Билет 59

Построение графиков функций с помощью дифференциального исчисления: локально-выпуклые и локально-вогнутые функции *Билет не просмотрен Ксюшей, но проверен Артёмом*

Определение

$\sqsupset$ функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на X. Говорят, что эта функция является локально выпуклой (выпуклой вниз), если $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 : f(q_1x_1 + q_2x_2) \le q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$,
$\forall q_1, q_2 > 0 :\ q_1 + q_2 = 1$.
Если $f(q_1x_1 + q_2x_2) \ge q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$ для $\forall x_1, x_2 \in X$, то $f(x)$ – локально вогнутая (выпуклая вверх) на X.

$(\cdot)A : (x, f(q_1x_1 + q_2x_2))$
$(\cdot)B : (x, q_1f(x_1) + q_2f(x_2))$ график!!!

Это определение не использует понятие производной.

Определение

$y = f(x)$ – дифференцирована в $(\cdot)c$. Кривая $y = f(x)$ – локально выпуклая в $(\cdot)c$,
если $\exists$ окрестность $O\varepsilon$ этой точки $O\varepsilon = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, такая, что для $\forall x \in O\varepsilon$ точки кривой лежат над касательной кривой в $(\cdot)c$.
Если же точки лежат под касательной прямой в окрестности $O\varepsilon$, то говорят, что кривая является локально вогнутой в $(\cdot)c$.

два графика:

1. локально выпуклая в $(\cdot)c$
2. локально вогнутая в $(\cdot)c$

Пусть f — определена на (a, b) и $l(x) = \frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}$ — прямая, проходящая через точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$

Теорема

$y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную в $(\cdot)c$, тогда, если $f''(c) > 0$ (< 0), то кривая в $(\cdot)c$ – локально выпуклая (локально вогнутая).

Доказательство

Воспользуемся теоремой о производной n-го порядка и точке перегиба: $\sqsupset f''(c) > 0$, $\sqsupset h > 0$ и $c + h > c$. Тогда по формуле Тейлора: $f(c + h) = f(c) + \frac{h}{1!} \cdot f'(c) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(c + \theta h)$
По условию $f''(c) > 0$, тогда по непрерывности $f''(x)$
$f''(c + \theta h) > 0$ для достаточно малых h.
$\Rightarrow\ f(c + h) - f(c) - h \cdot f'(c) = \frac{h^2}{2!} \cdot f''(c + \theta h) > 0$
$\Rightarrow\ f(c + h) - f(c) > 0$
$\Rightarrow\ f(x)$ в $(\cdot)c$ – локально выпуклая.

Аналогично, для случая, когда $f''(c) < 0$.

Определение

Если $y = f(x)$ является локально выпуклой в каждой точке из промежутка X (локально вогнутой), то говорят, что $f(x)$ – выпуклая (вогнутая) на промежутке X.