Билет 36

Теорема Дарбу и следствия из нее

Теорема Дарбу

f — непрерывна на $[a;b]$

$$(f(a) < y < f(b)) \vee (f(b) < y < f(a)) \Rightarrow \exists c \in [a;b] : f(c) = y$$

Доказательство

Без ограничения общности пусть $f(a) < y < f(b)$.

$$\sqsupset f(x) \neq y \;\forall x \in [a;b] \Rightarrow h(x) := \frac{1}{|f(x) - y|} \text{ — определена и непрерывна на } [a;b] \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists M > 0 : (\forall x \in [a;b])\; h(x) < M (\text{по т. Вейерштрасса}) \Rightarrow |f(x) - y| > \frac{1}{M} \qquad (1)$$

f — равномерно непрерывна на $[a;b]$ (по т. Кантора):

$$\sqsupset \varepsilon = \frac{1}{M}\; \exists \delta > 0 : (\forall x, x' \in [a;b] : |x - x'| < \delta)\; |f(x) - f(x')| < \frac{1}{M}$$

Разделим $[a;b]$ на n частей: $\frac{b-a}{n} < \delta$

$$a_0 := a \qquad a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$$
$$a_n := b \qquad a_{i+1} - a_i < \delta$$

$$(\forall m = \overline{1,n})\; |a_m - a_{m-1}| < \delta \Rightarrow |f(a_m) - f(a_{m-1})| < \frac{1}{M}$$
$$f(a) < y < f(b) \Rightarrow f(a_0) < y < f(a_n) \Rightarrow \exists \text{наименьший } m : y \leq f(a_m) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(a_{m-1}) \leq y \leq f(a_m) \Rightarrow 0 \leq y - f(a_{m-1}) \leq f(a_m) - f(a_{m-1}) < \frac{1}{M} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |y - f(a_{m-1})| < \frac{1}{M}, \text{ что противоречит (1)}$$

Следствие 1

f — непрерывна на $[a;b] \Rightarrow f([a;b]) = [m;M]$, где $m = \inf f([a;b])$, $M = \sup f([a;b])$

Следствие 2

f — непрерывна на $[a;b]$ и знаки $f(a)$ и $f(b)$ не совпадают $\Rightarrow \exists c \in [a;b] : f(c) = 0$