Билет 66

Конечные разности.

Определение первой разности

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ — первая разность (приращение) $f(x)$ в x_0 при приращении h аргумента x

Определение n-й разности

n-я разность — первая разность от $(n-1)$-й разности

$$\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)]$$
$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = \Delta[f(x+\Delta x) - f(x)] = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)$$

Теорема

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(x + (n-k)\Delta x)$$

Доказательство

Индукция: $P(n)$ — верность формулы для n

1. $P(1)$

$$\Delta f(x) = (-1)^0 C_1^0 f(x + (1-0)\Delta x) + (-1)^1 C_1^1 f(x + (1-1)\Delta x) = f(x+\Delta x) - f(x)$$

2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\Delta^{n+1} f(x) = \Delta[\Delta^n f(x)] = \Delta\left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(x + (n-k)\Delta x)\right] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(x + (n+1-k)\Delta x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(x + (n-k)\Delta x) =$$
$$= f(x + (n+1)\Delta x) - (-1)^n f(x) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k f(x + (n+1-k)\Delta x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k f(x + (n-k)\Delta x)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k f(x + (n+1-k)\Delta x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k f(x + (n-k)\Delta x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k f(x + (n+1-k)\Delta x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^{k-1} f(x + (n+1-k)\Delta x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (C_n^k + C_n^{k-1}) f(x + (n+1-k)\Delta x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{n+1}^k f(x + (n+1-k)\Delta x)$$

$$\Delta^{n+1}f(x) = f(x+(n+1)\Delta x) - (-1)^n f(x) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{n+1}^k f(x+(n+1-k)\Delta x) =$$
$$= (-1)^0 C_{n+1}^0 f(x+(n+1)\Delta x) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{n+1}^k f(x+(n+1-k)\Delta x) + (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1} f(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k C_n^k f(x+(n+1-k)\Delta x)\ \square.$$

Теорема

f — непрерывна на $[x_0; x_0+n\Delta x]$

f — дифференцируема на $(x_0; x_0+n\Delta x)$ до порядка n

$$\Delta^n f(x_0) = f^{(n)}(\gamma_n)\Delta x^n,\ \gamma_n \in (x_0; x_0+n\Delta x)$$

Доказательство

Индукция: $P(n)$ — верность формулы для n

1. $P(1)$

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

f непрерывна на $[x_0; x_0+\Delta x]$ и дифференцируема на $(x_0; x_0+\Delta x)$, по т. Лагранжа:

$$\Delta f(x_0) = f'(\gamma_1)\Delta x,\ \gamma_1 \in (x_0; x_0+\Delta x)$$

2. $P(n-1) \Rightarrow P(n)$

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x_0) = \Delta[\Delta^{n-1}f(x_0)] = \Delta[f^{(n-1)}(\gamma_{n-1})\Delta x^{n-1}] = \\ = [f^{(n-1)}(\gamma_{n-1}+\Delta x) - f^{(n-1)}(\gamma_{n-1})]\Delta x^{n-1}\end{aligned}$$

$$x_0 < \gamma_{n-1} < \gamma_{n-1}+\Delta x < x_0+n\Delta x \Rightarrow [\gamma_{n-1}; \gamma_{n-1}+n\Delta x] \subset (x_0; x_0+n\Delta x)$$

$f^{(n-1)}$ — непрерывна на $(x_0; x_0+n\Delta x) \Rightarrow f^{(n-1)}$ — непрерывна и дифференцируема на $[\gamma_{n-1}; \gamma_{n-1}+\Delta x]$

$$\Delta f^{(n-1)}(\gamma_{n-1}) = f^{(n)}(\gamma_n)\Delta x,\ \gamma_n \in (\gamma_{n-1}; \gamma_{n-1}+\Delta x) \subset (x_0; x_0+n\Delta x)$$

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x_0) = \Delta[\Delta^{n-1}f(x_0)] = \Delta[f^{(n-1)}(\gamma_{n-1})\Delta x^{n-1}] = \\ = [\Delta f^{(n-1)}(\gamma_{n-1})]\Delta x^{n-1} = f^{(n)}(\gamma_n)\Delta x^n,\ \gamma_n \in (x_0; x_0+n\Delta x)\ \square.\end{aligned}$$

Теорема

f — непрерывна и дифференцируема до порядка n в окрестности x_0

$f^{(n)}$ — непрерывна в x_0

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n f(x_0)}{\Delta x^n}$$

Доказательство

$$\Delta^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0 + \theta n \Delta x)\Delta x^n,\ \theta \in (0;1)$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n f(x_0)}{\Delta x^n} = \lim_{\Delta x \to 0} f^{(n)}(x_0 + \theta n \Delta x) = f^{(n)}(x_0)\ \square.$$