Билет 17

Расходимость последовательности к бесконечности

Определение

Последовательность $\{a_n\}$ расходится к $+\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$), если

$$\forall r \in \mathbb{R}\ \exists k : (\forall n > k)\ a_n > r$$

Последовательность $\{a_n\}$ расходится к $-\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$), если

$$\forall r \in \mathbb{R}\ \exists k : (\forall n > k)\ a_n < r$$

Последовательность $\{a_n\}$ расходится к ∞ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$), если

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

Теорема

$\{a_n\}$ — возрастающая и не ограничена сверху $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$\{a_n\}$ — убывающая и не ограничена снизу $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Доказательство

Без ограничения общности пусть $\{a_n\}$ — возрастающая и не ограничена сверху

$\{a_n\}$ — не ограничена сверху, значит

$$\neg(\exists r : (\forall k \in \mathbb{N})\ a_k \leq r) \Rightarrow \forall r\ \exists k \in \mathbb{N} : a_k > r \Rightarrow (\forall n > k)\ a_n \geq a_k > r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\ \square.$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \wedge (\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \sqsupset r = \frac{1}{\varepsilon} > 0\ \exists k : (\forall n > k)\ |a_n| > r \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{r} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0\ \square.$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \land \{b_n\} - \text{ограничена снизу} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \land \{b_n\} - \text{ограничена сверху} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = -\infty$$

Доказательство

Без ограничения общности рассмотрим только первый случай

$\{b_n\}$ — ограничена снизу $\Rightarrow \exists m : (\forall n \in \mathbb{N})\ b_n > m$

$$\forall r\ \exists k : (\forall n > k)\ a_n > r - m \Rightarrow a_n + m > r \Rightarrow a_n + b_n > a_n + m > r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty\ \square.$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \land (\forall n \in \mathbb{N})\ b_n \geq a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \land (\forall n \in \mathbb{N})\ b_n \leq a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$$

Доказательство

Без ограничения общности рассмотрим только первый случай

$$\forall r\ \exists k : (\forall n > k)\ a_n > r \Rightarrow b_n \geq a_n > r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty\ \square.$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \land \exists c > 0 : (\forall n \in \mathbb{N})\ b_n > c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$$

Доказательство

$$\forall r\ \exists k : (\forall n > k)\ a_n > \frac{r}{c} \Rightarrow a_n c > r \Rightarrow a_n b_n > a_n c > r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty\ \square.$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \land (\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \neq 0 \land \{b_n\} - \text{ограничена} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$

Доказательство

$\{b_n\}$ — ограничена $\Rightarrow \exists M > 0 : (\forall n \in \mathbb{N})\ |b_n| < M$

$$\forall \varepsilon > 0\ \sqsupset r = \frac{1}{\varepsilon} > 0\ \exists k : (\forall n > k)\ |a_n| > rM \Rightarrow \left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{rM} \Rightarrow \left|\frac{b_n}{a_n}\right| < \left|\frac{M}{a_n}\right| < \frac{1}{r} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0\ \square.$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} -a_n = -\infty$$

Доказательство

$$\forall r \; \exists k : (\forall n > k) \; a_n > r \Leftrightarrow -a_n < -r \; \square.$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty$$

Доказательство

$$\forall r \; \exists k : (\forall n > k) \; a_n > \frac{r}{2} \wedge b_n > \frac{r}{2} \Rightarrow a_n + b_n > r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty \; \square.$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$$

Доказательство

$$\forall r > 0 \; \exists k : (\forall n > k) \; a_n > \sqrt{r} \wedge b_n > \sqrt{r} \Rightarrow a_n b_n > r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty \; \square.$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R} \wedge b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \begin{cases} +\infty, & b > 0 \\ -\infty, & b < 0 \end{cases}$$

Доказательство

Без ограничения общности пусть $b > 0$

Ограничим b_n снизу, взяв $\varepsilon = \frac{b}{2}$

$$\sqsupset \varepsilon = \frac{b}{2} \; \exists k : (\forall n > k) \; |b_n - b| < \varepsilon = \frac{b}{2} \Rightarrow -\frac{b}{2} < b_n - b \Rightarrow b_n > \frac{b}{2} > 0$$

$$\forall r > 0 \; \exists k' > k : (\forall n > k') \; a_n > \frac{2r}{b} \Rightarrow a_n b_n > a_n \frac{b}{2} > r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty \; \square.$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \land a \neq 0 \land \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \land (\forall n \in \mathbb{N})\ b_n > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

Доказательство

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty$

$$\forall r > 0\ \ \sqsupset \varepsilon = \frac{1}{r} > 0\ \exists k : (\forall n > k)\ 0 < b_n < \varepsilon = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{b_n} > r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty$$

Тогда по предыдущей теореме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \frac{1}{b_n} = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}\ \square.$$