Билет 68

Иррациональное число e.

Теорема

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Доказательство

Найдём разложение $f(x) = e^x$ по формуле Маклорена

1. Найдём $f^{(n)}(0)$:

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

2. Найдём разложение:

$$e^x = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x},\ \theta \in (0;1)$$

Тогда можно найти приближённое значение e:

$$\widetilde{e}_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad R_n := \frac{e^\theta}{(n+1)!},\ \theta \in (0;1) \qquad e = e^1 = \widetilde{e}_n + R_n \tag{1}$$

И оценить погрешность:

$$|\widetilde{e}_n - e| = |R_n| = \frac{|e^\theta|}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \qquad \frac{1}{(n+1)!} < R_n < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} |\widetilde{e}_n - e| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \widetilde{e}_n - e = 0 \Rightarrow e = \lim_{n\to\infty} \widetilde{e}_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ \square.$$

Теорема

Число e иррационально

Доказательство

Пусть e — рационально $\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : e = \frac{m}{n}$

$$e = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow n!e = (n-1)!m \in \mathbb{N}$$

Воспользуется (1):

$$n!e = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + n!R_n \in \mathbb{N} \land (\forall k \leq n)\ \frac{n!}{k!} \in \mathbb{N} \Rightarrow n!R_n \in \mathbb{N}$$

Теперь воспользуемся оценкой (2):

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_n < \frac{3}{(n+1)!} \Rightarrow \frac{n!}{(n+1)!} < n!R_n < \frac{3n!}{(n+1)!} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < n!R_n < \frac{3}{n+1}$$

$$\sqsupset n = 2 \Rightarrow \frac{1}{3} < n!R_n < 1, \text{ но } n!R_n \in \mathbb{N}$$

Пришли к противоречию, значит, таких m и n не существует и e — иррационально $\square$.