Билет 43

Модуль непрерывности функции

Определение модуля непрерывности функции

f определена и непрерывна на X и $\forall x \in X$ — точка сгущения

Модуль непрерывности функции f на X определён для $\delta > 0$

$$\omega(f, \delta) := \sup \left\{ |f(x_1) - f(x_2)| \;\middle|\; \forall x_1, x_2 \in X : |x_1 - x_2| \leq \delta \right\}$$

$\omega(f, \delta) \geq 0$ и неубывающая относительно δ на $\delta \in (0; +\infty)$

Теорема

f — равномерно непрерывна на $X \Leftrightarrow \lim\limits_{\delta \to 0+0} \omega(f, \delta) = 0$

Необходимость

f — равномерно непрерывна на X

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : (\forall x', x'' \in X) \; |x' - x''| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Тогда из определения $\omega(f, \delta)$ следует

$$\forall \delta \in (0, \delta(\varepsilon)) \; \omega(f, \delta) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta \to 0+0} \omega(f, \delta) = 0 \; \square.$$

Достаточность

По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \delta \in (0; \delta(\varepsilon)) \; \omega(f, \delta) < \varepsilon$$

По определению модуля непрерывности

$$\omega(f, \delta) < \varepsilon \Rightarrow (\forall x_1, x_2 \in X : |x_1 - x_2| \leq \delta < \delta(\varepsilon)) \; |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \; \square.$$