## Билет 53

Теорема о производной константы. Теорема о производной монотонной и строго монотонной функции. Достаточный признак монотонности функции.

**Теорема**

$f$ — дифференцируема на промежутке $X$

$$(\forall x \in X)\ f(x) = const \Leftrightarrow (\forall x \in X)\ f'(x) = 0$$

**Необходимость**

$$(\forall x \in X)\ f(x) = c \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0\ \square.$$

**Достаточность**

$f$ непрерывна и дифференцируема на промежутке $X$, применим теорему Лагранжа:

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})\ \exists \gamma \in (a; b) : f(b) - f(a) = f'(\gamma)(b-a) = 0 \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow f(x) = \text{const}\ \square.$$

**Теорема**

$f$ — дифференцируема на промежутке $X$

$(\forall x \in X\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ — монотонно возрастающая на $X$

$(\forall x \in X)\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ — монотонно убывающая на $X$

**Необходимость**

Без ограничения общности пусть $f'(x) \geq 0$

Возьмём $x_1, x_2 \in X$:

$$\sqsupset x_1 < x_2 \Rightarrow \exists \gamma \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\gamma)(x_2 - x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)\ \square.$$

**Достаточность**

Без ограничения общности пусть $f$ — монотонно возрастающая на $X$

$$\begin{cases} f(x+h) \geq f(x) & \text{при } h > 0 \\ f(x+h) \leq f(x) & \text{при } h < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0\ \square.$$

**Теорема**

$f$ — дифференцируема на промежутке $X$

$(\forall x \in X)\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ — строго монотонно возрастающая на $X$

$(\forall x \in X)\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ — строго монотонно убывающая на $X$

**Доказательство**

Без ограничения общности пусть $f'(x) > 0$

Возьмём $x_1, x_2 \in X$:

$$\sqsupset x_1 < x_2 \Rightarrow \exists \gamma \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\gamma)(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)\ \square.$$

**Теорема**

$f$ — непрерывна на промежутке $X$

$f$ — дифференцируема на $X \setminus A$, где $A \subset X$ — конечное и крайние точки $X \notin A$

$(\forall x \in X \setminus A)\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ — монотонно возрастающая на $X$

$(\forall x \in X \setminus A)\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ — монотонно убывающая на $X$

**Доказательство**

$A$ — конечно и $n := |A|$, пронумеруем его элементы по возрастанию:

$$a_i \in A,\ i = \overline{1, n} \qquad\qquad a_i < a_{i+1},\ i = \overline{1, n-1}$$

*Индукция:* $P(n)$ — верность теоремы для $|A| = n$

1. $P(0)$ — предыдущие теоремы
2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

   Разделим $X$ элементом $a_{n+1}$:

   $$X_L := \{x \in X \mid x < a_{n+1}\} \qquad X_R := \{x \in X \mid x > a_{n+1}\} \qquad X_L \cup \{a_{n+1}\} \cup X_R = X$$

   **Необходимость**

   Без ограничения общности пусть $f'(x) \geq 0$

   $f$ — непрерывна на $X_L$ и дифференцируема на $X_L \setminus (A \setminus \{a_{n+1}\})$, тогда
   по $P(n)$ $f$ — монотонно возрастающая на $X_L$

   $f$ — дифференцируема на $X_R \Rightarrow f$ — монотонно возрастающая на $X_R$

   Возьмём $x_1 \in X_L$, $x_2 \in (x_1; a_{n+1})$:

   $$x_1 < x_2 \wedge x_1, x_2 \in X_L \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

   Возьмём $\lim\limits_{x_2 \to a_{n+1} - 0}$ по обоим частям неравенства $f(x_1) \leq f(x_2)$, тогда по непрерывности:

   $$\lim_{x_2 \to a_{n+1} - 0} f(x_1) \leq \lim_{x_2 \to a_{n+1} - 0} f(x_2) \Rightarrow (\forall x_1 \in X_L)\ f(x_1) \leq f(a_{n+1})$$

   Аналогично: $(\forall x_1 \in X_R)\ f(a_{n+1}) \leq f(x_1)$

Возьмём $x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2$ и рассмотрим, где они могут лежать

(a) $x_1, x_2 \in X_L \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

(b) $x_1 \in X_L, x_2 = a_{n+1} \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

(c) $x_1 \in X_L, x_2 \in X_R \Rightarrow f(x_1) \leq f(a_{n+1}) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

(d) $x_1 = a_{n+1}, x_2 \in X_R \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

(e) $x_1, x_2 \in X_R \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Можно прийти к следущему выводу:

$$(\forall x_1, x_2 \in X)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\ \square.$$

**Достаточность**

Без ограничения общности пусть $f$ — монотонно возрастающая

$f$ — монотонно возрастающая на $X \Rightarrow f$ — монотонно возрастающая на $X_L \subset X$ и $X_R \subset X$

$f$ — непрерывна на $X_L$ и дифференцируема на $X_L \setminus (A \setminus \{a_{n+1}\})$, тогда
по $P(n)$ $(\forall x \in X_L \setminus (A \setminus \{a_{n+1}\}))\ f'(x) \geq 0$

$f$ — дифференцируема на $X_R \Rightarrow (\forall x \in X_R)\ f'(x) \geq 0$

$$X_L \setminus (A \setminus \{a_{n+1}\}) \cup X_R = X_L \setminus A \cup X_R \setminus A = (X_L \cup X_R) \setminus A = X \setminus a_{n+1} \setminus A = X \setminus A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall x \in X \setminus A)\ f'(x) \geq 0\ \square.$$

**Теорема**

$f$ — непрерывна на промежутке $X$

$f$ — дифференцируема на $X \setminus A$, где $A \subset X$ — конечное и крайние точки $X \notin A$

$(\forall x \in X \setminus A)\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ — строго монотонно возрастающая на $X$

$(\forall x \in X \setminus A)\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ — строго монотонно убывающая на $X$

**Доказательство**

Без ограничения общности пусть $f'(x) > 0$

$A$ — конечно и $n := |A|$, пронумеруем его элементы по возрастанию:

$$a_i \in A,\ i = \overline{1, n} \qquad\qquad a_i < a_{i+1},\ i = \overline{1, n-1}$$

*Индукция:* $P(n)$ — верность теоремы для $|A| = n$

1. $P(0)$ — предыдущие теоремы
2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

   Разделим $X$ элементом $a_{n+1}$:

$$X_L := \{x \in X \mid x < a_{n+1}\} \qquad X_R := \{x \in X \mid x > a_{n+1}\} \qquad X_L \cup \{a_{n+1}\} \cup X_R = X$$

$f$ — непрерывна на $X_L$ и дифференцируема на $X_L \setminus (A \setminus \{a_{n+1}\})$, тогда
по $P(n)$ $f$ — строго монотонно возрастающая на $X_L$

$f$ — дифференцируема на $X_R \Rightarrow f$ — строго монотонно возрастающая на $X_R$

Возьмём $x_1 \in X_L$, $x_2 \in (x_1; a)$ и $x_3 \in (x_2; a)$:

$$x_1 < x_2 < x_3 \land x_1, x_2, x_3 \in X_L \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$$

Возьмём $\lim\limits_{x_3 \to a_{n+1}-0}$ по обоим частям неравенства $f(x_2) < f(x_3)$, тогда по непрерывности:

$$\lim_{x_3 \to a_{n+1}-0} f(x_2) \leq \lim_{x_3 \to a_{n+1}-0} f(x_3) \Rightarrow f(x_2) \leq f(a_{n+1}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \leq f(a_{n+1}) \Rightarrow (\forall x_1 \in X_L)\ f(x_1) < f(a_{n+1})$$

Аналогично: $(\forall x_1 \in X_R)\ f(a_{n+1}) < f(x_1)$

Возьмём $x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2$ и рассмотрим, где они могут лежать

(a) $x_1, x_2 \in X_L \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(b) $x_1 \in X_L, x_2 = a_{n+1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(c) $x_1 \in X_L, x_2 \in X_R \Rightarrow f(x_1) < f(a_{n+1}) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(d) $x_1 = a_{n+1}, x_2 \in X_R \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(e) $x_1, x_2 \in X_R \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Можно прийти к следущему выводу:

$$(\forall x_1, x_2 \in X)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ \square.$$