Билет 70

Определение и свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов.

Определение первообразной

$f(x)$ — определена на $(a;b)$

F — первообразная f, если $(\forall x \in (a;b))\ F'(x) = f(x)$

$\exists F'(a+0) = f(a+0) \wedge \exists F'(b-0) = f(b-0)$

Теорема

f — непрерывна на $(a;b) \Rightarrow \exists$первообразная f на $(a;b)$

Доказательство

Даётся без доказательства

Теорема

f — определена на $(a;b)$, F — её первообразная

$$G = F + c,\ c = \text{const} \Leftrightarrow G \text{ — первообразная } f$$

Необходимость

$$G = F + c \Rightarrow G' = F' = f \Rightarrow G \text{ — первообразная } f\ \square.$$

Достаточность

Рассмотрим $U = G - F$:

$$U = G - F \Rightarrow U' = G' - F' = f - f = 0 \Rightarrow U = \text{const} \Rightarrow G = F + c,\ c = \text{const}\ \square.$$

Определение неопределенного интеграла

f — определена на $(a;b)$, F — её первообразная

Совокупность всех функций вида $F(x) + c$, где $c = \text{const}$, называется неопределенным интегралом $f(x)$ на $(a;b)$

Обозначение:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad d\int dF = d\int f(x)dx = d(F(x)+c) = dF$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad \int d(dF) = \int d(f(x)dx) = \int (f'(x)dx)dx = f(x)dx + c = dF + c$$

Замечание:

Функции могут иметь первообразную, не выражаемую через элементарные функции.

Такие интегралы называются неберущимися и относятся к классу неэлементарных функций.

Алгебраические свойства неопределённого интеграла

Теорема

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\ \int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Доказательство

Продифференцируем правую часть:

$$I(x) := \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

$$I'(x) = \alpha \left(\int f(x)dx\right)' + \beta \left(\int g(x)dx\right)' = \alpha f(x) + \beta g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(x) \text{ — первообразная } \alpha f(x) + \beta g(x)\ \square.$$

Теорема

F — первообразная f

$$(\forall a, b \in \mathbb{R} : a \neq 0)\ \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

Доказательство

Продифференцируем правую часть:

$$I(x) := \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

$$I'(x) = \frac{1}{a}aF'(ax+b) = f(ax+b) \Rightarrow I(x) \text{ — первообразная } f(ax+b)\ \square.$$

Таблица неопределенных интегралов

$$\int 0dx = c$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\ a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \operatorname{tg}(x) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\operatorname{ctg}(x) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln|x + \sqrt{x^2+m}|,\ m \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c,\ |x| < a$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arccos\left(\frac{x}{a}\right) + c,\ |x| < a$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c,\ a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c,\ a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,\ a \neq 0$$

$$\int \operatorname{sh}(x)dx = \operatorname{ch}(x) + c$$

$$\int \operatorname{ch}(x)dx = \operatorname{sh}(x) + c$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2(x)} = \operatorname{th}(x) + c$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2(x)} = -\operatorname{cth}(x) + c$$