Билет 71

Неопределенный интеграл. Интегрирование методом подстановки.

Теорема

f — определена на $(a;b) \wedge F$ — её первообразная

φ — дифференцируема на $(c;d) \wedge \varphi'$ — непрерывна на $(c;d) \wedge \varphi((c;d)) \subset (a;b)$

Тогда на $(c;d)$:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c$$

Доказательство

Продифференцируем правую часть:

$$\begin{aligned}
&I(x) := F(\varphi(t)) + c \\
&I'(x) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow \\
&\Rightarrow I(x) \text{ — первообразная } f(\varphi(t))\varphi'(t) \ \square.
\end{aligned}$$

Интегрирование методом подстановки

Способ 1: $x = \varphi(t)$

$$\begin{aligned}
&I = \int f(x)dx \\
&x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt \\
&I = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c \\
&g(t) := f(\varphi(t))\varphi'(t) \wedge G'(t) = g(t) \\
&I = \int g(t)dt = G(t) + c \Rightarrow F(\varphi(t)) = G(t) \Rightarrow F(x) = G(\varphi^{-1}(x))
\end{aligned}$$

Пример

$$\begin{aligned}
&I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} \\
&x = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{x} \wedge dx = 2tdt \\
&I = \int \frac{2t}{t+1}dt = 2\int \frac{t+1-1}{t+1}dt = 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{t+1}\right) = \\
&\quad = 2(t + \ln|t+1|) + c = 2(\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}+1|) + c
\end{aligned}$$

Способ 2: $t = \omega(x)$

$$\begin{aligned}
&I = \int f(x)dx \\
&t = \omega(x) \Rightarrow dt = \omega'(x)dx \\
&f(x) = g(\omega(x))\omega'(x) \wedge G'(t) = g(t) \\
&I = \int f(x)dx = \int g(\omega(x))\omega'(x)dx = G(\omega(x)) + c
\end{aligned}$$

Пример

$$\begin{aligned}
&I = \int \sin^2(x)\cos(x)dx \\
&t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x)dx \\
&I = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{\sin^3(x)}{3} + c
\end{aligned}$$

Пример

$$\begin{aligned}
&I = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx \\
&t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x)dx \\
&I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\varphi(x)|
\end{aligned}$$