Билет 20

Бесконечно большие величины, действия над ними, классификация бесконечно больших величин
Билет не проверен

Определение

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой.

Отметим несколько свойств бесконечно больших последовательностей:

1. Сумма.

   А) Если одно из слагаемых имеет конечный предел ($\lim\limits_{x\to a} x_n = A$), другое – бесконечный ($\lim\limits_{y\to a} y_n = \infty$), тогда по свойству бесконечно больших функций предел их алгебраической суммы равен бесконечности. При помощи символов это можно записать следующим образом: $A \pm \infty = \pm infty$.

   Б) Если оба слагаемых имеют бесконечные пределы, то важно знать какого знака эти пределы. Если обе функции имеют бесконечные пределы одинаковых знаков ($\lim\limits_{y\to a} x_n = +\infty; \lim\limits_{y\to a} y_n = +\infty$ или $\lim\limits_{y\to a} x_n = -\infty; \lim\limits_{y\to a} y_n = -\infty$), то по свойству бесконечно больших функций предел их суммы будет равен бесконечности того же знака: $+\infty + \infty = +infty$ или $(-\infty) + (-\infty) = -infty$. Если обе функции являются бесконечно большими разных знаков ($\lim\limits_{y\to a} x_n = -\infty; \lim\limits_{y\to a} y_n = +\infty$), то ничего определенного о пределе их суммы сказать нельзя (величина предела зависит от конкретного примера), $\infty - \infty$ - неопределенность.

2. Произведение.

   А) Если один из множителей имеет конечный предел, отличный от нуля, а другой множитель стремится к бесконечности ($\lim\limits_{x\to a} x_n = A \neq 0$; $\lim\limits_{y\to a} y_n = \infty$), то по свойству бесконечно больших функций предел произведения равен бесконечности: $A * \infty = \infty$.

   Б) Если оба множителя стремятся к бесконечности ($\lim\limits_{y\to a} x_n = \infty; \lim\limits_{y\to a} y_n = \infty$), то по свойству бесконечно больших функций предел произведения равен бесконечности, при чем со знаком плюс (минус), если эти функции являются бесконечно большими одного знака (разного знака): $\infty * \infty = \infty$.

   В) Если же предел одного множителя равен нулю, у другого бесконечности ($\lim\limits_{y\to a} x_n = \infty; \lim\limits_{y\to a} y_n = 0$), то ничего определенного о пределе их произведения сказать нельзя: $\infty * 0$ - неопределенность.

3. Частное.

   А) Если $\lim\limits_{x\to a} x_n = A \neq 0$; $\lim\limits_{y\to a} y_n = 0$, то предел их частного по теореме о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями будет равен бесконечности: $\frac{A}{0} = \infty$, так как $\frac{A}{0} = A * \frac{1}{0} = A * \infty = \infty$.

   Б) Если $\lim\limits_{x\to a} x_n = A$; $\lim\limits_{y\to a} y_n = \infty$, то предел их частного по теореме о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями будет равен нулю: $\frac{A}{\infty} = 0$.

   Действительно, $\frac{A}{\infty} = A * \frac{1}{\infty} = A * 0 = 0$.

   С) Если наоборот $\lim\limits_{x\to a} x_n = \infty$; $\lim\limits_{y\to a} y_n = B$, то предел их частного равен бесконечности: $\frac{\infty}{B} = \infty$.

Д) Если же обе функции стремятся к бесконечности ($\lim\limits_{y\to a} x_n = \infty; \lim\limits_{y\to a} y_n = \infty$), то ничего определенного о пределе их частного сказать нельзя: $\frac{\infty}{\infty}$ - неопределенности.

Классификация бесконечно больших величин:

Пусть $\exists\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - две бесконечно большие

1. Если $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$, то последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ несравнимы.
2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = p \neq 0$, то последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ одного порядка $x_n = O(y_n); y_n = O(x_n)$
3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, то последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентны.
4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$, то x_n величина большего порядка малочти, чем y_n.
5. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$, то y_n величина большего порядка малости, чем x_n.