Билет 2

Множество вещественных чисел, аксиомы вещественных чисел.

Определение Абелевой группы

Множество X и оператор $\odot$ образуют абелеву группу, если:

I. $(\forall a, b \in X)\ a \odot b \in X$

II. Ассоциативность: $(\forall a, b, c \in X)\ (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$

III. Существование нейтрального элемента: $\exists e \in X : (\forall a \in X)\ a \odot e = a$

IV. Существование обратного элемента: $(\forall a \in X)\ \exists a^{-1} \in X : a \odot a^{-1} = e$

V. Коммутативность: $(\forall a, b \in X)\ a \odot b = b \odot a$

Определение множества вещественных чисел 1

Аксиомы $\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{I.} & (\forall a, b \in \mathbb{R})\ a + b \in \mathbb{R} \\ \text{II.} & (\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ (a + b) + c = a + (b + c) \\ \text{III.} & \exists 0 \in \mathbb{R} : (\forall a \in \mathbb{R})\ a + 0 = a \\ \text{IV.} & (\forall a \in \mathbb{R})\ \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0 \\ \text{V.} & (\forall a, b \in \mathbb{R})\ a + b = b + a \end{array}\right\} \mathbb{R} \text{ образует с } ''+'' \text{ абелеву группу}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{VI.} & (\forall a, b \in \mathbb{R})\ a \cdot b \in \mathbb{R} \\ \text{VII.} & (\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \text{VIII.} & \exists 1 \in \mathbb{R} : (\forall a \in \mathbb{R})\ a \cdot 1 = a \\ \text{IX.} & (\forall a \in \mathbb{R} : a \neq 0)\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1 \\ \text{X.} & (\forall a, b \in \mathbb{R})\ a \cdot b = b \cdot a \end{array}\right\} \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ образует с } ''\cdot'' \text{ абелеву группу}$$

XI. $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ — Дистрибутивность $''\cdot''$ на $''+''$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{XII.} & (\forall a, b \in \mathbb{R})\ (a > b) \vee (a < b) \vee (a = b) \\ \text{XIII.} & (\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ (a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a > c) \\ \text{XIV.} & (\forall a, b, c \in \mathbb{R})\ a > b \Rightarrow a + c > b + c \\ \text{XV.} & (\forall a, b, c \in \mathbb{R} \wedge c > 0)\ a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \end{array}\right\} \text{Упорядоченность } \mathbb{R}$$

XVI. $(\forall a \in \mathbb{R})\ \exists n \in \mathbb{N} : n > a$ — Аксиома Архимеда

XVII. $(\forall X, Y \subset \mathbb{R} : (x \leq y\ \forall x \in X, y \in Y))\ \exists a \in \mathbb{R} : x \leq a \leq y\ \forall x \in X, y \in Y$ — Аксиома полноты

Непустое множество, соответствующее 17 аксиомам называется множеством действительных чисел.

Определение множества вещественных чисел 2

Непустое множество, состоящее из рациональных чисел вида $\dfrac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{Q}$, и иррациональных чисел — чисел, представимых в виде бесконечных непериодических десятичных дробей.