Билет 37

Взаимно-однозначная функция. Обратная функция. Теорема о непрерывности обратной функции

Определение взаимно-однозначной и обратной функций

$f : X \to Y$ — взаимно-однозначна, если $\forall y \in Y\ \exists! x \in X : y = f(x)$, тогда $f^{-1}(y) := x$,
где $f^{-1}(y)$ — обратная функция

Теорема

f — непрерывна и взаимно-однозначна на $[a;b] \Rightarrow f^{-1}$ — непрерывна на $[m;M]$,

где $m := \inf f([a;b])$, а $M := \sup f([a;b])$

Доказательство

По теореме Дарбу: $f([a;b]) = [m;M]$, где $m := \inf f([a;b])$, а $M := \sup f([a;b])$

Возьмём сходящуюся последовательность $\{y_n\}$:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} y_n = c & &(\forall n \in \mathbb{N})\ y_n \in [m;M] \\ &d := f^{-1}(c) & &x_n := f^{-1}(y_n) \end{aligned}$$

Докажем, что $x_n \to d$:

$x_n \in [a;b]\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{x_n\}$ — ограничена $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ (по принципу выбора Коши-Больцано).
Докажем теперь, что $x_{k_n} \to d$:

$$\begin{aligned} \sqsupset \lim_{n\to\infty} x_{k_n} = d' \neq d \Rightarrow &\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(d') \text{ (по непрерывности)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_{k_n} = f(d') \Rightarrow \\ &\Rightarrow c = f(d) = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_{k_n} = f(d') \text{ (по свойству последовательности)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(d) = f(d') \Rightarrow d = d' \text{ (по взаимно-однозначности), но } d \neq d' \end{aligned}$$

Таким образом, любая сходящаяся подпоследовательность $\{x_n\}$ сходится к d
и $\{x_n\}$ ограничена. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = d$.

Поняв, что $\{y_n\}$ и c — любые, можно прийти к выводу, что:

$$(\forall \{y_n\} : (y_n \to c \wedge y_n \neq c\ \forall n \in \mathbb{N}))\ \lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(c) \Rightarrow \lim_{y\to c} f^{-1}(y) = f^{-1}(c)\ \square.$$