Билет 61

Исследования на экстремум функции, n раз дифференцируемой в стационарной точке.

Определение стационарной точки

c — стационарная точка f означает $f'(c) = 0$

Теорема

f — n раз дифференцируема в окрестности c, и $f^{(n)}$ — непрерывна в этой окрестности

$$(\forall m = \overline{1, n-1})\ f^{(m)}(c) = 0 \land f^{(n)}(c) \neq 0 \Rightarrow c \text{ — локальный экстремум } f, \text{ если } n \text{ — чётно}$$

Доказательство

По теореме о стабилизации знака функции:

$$f^{(n)}(c) \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (\forall h \in (-\varepsilon; \varepsilon))\ f^{(n)}(c+h) \neq 0 \land f^{(n)}(c+h) \text{ имеет тот же знак, что и } f^{(n)}(c)$$

По формуле Тейлора:

$$(\forall h \in (-\varepsilon; \varepsilon))\ f(c+h) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(c) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c + \theta h),\ \theta \in (0; 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(c+h) = f(c) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c + \theta h)$$

$h \neq 0$

1. $f^{(n)}(c) > 0$

$$\begin{cases} n \text{ — чётно} & \Rightarrow h^n > 0 \\ f^{(n)}(c) > 0 & \Rightarrow f^{(n)}(c + \theta h) > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c + \theta h) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall h \in (-\varepsilon; \varepsilon) \setminus \{0\})\ f(c+h) > f(c) \Rightarrow c \text{ — точка локального минимума } \square.$$

2. $f^{(n)}(c) < 0$

$$\begin{cases} n \text{ — чётно} & \Rightarrow h^n > 0 \\ f^{(n)}(c) < 0 & \Rightarrow f^{(n)}(c + \theta h) < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c + \theta h) < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall h \in (-\varepsilon; \varepsilon) \setminus \{0\})\ f(c+h) < f(c) \Rightarrow c \text{ — точка локального максимума } \square.$$