Билет 38

Теорема о строгой монотонности непрерывной взаимно однозначной функции

Теорема

f — непрерывна и взаимно однозначна на $[a;b] \Rightarrow f$ — строго монотонна на $[a;b]$

Доказательство

f — взаимно однозначна на $[a;b] \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

1. $f(a) < f(b)$

   Докажем, что если f — непрерывна и взаимно однозначна на $[a;b]$, то

   $$(\forall x \in [a;b])\ f(x) \in [f(a); f(b)]$$

   Пойдем от противного. Пусть $x \in [a;b]$ и $f(x) < f(a)$ (1) или $f(b) < f(x)$ (2):

   $$\sqsupset f(x) < f(a) < f(b) \Rightarrow \exists x' \in (x;b) : f(x') = f(a) \Rightarrow x' = a, \text{ но } a \leq x < x' < b \tag{1}$$
   $$\sqsupset f(a) < f(b) < f(x) \Rightarrow \exists x' \in (a;x) : f(x') = f(b) \Rightarrow x' = b, \text{ но } a < x' < x \leq b \tag{2}$$

   $$(1) \wedge (2) \Rightarrow f(x) \in [f(a); f(b)]$$

   f — непрерывна и взаимно однозначна на $(\forall x \in [a;b])\ [x;b] \subset [a;b]$.

   Тогда из доказанного следует:

   $$(\forall x \in [a;b], x' \in [x;b])\ f(x') \in [f(x); f(b)]$$
   $$(\forall x, x' \in [a;b] : x \leq x')\ f(x) \leq f(x') \tag{3}$$
   $$(\forall x, x' \in [a;b] : x \neq x')\ f(x) \neq f(x') \tag{4}$$

   $$(3) \wedge (4) \Rightarrow (\forall x, x' \in [a;b] : x < x')\ f(x) < f(x')\ \square.$$

2. $f(a) > f(b)$

   Рассмотрим $g(x) := -f(x)$:

   $$f(a) > f(b) \Rightarrow -f(a) < -f(b) \Rightarrow g(a) < g(b)$$

   Таким образом, g — непрерывна и взаимно однозначна на $[a;b] \wedge g(a) < g(b)$.

   Тогда из п.1 следует:

   $$(\forall x, x' \in [a;b])\ g(x) < g(x') \Rightarrow -f(x) < -f(x') \Rightarrow f(x) > f(x')\ \square.$$