Билет 27

Определение предела функции по Коши. Эквивалентонсть двух определений предела.

Определение предел функции по Коши

Пусть функция f определена на проколотой окрестности $\dot{S}(x_0)$ точки x_0.

$g \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (\forall x \in \dot{S}(x_0)) \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Теорема

Определения предела по Гейне и по Коши эквивалентны

Доказательство

Пусть f определена на проколотой окрестности $\dot{S}$ точки x_0

Обозначим определение по Гейне буквой Г, а по Коши — К

1. К $\Rightarrow$ Г

   Возьмём произвольную $\{x_n\} \subset \dot{S}$, $x_n \to x_0$

   По Коши

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : (\forall x \in \dot{S}) \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

   Тогда для такого δ

   $$\exists k : (\forall n > k) \ 0 < |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - g| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \ \square.$$

2. Г $\Rightarrow$ К

   Предположим, что определение Коши не выполнено

   $$\neg(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : (\forall x \in \dot{S}) \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon) \Rightarrow$$
   $$\exists \varepsilon > 0 : (\forall \delta > 0) \ \exists x \in \dot{S} \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta) : |f(x) - g| \geq \varepsilon$$

   Тогда построим $\{x_n\} \subset \dot{S} : x_n \to x_0 \wedge f(x_n) \not\to g$

   $$\forall n \in \mathbb{N} \sqsupset \delta = \frac{1}{n} \ \exists x_n \in \dot{S} \cap (x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n}) : |f(x_n) - g| \geq \varepsilon \Rightarrow$$
   $$(\forall n \in \mathbb{N}) \ |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to g \text{ (по Гейне), но } |f(x_n) - g| \geq \varepsilon$$

   Пришли к противоречию, значит определение Коши выполнено $\square$.