14. Исследовать на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$ на $\mathbb{R}$.

$\left|\dfrac{e^{-n^2x^2}}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ т. к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится на $\mathbb{R}$, то исходный ряд по признаку Вейерштрасса равномерно сходится на $\mathbb{R}$. /.local/state/nvim/swap//v

15. Разложить в ряд Тейлора функцию $\pi + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \dfrac{\cos^2 t}{t - \frac{\pi}{2}}\, dt$ в окрестности точки $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

$$f' = \frac{\cos^2 x}{x - \dfrac{\pi}{2}}$$

$$\cos^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2)^{2n-1}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} \quad \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!};$$

$$(x - \frac{\pi}{2})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$$

$$f = \int\limits_{1}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{1-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{2(2n)!} \right) dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{1}^{x} -\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{1-n} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{1}^{x} \frac{\pi^n \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{2(2n)!} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -(\frac{\pi}{2})^{n+1} \frac{(x - \frac{\pi}{2})^{3n+1}}{(3n+1)((2n)!)^2}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{\pi}{2})^{n+1} \frac{1}{(3n+1)((2n)!)^2}}{(\frac{\pi}{2})^{n+2} \frac{1}{(3n+4)((2n+2)!)^2}} = \infty$$

1. Найти пределы $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} u$, $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} u$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u$, if $u = x + y \sin \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} u = 0$; $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} u \nexists$ т. к. $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x} \nexists$;

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u = 0$ т. к. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x + y \sin \dfrac{1}{x} \sim \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y \sin \dfrac{1}{x} = 0$
(ограниченная функция на б. м.)

2. Найти $xz\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y}$, if $z = \sqrt{xy + \varphi(\dfrac{y}{x})}$.

$$\daleth u = z^2, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{u}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x}(xy + \varphi(\frac{x}{y}))}{2z} = \frac{y + \dfrac{\varphi'(\frac{x}{y})}{y}}{2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{u}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial y}(xy + \varphi(\frac{x}{y}))}{2z} = \frac{x - \dfrac{x\varphi'(\frac{x}{y})}{y^2}}{2z}$$

$$\to \frac{xz(y+\frac{\varphi'(\frac{x}{y})}{y})}{2z} + \frac{yz(x-\frac{x\varphi'(\frac{x}{y})}{y^2})}{2z} = \frac{2xyz+\cancel{\frac{xz\varphi'(\frac{x}{y})}{y}}-\cancel{\frac{xz\varphi'(\frac{x}{y})}{y}}}{2z} = xy.$$

3. Найти экстремумы функции $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ при $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$.

$L=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\lambda(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{a^2});\ x\neq 0,\ y\neq 0,\ a\neq 0$

$$\begin{cases} L'_x=-\frac{x+2\lambda}{x^3}=0\to x=-2\lambda \\ L'_y=-\frac{y+2\lambda}{y^3}=0\to y=-2\lambda \\ L'_\lambda=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{a^2}=0 \end{cases}$$

$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}-\frac{1}{a^2}=0,\ \lambda=\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}\to y=x=\mp a\sqrt{2}$

$L''_{xx}=\frac{2x+6\lambda}{x^4},\ L''_{yy}=\frac{2y+6\lambda}{y^4},\ L''_{\lambda\lambda}=0,\ L''_{x\lambda}=\frac{-2}{x^3},\ L''_{y\lambda}=\frac{-2}{y^3}$

$$\mathcal{H}=\begin{vmatrix} 0 & \frac{-2}{x^3} & \frac{-2}{y^3} \\ \frac{-2}{x^3} & \frac{2x+6\lambda}{x^4} & 0 \\ \frac{-2}{y^3} & 0 & \frac{2y+6\lambda}{y^4} \end{vmatrix}$$

в точке $(-a\sqrt{2},-a\sqrt{2}),\ \mathcal{H}=-\frac{1}{2\sqrt{2}a^9}$; в точке $(a\sqrt{2},a\sqrt{2}),\ \mathcal{H}=\frac{1}{2\sqrt{2}a^9}$.

if $a>0\to -\frac{1}{2\sqrt{2}a^9}<0\to$ точка $(-a\sqrt{2},-a\sqrt{2})$ – min, а $(a\sqrt{2},a\sqrt{2})$ – max.

if $a<0\to -\frac{1}{2\sqrt{2}a^9}>0\to$ точка $(-a\sqrt{2},-a\sqrt{2})$ – max, а $(a\sqrt{2},a\sqrt{2})$ – min.

4. Оператор Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ преобразовать к полярным координатам.

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=\mathrm{arctg}(\frac{y}{x}) \\ w=u \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\rho=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy \\ d\varphi=\frac{x}{x^2+y^2}dy-\frac{y}{x^2+y^2}dx \\ dw=du \end{cases} \qquad dw=w'_\rho d\rho+w'_\varphi d\varphi=u'_x dx+u'_y dy$$

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} w'_\rho - \dfrac{y}{x^2+y^2} w'_\varphi \\ u'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} w'_\rho + \dfrac{x}{x^2+y^2} w'_\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'_x = \cos\varphi w'_\rho - \dfrac{\sin\varphi}{\rho} w'_\varphi \\ u'_y = \sin\varphi w'_\rho + \dfrac{\cos\varphi}{\rho} w'_\varphi \end{cases}$$

$$u''_{x^2} = \left(\cos\varphi w'_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho} w'_\varphi\right)'_\rho \rho'_x + \left(\cos\varphi w'_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho} w'_\varphi\right)'_\varphi \varphi'_x =$$

$$= w''_{\rho^2}\cos^2\varphi - 2w''_{\rho\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} + w''_{\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2} + w'_\rho\frac{\sin^2\varphi}{\rho} + w'_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}$$

$$u''_{y^2} = \left(\sin\varphi w'_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho} w'_\varphi\right)'_\rho \rho'_y + \left(\sin\varphi w'_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho} w'_\varphi\right)'_\varphi \varphi'_y =$$

$$= w''_{\rho^2}\sin^2\varphi + 2w''_{\rho\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} + w''_{\varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2} + w'_\rho\frac{\cos^2\varphi}{\rho} - w'_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}$$

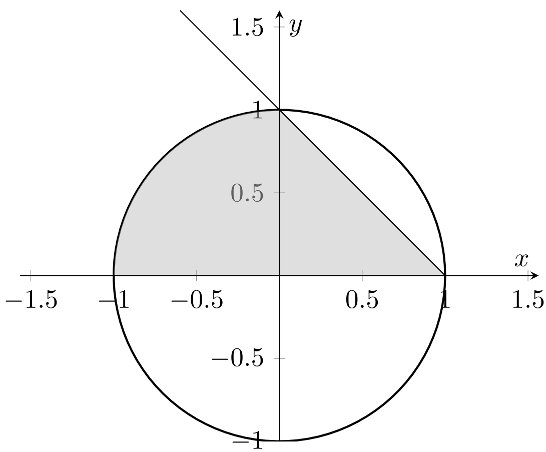
$$u''_{x^2} + u''_{y^2} = w''_{\rho^2} + \frac{1}{\rho}w'_\rho + \frac{1}{\rho^2}w''_{\varphi^2}.$$

5. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2+\alpha^4}dx$ на множестве $\mathbb{R}$.

$$\left|\frac{\ln^3 x}{x^2+\alpha^4}\right| \le \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \text{ т. к. } \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln^3 x)x^{\frac{3}{2}}}{x^2+\alpha^4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^3 x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{6\ln^2 x}{\sqrt{x}} = \ldots = 0.$$

По признаку Вейерштрасса т. к. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ – сходится $\to$ исходный интеграл равномерно сходится на $\mathbb{R}$.

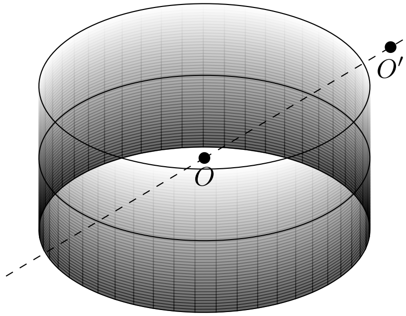
6. В двойном интеграле $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{D}} f(x,y)\, dxdy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, if $\mathbb{D} = \{x^2+y^2 \le 1,\ x+y-1 \le 0,\ y \ge 0\}$.



$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx, \ \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$$

7. Вычислить полную поверхность тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=3a^2$ и параболоидом $x^2+y^2=2az,\ z\geq 0$.

8. Найти момент инерции прямого круглого однородного цилиндра (радиус основания R, высота H) относительно диаметра его среднего сечения.



$$d^2 = \left(z - \frac{R}{2}\right)^2 + h^2; \;\; h = r\sin\varphi; \;\; d^2 = \left(z - \frac{H}{2}\right)^2 + r^2\sin^2\varphi$$

$$I = \rho\int\limits_0^H dz\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^R d^2 r dr = \rho\int\limits_0^H dz\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^R \left(\left(z - \frac{H}{2}\right)^2 r + r^3\sin^2\varphi\right) dr =$$

$$= \rho\int\limits_0^H dz\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\left(z-\frac{H}{2}\right)^2 R^2}{2} + \frac{R^4\sin^2\varphi}{4}\right) d\varphi =$$

$$= \rho\int\limits_0^H dz\left[\frac{\left(z-\frac{H}{2}\right)^2 R^2}{2}\varphi + \frac{R^4}{8}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = \rho\int\limits_0^H\left(\left(z - \frac{H}{2}\right)^2 R^2\pi + \frac{R^4}{4}\pi\right) dz =$$

$$= \rho\left[\frac{\left(z-\frac{H}{2}\right)^3 - R^2\pi}{3} + \frac{R^4\pi}{4}\right]_0^H = \rho\pi R^2 H\left(\frac{H^2}{24} + \frac{R^2}{4}\right).$$