Билет 30

Бесконечно малые и бесконечно большие функции. $\lim \sin(x)/x$

Определение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$$

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \infty$$

Их классификация аналогична с бесконечно малыми и бесконечно большими величинами

Теорема

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x)) \wedge f(x) - g(x) = o(f(x))$$

Необходимость

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{f(x)} = 1 - \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = o(f(x))$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))\ \square.$$

Достаточность

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)+g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{g(x)} = 0 + 1 = 1 \Rightarrow f(x) \sim g(x)\ \square.$$

Теорема

$$f \sim f_1 \wedge g \sim g_1 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Доказательство

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f(x)} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f(x)} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\ \square.$$

Теорема

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство

Рассмотрим случай $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

1. Рассмотрим единичную окружность с центром в O
2. A и B лежат на окружности и $\angle AOB = x$
3. $C : C \in OB \land CA \perp OA$

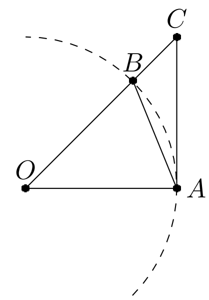

Рис. 1: $\sin(x)/x$

$$S_1 = S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin(x) = \frac{\sin(x)}{2}$$
$$S_2 = S_{\text{сектор }OAB} = \pi r^2\frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$$
$$S_3 = S_{\triangle COA} = \frac{1}{2}OA\cdot AC = \frac{\operatorname{tg}(x)}{2}$$
$$S_1 < S_2 < S_3$$

Из геометрических рассуждений получаем следущее при $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Учитывая, что $\sin(x) > 0$ разделим каждый из членов неравенства на $\sin(x)$

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \Rightarrow \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin(x)}{x} < 1 - \cos(x)$$

$$1 - \cos(x) = 1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) < 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) < 2\frac{x}{2} = x$$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos(x) < x \Rightarrow \left|1 - \frac{\sin(x)}{x}\right| < |x|$$

Покажем теперь, что эта оценка выполняется и для $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$

$$\sqsupset t := -x \Rightarrow t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \left|1 - \frac{\sin(t)}{t}\right| < |t| \Rightarrow \left|1 - \frac{\sin(-x)}{-x}\right| < |-x| \Rightarrow \left|1 - \frac{\sin(x)}{x}\right| < |x|$$

Таким образом, оценка выполняется для $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2})$

Можно прийти к выводу

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{2}\right\} : (\forall x \in \mathbb{R})\ 0 < |x| < \delta \Rightarrow |x| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|1 - \frac{\sin(x)}{x}\right| < |x| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1\ \square.$$