Билет 60

Точка перегиба функции. Теорема о точках перегиба n раз дифференцируемой функции.

Определение точки перегиба

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке c, тогда c — точка перегиба графика $y = f(x)$, если в некоторой достаточно малой окрестности c все точки при $x < c$ лежат по одну сторону от касательной, а $x > c$ — по другую (Рис. 1).

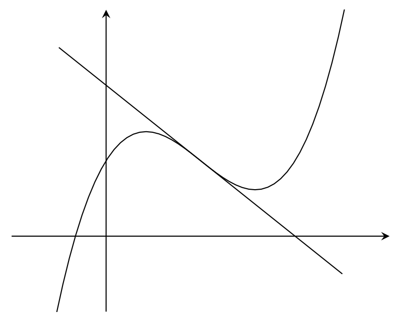

Рис. 1: Точка перегиба

f имеет в c точку перегиба $\wedge\ \exists f'(x)$ в окрестности c
$\Rightarrow f'$ имеет в c локальный экстремум.

f имеет в c точку перегиба $\wedge\ \exists f''(c) \Rightarrow f''(c) = 0$, это условие необходимо, но не достаточно. $f''(c) = 0 \Rightarrow c$ — точка, подозрительная на перегиб

Если в некоторой окрестности $c\ \exists f''(x)$, за исключением, может быть, самой c, при этом $f(x)$ —непрерывна и имеет в c касательную, тогда если $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от c, то в c есть перегиб

Теорема

f — n раз дифференцируема в окрестности a, и $f^{(n)}$ — непрерывна в этой окрестности

$$(\forall m = \overline{2, n-1})\ f^{(m)}(a) = 0 \wedge f^{(n)}(a) \neq 0 \Rightarrow c \text{ — точка перегиба } f, \text{ если } n \text{ — нечётно}$$

Доказательство

По теореме о стабилизации знака функции:

$$f^{(n)}(c) \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (\forall h \in (-\varepsilon; \varepsilon))\ f^{(n)}(c+h) \neq 0 \wedge f^{(n)}(c+h) \text{ имеет тот же знак, что и } f^{(n)}(c)$$

По формуле Тейлора:

$$(\forall h \in (-\varepsilon; \varepsilon))\ f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(c) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c + \theta h),\ \theta \in (0;1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c+\theta h)$$

1. $f^{(n)}(c) > 0$

$$\begin{cases} n \text{ — нечётно} & \Rightarrow \operatorname{sgn}(h^n) = \operatorname{sgn}(h) \\ f^{(n)}(c) > 0 & \Rightarrow f^{(n)}(c+\theta h) > 0 \end{cases} \Rightarrow sgn\left(\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c+\theta h)\right) = \operatorname{sgn}(h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(c+h) > f(c) + hf'(c) & \text{при } h \in (0; \varepsilon) \\ f(c+h) < f(c) + hf'(c) & \text{при } h \in (-\varepsilon; 0) \end{cases} \Rightarrow c \text{ — точка перегиба } \square.$$

2. $f^{(n)}(c) < 0$

$$\begin{cases} n \text{ — нечётно} & \Rightarrow \operatorname{sgn}(h^n) = \operatorname{sgn}(h) \\ f^{(n)}(c) < 0 & \Rightarrow f^{(n)}(c+\theta h) < 0 \end{cases} \Rightarrow sgn\left(\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c+\theta h)\right) = -\operatorname{sgn}(h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(c+h) > f(c) + hf'(c) & \text{при } h \in (-\varepsilon; 0) \\ f(c+h) < f(c) + hf'(c) & \text{при } h \in (0; \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow c \text{ — точка перегиба } \square.$$