Векторная функция векторного аргумента – это соответствие r, при котором $\forall$ точке $x \in \Omega$ евклидова пространства R^m сопостовляется вектор $r(x)$ множества Q евклидова пространства R^p.
$x \in \Omega = \{(x_1, \ldots, x_m)\} \subset R^m \to r(x) \in Q = \{(r_1, \ldots, r_p)\} \subset R^p$
При этом множество Ω область задания, а Q множество значений. Если $\Omega = \{x\}$ – множество точек на прямой, то имеем функцию одного скалярного аргумента $r(x)$.
Если $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_m)\} \subset R^m$ – множество точек евклидова пространства, то имеем векторную функцию нескольких скалярных аргументов $r(x_1, \ldots, x_m)$.

Годограф векторной функции
Пусть $(r_1, \ldots, r_p)$ – координаты $r(x) \in Q \subset R^p$. Задание векторной функции $r(x)$ равносильно заданию скалярных функций $r_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, r_p(x_1, \ldots, x_m)$, и если начала этих векторов совместить с началом соответствующей ДПСК, то точечное множество концов рассматриваемых радиус векторов будем называть годографом векторной функции.
If p = 3 годограф векторной функции есть кривая, p = 2 – поверхность.

Способы задания кривых
Элементарной кривой называют множество точек пространства, являющееся образом отрезка при топологическом отображении его в пространство.
Точки соответствующие конечным точкам отрезка, называют конечными точками элементарной кривой. Элементарные кривые – примыкающие если одна или обе пары их конечных точек совпадают между собой.
Кривой линией называется множество точек пространства, которое состоит из конечного или счетного множества элементарных кривых, примыкающих друг к другу.
Пусть γ – элементарная кривая, являющаяся образом промежутка $a < t < b$ при топологическом отображении f его в пространство R^3. $x(t),\ y(t),\ z(t)$ – координаты точки на кривой γ соответствующей значению $t \in (a, b)$.
Тогда систему равенств $x(t),\ y(t),\ z(t),\ t \in (a, b)$ называют уравнениями кривой γ в параметрической форме или параметризацией кривой (кривая γ параметризована этими уравнениями).
Если же считать $x(t),\ y(t),\ z(t)$ координатами радиус-вектора $\overrightarrow{r}(t)$ соответствующей точки кривой γ, мы получим векторную функцию $\overrightarrow{r}(t),\ \ t \in (a, b)$, годографом которой является данная кривая. (способ задания кривой через векторную функцию скалярного аргумента по сути эквивалентный параметрическому способу).
Допустим, что кривая γ задается векторной функцией $\overrightarrow{r}(t),\ t \in (a, b)$.
Тогда заменив параметр t параметром u через отношение $t = g(u),\ u \in (\alpha, \beta)$, где g – строго возрастающая и непрерывная функция. Тогда получится новая параметризация, одну кривую можно задать множеством параметризаций.
Гладкая кривая – такая кривая, у которой векторная функция с помощью которой задана кривая дифференциируема 1 раз. Регулярная k раз $k \geq 1$.

Касательная к кривой
Пусть γ – некторая кривая, P – фиксированная точка и M – подвижная точка на кривой $\gamma,\ PM$ – хорда кривой.
Прямая PM стремится к прямой PT при $M \to P$, если угол φ между этими прямыми стремится к нулю, когда $M \to P$.
Касательной к кривой γ в точке P называют прямую PT, к которой стремится хорда PM, когда $M \to P$.

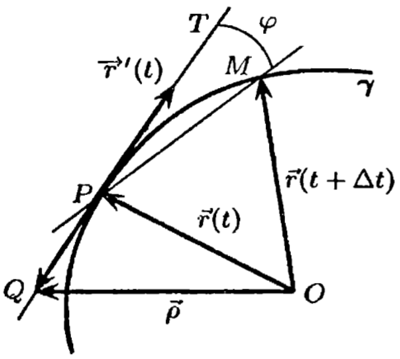

Рис. 8.1

Нормальной плоскостью кривой в точке P называется плоскость, проходящая через точку P перпендикулярно касательной в данной точке.
Векторное уравнение нормальной плоскости π в точке $P(\overrightarrow{r}(t))$ имеет вид: $(\overrightarrow{\rho} - \overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t) = 0$, где $\overrightarrow{\rho}$ – радиус-вектор произвольной точки плоскости π.

Соприкасающаяся плоскость

Пусть γ – некоторая кривая, $P \in \gamma$ – фиксированная точка, $M \in \gamma$ – подвижная, PT – касательная к кривой в точке P, PTM – плоскость проведенная через касательную PT и точку M.

Плоскость PTM стремится к плоскости π при $M \to P$, если угол между этими плоскостями стремится к нулю, когда $M \to P$.

Плоскость π, к которой стремится плоскость PTM, когда $M \to P$, называют соприкасающейся плоскостью кривой γ в точке P.

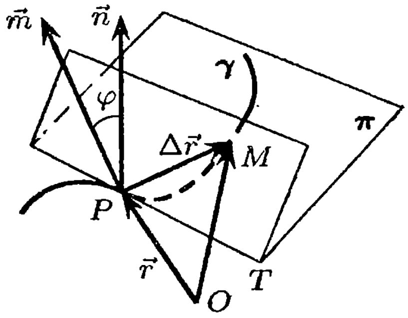

Рис. 8.2

Спрямляющая плоскость, главная нормаль, бинормаль

Прямую проходящую через точку P перпендикулярно касательной кривой, называют нормалью кривой. (CD, MN)

Нормаль, лежащую в соприкасающейся плоскости кривой, называют главной нормалью кривой. (CD)

Нормаль, перпендикулярную соприкасающейся плоскости кривой, называют бинормалью кривой. (MN)

Плоскость, определяемую касательной к кривой и бинормалью, называют спрямляющей плоскостью. (π_3)

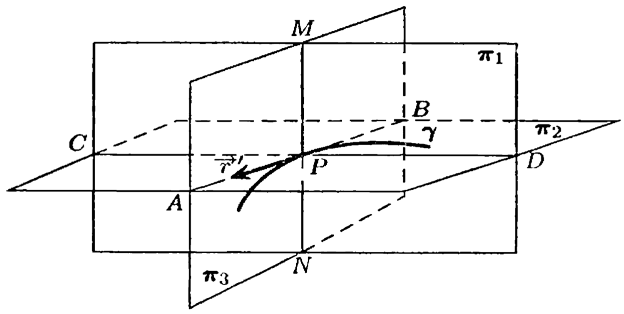

Рис. 8.4

Длина дуги кривой

Пусть $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ – дуга кривой, являющаяся образом замкнутого отрезка $[a, b]$ при топологическом отображении.

Разобьем дугу AB на n частичных дуг точками: $A = A_0, \ldots, A_n = B$ и впишем в неё ломаную с вершинами в этих точках, причем каждое звено ломаной будет хордой соответствующей частичной дуги.

Длиной дуги кривой называют предел периметра ломанной линии, вписанной в данную дугу, если число звеньев этой ломаной линии неограниченно возрастает, а длина каждого звена стремится к 0.

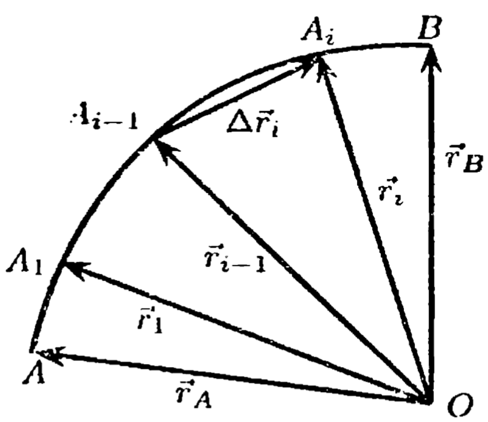

Рис. 8.5

Естественная параметризация
Пусть γ гладкая кривая без особых точек, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, $t \in (a, b)$, – параметризация кривой γ, $J(\overrightarrow{r}(t_0))$ – начальная точка отвечающая параметру t_0.

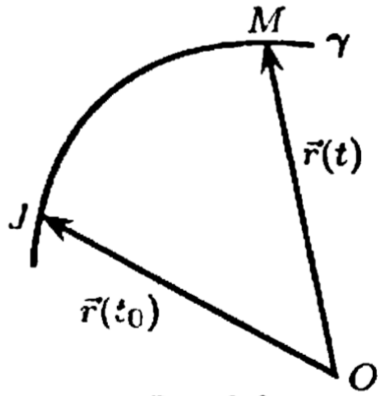

Рис. 8.6

Длина дуги имеющей начало в J и конец в M, соотвествующей параметру t, определяется формулой $\int\limits_{t_0}^{t} |\overrightarrow{r}(t)| dt$.
$s(t), t \in (a, b)$ – однозначная, дифференциируемая и монотонно возрастающая т. к. $\frac{ds}{dt} = |\overrightarrow{r}(t)| > 0$.
Значит $\exists$ обратная функция с такими же свойствами, это влечет существование взаимно однозначного (и непрерывного) соответствия между точками γ и значениями длины дуги, отсчитываемой от начальной точки J.
Точкам расположенным по разные стороны от J соответствуют разные значения параметра s.
Поскольку между точками кривой γ и значениями длины дуги s $\exists$ взаимно однозначное и непрерывное соответствие, то длину дуги s можно принять за новый параметр, который будем называть натуральным параметром, а параметризация $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s), s \in (\alpha, \beta)$, называется естественной.

Кривизна кривой
Пусть γ – регулярная кривая без особых точек, $P \in \gamma$ – фиксированная точка, $M \in \gamma$ – точка отличная от P и близкая к P, φ – угол между касательными к γ в точках P, M, l – длина дуги $\overset{\frown}{PM}$.

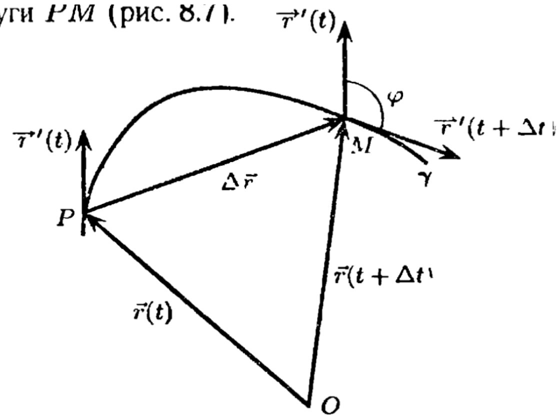

Рис. 8.7

Кривизной кривой в данной точке называют передел отношения угла поворота касательной на дуге кривой, стягивающей-ся к данной точке, к длине этой дуги т. е. $k = \lim\limits_{l \to 0} \frac{\varphi}{l}$.

Кручение кривой
Пусть γ – регулярная кривая без особых точек, $P \in \gamma$ – фиксированная точка, $M \in \gamma$ – точка отличная от P и близкая к P, ψ – угол между нормальными векторами $\overrightarrow{\beta}(t)$ и $\overrightarrow{\beta}(t+\delta t)$ соприкасающихся плоскостей кривой γ в точках P, M, l – длина дуги $\overset{\frown}{PM}$.

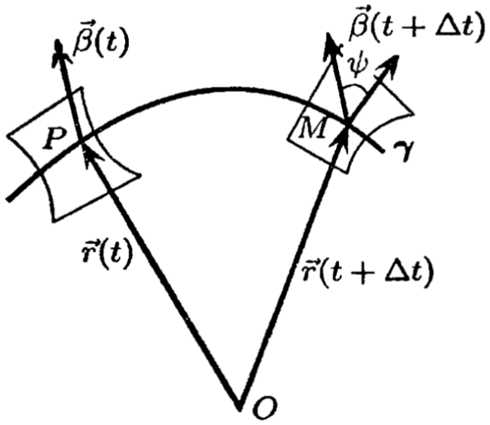

Рис. 8.8

Нормальный вектор соприкасающейся плоскости кривой лежит на бинормали этой кривой в рассматриваемой точке.
Абсолютным кручением $|\kappa|$ называют предел отношения угла поворота бинормали на дуге кривой, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги: $|\kappa| = \lim\limits_{l \to 0} \frac{\psi}{l}$
Если кривая задана естественной параметризацией и её кривизна $k(s) = |\overrightarrow{r}''(s)|, s \in (a, b)$, то абсолютное кручение в этом случае: $|\kappa| = \frac{|(\overrightarrow{r}'(s), \overrightarrow{r}''(s), \overrightarrow{r}'''(s))|}{k^2(s)}$.
Кручением кривой в точках, в которых определяется абсолютное кручение, называют величину $\kappa(t) = \frac{(\overrightarrow{r}'(t), \overrightarrow{r}''(t), \overrightarrow{r}'''(t))}{|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)|^2}$

Поверхность
Элементарной поверхностью называют множество точек пространства, являющееся топологическим отображением круга и ограничивающей его окружности.
При этом точки, являющееся топологическим отображением точек окружности, называют граничными точками.
Граничные точки образуют замкнутую кривую – границу элементарной поверхности.
Говорят, что две элементарные поверхности склеены, если они находятся в таком взаимном расположении, при котором части их границ или обе границы целиком совпадают между собой.
Однако в результате склеивания может получиться как множество не являющееся элементарной поверхностью так и снова элементарная поверхность.
Поверхностью называют множество точек пространства, которое может быть склеено из конечного или счетного множества элементарных поверхностей.
Параметрическое уравнение поверхности – $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$.
Очевидно, что векторное уравнение будет $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D$

Координатными линиями данной параметризации называют линии на поверхности, соответсвующие прямым $u = const, v = const$.

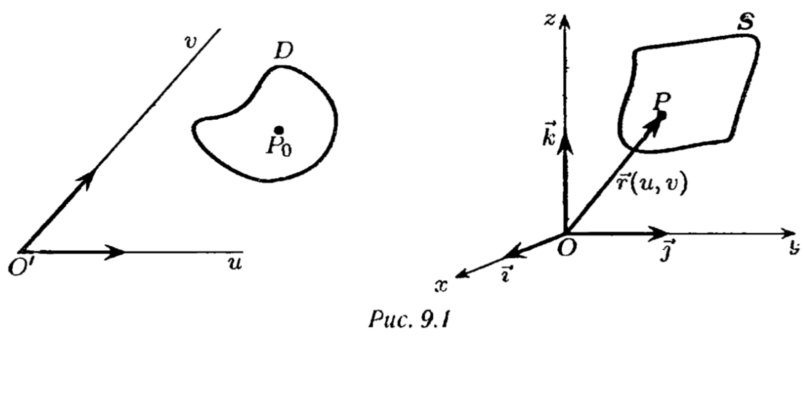

Рис. 9.1

Касательная плоскость
Прямую называют касательной прямой к поверхности в заданной точке, если она касается в этой точке некоторой кривой, лежащей на этой поверхности.
Плоскость, имеющая общую точку с поверхностью и содержащая все касательные прямые к поверхности в рассматриваемой точке, называется касательной плоскостью к поверхности в этой точке.
Уравнение касательной плоскости: $(\overrightarrow{\rho} - \overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}) = 0$

Нормаль к поверхности
Прямую, ортогональную касательной плоскости к поверхности в данной точке и проходящую через эту точку, называют нормалью к поверхности в указанной точке.
Единичный вектор нормали: $\overrightarrow{n}(u,v) = (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})/|\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}|$

Первая и вторая квадратичная форма
Пусть S – регулярная поверхность без особых точек, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v), (u,v) \in D$, – её векторное уравнение.
$\overrightarrow{n}(u,v)$ – единичный вектор нормали поверхности в заданной точке.
$I = d\overrightarrow{r}^2,\ II = -d\overrightarrow{r}d\overrightarrow{n},$
$\to$ Первая квадратичная форма – первая квадратичная форма дифференциалов du, dv.
I – положительно определенная т. к. кроме $du = dv = 0$ всегда положительна.
Обозначим $E = \overrightarrow{r}_u^2,\ F = \overrightarrow{r_v} \cdot \overrightarrow{r_u},\ G = \overrightarrow{r}_v^2$
Тогда первая кф: $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$
Обозначим $L = -\overrightarrow{r}_u \cdot \overrightarrow{n}_u,\ 2M = -\overrightarrow{r}_u\overrightarrow{n}_v - \overrightarrow{r}_v\overrightarrow{n}_u,\ N = -\overrightarrow{r}_v\overrightarrow{n}_v$
Тогда вторая кф: $II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$

Огибающая
Рассмотрим уравнение $F = (x, y, C) = 0$, где F – непрерывная, дифференциируемая функция трех аргументов. Будем считать, что для любого фиксированного значения параметра C это уравнение задает некоторую плоскую кривую. Поэтому при всевозможных значениях C получаем семейство плоских кривых.
Огибающей однопараметрического семейства плоских кривых называется кривая, которая каждой своей точкой касается некоторой кривой указанного семейства, а каждым куском касается бесконечного числа кривых семейства.
Эволютой плоской кривой называется огибающая её нормалей.
Ортогональной траекторией однопараметрического семейства линий называется кривая, пересекающая каждую линию семейства под прямым углом.
Эвольвентой кривой называется ортогональная траектория её касательных.