Билет 6

Приближение вещественных чисел рациональными.

Теорема

$$\forall a \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{Q} : \varepsilon > 0 \ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} : q_1 \le a \le q_2 \land q_2 - q_1 < \varepsilon$$

Доказательство

1. $a \ge 0$

   По аксиоме Архимеда

   $$\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 10^n \Rightarrow 10^{-n} < \varepsilon$$

   Представим a в виде бесконечной десятичной дроби:

   $$\begin{aligned} &a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n... \\ &q_1 := \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n \Rightarrow q_1 \le a \\ &q_2 := \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...(\alpha_n + 1) = q_1 + 10^{-n} \Rightarrow a \le q_2 \\ &q_2 - q_1 = 10^{-n} < \varepsilon \ \square. \end{aligned}$$

2. $a < 0$

   $$\begin{aligned} &(-a) \in \mathbb{R} \land (-a) > 0 \Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{Q} : \varepsilon > 0 \ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} : q_1 \le -a \le q_2 \land q_2 - q_1 < \varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow (-q_2) \le a \le (-q_1) \land (-q_1) - (-q_2) < \varepsilon \ \square. \end{aligned}$$

Теорема

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \ \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$$

Доказательство

Достаточно рассмотреть случай $a \ge 0 \land b \ge 0$, тк случай $a \le 0 \land b \le 0$ сводится к первому, а случай $b < 0 \land a > 0$ тривиален — достаточно положить $q = 0$

Рассмотрим десятичные представления чисел a и b, в которых отсутствует 9 в периоде

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3... \qquad\qquad b = \beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3...$$

$$b > a \Rightarrow \exists k \ge 0 : \begin{cases} \alpha_i = \beta_i & i = \overline{0, k-1} \\ \alpha_k < \beta_k \end{cases}$$

Не все $\alpha_i = 9$ для $i \ge k + 1$, тогда определим p как наименьший такой индекс:

$$p := \min\{i \ge k + 1 \mid \alpha_i \ne 9\}$$

Тогда определим q:

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_k 9...9\alpha_p\alpha_{p+1}... \quad \alpha_p \le 8$$
$$q := \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_k 9...9(\alpha_p + 1) \Rightarrow q > a$$
$$\beta_k > \alpha_k \Rightarrow b > q \ \square.$$

Теорема

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q} : \varepsilon > 0 \ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} : q_1 \le x_1 \le q_2 \land q_1 \le x_2 \le q_2 \land q_2 - q_1 < \varepsilon \Rightarrow x_1 = x_2$$

Доказательство

Пусть $x_1 \ne x_2$

Без ограничения общности пусть $x_2 > x_1$

По предыдущей теореме $\exists p_1, p_2 \in \mathbb{Q} : x_1 < p_1 < p_2 < x_2$

Возьмём тогда $\varepsilon = p_2 - p_1$

$$\sqsupset \varepsilon = p_2 - p_1 > 0 \ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} : q_1 \le x_1 < x_2 \le q_2 \land q_2 - q_1 < \varepsilon \Rightarrow q_1 < p_1 < p_2 < q_2 \land q_2 - q_1 < p_2 - p_1$$
$$q_1 < p_1 < p_2 < q_2 \Rightarrow q_2 - q_1 > p_2 - p_1$$

Пришли к противоречию, значит $x_1 = x_2 \ \square$.