Билет 76

Интегрирование биномиальных дифференциалов. Теорема Чебышева.
Понятие об эллиптических интегралах.

Определение биномиального дифференциала

$x^m(b+ax^n)^p dx,\ m,n,p \in \mathbb{Q}, a,b \in \mathbb{R}$ — биномиальный дифференциал

Теорема Чебышева

Биномиальные дифференциалы интегрируемы в элементарных функциях только в следущих случаях:

$$p \in \mathbb{Z} \qquad \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \qquad \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$$

Доказательство

1. $p \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^m(b+ax^n)^p$ принимает форму дробно-линейной иррациональности $R(x, \sqrt[r]{x})$, где

$$m = \frac{m_1}{m_2} \qquad n = \frac{n_1}{n_2} \qquad m_1, n_1 \in \mathbb{Z}, m_2, n_2 \in \mathbb{N} \qquad r = \text{НОК}(m_2, n_2)\ \square.$$

2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \neq 0$

$$z = x^n \Rightarrow x = z^{\frac{1}{n}}$$
$$dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$$
$$I = \int x^m(b+ax^n)^p dx = \int z^{\frac{m}{n}}(b+az)^p \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(b+az)^p dz$$
$$p = \frac{k}{s},\ k \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}$$
$$\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow I = \frac{1}{n}\int R(z, \sqrt[s]{b+az}) dz \text{ — дробно-линейная иррациональность } \square.$$

3. $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \neq 0$

$$z = x^n \Rightarrow x = z^{\frac{1}{n}}$$
$$dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$$
$$I = \int x^m(b+ax^n)^p dx = \int z^{\frac{m}{n}}(b+az)^p \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(b+az)^p dz =$$
$$= \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1} \frac{z^p}{z^p}(b+az)^p dz = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}+p-1} \left(\frac{b+az}{z}\right)^p dz$$
$$p = \frac{k}{s},\ k \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}$$
$$\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \Rightarrow I = \frac{1}{n}\int R\left(z, \sqrt[s]{\frac{b+az}{z}}\right) dz \text{ — дробно-линейная иррациональность } \square.$$

Определение эллиптических интегралов

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}\right) dx \tag{1}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^4 + b^3 + cx^2 + dx + e}\right) dx \tag{2}$$

Интегралы вида (1) и (2) называются эллиптическими, если они не интегрируемы
в элементарных функциях. В противном случае они называются псевдоэллиптическими

Теорема

Интерал (1) можно свести к (2)

Доказательство

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_0)(x^2 + px + q)$$
$$x - x_0 = \pm t^2,\ t \geq 0$$
$$a(x - x_0)(x^2 + px + q) = \pm at^2((x_0 \pm t^2)^2 + p(x_0 \pm t^2) + q) =$$
$$= \pm at^2(t^4 \pm (p + 2x_0)t^2 + x_0^2 + px_0 + q)$$
$$\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d} = \sqrt{\pm at^2(t^4 \pm (p + 2x_0)t^2 + x_0^2 + px_0 + q)} =$$
$$= t\sqrt{\pm a(t^4 \pm (p + 2x_0)t^2 + x_0^2 + px_0 + q)}$$
$$R_1\left(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}\right) = R_2\left(t, \sqrt{\pm a(t^4 \pm (p + 2x_0)t^2 + x_0^2 + px_0 + q)}\right) \square.$$