Билет 47

Арифметические свойства производных. Примеры: таблица производных. *Билет не просмотрен Ксюшей, но проверен Артёмом*

Теорема

$y = f(x)$ и $z = g(x)$ — дифференцируемая функции

$$\frac{d}{dx}(y \pm z) = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx}$$

Доказательство

$$\frac{d}{dx}(y \pm z) = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) \pm g(x+h)] - [f(x) \pm g(x)]}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx} \, \square.$$

Следствие

$$c = \text{const} \Rightarrow \frac{d}{dx}(y \pm c) = \frac{dy}{dx}$$

Теорема

$y = f(x)$ и $z = g(x)$ — дифференцируемые функции

$$\frac{d}{dx}(y \cdot z) = z \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot \frac{dz}{dx}$$

Доказательство

$$\frac{d}{dx}(y \cdot z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \cdot (g(x+h) - g(x))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) \cdot g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Следствие

$$c = \text{const} \Rightarrow \frac{d}{dx}(cy) = c\frac{dy}{dx}$$

По непрерывности f

$$\frac{d}{dx}(y \cdot z) = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{(g(x+h) - g(x))}{h} + g(x) \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} =$$
$$= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = z \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot \frac{dz}{dx} \, \square.$$

Теорема

$z = g(x)$ — дифференцируемая функция и $g(x) \neq 0$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

Доказательство

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} =$$
$$= -\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\frac{1}{g^2(x)}g'(x) = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}\ \square.$$

Теорема

$y = f(x)$ и $z = g(x)$ — дифференцируемые функции и $g(x) \neq 0$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{1}{z^2}\left(z \cdot \frac{dy}{dx} - y \cdot \frac{dz}{dx}\right)$$

Доказательство

$$\frac{d}{dx}\left(y \cdot \frac{1}{z}\right) = y\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}\frac{dy}{dx} = y\left(-\frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{dx}\right) + \frac{1}{z}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z^2} \cdot \left(z \cdot \frac{dy}{dx} - y \cdot \frac{dz}{dx}\right)\ \square.$$

Таблица производных

1. $\sqsupset y = c,\ c = const \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0 \Rightarrow (c)' = 0$
2. $\sqsupset y = x,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = 1 \Rightarrow (x)' = 1$
3. $\sqsupset y = x^n,\ n \in \mathbb{N},\ \forall x \quad \Delta x \Rightarrow y + \Delta y = (x+\Delta x)^n = x^n + (n-1)\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot x^{n-2}\cdot\Delta x^2 + ... + \Delta x^n$

   $\frac{\Delta y}{\Delta x} = (n-1)\cdot x^{n-1} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot x^{n-2}\cdot\Delta x + ... + \Delta x^{n-1}$
   Рассмотрим $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = (n-1)\cdot x^{n-1}$
4. $\sqsupset y = x^\mu,\ \mu \in \mathbb{R}$. Её область определения зависит от μ. Если $\mu \in \mathbb{Z}$, то это рациональная функция; если μ - дробное число, то появляются радикалы.
   $\sqsupset \mu = \frac{1}{m},\ m \in \mathbb{N}$
   $y = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x} \ \Rightarrow$ если m - нечётное, то $x \in \mathbb{R}$; если m - чётное, то $x \geq 0$.

   Если μ - иррациональное число, то $x > 0$. Значение $x = 0$ только когда $\mu > 0$

   Рассмотрим $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x}\cdot(x+\Delta x)^\mu - x^{\mu-1}}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\mu-1}\cdot\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$
   $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{\mu-1}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \mu\cdot x^{\mu-1}$

   $$\sqsupset x = 0, \mu > 0 \ \Rightarrow \ f'_{\Delta x = h}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h^\mu}{h} = \begin{cases} 0, & \mu > 1 \\ 1, & \mu = 1 \\ \infty, & \mu < 1 \end{cases}$$

5. $\frac{d}{dx}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1} \quad , x \in \mathbb{R}$
6. $\sqsupset y = \sin x,\ x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\cdot\sin\frac{h}{2}\cdot\cos(x+\frac{h}{2}) =$
   $= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2}) = \cos x$
7. $\sqsupset y = \cos x,\ x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2}{h}\cdot\sin\frac{h}{2}\cdot\sin(x+\frac{h}{2}) =$
   $-\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2}) = -\sin x$
8. $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \mathbb{R},\ \ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - (\cos x)'\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $y = \operatorname{ctg} x,\ x \in \mathbb{R},\ \ \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(\cos x)'\cdot\sin x - (\sin x)'\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin x^2}$
10. $\sqsupset y_1 = \ln x,\ x > 0,\ \ y_2 = \log_a x,\ a > 0, a \neq 1, x > 0 \Rightarrow \frac{1}{h}\cdot(\ln(x+h) - \ln x) = \frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}\cdot(\ln(1+\frac{h}{x})) =$
    $\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot\ln(1+\frac{h}{x})$
    $\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\cdot\ln_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\cdot\ln e = \frac{1}{x}$
    $y_2 = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{\ln a\cdot x}$
11. $\sqsupset y = e^x,\ x \in (-\infty, +\infty)$
    $\ln y = x\cdot\ln e \ \Rightarrow \ x = \ln y \ \Rightarrow \ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$
    По теореме производной обратной функции $\frac{dy}{dx} = y = e^x$
12. $\sqsupset y = a^x,\ a > 0,\ x \in (-\infty, +\infty)$
    $\ln y = x\cdot\ln a \ \Rightarrow \ x = \frac{\ln y}{\ln a},\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y\cdot\ln a} \ \Rightarrow$
    $\Rightarrow$ по теореме производной обратной функции: $\frac{dy}{dx} = y\cdot\ln a = a^x\cdot\ln a$
13. $\sqsupset y = \arcsin x$

$$\begin{cases} x \in [-1, 1] \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$x = \sin y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \cos y$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos{(\arcsin x)}} = \frac{1}{\cos{(\arccos \sqrt{1-x^2})}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $\sqsupset$ $y = \arccos x$

$$\begin{cases} x \in [-1, 1] \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

$x = \cos y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \sin y$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin y} = \frac{1}{\sin{(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\sqsupset$ $y = \operatorname{arctg} x$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, +\infty) \\ y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$x = \operatorname{tg} y \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$
$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

16. $\sqsupset$ $y = \operatorname{arcctg} x$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, +\infty) \\ y \in (0, \pi) \end{cases}$$

$x = \operatorname{ctg} y \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dy} = \frac{-1}{\sin^2 y}$
$\frac{dy}{dx} = -\sin^2 y = \frac{-1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$