Билет 7

Определение определённого интеграла.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана в некотором промежутке $[a, b]$. Разобьем этот промежуток произвольным образом на части, вставив между a и b точки деления (1). *Наибольшую* из разностей $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i,\ (i = 0, 1, \dots, n-1)$ будем впредь обозначать через λ.

Возьмем в каждом из частичных промежутков $[x_i, x_{i+1}]$ по произволу точку $x = \xi_i$. (ранее всегда брали ξ_i как наименьшее значение x_i).

$$x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1},\ (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$\text{и составим сумму } \sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Установим теперь понятие (конечного) предела этой суммы:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma \tag{1}$$

Представим себе, что промежуток $[a, b]$ последовательно разбивается на части, сначала одним способом, затем – вторым, третьим и т. д.

Такую последовательность разбиений промежутка на части мы будем называть *основной*,
если соответствующая последовательность значений $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots$ сходится к нулю.

Равенство (3) мы понимаем в том смысле, что последовательность значений суммы σ, отвечающая любой *основной* последовательности разбиений промежутка, всегда стремится к пределу I как бы не выбирать при этом ξ_i.

Можно и здесь дать определение предела "на языке ϵ-δ". Именно, говорят, что сумма σ при $\lambda \to 0$ имеет предел I, если для каждого числа $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, лишь только $\lambda < \delta$ (т. е. основной промежуток разбит на части, с длинами $\Delta x_i < \delta$), неравенство

$|\sigma - I| < \epsilon$

выполняется при любом выборе чисел ξ.

Конечный предел I суммы σ при $\lambda \to 0$ называется определённым интегралом функции $f(x)$ в промежутке от a до b и обозначается

$$I = \int\limits_a^b f(x)\ dx \text{ (обозначение Фурье).} \tag{2}$$

если такой предел существует, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на промежутке $[a, b]$ (где a – нижний, b – верхний предел).

Приведенное определение принадлежит Риману, принято называть σ – римановской суммой, однако её ещё до Римана использовал Коши, поэтому будем называть её интегральной суммой.

Notice: оперделение может быть использовано только для ограниченой функции. В самом деле если бы функция $f(x)$ была бы неограничена на $[a, b]$, то – при любом разбиении промежутка на части она бы сохранила подобное свойство хотя бы в одной из частей. Тогда засчет выбора в этой части точки ξ можно было бы сделать $f(\xi)$, а с ней и сумму σ сколь угодно большой; при этих условиях конечного предела для σ, очевидно, существовать не могло бы. Итак, интегрируемая функция необходимо ограничена.

Поэтому в дальнейшем исследовании мы будем наперед предпологать рассматриваемую функцию f(x) ограниченной: $m \leq f(x) \leq M$, if $a \leq x \leq b$.

Notice: Про точки деления (1).

175. Другой подход к задаче о площади. Вернемся к задаче об определении площади P криволинейной трапеции $ABCD$ (рис. 65), которой мы уже занимались в n° **156.** Мы изложим сейчас другой подход к решению этой задачи *).

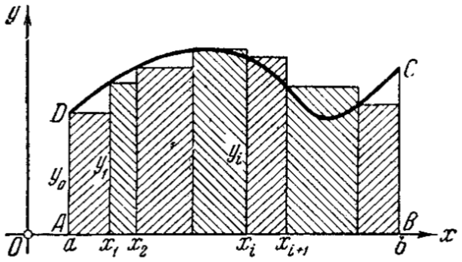

Рис. 65.

Разделим основание AB нашей фигуры произвольным образом на части и проведем ординаты, соответствующие точкам деления; тогда криволинейная трапеция разобьется на ряд полосок (см. чертеж).

Заменим теперь приближенно каждую полоску некоторым прямоугольником, основание которого то же, что и у полоски, а высота совпадает с одной из ординат полоски, скажем, с крайней слева. Таким образом, криволинейная фигура заменится некоторой ступенчатой фигурой, составленной из отдельных прямоугольников.

Обозначим абсциссы точек деления через

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b. \qquad (1)$$

Основание i-го прямоугольника ($i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$), очевидно,