов, содержащий предмет с номером  $i$ . Тогда  $A[i, s] = A[i, s - c(i)] + w(i)$ , т.к. из оптимальности набора следует оптимальность поднабора и  $A[i, s] \leq A[i - 1, s]$ , иначе получим противоречие с оптимальностью.

- Пусть существует оптимальный набор предметов, не содержащий предмет с номером  $i$ . Тогда аналогично:  $A[i, s] = A[i - 1, s]$  и  $A[i, s] \leq A[i - 1, s - c(i)] + w(i)$ .

Таким образом, наш алгоритм, который по-сути выбирает минимум из двух величин  $A[i, s] = \min(A[i - 1, s], A[i - 1, s - c(i)] + w(i))$  (если обе допустимы, т.е.  $A[i - 1, s - c(i)] + w(i) \leq C$ , иначе  $A[i, s] = A[i - 1, s]$ ), вычисляет оптимальное значение в обоих случаях.

Итого, корректность  $A[i, s]$  доказана по индукции для всех  $0 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq s \leq W$ . По значениям  $A[i, s]$ , перебирая оптимальную суммарную стоимость  $s \in 0..C$  можно восстановить ответ в задаче, достаточно просто найти  $A[n, s] \neq +\infty$  с наибольшим значением  $s$ . Значения в таблице  $A$  вычисляются за  $O(nC)$ , поиск наибольшего значения работает за  $O(C)$ , восстановление оптимального набора за  $O(nC)$ , оно корректно т.к. явно разбирает случаи из доказательства. Итого, решение работает за  $O(nC)$ .

## 4 Полиномиальное приближение

### 4.1 Алгоритм

knapsack\_polynomial\_estimation:

1.  $P := \max_{c(x)|w(x) \leq W} (w(x))$  (вообще говоря, предметы, которые не помещаются в пустой рюкзак можно выкинуть на этапе формулировки задачи)
2.  $K := \frac{\varepsilon P}{n}$
3.  $c_{zipped}(x) := \lfloor \frac{c(x)}{K} \rfloor$
4. Найти оптимальное подмножество  $M^*$  для задачи со стоимостями  $c_{zipped}(x)$  псевдополиномиальным алгоритмом за  $O(nC)$  и вернуть его.

### 4.2 Доказательство

Пусть  $M$  - произвольное множество предметов.

Обозначим  $cost(M) := \sum_{x \in M} c(x)$ ,  $cost_{zipped}(M) := \sum_{x \in M} c_{zipped}(x)$

Пусть  $M^*$  - множество, которое было найдено псевдополиномиальным алгоритмом, а оптимальное множество предметов в задаче  $O$ .

Тогда  $K cost_{zipped}(M^*) \geq cost(O) - nK$ . Действительно, если бы мы не округляли веса до целых и нашли оптимальное решение, ты получили бы  $cost_{zipped} \equiv \frac{cost}{K}$ . Однако, из-за округления вниз имеем  $\forall i : c_{zipped}(i) \leq \frac{c(i)}{K} - 1$ , в частности  $cost_{zipped}(M^*) \geq cost_{zipped}(O) \geq \frac{cost(O)}{K} - n$  (второе неравенство получается суммированием неравенств для каждого предмета набора  $O$ , а первое следует из оптимальности  $M^*$ ). Умножая неравенство на  $K$ , получим требуемое неравенство.

Заметим, что, если в оптимальном наборе  $O$  есть хотя бы один предмет, то  $cost(O) \geq P = \max(c(x)|w(x) \leq W)$ . Заметим, что это верно и если оптимальный набор пустой.

Тогда  $cost(M^*) \geq K cost_{zipped}(M^*) \geq cost(O) - nK = cost(O) - \varepsilon P \geq cost(O) - \varepsilon cost(O) = (1 - \varepsilon) cost(O)$

Полученное утверждение в точности есть доказываемое.

## 5 Реализация и работа на тестах

(Стоит ли добавлять сюда код реализации? На питоне он короткий)

### 5.1 Реализация (Python 3)

```
import numpy as np

def knapsack_pseudopolynomial_nc(W, weights, costs):
    """ Псевдополиномиальное решение для задачи о рюкзаке.
    W - вместимость рюкзака
    weights - веса предметов
    costs - стоимости предметов
    weight и costs - numpy.ndarray или эквивалентные"""

    assert weights.shape == costs.shape
    # assert weights.dtype == int
    assert costs.dtype == int
    assert (weights > 0).all()
    assert (costs > 0).all()

    n = len(weights)
    C = costs.sum()

    A = np.ones((n + 1, C + 1), dtype=int) * np.inf
    A[0, 0] = 0
    for i in range(n):
        for s in range(C + 1):
            A[i + 1, s] = A[i, s]
            if ((s >= costs[i]) and
                (A[i, s - costs[i]] + weights[i] <=
                 min(W, A[i + 1, s]))):
                A[i + 1, s] = A[i, s - costs[i]] + weights[i]

    indexes = np.arange(C + 1)[A[n, :] < np.inf]
    if 0 == len(indexes):
        return 0, [] # ни один предмет не влезает
```

```
k = indexes[-1]

answer = []
k_coordinate = k
for i in range(n - 1, -1, -1):
    if A[i + 1, k_coordinate] == A[i, k_coordinate]:
        pass
    else:
        k_coordinate -= costs[i]
        answer.append(i)
return k, answer

def knapsack_polynomial_estimation(W, weights, costs, eps):
    """Полиномиальное приближение задачи о рюкзаке.
    W - вместимость рюкзака
    weights - веса предметов
    costs - стоимости предметов
    eps - точность приближения (должна быть 0 < eps < 1) """

    assert W >= 0
    assert weights.shape == costs.shape
    assert 0 < eps < 1
    assert (weights > 0).all()
    assert (costs > 0).all()

    if not (weights <= W).any():
        return 0, []

    n = len(weights)
    P = costs[weights <= W].max()
    K = eps * P / n

    costs_zipped = (np.copy(costs) / K).astype(int)
    nonzero_costs = costs_zipped != 0

    _, ans_on_nonzero = (
        knapsack_pseudopolynomial_nc(int(W),
                                     weights[nonzero_costs],
                                     costs_zipped[nonzero_costs])
    )

    ans = np.arange(n)[nonzero_costs][ans_on_nonzero]
    return costs[ans].sum(), ans
```



## 5.2 Тестирование алгоритма

Для тестирования алгоритмов был написан также алгоритм, находящий ответ на задачу с помощью полного перебора. Запуская его на тестах с целыми весами и стоимостями из дискретного равномерного распределения, была протестирована сначала корректность *knapsack\_pseudopolynomial\_nc*, а потом и *knapsack\_polynomial\_estimation*.

Дальнейшее тестирование на вещественных весах проходило на тестах из вещественного равномерного распределения при проверке с помощью полного перебора.

Везде в тестах ниже веса взяты из равномерного дискретного или вещественного распределения  $U\{1, 2, \dots, w + 2\}$  или  $U(0, w + 2)$  соответственно.

Сами тесты можно сгенерировать, используя исходные коды и [Python 3.5.2 / GCC 5.4.0 20160609] из репозитория Ubuntu 16.04.

Итого, пройденные тесты можно классифицировать:

- Тесты для псевдополиномиального алгоритма,  $W = 0.9, n = 0.9, 10$  запусков для каждой пары  $(W, n)$  на стоимостях из дискретного равномерного распределения
- Тесты для приближения, аргументы те же,  $\varepsilon = 0.01$ . Полиномиальное приближение нашло во всех тестах точный ответ.
- Тесты для приближения, аргументы те же,  $\varepsilon = 0.3$ . Полиномиальное приближение не нашло точный ответ для нескольких тестов, но ошиблось в пределах допустимой погрешности.
- Тесты для приближения, 100 тестов по 15 элементов, размер рюкзака 15, стоимости в  $U(0, 1]$ ,  $\varepsilon = 0.1$  - вещественное равномерное распределение. В 98 тестах полиномиальное приближение нашло точный ответ, во всех получен ответ в пределах погрешности. Среднее отклонение от максимального ответа равно  $0.999979750757 \gg 1 - 0.1$
- Тесты для приближения, 30 тестов по 15 элементов, размер рюкзака 15, стоимости в  $U(0, 10000]$ ,  $\varepsilon = 0.1$  - вещественное равномерное распределение. Во всех тестах полиномиальное приближение нашло точный ответ.
- Тесты для приближения, 30 тестов по 15 элементов, размер рюкзака 15, стоимости в  $U[10000 - 5, 10000]$ ,  $\varepsilon = 0.1$  - вещественное равномерное распределение. В 9 тестах приближение нашло точный ответ, среднее отклонение от максимального ответа равно  $0.999953226882 \gg 1 - 0.1$
- Тесты для приближения, 30 тестов по 15 элементов, 7 из которых из  $U[3000, 3005]$ , 8 из  $U[5000, 5005]$ ,  $\varepsilon = 0.1$ . В 27 тестах приближение нашло точный ответ, среднее отклонение от максимального ответа равно  $0.999982242818 \gg 1 - 0.1$

### 5.3 Резюме

Содержательны результаты двух последних групп тестов - в том случае, когда стоимости элементов большие, но сильно различаются между собой, алгоритм находит точный оптимальный ответ, при этом гораздо быстрее чем точное решение за  $O(nC)$ . Когда же есть много объектов с похожими стоимостями и весами, алгоритм начинает работать хуже, хотя его ошибка на тестах, описанных выше, оказывается незначительной и сильно лучше ошибки  $(1 - \varepsilon)$ , при этом при фиксированном числе объектов увеличение числа групп объектов с похожими стоимостями, алгоритм работает лучше, чем если все объекты объекты из одной группы и сильно похожи друг на друга.

Такое поведение понятно из сути алгоритма - мы сопоставляем некоторому отрезку стоимостей одно число:  $\forall x \in N : \forall y \in [xK, (x+1)K) : \lfloor \frac{y}{K} \rfloor = x \in N$ , т.е. "округляем" стоимости.

Отсюда ясно, что на тестах с достаточно равномерными стоимостями алгоритм будет хорошо работать, тогда как, если есть близкие по массе и стоимости предметы, то точность будет падать. Более того, если известно, что на каждом отрезке из отрезков вида  $[xK, (x+1)K)$  есть не более одной стоимости, то алгоритм полиномиального приближения находит точный ответ.