**Билет 55**

Производные высших порядков, их свойства, формула Лейбница.

### Определение производных высших порядков

Пусть $f$ имеет на $P$ производные $f'(x), f''(x), ..., f^{(n-1)}(x)$.

Если в $x_0 \in P$ $\exists f^{(n)}(x_0)$, то её называют производной $n$-го порядка в $x_0$

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)}(x))' \qquad\qquad f^{(0)}(x) := f(x)$$

### Определение $n$ раз дифференцируемой функции

Если $(\forall x \in X)$ $\exists f^{(m)}(x)$ $\forall m \leq n$, то $f$ — $n$ раз дифференцируема на $X$.

Если $(\forall x \in X, n \in \mathbb{N})$ $\exists f^{(n)}(x)$, то $f$ — бесконечно дифференцируема на $X$.

### Свойства производных высших порядков

Из определения следует:

$$(cf(x))^{(n)} = cf^{(n)}(x),\ c = \text{const} \qquad\qquad (f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$

### Теорема (формула Лейбница)

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

### Доказательство

*Индукция:* $P(n)$ — верность формулы Лейбница для $n$

1. $P(1)$

$$(uv)' = uv' + u'v = C_1^0 uv' + C_1^1 u'v = \sum_{k=0}^{1} C_1^k u^{(k)} v^{(1-k)}$$

2. $P(n-1) \Rightarrow P(n)$

$$(uv)^{(n)} = ((uv)^{(n-1)})' = \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k u^{(k)} v^{(n-1-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k u^{(k+1)} v^{(n-1-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k u^{(k)} v^{(n-k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} u^{(k)} v^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k u^{(k)} v^{(n-k)} =$$

$$= C_{n-1}^{n-1} u^{(n)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} u^{(k)} v^{(n-k)} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k u^{(k)} v^{(n-k)} + C_{n-1}^0 u^{(0)} v^{(n)} =$$

$$= C_n^0 u^{(0)} v^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k) u^{(k)} v^{(n-k)} + C_n^n u^{(n)} v^{(0)} =$$

$$= C_n^0 u^{(0)} v^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} + C_n^n u^{(n)} v^{(0)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}\ \square.$$