Билет 34

Определение равномерной непрерывности функции. Теорема Кантора

Определение равномерной непрерывности функции

Функция f называется равномерно непрерывной на промежутке X, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : (\forall x_1, x_2 \in X)\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Теорема Кантора

f — непрерывна на $[a;b] \Rightarrow f$ — равномерно непрерывна на $[a;b]$

Доказательство

Предположим обратное

$$\neg(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : (\forall x_1, x_2 \in [a;b])\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists\varepsilon > 0 : \forall\delta > 0\ \exists x_1, x_2 \in [a;b] : |x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Построим последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \sqsupset \delta = \frac{1}{n}\ \exists x_n, x'_n \in [a;b] : |x_n - x'_n| < \delta = \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon \qquad (1)$$

$\{x_n\} \subset [a;b] \Rightarrow \{x_n\}$ — ограничена, тогда по принципу выбора Больцано-Вейерштрасса существует подпоследовательность $\{x_{k_n}\} : \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} =: x_0$

Причём $\{x_n\} \subset [a;b]$ значит $x_0 \in [a;b] \Rightarrow f$ — непрерывна в x_0

По построению

$$|x_{k_n} - x'_{k_n}| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_{k_n} - x'_{k_n}| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{k_n} - \lim_{n\to\infty} x'_{k_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x'_{k_n} = x_0$$

По непрерывности f

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0)$$
$$\lim_{n\to\infty} x'_{k_n} = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x'_{k_n}) = f(x_0)$$

Последовательности $\{f(x_{k_n})\}$ и $\{f(x'_{k_n})\}$ сходятся к одному пределу, что противоречит (1)

Пришли к противоречию, значит f — равномерно непрерывна на $[a;b]$ $\square$.