Билет 45

Точки разрывов монотонных функции

Теорема

f определена и монотонна на $[a, b] \Rightarrow \forall x_0 \in [a, b) \; \exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \wedge \forall x_0 \in (a; b] \; \exists \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$

Доказательство

Необходимо доказать:

1. $\forall x_0 \in [a, b) \; \exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$
2. $\forall x_0 \in (a; b] \; \exists \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$

Без ограничения общности рассмотрим только первый случай при неубывающей f

$$x_0 < b \Rightarrow Z := \{f(x) \mid x \in (x_0; b]\} \neq \varnothing$$
$$f \text{ — неубывающая} \Rightarrow (\forall x \in (x_0; b]) \; f(x_0) \leq f(x) \Rightarrow Z \text{ — ограничено снизу}$$

Значит $\exists \inf Z =: \gamma$

Докажем, что $\gamma = \lim\limits_{x \to c+0} f(x)$

По свойству inf

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \gamma \leq f(x_0 + \delta) < \gamma + \varepsilon$$

f – неубывающая, значит

$$\forall x \in (x_0; x_0 + \delta) : \gamma - \varepsilon < \gamma \leq f(x) \leq f(x_0 + \delta) < \gamma + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - \gamma| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0+0} f(x) = \gamma \; \square.$$

Аналогично доказывается второй случай и случаи с невозрастающей f

Теорема

Если f определена и монотонна на $[a, b]$, то f может иметь на $[a; b]$ только разрывы 1-го рода

Доказательство

По предыдущей теореме $\forall x_0 \in [a, b) \; \exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \wedge \forall x_0 \in (a; b] \; \exists \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$

То есть все односторонние пределы существуют, значит разрывы могут быть только первого рода $\square$.

Следствие

В условиях предыдущей теоремы f имеет не более чем счётное множество точек разрыва

Доказательство

Без ограничения общности пусть f — неубывающая

Достаточно доказать, что множество точек разрыва на $(a; b)$ счётно

Обозначим это множество буквой W

$$(\forall x \in W)\ f(x-0) < f(x+0) \Rightarrow \exists r(x) \in \mathbb{Q} : f(x-0) < r(x) < f(x+0)$$

f — неубывающая

$$\begin{aligned}&(\forall x_1, x_2 \in W : x_1 < x_2)\ f(x_1-0) < r(x_1) < f(x_1+0) \leq f(x_2-0) < r(x_2) < f(x_2+0)\\ &\Rightarrow r(x_1) < r(x_2) \Rightarrow r \text{ — инъекция}\end{aligned}$$

Таким образом $r : W \to r(W)$ — биекция, то есть $W \sim$ подмножеству счётного множества $\mathbb{Q}$

Тогда W — не более чем счётное множество $\square$.