Билет 15

Предел ограниченной последовательности, все подпоследовательности которой сходятся

Теорема

Если все сходящиеся подпоследовательности ограниченной последовательности $\{a_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу g, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Доказательство

Пусть $\neg\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g\right)$:

$$\neg\left[\forall\varepsilon > 0\ \exists k : (\forall n > k)\ |a_n - g| < \varepsilon\right] \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0 : \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n > k : |a_n - g| \geq \varepsilon$$

Составим тогда подпоследовательность $\{a_{m_n}\}$, которая не сходится к g:

$$\begin{aligned}
&\sqsupset k = 1\ \exists m_1 > 1 : |a_{m_1} - g| \geq \varepsilon \\
&\sqsupset k = m_1\ \exists m_2 > m_1 : |a_{m_2} - g| \geq \varepsilon \\
&... \\
&(\forall n \in \mathbb{N})\ m_{n+1} > m_n \Rightarrow \{a_{m_n}\} \text{ — подпоследовательность } \{a_n\}
\end{aligned}$$

$\{a_{m_n}\} \subset \{a_n\} \wedge \{a_n\}$ — ограничена $\Rightarrow \{a_{m_n}\}$ — ограничена $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (по принципу выбора Больцано-Вейерштрасса) из a_{m_n} можно выделить сходящуюся подпоследовательность $a_{m_{r_n}}$

$\{a_{m_{r_n}}\}$ — сходящаяся подпоследовательность $\{a_n\}$ и по условию $\lim\limits_{n\to\infty} a_{m_{r_n}} = g$.

Но $\{a_{m_{r_n}}\} \subset \{a_{m_n}\} \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ |a_{m_{r_n}} - g| \geq \varepsilon \Rightarrow \neg\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_{m_{r_n}} = g\right)$

Пришли к противоречию, значит $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ $\square$.