14. Исследовать на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$ на $\mathbb{R}$.

$\left|\dfrac{e^{-n^2x^2}}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ т. к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится на $\mathbb{R}$, то исходный ряд по признаку Вейерштрасса равномерно сходится на $\mathbb{R}$.

15. Разложить в ряд Тейлора функцию $\pi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x}\dfrac{\cos^2 t}{t-\frac{\pi}{2}}\,dt$ в окрестности точки $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

$$f' = \frac{\cos^2 x}{x-\dfrac{\pi}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-4)^n (t)^{2n-1}}{2(2n)!}$$

$$f = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-4)^n\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^{2n-1}}{2(2n)!}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} -\frac{(-4)^n\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^{2n-1}}{2(2n)!}dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n 2^{2n}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^{2n}}{4n(2n)!}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{-\dfrac{(-1)^n 2^{2n}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^{2n}}{4n(2n)!}}{-\dfrac{(-1)^{n+1}2^{2n+2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^{2n+2}}{(4n+4)(2n+2)!}} = \infty$$

1. Найти пределы $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} u$, $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} u$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} u$, if $u = x + y\sin\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} u = 0$; $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} u \nexists$ т. к. $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}\nexists$;

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} u = 0$ т. к. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} x + y\sin\dfrac{1}{x} \sim \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} y\sin\dfrac{1}{x} = 0$

(ограниченная функция на б. м.)

2. Найти $xz\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y}$, if $z = \sqrt{xy + \varphi(\dfrac{y}{x})}$.

$$\exists u = z^2,\ \ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{u}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x}(xy+\varphi(\frac{x}{y}))}{2z} = \frac{y + \dfrac{\varphi'(\frac{x}{y})}{y}}{2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial\sqrt{u}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial y}(xy+\varphi(\frac{x}{y}))}{2z} = \frac{x - \dfrac{x\varphi'(\frac{x}{y})}{y^2}}{2z}$$

$$\to \frac{xz(y + \dfrac{\varphi'(\frac{x}{y})}{y})}{2z} + \frac{yz(x - \dfrac{x\varphi'(\frac{x}{y})}{y^2})}{2z} = \frac{2xyz + \cancel{\dfrac{xz\varphi'(\frac{x}{y})}{y}} - \cancel{\dfrac{xz\varphi'(\frac{x}{y})}{y}}}{2z} = xy.$$

3. Найти экстремумы функции $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$.

$$L = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2});\ x \neq 0,\ y \neq 0,\ a \neq 0$$

$$\begin{cases} L'_x = -\dfrac{x + 2\lambda}{x^3} = 0 \to x = -2\lambda \\ L'_y = -\dfrac{y + 2\lambda}{y^3} = 0 \to y = -2\lambda \\ L'_\lambda = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{a^2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{a^2} = 0,\ \lambda = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2} \to y = x = \mp a\sqrt{2}$$

$$L''_{xx} = \frac{2x + 6\lambda}{x^4},\ L''_{yy} = \frac{2y + 6\lambda}{y^4},\ L''_{\lambda\lambda} = 0,\ L''_{x\lambda} = \frac{-2}{x^3},\ L''_{y\lambda} = \frac{-2}{y^3}$$

$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{-2}{x^3} & \dfrac{-2}{y^3} \\ \dfrac{-2}{x^3} & \dfrac{2x + 6\lambda}{x^4} & 0 \\ \dfrac{-2}{y^3} & 0 & \dfrac{2y + 6\lambda}{y^4} \end{vmatrix}$$

в точке $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}),\ \mathcal{H} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}a^9}$; в точке $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}),\ \mathcal{H} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}a^9}$.

if $a > 0 \to -\dfrac{1}{2\sqrt{2}a^9} < 0 \to$ точка $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ – min, а $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ – max.

if $a < 0 \to -\dfrac{1}{2\sqrt{2}a^9} > 0 \to$ точка $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ – max, а $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$ – min.

4. Оператор Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ преобразовать к полярным координатам.

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}(\dfrac{y}{x}) \\ w = u \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\rho = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}dy \\ d\varphi = \dfrac{x}{x^2 + y^2}dy - \dfrac{y}{x^2 + y^2}dx \\ dw = du \end{cases} \qquad dw = w'_\rho d\rho + w'_\varphi d\varphi = u'_x dx + u'_y dy$$

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}w'_\rho - \dfrac{y}{x^2 + y^2}w'_\varphi \\ u'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}w'_\rho + \dfrac{x}{x^2 + y^2}w'_\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'_x = \cos\varphi w'_\rho - \dfrac{\sin\varphi}{\rho}w'_\varphi \\ u'_y = \sin\varphi w'_\rho + \dfrac{\cos\varphi}{\rho}w'_\varphi \end{cases}$$

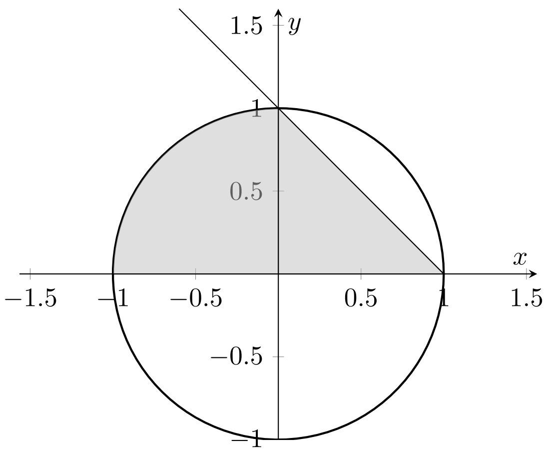
$$u''_{x^2} = \left(\cos\varphi w'_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho} w'_\varphi\right)'_\rho \rho'_x + \left(\cos\varphi w'_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho} w'_\varphi\right)'_\varphi \varphi'_x =$$
$$= w''_{\rho^2}\cos^2\varphi - 2w''_{\rho\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} + w''_{\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2} + w'_\rho\frac{\sin^2\varphi}{\rho} + w'_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}$$
$$u''_{y^2} = \left(\sin\varphi w'_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho} w'_\varphi\right)'_\rho \rho'_y + \left(\sin\varphi w'_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho} w'_\varphi\right)'_\varphi \varphi'_y =$$
$$= w''_{\rho^2}\sin^2\varphi + 2w''_{\rho\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} + w''_{\varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2} + w'_\rho\frac{\cos^2\varphi}{\rho} - w'_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}$$
$$u''_{x^2} + u''_{y^2} = w''_{\rho^2} + \frac{1}{\rho}w'_\rho + \frac{1}{\rho^2}w''_{\varphi^2}.$$

5. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2+\alpha^4}dx$ на множестве $\mathbb{R}$.

$\left|\frac{\ln^3 x}{x^2+\alpha^4}\right| \le \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln^3 x)x^{\frac{3}{2}}}{x^2+\alpha^4} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^3 x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6\ln^2 x}{\sqrt{x}} = \ldots = 0.$

По признаку Вейерштрасса т. к. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ – сходится $\to$ исходный интеграл равномерно сходится на $\mathbb{R}$.

6. В двойном интеграле $\iint\limits_{\mathbb{D}} f(x,y)\,dxdy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, if $\mathbb{D} = \{x^2+y^2 \le 1,\ x+y-1 \le 0,\ y \ge 0\}$.



$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx,\quad \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$$

7. Вычислить полную поверхность тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=3a^2$ и параболоидом $x^2+y^2=2az,\ z\ge 0$.

$$z=\frac{x^2+y^2}{2a};\ z'_x=\frac{x}{a};\ z'_y=\frac{y}{a}$$

$$S_1=\iint\limits_{\mathbb{D}}\sqrt{1+z'_{x^2}+z'_{y^2}}dxdy=\iint\limits_{\mathbb{D}}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}}dxdy=\iint\limits_{\mathbb{D}}\sqrt{\frac{a^2+\rho^2}{a^2}}\rho d\varphi d\rho$$

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2+\rho^2}{a^2}}\rho d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\frac{a^2}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)d\varphi=\frac{2\pi a^2}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$$

$$z=\pm\sqrt{3a^2-x^2-y^2};\ z'_x=\mp\frac{x}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}};\ z'_y=\mp\frac{y}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}$$

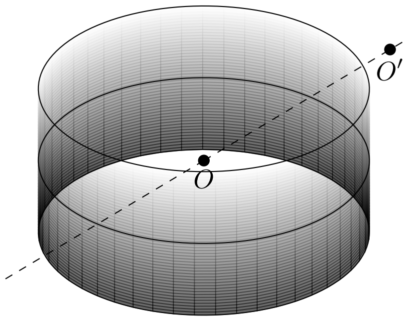
$$S_2=\iint\limits_{\mathbb{D}}\sqrt{1+\frac{x^2}{3a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{3a^2-x^2-y^2}}dxdy=\iint\limits_{\mathbb{D}}\frac{\sqrt{3}a\rho}{\sqrt{3a^2-\rho^2}}d\rho$$

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}a}\frac{\sqrt{3}a\rho}{\sqrt{3a^2-\rho^2}}d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left(3-\sqrt{3}\right)a\sqrt{a^2}d\varphi=2\pi a^2\left(3-\sqrt{3}\right)$$

В итоге: $\frac{2\pi a^2}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)+2\pi a^2\left(3-\sqrt{3}\right)=\frac{16\pi a^2}{3}$.

8. Найти момент инерции прямого круглого однородного цилиндра

(радиус основания R, высота H) относительно диаметра его среднего сечения.



$$d^2=\left(z-\frac{R}{2}\right)^2+h^2;\ \ h=r\sin\varphi;\ \ d^2=\left(z-\frac{H}{2}\right)^2+r^2\sin^2\varphi$$

$$I=\rho\int\limits_0^H dz\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R d^2rdr=\rho\int\limits_0^H dz\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\left(\left(z-\frac{H}{2}\right)^2r+r^3\sin^2\varphi\right)dr=$$

$$=\rho\int\limits_0^H dz\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\left(z-\frac{H}{2}\right)^2R^2}{2}+\frac{R^4\sin^2\varphi}{4}\right)d\varphi=$$

$$=\rho\int\limits_0^H dz\left[\frac{\left(z-\frac{H}{2}\right)^2R^2}{2}\varphi+\frac{R^4}{8}\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\right]_0^{2\pi}=\rho\int\limits_0^H\left(\left(z-\frac{H}{2}\right)^2R^2\pi+\frac{R^4}{4}\pi\right)dz=$$

$$=\rho\left[\frac{\left(z-\frac{H}{2}\right)^3-R^2\pi}{3}+\frac{R^4\pi}{4}\right]_0^H=\rho\pi R^2H\left(\frac{H^2}{12}+\frac{R^2}{4}\right).$$