Билет 4

Эквивалентность множеств. Несчётность множества вещественных чисел.
Понятие мощности множества.

Определение эквивалентности множеств

Множества A и B эквивалентны, если $\exists f : A \leftrightarrow B$.

$f : A \leftrightarrow B$ означает, что $f : A \to B$ взаимно-однозначно.

$A \sim B$ означает, что множества эквивалентны.

Определение истинной части

A — истинная часть B, если $A \subset B \land A \sim B$

Пример:

$(0; 1)$ — истинная часть $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &f : (0; 1) \leftrightarrow \mathbb{R} && (0; 1) \subset \mathbb{R} \\ &f(x) = \operatorname{tg}\left(x\pi + \frac{\pi}{2}\right) && (0; 1) \sim \mathbb{R} \end{aligned}$$

Теорема

$\mathbb{R}$ несчётно

Доказательство

1. $\mathbb{R} \sim (0; 1)$, значит, из $(0; 1) \nsim \mathbb{N}$ будет следовать $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$.
2. Докажем $(0; 1) \nsim \mathbb{N}$.

   Пусть существует перечень бесконечных десятичных дробей $S = \{a_n \mid \forall n \in \mathbb{N}\}$:

   $$\begin{aligned} &a_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}... \\ &a_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}... \\ &... \\ &a_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}... \\ &... \end{aligned}$$

   Построим тогда $\beta \in (0; 1) \land \beta \notin S$:

   $$\begin{aligned} &\beta = 0, \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5... \\ &\beta_n \neq a_{nn} \land \beta_n \neq 9 \land \beta_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \beta \neq a_n \ \forall n \in \mathbb{N} \land 0 < \beta < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \beta \notin S \land \beta \in (0; 1) \end{aligned}$$

   В $(0; 1)$ существуют числа вида $\frac{q}{10^n}$ $(q \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N})$, представимые двумя способами:
   $0,5 = 0,5(0) = 0,4(9)$, поэтому в построении β нельзя использовать 0 и 9.

   Таким образом, для любого перечня $(0; 1)$ существует элемент в $(0; 1)$, который не содержится в перечне $\Rightarrow (0; 1) \nsim \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$ $\square$.

Теорема Кантора-Бернштейна

$$(\exists \text{инъекция } f : A \to B',\ B' \subset B) \wedge (\exists \text{инъекция } g : B \to A',\ A' \subset A) \Rightarrow A \sim B$$

Определение мощности множества

Мощности множеств A и B равны, если $A \sim B$.

Мощность — то общее, что есть у эквивалентных множеств.

$m(A)$ — кардинальное число множества A. $m(A) = m(B)$ означает, что мощности A и B равны.

Определение сравнения мощностей множеств

f и g — инъекции

1. $(\exists f : A \to B',\ B' \subset B) \wedge (\exists g : B \to A',\ A' \subset A) \Rightarrow m(A) = m(B)$
2. $(\exists f : A \to B',\ B' \subset B) \wedge (\nexists g : B \to A',\ A' \subset A) \Rightarrow m(A) < m(B)$
3. $(\nexists f : A \to B',\ B' \subset B) \wedge (\nexists g : B \to A',\ A' \subset A) \Rightarrow m(A)$ и $m(B)$ несравнимы,
   такого быть не может

Шкала мощностей множеств не ограничена