14. Исследовать на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$ на $\mathbb{R}$.

$\left|\dfrac{e^{-n^2x^2}}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ т. к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится на $\mathbb{R}$, то исходный ряд по признаку Вейерштрасса равномерно сходится на $\mathbb{R}$.

15. Разложить в ряд Тейлора функцию $\pi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x}\dfrac{\cos t^2}{t-\frac{\pi}{2}}\,dt$ в окрестности точки $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

1. Найти пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} u$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} u$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u$, if $u = x + y\sin\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} u = 0$; $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} u \nexists$ т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}\nexists$;

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u = 0$ т. к. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x + y\sin\dfrac{1}{x} \sim \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y\sin\dfrac{1}{x} = 0$
(произведение ограниченной функции на бесконечно малое).

2. Найти $xz\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y}$, if $z = \sqrt{xy + \varphi(\dfrac{y}{x})}$.

$$\urcorner u = z^2,\ \ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{u}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(xy + \varphi(\frac{x}{y}))}{2z} = \frac{y + \dfrac{\varphi'(\frac{x}{y})}{y}}{2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial\sqrt{u}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(xy + \varphi(\frac{x}{y}))}{2z} = \frac{x - \dfrac{x\varphi'(\frac{x}{y})}{y^2}}{2z}$$

$$\to \frac{xz(y + \dfrac{\varphi'(\frac{x}{y})}{y})}{2z} + \frac{yz(x - \dfrac{x\varphi'(\frac{x}{y})}{y^2})}{2z} = \frac{2xyz + \cancel{\dfrac{xz\varphi'(\frac{x}{y})}{y}} - \cancel{\dfrac{xz\varphi'(\frac{x}{y})}{y}}}{2z} = xy.$$

3. Найти экстремумы функции $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$.

$L = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \lambda(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{a^2})$; $x \ne 0,\ y \ne 0,\ a \ne 0$

$$\begin{cases} L'_x = -\dfrac{x + 2\lambda}{x^3} = 0 \to x = -2\lambda \\ L'_y = -\dfrac{y + 2\lambda}{y^3} = 0 \to y = -2\lambda \\ L'_\lambda = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{a^2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{a^2} = 0,\ \lambda = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2} \to y = x = \mp a\sqrt{2}$$

$$L''_{xx} = \frac{2x + 6\lambda}{x^4},\ L''_{yy} = \frac{2y + 6\lambda}{y^4},\ L''_{\lambda\lambda} = 0,\ L''_{x\lambda} = \frac{-2}{x^3},\ L''_{y\lambda} = \frac{-2}{y^3}$$

$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{-2}{x^3} & \dfrac{-2}{y^3} \\ \dfrac{-2}{x^3} & \dfrac{2x+6\lambda}{x^4} & 0 \\ \dfrac{-2}{y^3} & 0 & \dfrac{2y+6\lambda}{y^4} \end{vmatrix}$$

в точке $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$, $\mathcal{H} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}a^9}$; в точке $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$, $\mathcal{H} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}a^9}$.

if $a > 0 \to -\dfrac{1}{2\sqrt{2}a^9} < 0 \to$ точка $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ – min, а $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ – max.

if $a < 0 \to -\dfrac{1}{2\sqrt{2}a^9} > 0 \to$ точка $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ – max, а $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ – min.

4. Оператор Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ преобразовать к полярным координатам.

5. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2+\alpha^4} dx$ на множестве $\mathbb{R}$.

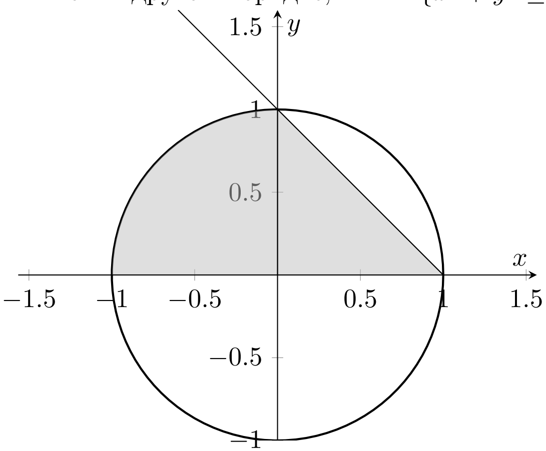
$$\left|\frac{\ln^3 x}{x^2+\alpha^4}\right| \le \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \text{ т. к. } \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln^3 x) x^{\frac{3}{2}}}{x^2+\alpha^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^3 x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{6\ln^2 x}{\sqrt{x}} = \ldots = 0.$$

По признаку Вейерштрасса т. к. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ – сходится $\to$ исходный интеграл

равномерно сходится на $\mathbb{R}$.

6. В двойном интеграле $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{D}} f(x,y)\, dxdy$ расставить пределы интегрирования

в том и другом порядке, if $\mathbb{D} = \{x^2+y^2 \le 1,\ x+y-1 \le 0,\ y \ge 0\}$.



$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx, \quad \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$$

7.