Билет 57

Теорема Лопиталя, применение теоремы Лопиталя для раскрытия неопределенности.

Теорема Лопиталя 1

f, g непрерывны и дифференцируемы n раз в окрестности a

$$\begin{cases} f^{(m)}(a) = 0, m = \overline{0, n-1} \\ g^{(m)}(a) = 0, m = \overline{0, n-1} \quad g^{(n)}(a) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

Доказательство

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o((x-a)^n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \text{ аналогично: } \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(x-a)^n} = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^n}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} \square.$$

Теорема Лопиталя 2.1

Замечание: т. Лопиталя 1 рассматривает случай, когда f и g определены в a

f, g определены и дифференцируемы на $(a; b)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \lim_{x \to a+0} |g(x)| = +\infty$$

$(\forall x \in (a; b))\ g'(x) \neq 0$

$$\exists \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Доказательство

Возьмём $x_2 \in (a; b),\ x_1 \in (a; x_2)$.

f и g определены на $[x_1; x_2]$ и дифференцируемы на $(x_1; x_2)$, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (x_1; x_2)$

Тогда по т. Коши:

$$\frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)},\ \gamma \in (x_1; x_2)$$

Ограничим полученную дробь:

$$m(x_2) := \inf \left\{ \frac{f'(z)}{g'(z)} \mid z \in (a; x_2) \right\} \qquad M(x_2) := \sup \left\{ \frac{f'(z)}{g'(z)} \mid z \in (a; x_2) \right\}$$

$$m(x_2) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} \le M(x_2) \tag{1}$$

1. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$

   Возьмём $\lim\limits_{x_1 \to a+0}$ по всем частям (1):

$$\lim_{x_1 \to a+0} m(x_2) \le \lim_{x_1 \to a+0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \lim_{x_1 \to a+0} \frac{\frac{f(x_2)}{g(x_2)} - \frac{f(x_1)}{g(x_2)}}{1 - \frac{g(x_1)}{g(x_2)}} = \frac{f(x_2)}{g(x_2)} \le \lim_{x_1 \to a+0} M(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(x_2) \le \frac{f(x_2)}{g(x_2)} \le M(x_2) \text{ (тк } m(x_2) \text{ и } M(x_2) \text{ не зависят от } x_1)$$

   Тогда по принципу сжатой переменной:

$$\left(\lim_{x_2 \to a+0} m(x_2) = \lim_{x_2 \to a+0} \frac{f(x_2)}{g(x_2)} = L \right) \wedge \left(\lim_{x_2 \to a+0} M(x_2) = L \right) \Rightarrow \exists \lim_{x_2 \to a+0} \frac{f'(x_2)}{g'(x_2)} = L \ \square.$$

2. $\lim\limits_{x \to a+0} |g(x)| = +\infty$

   Возьмём $\varliminf\limits_{x_1 \to a+0}$ по всем частям (1):

$$\varliminf_{x_1 \to a+0} m(x_2) \le \varliminf_{x_1 \to a+0} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} = \varliminf_{x_1 \to a+0} \frac{\frac{f(x_1)}{g(x_1)} - \frac{f(x_2)}{g(x_1)}}{1 - \frac{g(x_2)}{g(x_1)}} = \varliminf_{x_1 \to a+0} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \le \varliminf_{x_1 \to a+0} M(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(x_2) \le \varliminf_{x_1 \to a+0} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \le M(x_2) \text{ (тк } m(x_2) \text{ и } M(x_2) \text{ не зависят от } x_1)$$

   Аналогично для $\varlimsup\limits_{x_1 \to a+0}$:

$$m(x_2) \le \varliminf_{x_1 \to a+0} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \le \varlimsup_{x_1 \to a+0} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \le M(x_2) \tag{2}$$

   Возьмём $\lim\limits_{x_2 \to a+0}$ по всем частям (2):

$$\lim_{x_2 \to a+0} m(x_2) \le \lim_{x_2 \to a+0} \left(\varliminf_{x_1 \to a+0} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \right) \le \lim_{x_2 \to a+0} \left(\varlimsup_{x_1 \to a+0} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \right) \le \lim_{x_2 \to a+0} M(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L \le \varliminf_{x_1 \to a+0} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \le \varlimsup_{x_1 \to a+0} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} \le L \Rightarrow \varliminf_{x_1 \to a+0} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \varlimsup_{x_1 \to a+0} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = L \Rightarrow \exists \lim_{x_1 \to a+0} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = L \ \square.$$

Теорема Лопиталя 2.2

f, g определены и дифференцируемы на $(b;a)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to a-0} g(x) = 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \lim_{x\to a-0} |g(x)| = +\infty$$

$(\forall x \in (b;a))\ g'(x) \neq 0$

$$\exists \lim_{x\to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство

Произведём замену, чтобы свести случай к т. Лопиталя 2.1:

$$\begin{array}{lll} x = -t & \widetilde{f}(t) = f(t) & \widetilde{f}'(t) = -f'(-t) \\ x \to a-0 \Leftrightarrow t \to -a+0 & \widetilde{g}(t) = g(t) & \widetilde{g}'(t) = -g'(-t) \end{array}$$

Перепишем теперь условие через t:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to -a+0} f(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to -a+0} \widetilde{f}(t) = 0$$
$$\lim_{x\to a-0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to -a+0} g(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to -a+0} \widetilde{g}(t) = 0$$
$$(\forall x \in (b;a))\ g'(x) \neq 0 \Rightarrow (\forall t \in (-a;-b))\ \widetilde{g}'(t) = -g'(-t) \neq 0$$

Тогда по т. Лопиталя 2.1:

$$\exists \lim_{x\to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t\to -a+0} \frac{\widetilde{f}'(t)}{\widetilde{g}'(t)} \Rightarrow \exists \lim_{t\to -a+0} \frac{\widetilde{f}(t)}{\widetilde{g}(t)} = \lim_{t\to -a+0} \frac{\widetilde{f}'(t)}{\widetilde{g}'(t)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to -a+0} \frac{\widetilde{f}(t)}{\widetilde{g}(t)} = \lim_{t\to -a+0} \frac{\widetilde{f}'(t)}{\widetilde{g}'(t)} = \lim_{x\to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ \square.$$

Теорема Лопиталя 2.3

f, g определены и дифференцируемы на $(b;a) \cup (a;c)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$$

$(\forall x \in (b;a) \cup (a;c))\ g'(x) \neq 0$

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \\ \exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теорема Лопиталя 3.1

f, g определены и дифференцируемы на $(a;+\infty)$, $a > 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \lim_{x\to+\infty} |g(x)| = +\infty$$

$(\forall x \in (a;+\infty))\ g'(x) \neq 0$

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство

Произведём замену, чтобы свести случай к т. Лопиталя 2.1:

$$x = \frac{1}{t} \qquad \widetilde{f}(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \widetilde{f}'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$x \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0+0 \qquad \widetilde{g}(t) = g\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \widetilde{g}'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)$$

Перепишем теперь условие через t:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to0+0} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to0+0} \widetilde{f}(t) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to0+0} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to0+0} \widetilde{g}(t) = 0$$
$$(\forall x \in (a;+\infty))\ g'(x) \neq 0 \Rightarrow \left(\forall t \in \left(0;\frac{1}{a}\right)\right)\ \widetilde{g}'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right) \neq 0$$

Тогда по т. Лопиталя 2.1:

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t\to0+0} \frac{\widetilde{f}'(t)}{\widetilde{g}'(t)} \Rightarrow \exists \lim_{t\to0+0} \frac{\widetilde{f}(t)}{\widetilde{g}(t)} = \lim_{t\to0+0} \frac{\widetilde{f}'(t)}{\widetilde{g}'(t)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0+0} \frac{\widetilde{f}(t)}{\widetilde{g}(t)} = \lim_{t\to0+0} \frac{\widetilde{f}'(t)}{\widetilde{g}'(t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ \square.$$

Теорема Лопиталя 3.2 и 3.3

Формулируются и доказываются аналогично с т. Лопиталя 2.2 и 2.3