Билет 23

Точка сгущения множества, последовательность, сходящаяся к точке сгущения множества. Определение предела функции на языке последовательностей.

Определение окрестности

$V_\varepsilon(a),\ \varepsilon > 0$ — окрестность $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$$V_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon; a+\varepsilon),\ a \in \mathbb{R} \qquad V_\varepsilon(+\infty) := (\varepsilon; +\infty) \qquad V_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\varepsilon)$$

$\dot{V}_\varepsilon(a) := V_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ — проколотая окрестность

Определение предела на языке окрестностей:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists k : (\forall n > k)\ a_n \in V_\varepsilon(g)$$

Определение точки сгущения множества

$a \in \overline{\mathbb{R}}$ — точка сгущения множества $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X : x \in \dot{V}_\varepsilon(a)$$

$a \in X$ — изолированная точка множества $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \dot{V}_\varepsilon(a) \cap X = \varnothing$$

Теорема

$$a \text{ — точка сгущения } X \Rightarrow \exists\text{последовательность } \{a_n\} : ((\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \neq a \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = a)$$

Построим такую последовательность:

$$\sqsupset \varepsilon = 1\ \exists a_1 \in X : a_1 \neq a \wedge |a - a_1| < \varepsilon = 1$$
$$\sqsupset \varepsilon = \frac{|a-a_1|}{2} < \frac{1}{2}\ \exists a_2 \in X : a_2 \neq a \wedge |a - a_2| < \varepsilon < \frac{1}{2}$$
$$\ldots$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ |a - a_n| < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \wedge (\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \neq a\ \square.$$

Определение предела функции на языке последовательностей (по Гейне)

Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{S}(a)$ точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$g \in \overline{\mathbb{R}}$ называется пределом функции f в a, если

$$\forall\text{последовательность } \{x_n\} : ((\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \in \dot{S}(a) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = a)\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$