Билет 52

Теорема Коши

Теорема Коши

1. f непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$
2. g непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$
3. $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a;b)$

$$\exists \gamma \in (a;b) : \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Доказательство

$$F(x) := f(x) - \lambda g(x) \wedge F(a) = F(b)$$
$$F(a) = F(b) \Rightarrow f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b) \Rightarrow \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

F непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$, тк f и g непрерывны на $[a;b]$ и дифференцируемы на $(a;b)$. Тогда, по теореме Ролля:

$$\exists \gamma \in (a;b) : F'(\gamma) = 0 \Rightarrow f'(\gamma) - \lambda g'(\gamma) = 0 \Rightarrow \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \; \square.$$