Билет 48

Теорема о производной обратной функции *Билет не просмотрен Ксюшей, но проверен Артёмом*

Теорема

$y = f(x)$ — взаимно-однозначная функция, дифференцируема на $[a, b]$ и $f([a, b]) = [c, d]$, тогда обратная функция $x = g(y)$ – дифференцируема на [c, d] и $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, если $\frac{dy}{dx} \neq 0$

Доказательство

$y = f(x)$ — взаимно-однозначна и непрерывна (т.к. $f(x)$ — дифференцируемая) $\Rightarrow$ обратная функция $x = g(y)$ — непрерывной и взаимно-однозначна. $g(y)$ определена либо на сегменте $[f(a), f(b)]$ (f - возрастающая), либо на $[f(b), f(a)]$ (f - убывающая)

$\sqsupset$ для данного

$x: \quad k = f(x+h) - f(x) = f(x+h) - y \Rightarrow f(x+h) = k + y \Rightarrow x + h = g(k+y) \ \Rightarrow \ h = g(y+k) - g(y)$

$\sqsupset h = h(k)$

$g(y)$ – непрерывна $\ \Rightarrow\ \lim_{k \to 0} h(k) = 0$

$h \neq 0$, если $k \neq 0$ (в силу взаимной-однозначности)

Рассмотрим $\frac{dx}{dy} = \frac{dg(y)}{dy} = \lim_{k \to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{h(k)}{f(x+h) - f(x)}$ (по теореме о пределе суперпозиции) $= \lim_{h \to 0} \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ $\square$.