Билет 67

Приближенное вычисление функции с помощью формулы Тейлора, оценка погрешности.

Теорема

Пусть $f(x)$ n раз дифференцируема на промежутке X и $x_0 \in X$

$\varphi(x)$ — приближённое значение $f(x)$:

$$\varphi(x) := f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

Пусть $f^{(n)}(x)$ ограничена на X:

$$\exists M : (\forall x \in X \land k = \overline{1,n})\ |f^{(k)}(x)| \le M$$

Тогда:

$$|f(x) - \varphi(x)| \le M \frac{|x-x_0|^n}{n!} \text{ — универсальная оценка погрешности}$$

Доказательство

По теореме Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$(\forall x \in X)\ f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta(x-x_0)),\ \theta \in (0;1)$$
$$|f(x) - \varphi(x)| = \frac{|x-x_0|^n}{n!} |f^{(n)}(x_0 + \theta(x-x_0))|$$

Оценим $f^{(n)}(x_0 + \theta(x-x_0))$:

$$x, x_0 \in X \Rightarrow x_0 + \theta(x-x_0) \in X \Rightarrow |f^{(n)}(x_0 + \theta(x-x_0))| \le M$$

Тогда:

$$|f(x) - \varphi(x)| = \frac{|x-x_0|^n}{n!} |f^{(n)}(x_0 + \theta(x-x_0))| \le M \frac{|x-x_0|^n}{n!}\ \square.$$

Замечание:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x-x_0|^n}{n!} = 0$$

Следствие

Значение $f(x)$ можно заменять на $\varphi(x)$ с любой наперёд заданной точностью

Замечание:

Теорема говорит об универсальной оценке остаточного члена разложения Тейлора ($R_n = f(x) - \varphi(x)$)

Если численная оценка не важна, то используется форма Пеано и говорят об асимптотическом приближении функции.