Билет 32

Непрерывность функции в точке, непрерывность справа и слева в точке, непрерывность функции на множестве. Определение непрерывности на языке "$\varepsilon - \delta$". Примеры.

Определение непрерывности функции в точке

f — определена в окрестности $x_0 \in \mathbb{R}$

f называется непрерывной в x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Альтернативные определения

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \qquad\qquad \lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = 0$$

Определение непрерывности справа и слева в точке

f — определена на $(a; x_0]$

f называется непрерывной в x_0 слева, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

f — определена на $[x_0; a)$

f называется непрерывной в x_0 справа, если

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Определение непрерывность функции на множестве

f — определена на промежутке X с концами a и b $(a < b)$

f называется непрерывной на этом промежутке, если она непрерывна в каждой его внутренней точке и если точка $a \in X$, то под непрерывностью в ней понимают непрерывность справа, если точка $b \in X$, то под непрерывностью в ней понимают непрерывность слева

Определение непрерывности на языке "$\varepsilon - \delta$"

f — непрерывна в $x_0 \in \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : (\forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta) \; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема

f, g — непрерывны на X

$f \pm g$, fg — непрерывны на X и f/g — непрерывна на $X \setminus \{x \in X \mid g(x) = 0\}$

Доказательство

По алгебраическим свойствам предела $\square$.

Примеры непрерывных функций

1. Многочлены

   Теорема

   $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$ — непрерывна на $\mathbb{R}$

   Доказательство

   Индукция: $T(n)$ — верность теоремы для n

   (a) $T(1)$

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 \Rightarrow T(1)$$

   (b) $T(n) \Rightarrow T(n+1)$

   $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^{n+1} = \lim_{x \to x_0} x^n \lim_{x \to x_0} x = x_0^n x_0 = x_0^{n+1} \Rightarrow T(n+1)\ \square.$$

   Теорема

   Многочлен степени n непрерывен на $\mathbb{R}$

   Доказательство

   $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \lim_{x \to x_0} P_n(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \lim_{x \to x_0} x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k = P_n(x_0)\ \square.$$

2. Рациональные выражения

   Теорема

   P_n/Q_m — рациональное выражение, где P_n — многочлен степени n, Q_m — многочлен степени m

   P_n/Q_m — непрерывно на $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid Q_m(x) = 0\}$

   Доказательство

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P_n(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q_m(x)} = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}\ \square.$$

3. Тригонометрические функции

   Теорема

   $f(x) = \sin(x)$ — непрерывна на $\mathbb{R}$

   Доказательство

   $$|\sin(x+h) - \sin(x)| = 2\left|\sin\frac{h}{2}\right| \cdot \left|\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\right| \le 2\left|\sin\frac{h}{2}\right| \xrightarrow{h \to 0} 0 \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow |\sin(x+h) - \sin(x)| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Аналогично непрерывен и $\cos(x)$

$\operatorname{tg}(x), \operatorname{ctg}(x)$ — непрерывны на своих областях определения по алгебраическим свойствам предела

4. e^x

Теорема

e^x — непрерывна на $\mathbb{R}$

Доказательство

$$\lim_{h\to 0}(e^{x+h} - e^x) = \left(\lim_{h\to 0} e^x e^h\right) - e^x = e^x \left(\lim_{h\to 0} e^h\right) - e^x = 0 \,\square.$$