

## Билет 29

### Частичные пределы функции

#### Определение частичного предела функции

Пусть  $\{x_n\} : x_n \rightarrow a \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) x_n \neq a$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  — частичный предел в точке  $a$

Среди всех таких пределов существует наибольший и наименьший:

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) &:= \sup \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \mid \forall \{x_n\} : (\forall n \in \mathbb{N}) x_n \neq a \wedge x_n \rightarrow a \right\} \\ \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) &:= \inf \left\{ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \mid \forall \{x_n\} : (\forall n \in \mathbb{N}) x_n \neq a \wedge x_n \rightarrow a \right\}\end{aligned}$$

#### Теорема

$$\exists \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = g \wedge \exists \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = g \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$$

#### Необходимость

$$U := \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \mid \forall \{x_n\} : (\forall n \in \mathbb{N}) x_n \neq a \wedge x_n \rightarrow a \right\} \quad V := \left\{ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \mid \forall \{x_n\} : (\forall n \in \mathbb{N}) x_n \neq a \wedge x_n \rightarrow a \right\}$$

$$\begin{aligned}\sup U = g \wedge \inf V = g &\Rightarrow (\forall u \in U \cup V) g \leq u \leq g \Rightarrow U = V = \{g\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\forall \{x_n\} : (\forall n \in \mathbb{N}) x_n \neq a \wedge x_n \rightarrow a) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g \wedge \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \quad \square.\end{aligned}$$

#### Достаточность

$$U := \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \mid \forall \{x_n\} : (\forall n \in \mathbb{N}) x_n \neq a \wedge x_n \rightarrow a \right\} \quad V := \left\{ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \mid \forall \{x_n\} : (\forall n \in \mathbb{N}) x_n \neq a \wedge x_n \rightarrow a \right\}$$

$$\begin{aligned}(\forall \{x_n\} : (\forall n \in \mathbb{N}) x_n \neq a \wedge x_n \rightarrow a) \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g &\Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g \wedge \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g \Rightarrow \\ &\Rightarrow U = V = \{g\} \Rightarrow \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \sup U = g \wedge \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \inf V = g \quad \square.\end{aligned}$$