Билет 35

Теорема Вейерштрасса

Теорема Вейерштрасса

f — непрерывна на $[a; b] \Rightarrow f$ — ограничена на $[a; b]$ и достигает своих минимума и максимума

Доказательство

1. f — ограничена на $[a; b]$, если она непрерывна на $[a; b]$

   f равномерно непрерывна на $[a; b]$ (по т. Кантора):

$$\sqsupset \varepsilon = 1 \; \exists \delta > 0 : (\forall x, x' \in [a; b] : (|x - x'| < \delta)) \; |f(x) - f(x')| < 1$$

   Разделим $[a; b]$ на n частей: $\frac{b-a}{n} < \delta$

$$a_0 := a \qquad a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$$
$$a_n := b \qquad a_{i+1} - a_i < \delta$$

$$|a_{i+1} - a_i| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a_i)| < 1 \; \forall x \in [a_{i-1}; a_i] \Rightarrow |f(x)| < 1 + |f(a_i)| \; \forall x \in [a_{i-1}; a_i]$$
$$A := \max\{1 + |f(a_i)| \mid i = \overline{1, n}\} \Rightarrow |f(x)| < A \; \forall x \in [a; b] \Rightarrow f \text{ — ограничена на } [a; b]$$

2. f достигает своих минимума и максимума

   f — ограничена на $[a; b] \Rightarrow \exists M := \sup f([a; b]), \exists m := \inf f([a; b])$

   Покажем, что M и m достигаются на $[a; b]$. Пойдем от противного, пусть это не так, тогда:

$$\sqsupset (\forall x \in [a; b]) \; f(x) < M \Rightarrow \sqsupset g(x) := \frac{1}{M - f(x)} \text{ — непрерывна на } [a; b] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(x) \text{ — ограничена на } [a; b] \; \Rightarrow (\forall x \in [a; b]) \; \exists L : g(x) < L \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{M - f(x)} < L \Rightarrow f(x) < M - \frac{1}{L}, \text{ но } M = \sup f([a; b]) \; \Box.$$

$$\sqsupset (\forall x \in [a; b]) \; f(x) > m \Rightarrow \sqsupset g(x) := \frac{1}{f(x) - m} \text{ — непрерывна на } [a; b] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(x) \text{ — ограничена на } [a; b] \; \Rightarrow (\forall x \in [a; b]) \; \exists L : g(x) < L \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{f(x) - m} < L \Rightarrow f(x) > m + \frac{1}{L}, \text{ но } m = \inf f([a; b]) \; \Box.$$