Билет 49

Локальные экстремумы функции

Определение экстремума

f имеет в x_0 локальный максимум, если $\exists\delta : (\forall x \in \mathbb{R})\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

f имеет в x_0 локальный минимум, если $\exists\delta : (\forall x \in \mathbb{R})\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

Точки локальных минимума и максимума — точки экстремума

Теорема Ферма

f имеет в x_0 экстремум и f дифференцируема в $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Доказательство

1. f имеет в x_0 локальный минимум

$$\begin{gathered}\exists\delta : (\forall x \in \mathbb{R})\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)\\ \sqsupset |h| < \delta \Rightarrow f(x_0 + h) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow\\ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \\ \lim\limits_{h \to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \\ \exists \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =: f'(x_0) \end{cases} \qquad \Rightarrow f'(x_0) = 0\ \Box.\end{gathered}$$

2. f имеет в x_0 локальный максимум

$$\begin{gathered}\exists\delta : (\forall x \in \mathbb{R})\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)\\ \sqsupset |h| < \delta \Rightarrow f(x_0 + h) \leq f(x_0) \Rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0 \Rightarrow\\ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \\ \lim\limits_{h \to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \\ \exists \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =: f'(x_0) \end{cases} \qquad \Rightarrow f'(x_0) = 0\ \Box.\end{gathered}$$

Следствие

$f'(c) = 0 \Rightarrow c$ — точка, подозрительная на экстремум