Билет 56

Теорема Тейлора, остаточные члены разложения функции в формах Лагранжа, Коши и Пеано.

Теорема Тейлора

f — n раз дифференцируема на $[a;b]$ или $[b;a]$

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n$$

$$\begin{aligned}
&h := b - a \\
&R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h),\ \theta \in (0;1) \text{ — остаточный член в форме Лагранжа} \\
&R_n = \frac{h^n (1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta' h),\ \theta' \in (0;1) \text{ — остаточный член в форме Коши} \\
&R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + o(h^n) \text{ при } b \to a \text{ — остаточный член в форме Пеано}
\end{aligned}$$

Доказательство

Обозначим функцию g_n:

$$g_n(x) := f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)$$

Продифференцируем выражение:

$$\begin{aligned}
g_n'(x) &= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \left[-\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \right] = \\
&= -f'(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \right] = \\
&= \underline{-f'(x)} + \left[\underline{f'(x)} - \frac{b-x}{1!} f^{(2)}(x) \right] + \left[\frac{b-x}{1!} f^{(2)}(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f^{(3)}(x) \right] + \ldots \\
&\qquad \ldots + \left[\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) \right] \\
g_n'(x) &= -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

Заметим: $g_n(a) = R_n \wedge g_n(b) = 0$. Тогда по т. Лагранжа:

$$\begin{aligned}
&\frac{g_n(b) - g_n(a)}{b-a} = g_n'(a+\theta' h),\ \theta' \in (0;1) \Rightarrow \frac{-R_n}{b-a} = g_n'(a+\theta' h) = -\frac{(b-a-\theta' h)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta' h) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{R_n}{h} = \frac{(h-\theta' h)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta' h) = \frac{h^{n-1}(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta' h) \Rightarrow \\
&\Rightarrow R_n = \frac{h^n (1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta' h) \text{ (форма Коши) } \square.
\end{aligned}$$

Докажем теперь форму Лагранжа с помощью т. Коши:

Пусть $u_n(x) := (b-x)^n$

$$u_n(a) = h^n \qquad u_n(b) = 0 \qquad u_n'(x) = -n(b-x)^{n-1} \neq 0 \; \forall x \in (a;b)$$

Тогда по т. Коши:

$$\frac{g_n(b) - g_n(a)}{u_n(b) - u_n(a)} = \frac{g_n'(a+\theta h)}{u_n'(a+\theta h)},\ \theta \in (0;1) \Rightarrow \frac{-R_n}{-h^n} = -\frac{(b-a-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h) \frac{1}{-n(b-a-\theta h)^{n-1}} = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h) \text{ (форма Лагранжа) } \square.$$

Докажем теперь форму Пеано с помощью формы Лагранжа:

$$c := a + \theta h$$
$$R_n = \frac{f^{(n)}(a) + \left[f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)\right]}{n!} h^n$$
$$\alpha := f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)$$
$$R_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + \frac{\alpha}{n!} h^n$$
$$r := \frac{\alpha}{n!} h^n$$
$$R_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + r$$

Таким образом, осталось доказать, что $r = o(h^n)$ при $b \to a$:

$$\lim_{b\to a} \frac{r}{h^n} = \lim_{b\to a} \frac{\alpha}{n!} \cdot \frac{h^n}{h^n} = \frac{1}{n!} \lim_{b\to a} \alpha = 0 \Rightarrow r = o(h^n) \Rightarrow R_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + o(h^n) \text{ (форма Пеано) } \square.$$