Билет 26

Условие существования конечного предела функции

Теорема

f — возрастающая на X

$a \in \overline{\mathbb{R}}$ — точка сгущения X и $a = \sup X$, если X ограничено сверху и $a = +\infty$ иначе

$$f(X) \text{ — ограничено сверху} \Rightarrow \exists \lim_{x \to a-0} f(x) \in \mathbb{R}$$

Аналогично для убывающей и ограниченной снизу f

Аналогично ещё два случая, но с $a = \inf X$ или $-\infty$

Доказательство

Возьмём возрастающую последовательность $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$, сходящуюся к a

$$\begin{aligned}
&f(X) \text{ — ограничено сверху} \Rightarrow \{f(x_n)\} \text{ — ограничена сверху} \\
&f, \{x_n\} \text{ — возрастающие} \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} \geq x_n \wedge (\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2)\ f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ f(x_{n+1}) \geq f(x_n) \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) =: g \wedge (\forall n \in \mathbb{N})\ f(x_n) \leq g
\end{aligned}$$

Возьмём теперь произвольную последовательность $\{z_n\} \subset X \setminus \{a\}$, сходящуюся к a

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0\ \exists k : |f(x_k) - g| < \varepsilon \Rightarrow 0 \leq g - f(x_k) < \varepsilon \\
&\sqsupset \eta = |x_k - a|\ \exists N : (\forall n > N)\ |z_n - a| < \eta = |x_k - a| \Rightarrow \\
&\Rightarrow a - z_n < a - x_k \Rightarrow z_n > x_k \Rightarrow f(z_n) \geq f(x_k) \Rightarrow \\
&\Rightarrow 0 \leq g - f(z_n) \leq g - f(x_k) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(z_n) = g \Rightarrow \lim_{z \to a-0} f(z) = g\ \square.
\end{aligned}$$

Теорема

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \{x_n\}((\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \neq a \wedge x_n \to a) \exists \lim_{n \to \infty} f(x_n)$$

Необходимость

По определению $\square$.

Достаточность

Возьмём $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \neq a \wedge x_n \to a \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) =: g \qquad (\forall n \in \mathbb{N})\ x'_n \neq a \wedge x'_n \to a \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} f(x'_n) =: g'$$

Возьмём теперь $\{z_n\} := \{x_1, x'_1, x_2, x'_2, ...\}$, по условию $f(z_n) \to g_z$

$\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ — подпоследовательности $\{f(z_n)\} \Rightarrow g = g_z \wedge g' = g_z \Rightarrow g = g'$

То есть любая последовательность сходится к одному и тому же пределу $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} f(x)\ \square$.