Билет 13

Монотонная ограниченная последовательность. Лемма о вложенных промежутках

Теорема

$\{a_n\}$ — ограничена сверху и возрастающая $\Rightarrow$ она сходится, причём $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$

$\{a_n\}$ — ограничена снизу и убывающая $\Rightarrow$ она сходится, причём $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$

Доказательство

Без ограничения общности пусть $\{a_n\}$ ограничена сверху и возрастающая

$\{a_n\}$ — ограничена сверху $\Rightarrow$ множество её значений $Z := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничено сверху, тогда:

$$\exists \sup Z =: g \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N} : g - \varepsilon < a_k \leq g < g + \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall n > k)\ g - \varepsilon < a_k \leq a_n \leq g < g + \varepsilon \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon\ \square.$$

Определение системы вложенных отрезков

Система (множество) отрезков $\{[a_n; b_n]\}$ называется системой вложенных отрезков, если

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ [a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$$

Лемма о вложенных отрезках

Для всякой системы вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ верно, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] \neq \varnothing$

Причём если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$, то это пересечение состоит из единственной точки

Доказательство

По условию:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq b_1 \Rightarrow \{a_n\} \text{ — ограничена сверху}$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \Rightarrow \{a_n\} \text{ — возрастающая}$$
$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} =: a$$
$$\text{Аналогично: } \exists \lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\} =: b$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$$

Найдём $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ [a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n] \Rightarrow [a_{n+1}; b_{n+1}] \cap [a_n; b_n] = [a_{n+1}; b_{n+1}] \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{k} [a_n; b_n] = [a_k; b_k]$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \lim_{k\to\infty} \bigcap_{n=1}^{k} [a_n; b_n] = \lim_{k\to\infty} [a_k; b_k] = [a; b] \neq \varnothing \text{ (тк } a \leq b)$$
$$\text{Если } \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow [a; b] = \{a\}\ \square.$$