Векторная функция векторного аргумента – это соответствие r, при котором $\forall$ точке $x \in \Omega$ евклидова пространства R^m сопостовляется вектор $r(x)$ множества Q евклидова пространства R^p.
$x \in \Omega = \{(x_1, \ldots, x_m)\} \subset R^m \to r(x) \in Q = \{(r_1, \ldots, r_p)\} \subset R^p$
При этом множество Ω область задания, а Q множество значений. Если $\Omega = \{x\}$ – множество точек на прямой, то имеем функцию одного скалярного аргумента $r(x)$.
Если $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_m)\} \subset R^m$ – множество точек евклидова пространства, то имеем векторную функцию нескольких скалярных аргументов $r(x_1, \ldots, x_m)$.

Годограф векторной функции
Пусть $(r_1, \ldots, r_p)$ – координаты $r(x) \in Q \subset R^p$. Задание векторной функции $r(x)$ равносильно заданию скалярных функций $r_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, r_p(x_1, \ldots, x_m)$, и если начала этих векторов совместить с началом соответствующей ДПСК, то точечное множество концов рассматриваемых радиус векторов будем называть годографом векторной функции.
If p = 3 годограф векторной функции есть кривая, p = 2 – поверхность.

Способы задания кривых
Элементарной кривой называют множество точек пространства, являющееся образом отрезка при топологическом отображении его в пространство.
Точки соответствующие конечным точкам отрезка, называют конечными точками элементарной кривой. Элементарные кривые – примыкающие если одна или обе пары их конечных точек совпадают между собой.
Кривой линией называется множество точек пространства, которое состоит из конечного или счетного множества элементарных кривых, примыкающих друг к другу.
Пусть γ – элементарная кривая, являющаяся образом промежутка $a < t < b$ при топологическом отображении f его в пространство R^3. $x(t),\ y(t),\ z(t)$ – координаты точки на кривой γ соответствующей значению $t \in (a, b)$.
Тогда систему равенств $x(t),\ y(t),\ z(t),\ t \in (a, b)$ называют уравнениями кривой γ в параметрической форме или параметризацией кривой (кривая γ параметризована этими уравнениями).
Если же считать $x(t),\ y(t),\ z(t)$ координатами радиус-вектора $\overrightarrow{r}(t)$ соответствующей точки кривой γ, мы получим векторную функцию $\overrightarrow{r}(t),\ t \in (a, b)$, годографом которой является данная кривая. (способ задания кривой через векторную функцию скалярного аргумента по сути эквивалентный параметрическому способу).
Допустим, что кривая γ задается векторной функцией $\overrightarrow{r}(t),\ t \in (a, b)$.
Тогда заменив параметр t параметром u через отношение $t = g(u),\ u \in (\alpha, \beta)$, где g – строго возрастающая и непрерывная функция. Тогда получится новая параметризация, одну кривую можно задать множеством параметризаций.
Гладкая кривая – такая кривая, у которой векторная функция с помощью которой задана кривая дифференциируема 1 раз. Регулярная k раз $k \geq 1$.

Касательная к кривой
Пусть γ – некторая кривая, P – фиксированная точка и M – подвижная точка на кривой γ, PM – хорда кривой.
Прямая PM стремится к прямой PT при $M \to P$, если угол φ между этими прямыми стремится к нулю, когда $M \to P$.
Касательной к кривой γ в точке P называют прямую PT, к которой стремится хорда PM, когда $M \to P$.

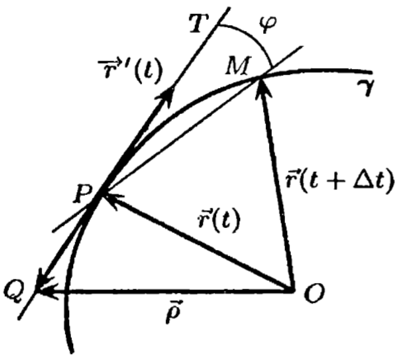

Рис. 8.1

Нормальной плоскостью кривой в точке P называется плоскость, проходящая через точку P перпендикулярно касательной в данной точке.
Векторное уравнение нормальной плоскости π в точке $P(\overrightarrow{r}(t))$ имеет вид: $(\overrightarrow{\rho} - \overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t) = 0$, где $\overrightarrow{\rho}$ – радиус-вектор произвольной точки плоскости π.

Соприкасающаяся плоскость
Пусть γ – некоторая кривая, $P \in \gamma$ – фиксированная точка, $M \in \gamma$ – подвижная, PT – касательная к кривой в точке P, PTM – плоскость проведенная через касательную PT и точку M.
Плоскость RTM стремится к плоскости π при $M \to P$, если угол между этими плоскостями стремится к нулю, когда $M \to P$.
Плоскость π, к которой стремится плоскость PTM, когда $M \to P$, называют соприкасающейся плоскостью кривой γ в точке P.

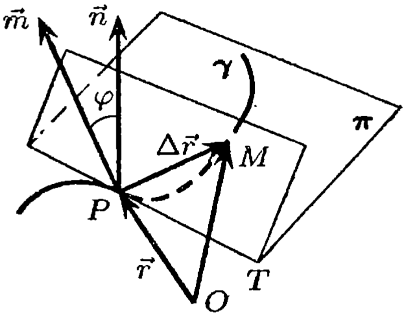

Рис. 8.2

Спрямляющая плоскость, главная нормаль, бинормаль
Прямую проходящую через точку P перпендикулярно касательной кривой, называют нормалью кривой. (CD, MN)
Нормаль, лежащую в соприкасающейся плоскости кривой, называют главной нормалью кривой. (CD)
Нормаль, перпендикулярную соприкасающейся плоскости кривой, называют бинормалью кривой. (MN)
Плоскость, определяемую касательной к кривой и бинормалью, называют спрямляющей плоскостью. (π_3)

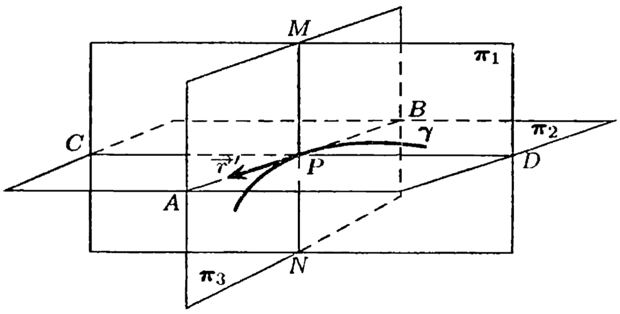

Рис. 8.4

Длина дуги кривой
Пусть $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ – дуга кривой, являющаяся образом замкнутого отрезка $[a, b]$ при топологическом отображении.
Разобьем дугу AB на n частичных дуг точками: $A = A_0, \dots, A_n = B$ и впишем в неё ломаную с вершинами в этих точках, причем каждое звено ломаной будет хордой соответствующей частичной дуги.
Длиной дуги кривой называют предел периметра ломанной линии, вписанной в данную дугу, если число звеньев этой ломаной линии неограниченно возрастает, а длина каждого звена стремится к 0.

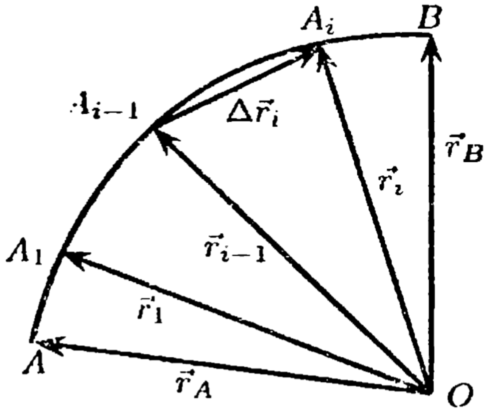

Рис. 8.5

Естественная параметризация
Пусть γ гладкая кривая без особых точек, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, $t \in (a, b)$, – параметризация кривой γ, $J(\overrightarrow{r}(t_0))$ – начальная точка отвечающая параметру t_0.

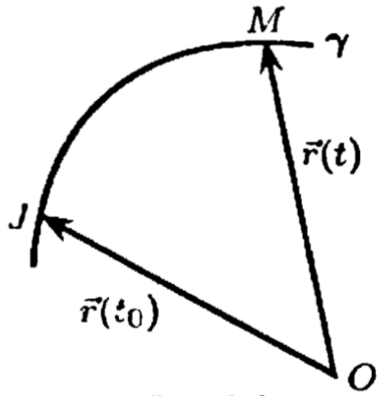

Рис. 8.6

Длина дуги имеющей начало в J и конец в M, соотвествующей параметру t, определяется формулой $\int\limits_{t_0}^{t} |\overrightarrow{r}(t)| dt$.
$s(t), t \in (a, b)$ – однозначная, дифференциируемая и монотонно возрастающая т. к. $\frac{ds}{dt} = |\overrightarrow{r}(t)| > 0$.
Значит $\exists$ обратная функция с такими же свойствами, это влечет существование взаимно однозначного (и непрерывного) соответствия между точками γ и значениями длины дуги, отсчитываемой от начальной точки J.
Точкам расположенным по разные стороны от J соответствуют разные значения параметра s.
Поскольку между точками кривой γ и значениями длины дуги s $\exists$ взаимно однозначное и непрерывное соответствие, то длину дуги s можно принять за новый параметр, который будем называть натуральным параметром, а параметризация $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s), s \in (\alpha, \beta)$, называется естественной.

Кривизна кривой
Пусть γ – регулярная кривая без особых точек, $P \in \gamma$ – фиксированная точка, $M \in \gamma$ – точка отличная от P и близкая к P, φ – угол между касательными к γ в точках P, M, l – длина дуги $\overset{\frown}{PM}$.

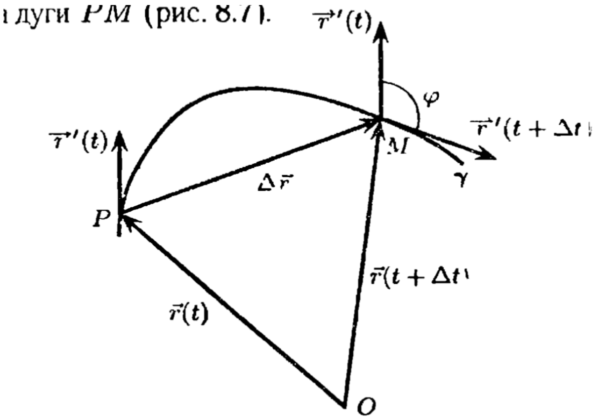

Рис. 8.7

Кривизной кривой в данной точке называют передел отношения угла поворота касательной на дуге кривой, стягивающей-ся к данной точке, к длине этой дуги т. е. $k = \lim\limits_{l \to 0} \frac{\varphi}{l}$.

Кручение кривой

Пусть γ – регулярная кривая без особых точек, $P \in \gamma$ – фиксированная точка, $M \in \gamma$ – точка отличная от P и близкая к P, ψ – угол между нормальными векторами $\overrightarrow{\beta}(t)$ и $\overrightarrow{\beta}(t + \delta t)$ соприкасающихся плоскостей кривой γ в точках P, M, l – длина дуги $\overset{\frown}{PM}$.

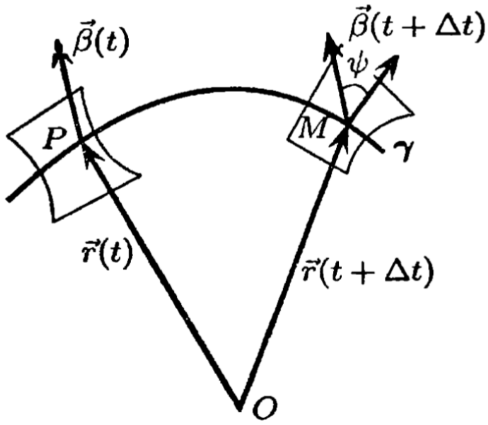

Рис. 8.8

Нормальный вектор соприкасающейся плоскости кривой лежит на бинормали этой кривой в рассматриваемой точке.

Абсолютным кручением $|\kappa|$ называют предел отношения угла поворота бинормали на дуге кривой, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги: $|\kappa| = \lim\limits_{l \to 0} \frac{\psi}{l}$

Если кривая задана естественной параметризацией и её кривизна $k(s) = |\overrightarrow{r}''(s)|, s \in (a, b)$, то абсолютное кручение в этом случае: $|\kappa| = \frac{|(\overrightarrow{r}'(s), \overrightarrow{r}''(s), \overrightarrow{r}'''(s))|}{k^2(s)}$.

Кручением кривой в точках, в которых определяется абсолютное кручение, называют величину $\kappa(t) = \frac{(\overrightarrow{r}'(t), \overrightarrow{r}''(t), \overrightarrow{r}'''(t))}{|\overrightarrow{r}'(t) \times \overrightarrow{r}''(t)|^2}$

Поверхность

Элементарной поверхностью называют множество точек пространства, являющееся топологическим отображением круга и ограничивающей его окружности.

При этом точки, являющееся топологическим отображением точек окружности, называют граничными точками.

Граничные точки образуют замкнутую кривую – границу элементарной поверхности.

Говорят, что две элементарные поверхности склеены, если они находятся в таком взаимном расположении, при котором части их границ или обе границы целиком совпадают между собой.

Однако в результате склеивания может получиться как множество не являющееся элементарной поверхностью так и снова элементарная поверхность.

Поверхностью называют множество точек пространства, которое может быть склеено из конечного или счетного