Билет 8

Предел числовой последовательности, его единственность. Ограниченность числовой последовательности.

Определение предела числовой послевательности

Число $g \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N} : (\forall n > k) \ |a_n - g| < \varepsilon$$

Обозначение: $g = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ или $a_n \to g$ при $n \to \infty$

Альтернативные определения:

1. $g = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, если $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $|a_n - g| < \varepsilon$ выполняется при достаточно больших n.
2. $g = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N} : (\forall n > k) \ a_n \in (g - \varepsilon, g + \varepsilon)$

Определение сходящейся и расходящейся числовой послевательности

Если последовательность имеет предел, то она сходится.

Если последовательность не сходится, то она расходится.

Теорема

Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Доказательство

Возьмём сходящуюся последовательность $\{a_n\}$.

Пусть $g = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \wedge g' = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \wedge g \neq g'$.

Возьмём $\varepsilon = \frac{|g-g'|}{2} > 0$ и воспользуемся определением предела:

$$\sqsupset \varepsilon = \frac{|g - g'|}{2} > 0 \ \exists k_1 \in \mathbb{N} : (\forall n > k_1) \ |a_n - g| < \varepsilon$$
$$\sqsupset \varepsilon = \frac{|g - g'|}{2} > 0 \ \exists k_2 \in \mathbb{N} : (\forall n > k_2) \ |a_n - g'| < \varepsilon$$

Рассмотрим $\{a_n\}$ при $n > k := \max\{k_1, k_2\}$:

$$|a_n - g| < \varepsilon \wedge |a_n - g'| < \varepsilon \Rightarrow |a_n - g| + |a_n - g'| < 2\varepsilon$$
$$2\varepsilon = |g - g'| = |(a_n - g') - (a_n - g)| \leq |a_n - g'| + |a_n - g| < 2\varepsilon$$

Пришли к противоречию, значит $g = g'$ $\square$.

Определение ограниченной последовательности

Последовательность ограничена сверху, если множество её значений ограничено сверху:

Последовательность ограничена снизу, если множество её значений ограничено снизу.

Последовательность называется ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу.

Теорема

Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Доказательство

Пусть a_n — сходящаяся последовательность, а g — её предел:

$$\sqsupset \varepsilon = 1 \ \exists k : (\forall n > k) \ g - 1 < a_n < g + 1$$

Введём m и M:

$$m := \min\{a_1, a_2, ..., a_k, g - 1\} \qquad M := \max\{a_1, a_2, ..., a_n, g + 1\}$$

Тогда:

$$\begin{cases} m \leq a_n \leq M & \forall n \leq k \\ m \leq g - 1 < a_n < g + 1 \leq M & \forall n > k \end{cases} \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \ m \leq a_n \leq M \ \square.$$

Замечание:

Из ограниченности последовательность не следует ее сходимость.

Пример: $a_n = (-1)^n$ ограничена, но не сходится.