Билет 75

Интегрирование иррациональных и тригонометрических выражений.

Определение рационального выражения от 2х аргументов

$$P_n(y,z) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} y^i z^j \qquad \exists i : a_{i(n-i)} \neq 0$$

P_n — многочлен от аргументов y и z степени n

$R(y,z) = P(y,z)/Q(y,z)$ (P, Q — полиномы) — рациональная дробь от 2х аргументов

Если $R(y,z), R_1(t), R_2(t), R_3(t)$ — рациональные функции, то
$R[R_1(t), R_2(t)]R_3(t)$ — рациональная функция

Теорема

$R(\sin(x), \cos(x))$ интегрируема в элементарных функциях

Доказательство

$$\begin{aligned}
&I = \int R(\sin(x), \cos(x))dx \\
&t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right),\ x = 2\operatorname{arctg}(t) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\
&\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
&I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt
\end{aligned}$$

Таким образом, I был сведен к интегралу рациональной функции $\Rightarrow R(\sin(x), \cos(x))$ — интегрируема в элементарных функциях $\square$.

Пример

$$\begin{aligned}
&I = \int \frac{dx}{1 + a\cos(x)},\ a > 0 \wedge a \neq 1 \\
&t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\
&\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
&I = \int \frac{1}{1 + a\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1}{1+t^2+a(1-t^2)}dt \\
&= 2\int \frac{1}{(1-a)t^2 + (1+a)}dt = \frac{2}{1-a}\int \frac{1}{t^2 + \frac{1+a}{1-a}}dt \\
&c := \frac{1+a}{1-a} \\
&b := \sqrt{|c|},\ b^2 = |c|,\ b \neq 0
\end{aligned}$$

Рассмотрим 2 случая:

1. $c \geq 0 \Leftrightarrow a \in (0;1)$

$$c = |c| = b^2$$
$$I = \frac{2}{1-a}\int \frac{1}{t^2+b^2}dt = \frac{2}{1-a}\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{b}\right) + c$$
$$b = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$$
$$I = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) + c$$

2. $c < 0 \Leftrightarrow a \in (1;+\infty)$

$$c = -|c| = -b^2$$
$$I = \frac{2}{1-a}\int \frac{1}{t^2-b^2}dt = \frac{1}{2b}\ln\left|\frac{t-b}{t+b}\right| + c = \frac{1}{2b}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-b}{\operatorname{tg}(x/2)+b}\right| + c$$

Теорема

Дробно-линейная иррациональность:

$R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, $a,b,c,d \in \mathbb{R} : ad-bc \neq 0, n \in \mathbb{N}$ — интегрируема в элементарных функциях

Доказательство

$$I = \int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$
$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow cxt^n + dt^n = ax+b \Rightarrow x = \frac{dt^n-b}{a-ct^n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dx = \frac{(a-ct^n)ndt^{n-1} + (dt^n-b)cnt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt = \frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(a-ct^n)^2}dt$$
$$I = \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right)\frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(a-ct^n)^2}dt \,\square.$$

Пример

$$I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x}$$
$$a=1,\ b=1,\ c=-1,\ d=1,\ ad-bc=2,\ n=2$$
$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow dx = \frac{2t\cdot 2}{(1+t^2)^2}dt = \frac{4t}{(1+t^2)^2}dt$$
$$x = \frac{t^2-1}{1+t^2} \Rightarrow 1-x = \frac{1+t^2-t^2+1}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2}$$
$$I = \int t\frac{1+t^2}{2}\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt = 2\int\frac{t^2}{1+t^2}dt = 2\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt = 2\left[\int dt - \int\frac{1}{1+t^2}dt\right] =$$
$$= 2[t - \operatorname{arctg}(t)] + c = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c$$

Теорема

Квадратная иррациональность:

$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ — интегрируема в элементарных функциях

ax^2+bx+c не имеет равных корней

Доказательство

1. ax^2+bx+c не имеет вещественных корней

   ax^2+bx+c — подкоренное выражение $\Rightarrow ax^2+bx+c > 0 \Rightarrow a > 0$

   Первая подстановка Эйлера:

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a} \Rightarrow t - x\sqrt{a} = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

$$ax^2+bx+c = t^2 + ax^2 - 2xt\sqrt{a} \Rightarrow bx + c = t^2 - 2xt\sqrt{a} \Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}$$

$$dx = \frac{(b+2t\sqrt{a})2t - (t^2-c)2\sqrt{a}}{(b+2t\sqrt{a})^2}dt = \frac{2\sqrt{a}t^2+2bt+2c\sqrt{a}}{(b+2t\sqrt{a})^2}dt = 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(b+2t\sqrt{a})^2}dt$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a} = t - \frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}\sqrt{a} = \frac{bt+2t^2\sqrt{a}-t^2\sqrt{a}+c\sqrt{a}}{b+2t\sqrt{a}} = \frac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{b+2t\sqrt{a}}$$

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R\left(\frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}, \frac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{b+2t\sqrt{a}}\right) 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(b+2t\sqrt{a})^2}dt \,\square.$$

2. ax^2+bx+c имеет вещественные корни x_1 и x_2, причём $x_1 \neq x_2$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

   Вторая подстановка Эйлера:

$$t = \frac{\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}}{x-x_1}$$

$$t(x-x_1) = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} \Rightarrow t^2(x-x_1)^2 = a(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2(x-x_1) = a(x-x_2) \Rightarrow xt^2 - x_1t^2 = ax - x_2a \Rightarrow x = \frac{x_1t^2-x_2a}{t^2-a}$$

$$dx = \frac{2x_1t(t^2-a) - 2t(x_1t^2-x_2a)}{(t^2-a)^2}dt = \frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}dt$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1) = t\left(\frac{x_1t^2-x_2a}{t^2-a} - x_1\right) = t\frac{x_1t^2-x_2a-x_1t^2+x_1a}{t^2-a} = \frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}$$

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = \int R\left(\frac{x_1t^2-x_2a}{t^2-a}, \frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}\right)\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}dt \,\square.$$