**Билет 50**

Теорема Ролля

### Теорема Ролля

$f$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \gamma \in (a;b) : f'(\gamma) = 0$$

### Доказательство

По теореме Вейерштрасса $f$ ограничена на $[a;b]$ и она достигает своих максимума и минимума:

$$M := \sup f([a;b]) \qquad \exists x_M \in [a;b] : f(x_M) = M$$
$$m := \inf f([a;b]) \qquad \exists x_m \in [a;b] : f(x_m) = m$$

1. $M = m$

   Тогда $f(x) = const \Rightarrow (\forall \gamma \in (a;b))\ f'(\gamma) = 0\ \square$.

2. $M \neq m$

   И минимум, и максимум достигаются функцией на $[a;b]$.

   $f(a) = f(b) \Rightarrow$ хотя бы один из них достигается на $(a;b)$, там будет точка экстремума $f$:

$$\exists \gamma \in (a;b) : \gamma \text{ — точка экстремума } f \Rightarrow f'(\gamma) = 0\ \square.$$