Билет 41

Теорема о стабилизации знака функции

Теорема

f — определена на $[a;b]$ и непрерывна в $x_0 \in [a,b]$:

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : (\forall x \in [a;b] : |x - x_0| < \delta)\ f(x) > 0$$
$$f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : (\forall x \in [a;b] : |x - x_0| < \delta)\ f(x) < 0$$

Если $x_0 = a$ или b, то рассматриваем окрестность $(b - \delta; b]$ или $[a, a + \delta)$ и непрерывность слева и справа соответственно

Доказательство

1. $f(x_0) > 0$

$$\sqsupset \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0\ \exists \delta > 0 : (\forall x : |x - x_0| < \delta)\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x) > 0\ \square.$$

2. $f(x_0) < 0$

$$\sqsupset \varepsilon = -\frac{f(x_0)}{2} > 0\ \exists \delta > 0 : (\forall x : |x - x_0| < \delta)\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = -\frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < -\frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow \frac{3f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x) < 0\ \square.$$