Билет 64

Вычисление высших производных обратной функции с помощью дифференциалов.

Теорема

$y = f(x)$

g — функция, обратная к f, $x = g(y)$

$$(\forall n \geq 2)\ d^n y = \left(R_n(y) + f'(x)g^{(n)}(y)\right) dy^n \tag{1}$$

Причём $R_n(y)$ зависит только от производных g порядка $< n$ и производных f порядка $\leq n$

Доказательство

g — обратная к $f \Rightarrow y = f(x) = f(g(y))$

Индукция: $P(n)$ — верность формулы (1) для n

1. $P(2)$

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)g'(y)dy) = \left[f^{(2)}(x)(g'(y))^2 + f'(x)g^{(2)}(y)\right] dy^2 \qquad R_2(y) = f^{(2)}(x)(g'(y))^2$$

2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$d^{n+1}y = d(d^n y) = d\left[R_n(y) + f'(x)g^{(n)}(y)\right] dy^n = \left[R_n'(y) + f''(x)g'(y)g^{(n)}(y) + f'(x)g^{(n+1)}(y)\right] dy^{n+1}$$

Определим $R_{n+1}(y)$:

$$R_{n+1}(y) := R_n'(y) + f''(x)g'(y)g^{(n)}(y)$$

Заметим, что $R_{n+1}(y)$ зависит только от производных g порядка $< n+1$ и производных f порядка $\leq n+1$

Тогда получаем:

$$d^{n+1}y = \left(R_{n+1}(y) + f'(x)g^{(n+1)}(y)\right) dy^{n+1} \Rightarrow P(n+1)\ \square.$$

Алгоритм вычисления высших производных обратной функции

Задача: найти $g^{(n)}(y)$

1. Вычислим $d^{(m)}y$ для $m = \overline{1,n}$ и приведём их к форме (1)

   y — независимая переменная $\Rightarrow (\forall m \geq 2)\ d^m y = 0$, тогда для $m \geq 2$

$$R_m(y) + f'(x)g^{(m)}(y) = 0 \Rightarrow g^{(m)}(y) = \frac{-R_m(y)}{f'(g(y))} \tag{2}$$

2. Вычислим $g'(y)$ по формуле $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$, а $g^{(m)}(y)$ для $m = \overline{2,n}$ по формуле (2)

   Для каждого из этих шагов необходимы только производные g до порядка $m-1$ и производные f до порядка m