Билет 1

Понятие множества. Операции над множествами. *Билет не просмотрен Ксюшей, но проверен Артёмом*

Определение множества

Множество — это совокупность или объединение некоторых предметов произвольной природы, то есть элементов этого множества.

- $A, B, ...$ — множество
- $a, b, c, ...$ — элемент множества
- a принадлежит A : $a \in A$
- a не принадлежит A: $a \notin A$ или $a \overline{\in} A$
- A — подмножество B $\Rightarrow A \subset B$
- $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$
- $\varnothing, \Lambda$ — пустое множество
- $\varnothing \in \{\forall A\}$

Определение операции сложения

$\exists \forall A, B$: сумма или объединение A и B — множество C, которое состоит из элементов, принадлежащих либо множеству A, либо множеству $B : C = A \cup B$

$\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ — сумма конечного или бесконечного числа множеств.

Определение операции пересечения

$\exists \forall A, B$: $A \cap B$ пересечение A и B — множество C, состоящее из элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству $B : C = A \cap B$

$\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ — пересечение конечного или бесконечного числа множеств.

Свойства сложения и пересечения

1. Коммутативность: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Операции сложения и пересечения связанны свойством дистрибутивности:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \ (1)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \ (2)$$

Доказательство (1)

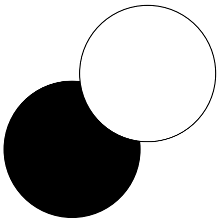
1. $\sqsupset x \in (A \cup B) \cap C : x \in A \cup B$ и $x \in C \Rightarrow x \in C$ и ($x \in A$ или $x \in B$) $\Rightarrow x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$
2. $\sqsupset x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) : x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C \Rightarrow x \in C$ и ($x \in A$ или $x \in B$) $\Rightarrow x \in A \cup B$ и $x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C$ $\square$.

Доказательство (2)

Аналогично (1)

Определение операции вычитания

$\exists\forall A, B$: разность A и B — множество элементов C, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству $B : C = A \backslash B$



Если $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A$ и B — дизъюнктные.

$A_{\triangle} B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ (3)

Пусть S - основное множество, которое содержит все множества, рассматриваемые в совокупности множеств. Если $A \subset S$, то S \ A = CA (или A').

Пусть $\exists$ { A_α }, тогда имеет место следующие соотношения:

$$\text{Соотношения двойственности} \begin{cases} S \backslash \bigcup\limits_\alpha A_\alpha = \bigcap\limits_\alpha (S \backslash A_\alpha) (4) \\ S \backslash \bigcap\limits_\alpha A_\alpha = \bigcup\limits_\alpha (S \backslash A_\alpha) (5) \\ C \bigcup\limits_\alpha A_\alpha = \bigcap\limits_\alpha C A_\alpha (4') \\ C \bigcap\limits_\alpha A_\alpha = \bigcup\limits_\alpha C A_\alpha (5') \end{cases}$$

Пусть $a \in \bigcup\limits_\alpha C A_\alpha \Rightarrow a \in A_\alpha$ при некотором номере α_0

$a \in S \Rightarrow a \in S$ и $a \in A_{\alpha_0} \Rightarrow a \notin \bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ и $a \in S \Rightarrow a \in C \bigcap\limits_\alpha A_\alpha$.

Пусть $a \in C \bigcap\limits_\alpha A_\alpha \Rightarrow a \in S$ и $a \notin A_\alpha$ при некотором $\alpha = \alpha$' $\Rightarrow a \notin \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ и $a \in S \Rightarrow C \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$