Билет 3

Конечные и бесконечные множества. Счётные множества, их свойства.

Определение конечного множества

Непустое множество M называется конечным, если:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \exists f : M \leftrightarrow \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$$

$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$ — отрезок натурального ряда.

$\varnothing$ — конечное множество.

Если множество не конечно, то оно бесконечно.

$\mathbb{N}$ — простейшее бесконечное множество.

Определение счётного множества

Множество X счётно, если $\exists f : X \leftrightarrow \mathbb{N}$. Иначе X несчётно.

Примеры счётных множеств: $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$

Свойства счётных множеств

Теорема

A — счётно $\Rightarrow B \subset A$ — конечно или счётно.

Доказательство

$$\begin{aligned}
&A = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \Rightarrow B = \{a_{n_i}\} \wedge (n_{i+1} > n_i) \\
&\exists \text{наибольшее } n_i \Rightarrow B \text{ — конечно, иначе — счётно } \square.
\end{aligned}$$

Теорема

Объединение $\forall$ конечного или счётного числа счётных множеств — счётное множество

Доказательство

$$\begin{array}{l}
A_1 : a_{11}, \; a_{12}, \; a_{13}, \ldots \\
A_2 : a_{21}, \; a_{22}, \; \ldots \\
A_3 : a_{31}, \; \ldots \\
\ldots
\end{array}$$

Нумеруя $\bigcup_i A_i$ по диагонали мы получаем $f : \bigcup_i A_i \leftrightarrow \mathbb{N}$ $\square$.

Теорема

$\forall$ бесконечное множество M содержит счётное подмножество.

Доказательство

$$\begin{aligned}
&\sqsupset a_1 \in M \\
&\exists a_2 \in M : a_2 \neq a_1 \\
(\forall n \in \mathbb{N})\ &\exists a_n \in M : a_n \neq a_i\ \forall i = \overline{1, n-1} \\
A := \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} &\subset M\ \square.
\end{aligned}$$