Билет 28

Критерий Коши существования предела функции. Определение предела на языке "окрестностей".

Теорема (критерий Коши)

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : (\forall x', x'' \in (a-\delta; a+\delta))\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x)$$

Необходимость

Возьмём произвольную $\{x_n\} : (\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \neq a \wedge x_n \to a$

По условию

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : (\forall x', x'' \in (a-\delta; a+\delta))\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Для такого δ

$$\exists k : (\forall n > k)\ |x_n - a| < \delta \wedge |x_k - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x_k)| < \varepsilon$$

Тогда для $\{x_n\}$ выполнен критерий Коши $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

$\{x_n\}$ — произвольная $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x)\ \square$.

Достаточность

По определению предела

$$\begin{aligned}
&\exists \lim_{x\to a} f(x) =: g \\
&\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : (\forall x', x'' \in (a-\delta; a+\delta))\ |f(x') - g| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |f(x'') - g| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow |f(x') - f(x'')| = |(f(x') - g) - (f(x'') - g)| = |f(x') - g| + |f(x'') - g| < \varepsilon\ \square.
\end{aligned}$$

Определение предела на языке окрестностей

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = g,\ a, g \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(\dot{V}_\delta(x_0)) \subset V_\varepsilon(g)$$