

Векторная функция векторного аргумента – это соответствие r , при котором \forall точке $x \in \Omega$ евклидова пространства R^m сопоставляется вектор $r(x)$ множества Q евклидова пространства R^p .

$$x \in \Omega = \{(x_1, \dots, x_m)\} \subset R^m \rightarrow r(x) \in Q = \{(r_1, \dots, r_p)\} \subset R^p$$

При этом множество Ω область задания, а Q множество значений. Если $\Omega = \{x\}$ – множество точек на прямой, то имеем функцию одного скалярного аргумента $r(x)$.

Если $\Omega = \{(x_1, \dots, x_m)\} \subset R^m$ – множество точек евклидова пространства, то имеем векторную функцию нескольких скалярных аргументов $r(x_1, \dots, x_m)$.

Годограф векторной функции

Пусть (r_1, \dots, r_p) – координаты $r(x) \in Q \subset R^p$. Задание векторной функции $r(x)$ равносильно заданию скалярных функций $r_1(x_1, \dots, x_m), \dots, r_p(x_1, \dots, x_m)$, и если начала этих векторов совместить с началом соответствующей ДПСК, то точечное множество концов рассматриваемых радиус векторов будем называть годографом векторной функции.

If $p = 3$ годограф векторной функции есть кривая, $p = 2$ – поверхность.

Способы задания кривых

Элементарной кривой называют множество точек пространства, являющееся образом отрезка при топологическом отображении его в пространство.

Точки соответствующие конечным точкам отрезка, называют конечными точками элементарной кривой. Элементарные кривые – примыкающие если одна или обе пары их конечных точек совпадают между собой.

Кривой линией называется множество точек пространства, которое состоит из конечного или счетного множества элементарных кривых, примыкающих друг к другу.

Пусть γ – элементарная кривая, являющаяся образом промежутка $a < t < b$ при топологическом отображении f его в пространство R^3 . $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координаты точки на кривой γ соответствующей значению $t \in (a, b)$.

Тогда систему равенств $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $t \in (a, b)$ называют уравнениями кривой γ в параметрической форме или параметризацией кривой (кривая γ параметризована этими уравнениями).

Если же считать $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ координатами радиус-вектора $\vec{r}(t)$ соответствующей точки кривой γ , мы получим векторную функцию $\vec{r}(t)$, $t \in (a, b)$, годографом которой является данная кривая. (способ задания кривой через векторную функцию скалярного аргумента по сути эквивалентный параметрическому способу).

Допустим, что кривая γ задается векторной функцией $\vec{r}(t)$, $t \in (a, b)$.

Тогда заменив параметр t параметром u через отношение $t = g(u)$, $u \in (\alpha, \beta)$, где g – строго возрастающая и непрерывная функция. Тогда получится новая параметризация, одну кривую можно задать множеством параметризаций.

Гладкая кривая – такая кривая, у которой векторная функция с помощью которой задана кривая дифференцируема 1 раз. Регулярная k раз $k \geq 1$.

Касательная к кривой

Пусть γ – некоторая кривая, P – фиксированная точка и M – подвижная точка на кривой γ , PM – хорда кривой.

Прямая PM стремится к прямой PT при $M \rightarrow P$, если угол φ между этими прямыми стремится к нулю, когда $M \rightarrow P$.

Касательной к кривой γ в точке P называют прямую PT , к которой стремится хорда PM , когда $M \rightarrow P$.

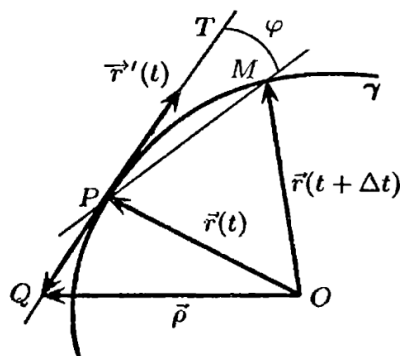


Рис. 8.1

Нормальной плоскостью кривой в точке P называется плоскость, проходящая через точку P перпендикулярно касательной в данной точке.

Векторное уравнение нормальной плоскости π в точке $P(\vec{r}(t))$ имеет вид: $(\vec{\rho} - \vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0$, где $\vec{\rho}$ – радиус-вектор произвольной точки плоскости π .

Соприкасающаяся плоскость

Пусть γ – некоторая кривая, $P \in \gamma$ – фиксированная точка, $M \in \gamma$ – подвижная, PT – касательная к кривой в точке P , PTM – плоскость проведенная через касательную PT и точку M .

Плоскость PTM стремится к плоскости π при $M \rightarrow P$, если угол между этими плоскостями стремится к нулю, когда $M \rightarrow P$. Плоскость π , к которой стремится плоскость PTM , когда $M \rightarrow P$, называют соприкасающейся плоскостью кривой γ в точке P .

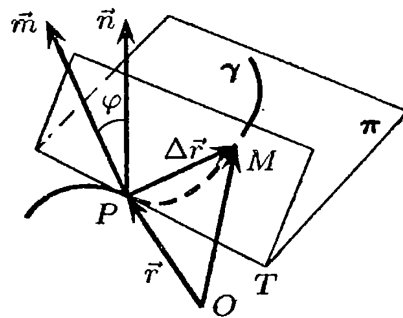


Рис. 8.2

Спрямяющая плоскость, главная нормаль, бинормаль

Прямую проходящую через точку P перпендикулярно касательной кривой, называют нормалью кривой. (CD, MN)

Нормаль, лежащую в соприкасающейся плоскости кривой, называют главной нормалью кривой. (CD)

Нормаль, перпендикулярную соприкасающейся плоскости кривой, называют бинормалью кривой. (MN)

Плоскость, определяемую касательной к кривой и бинормалью, называют спрямяющей плоскостью. (π_3)

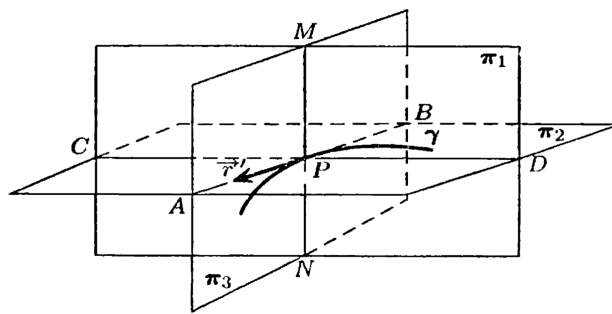


Рис. 8.4

Длина дуги кривой

Пусть $\gamma = \widehat{AB}$ – дуга кривой, являющаяся образом замкнутого отрезка $[a, b]$ при топологическом отображении.

Разобьем дугу AB на n частичных дуг точками: $A = A_0, \dots, A_n = B$ и впишем в неё ломаную с вершинами в этих точках, причем каждое звено ломаной будет хордой соответствующей частичной дуги.

Длиной дуги кривой называют предел периметра ломанной линии, вписанной в данную дугу, если число звеньев этой ломаной линии неограниченно возрастает, а длина каждого звена стремится к 0.

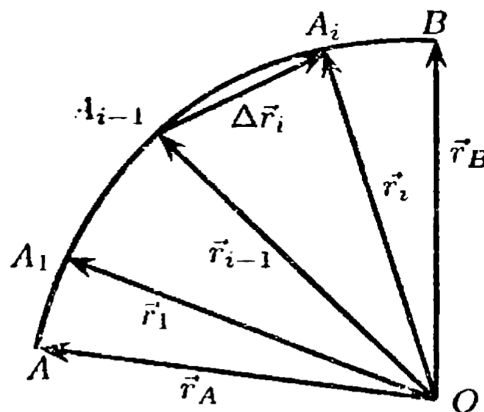


Рис. 8.5

Естественная параметризация

Пусть γ гладкая кривая без особых точек, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in (a, b)$, – параметризация кривой γ , $J(\vec{r}(t_0))$ – начальная точка отвечающая параметру t_0 .

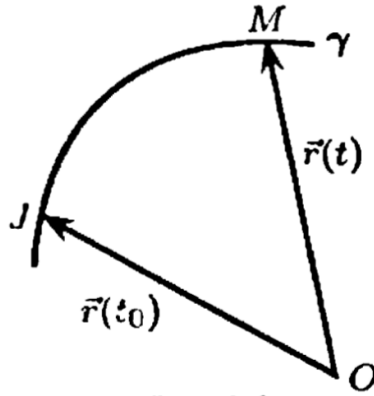


Рис. 8.6

Длина дуги имеющей начало в J и конец в M , соответствующей параметру t , определяется формулой $\int_{t_0}^t |\vec{r}'(t)| dt$.

$s(t)$, $t \in (a, b)$ – однозначная, дифференцируемая и монотонно возрастающая т. к. $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)| > 0$.

Значит \exists обратная функция с такими же свойствами, это влечет существование взаимно однозначного (и непрерывного) соответствия между точками γ и значениями длины дуги, отсчитываемой от начальной точки J .

Точкам расположенным по разные стороны от J соответствуют разные значения параметра s .

Поскольку между точками кривой γ и значениями длины дуги s \exists взаимно однозначное и непрерывное соответствие, то длину дуги s можно принять за новый параметр, который будем называть натуральным параметром, а параметризация $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in (\alpha, \beta)$, называется естественной.

Кривизна кривой

Пусть γ – регулярная кривая без особых точек, $P \in \gamma$ – фиксированная точка, $M \in \gamma$ – точка отличная от P и близкая к P ,

φ – угол между касательными к γ в точках P, M , l – длина дуги \widehat{PM} .

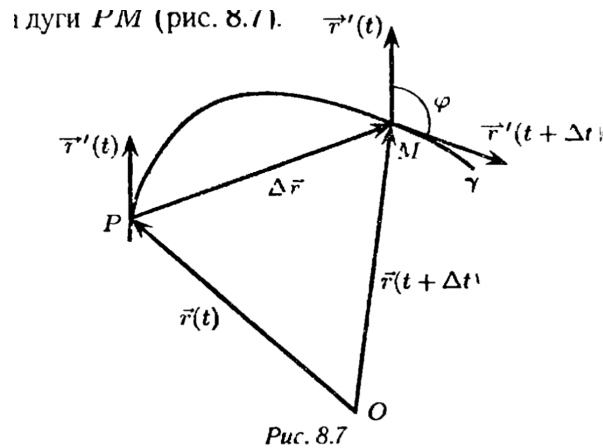


Рис. 8.7

Кривизной кривой в данной точке называют предел отношения угла поворота касательной на дуге кривой, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги т. е. $k = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\varphi}{l}$.

Кручение кривой

Пусть γ – регулярная кривая без особых точек, $P \in \gamma$ – фиксированная точка, $M \in \gamma$ – точка отличная от P и близкая к P , ψ – угол между нормальными векторами $\vec{\beta}(t)$ и $\vec{\beta}(t + \delta t)$ соприкасающихся плоскостей кривой γ в точках P, M , l – длина дуги \widehat{PM} .

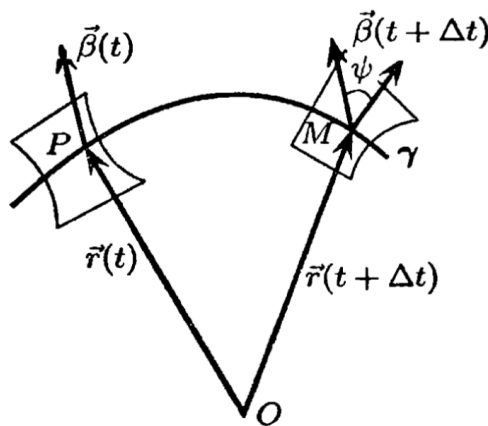


Рис. 8.8

Нормальный вектор соприкасающейся плоскости кривой лежит на бинормали этой кривой в рассматриваемой точке.

Абсолютным кручением $|\kappa|$ называют предел отношения угла поворота бинормали на дуге кривой, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги: $|\kappa| = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\psi}{l}$

Если кривая задана естественной параметризацией и её кривизна $k(s) = |\vec{r}''(s)|$, $s \in (a, b)$, то абсолютное кручение в этом случае: $|\kappa| = \frac{|(\vec{r}'(s), \vec{r}''(s), \vec{r}'''(s))|}{k^2(s)}$.

Кручением кривой в точках, в которых определяется абсолютное кручение, называют величину $\kappa(t) = \frac{(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t))}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|^2}$

Поверхность

Элементарной поверхностью называют множество точек пространства, являющееся топологическим отображением круга и ограничивающей его окружности.

При этом точки, являющиеся топологическим отображением точек окружности, называют граничными точками.

Граничные точки образуют замкнутую кривую – границу элементарной поверхности.

Говорят, что две элементарные поверхности склеены, если они находятся в таком взаимном расположении, при котором части их границ или обе границы целиком совпадают между собой.

Однако в результате склеивания может получиться как множество не являющееся элементарной поверхностью так и снова элементарная поверхность.

Поверхностью называют множество точек пространства, которое может быть склеено из конечного или счетного множества элементарных поверхностей.

Параметрическое уравнение поверхности – $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$.

Очевидно, что векторное уравнение будет $\vec{r} = \vec{r}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D$

Координатными линиями данной параметризации называют линии на поверхности, соответствующие прямым $u = \text{const}, v = \text{const}$.

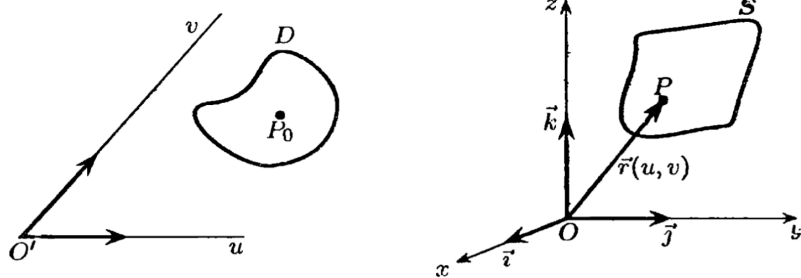


Рис. 9.1