Векторная функция векторного аргумента – это соответствие r, при котором $\forall$ точке $x \in \Omega$ евклидова пространства R^m сопостовляется вектор $r(x)$ множества Q евклидова пространства R^p.
$x \in \Omega = \{(x_1, \ldots, x_m)\} \subset R^m \to r(x) \in Q = \{(r_1, \ldots, r_p)\} \subset R^p$
При этом множество Ω область задания, а Q множество значений. Если $\Omega = \{x\}$ – множество точек на прямой, то имеем функцию одного скалярного аргумента $r(x)$.
Если $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_m)\} \subset R^m$ – множество точек евклидова пространства, то имеем векторную функцию нескольких скалярных аргументов $r(x_1, \ldots, x_m)$.

Годограф векторной функции
Пусть $(r_1, \ldots, r_p)$ – координаты $r(x) \in Q \subset R^p$. Задание векторной функции $r(x)$ равносильно заданию скалярных функций $r_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, r_p(x_1, \ldots, x_m)$, и если начала этих векторов совместить с началом соответствующей ДПСК, то точечное множество концов рассматриваемых радиус векторов будем называть годографом векторной функции.
If p = 3 годограф векторной функции есть кривая, p = 2 – поверхность.

Способы задания кривых
Элементарной кривой называют множество точек пространства, являющееся образом отрезка при топологическом отображении его в пространство.
Точки соответствующие конечным точкам отрезка, называют конечными точками элементарной кривой. Элементарные кривые – примыкающие если одна или обе пары их конечных точек совпадают между собой.
Кривой линией называется множество точек пространства, которое состоит из конечного или счетного множества элементарных кривых, примыкающих друг к другу.
Пусть γ – элементарная кривая, являющаяся образом промежутка $a < t < b$ при топологическом отображении f его в пространство R^3. $x(t),\ y(t),\ z(t)$ – координаты точки на кривой γ соответствующей значению $t \in (a, b)$.
Тогда систему равенств $x(t),\ y(t),\ z(t),\ t \in (a, b)$ называют уравнениями кривой γ в параметрической форме или параметризацией кривой (кривая γ параметризована этими уравнениями).
Если же считать $x(t),\ y(t),\ z(t)$ координатами радиус-вектора $\overrightarrow{r}(t)$ соответствующей точки кривой γ, мы получим векторную функцию $\overrightarrow{r}(t),\ \ t \in (a, b)$, годографом которой является данная кривая. (способ задания кривой через векторную функцию скалярного аргумента по сути эквивалентный параметрическому способу).
Допустим, что кривая γ задается векторной функцией $\overrightarrow{r}(t),\ t \in (a, b)$.
Тогда заменив параметр t параметром u через отношение $t = g(u),\ u \in (\alpha, \beta)$, где g – строго возрастающая и непрерывная функция. Тогда получится новая параметризация, одну кривую можно задать множеством параметризаций.

Касательная к кривой
Пусть γ – некторая кривая, P – фиксированная точка и M – подвижная точка на кривой γ, PM – хорда кривой.
Прямая PM стремится к прямой PT при $M \to P$, если угол ϕ между этими прямыми стремится к нулю, когда $M \to P$.
Касательной к кривой γ в точке P называют прямую PT, к которой стремится хорда PM, когда $M \to P$.

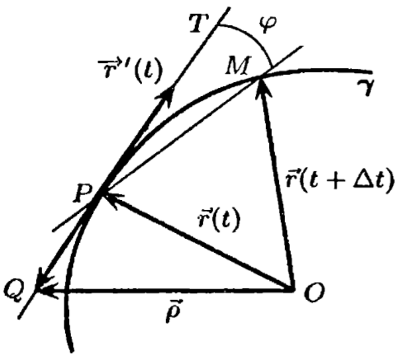

Рис. 8.1

Нормальной плоскостью кривой в точке P называется плоскость, проходящая через точку P перпендикулярно касательной в данной точке.
Векторное уравнение нормальной плоскости π в точке $P(\overrightarrow{r}(t))$ имеет вид: $(\overrightarrow{\rho} - \overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t) = 0$, где $\overrightarrow{\rho}$ – радиус-вектор произвольной точки плоскости π.

Соприкасающаяся плоскость

Пусть γ – некоторая кривая, $P \in \gamma$ – фиксированная точка, $M \in \gamma$ – подвижная, PT – касательная к кривой в точке P, PTM – плоскость проведенная через касательную PT и точку M.

Плоскость RTM стремится к плоскости π при $M \to P$, если угол между этими плоскостями стремится к нулю, когда $M \to P$.
Плоскость π, к которой стремится плоскость PTM, когда $M \to P$, называют соприкасающейся плоскостью кривой γ в точке P.

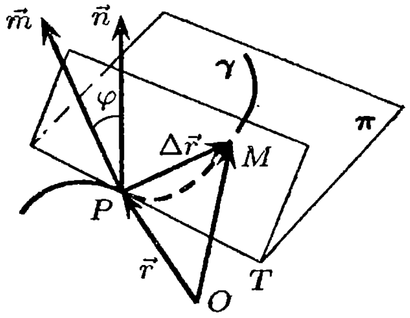

Рис. 8.2