Билет 69

Приближенное вычисление элементарных функций, оценка погрешности.

Приближенное вычисление e^x

Найдём разложение $f(x) = e^x$ по формуле Маклорена

1. Найдём $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad\qquad f^{(n)}(0) = 1$$

2. Найдём разложение:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x},\ \theta \in (0;1)$$

$\varphi_n(x)$ — приближённое значение $f(x)$:

$$e^x \approx \varphi_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Оценим его погрешность для $x \in [0; r]$:

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |R_{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} |e^{\theta x}| \le \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} e^r$$

Оценим его погрешность для $x \in [-r; 0]$:

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |R_{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} |e^{\theta x}| \le \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}$$

Теорема

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \qquad\qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

Доказательство

Индукция: $P(n)$ — верность теоремы для n

1. $P(1)$

$$\sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad \cos'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\sin^{(n+1)}(x) = (\sin^{(n)})' = \sin'\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi(n+1)}{2}\right)$$

$$\cos^{(n+1)}(x) = (\cos^{(n)})' = \cos'\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi(n+1)}{2}\right)\ \square.$$

Приближенное вычисление $\sin(x)$

Найдём разложение $f(x) = \sin(x)$ по формуле Маклорена

1. Найдём $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \qquad f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \qquad f^{(2k)}(0) = 0 \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

2. Найдём разложение:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{2n+3} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+3} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$R_{2n+3} = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} f^{(2n+3)}(\theta x) = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin\left(\theta x + \frac{\pi(2n+3)}{2}\right),\ \theta \in (0;1)$$

$\varphi_n(x)$ — приближённое значение $f(x)$:

$$\sin(x) \approx \varphi_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Оценим его погрешность для $x \in [-r; r]$:

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |R_{2n+3}| = \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \left|\sin\left(\theta x + \frac{\pi(2n+3)}{2}\right)\right| \leq \frac{r^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

Приближенное вычисление $\cos(x)$

Найдём разложение $f(x) = \cos(x)$ по формуле Маклорена

1. Найдём $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \qquad f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \qquad f^{(2k)}(0) = (-1)^k \qquad f^{(2k+1)}(0) = 0$$

2. Найдём разложение:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{2n+2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$R_{2n+2} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\theta x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\left(\theta x + \frac{\pi(2n+2)}{2}\right),\ \theta \in (0;1)$$

$\varphi_n(x)$ — приближённое значение $f(x)$:

$$\cos(x) \approx \varphi_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Оценим его погрешность для $x \in [-r; r]$:

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |R_{2n+2}| = \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \left|\cos\left(\theta x + \frac{\pi(2n+2)}{2}\right)\right| \leq \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Приближенное вычисление $\ln(x+1)$

Найдём разложение $f(x) = \ln(x+1)$ для $x \in (-1; +\infty)$ по формуле Маклорена

1. Найдём $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n} \qquad\qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

2. Найдём разложение:

$$\ln(x+1) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + R_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + R_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) = (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(\theta x+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\left(\frac{x}{\theta x+1}\right)^{n+1}, \ \theta \in (0;1)$$

$\varphi_n(x)$ — приближённое значение $f(x)$:

$$\ln(x+1) \approx \varphi_n(x) := \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

Оценим его погрешность для $x \in [0; r]$:

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |R_{n+1}| = \frac{1}{n+1}\left|\frac{x}{\theta x+1}\right|^{n+1} \leq \frac{|r|^{n+1}}{n+1}$$

Оценим его погрешность для $x \in [-r; 0]$, $r < 1$:

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |R_{n+1}| = \frac{1}{n+1}\left|\frac{x}{\theta x+1}\right|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}\left|\frac{r}{1-r}\right|^{n+1}$$

Приближенное вычисление $(1+x)^\alpha$

Найдём разложение $f(x) = (1+x)^\alpha$ для $x \in (-1; +\infty)$ по формуле Маклорена

1. Найдём $f^{(n)}(x)$:

$$P_n(\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1}\alpha - k \qquad\qquad f^{(n)}(x) = P_n(\alpha)(1+x)^{\alpha-n} \qquad\qquad f^{(n)}(0) = P_n(\alpha)$$

2. Найдём разложение:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + R_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}P_k(\alpha) + R_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}P_k(\alpha) + o(x^n)$$

$$R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}P_{n+1}(\alpha)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}, \ \theta \in (0;1)$$

$\varphi_n(x)$ — приближённое значение $f(x)$:

$$(1+x)^\alpha \approx \varphi_n(x) := 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}P_k(\alpha)$$

Оценим его погрешность для $x \in [0; r]$ и $\alpha - n - 1 \geq 0$:

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |R_{n+1}| = \frac{P_n(\alpha)}{(n+1)!}|x|^{n+1}|1 + \theta x|^{\alpha - n - 1} \leq \frac{P_n(\alpha)}{(n+1)!}|r|^{n+1}|1 + r|^{\alpha - n - 1}$$

Оценим его погрешность для $x \in [0; r]$ и $\alpha - n - 1 < 0$:

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |R_{n+1}| = \frac{P_n(\alpha)}{(n+1)!}|x|^{n+1}|1 + \theta x|^{\alpha - n - 1} \leq \frac{P_n(\alpha)}{(n+1)!}|r|^{n+1}$$

Оценим его погрешность для $x \in [-r; 0]$, $r < 1$ и $\alpha - n - 1 \geq 0$:

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |R_{n+1}| = \frac{P_n(\alpha)}{(n+1)!}|x|^{n+1}|1 + \theta x|^{\alpha - n - 1} \leq \frac{P_n(\alpha)}{(n+1)!}|r|^{n+1}$$

Оценим его погрешность для $x \in [-r; 0]$, $r < 1$ и $\alpha - n - 1 < 0$:

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |R_{n+1}| = \frac{P_n(\alpha)}{(n+1)!}|x|^{n+1}|1 + \theta x|^{\alpha - n - 1} \leq \frac{P_n(\alpha)}{(n+1)!}|r|^{n+1}|1 - r|^{\alpha - n - 1}$$

Замечание:

Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то $P_n(\alpha) = 0$, для $n > \alpha$

То есть вычисление φ_n для $n > \alpha$ не имеет смысла и $f(x) = \varphi_\alpha(x)$ — бином Ньютона

Приближенное вычисление $\operatorname{arctg}(x)$

Даётся без доказательства и оценки погрешности:

$$\operatorname{arctg}^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(y) \sin\left(n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right), \; y = \operatorname{arctg}(x)$$

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$