Билет 7

Понятие функции (отображения). Числовая последовательность,
определение числовой последовательности.

Определение функции

Пусть заданы непустые множества X и Y

Соответствие, по которому каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$, называется функцией, заданной (определённой) на множестве X со значениями в множестве Y или отображением множества X в множество Y

Функция (отображение) f из X в Y обозначается $f : X \to Y$ и
любому $x \in X$ ставится в соответствие $y = f(x) \in Y$

Элемент $x \in X$ называется независимым переменным или аргументом,
а соответствующий элемент $y \in Y$ — зависимым переменным

Множество X называется множеством задания (определения) функции f, а множестов тех $y \in Y$, для которых $\exists x \in X : y = f(x)$ — множеством значений функции f

Виды задания фунций:

1. Явный: x и $f(x)$ — известны, $y = f(x)$
2. Неявный: существует какая-то формула связывающая x и $f(x)$
3. Табличный
4. Графический

Определение естественного расширения функции

Естественное расширение отображения $f : X \to Y$, это отображение $\widetilde{f}$, заданное на множестве подмножеств множества X формулой

$$\widetilde{f}(\alpha) := \{y \in Y \mid \exists x \in \alpha : y = f(x)\},\ \alpha \subset X$$

Обозначение: $\widetilde{f} : 2^X \to 2^Y$, где $2^A := \{\alpha \mid \alpha \subset A\}$

Если $z \in 2^X$, то $\widetilde{f}(z)$ — образ множества z, а z — прообраз множества $\widetilde{f}(z)$

Обычно тильду опускают и $\widetilde{f}$ тоже обозначают через f

Определение числовой последовательности

Пусть существует отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и $a_n = f(n)$

Тогда получим числовую последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где элементы a_n расположены в пордяке возрастания n

Виды задания последовательности:

1. Явный (в виде формулы): $a_n = f(n)$
2. Неявный или рекурентный: $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, ...)$
3. Существуют последовательности, которые нельзя задать какой-либо формулой. (например, последовательность простых чисел)

Классификация числовых последовательностей

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательрность вещественных чисел.

1. Если $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{n+1} > a_n$, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго возрастающая.
2. Если $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{n+1} \geq a_n$, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая (неубывающая).
3. Если $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{n+1} \leq a_n$, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывающая (невозрастающая).
4. Если $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_{n+1} < a_n$, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго убывающая.
5. Если последовательность строго возрастающая или строго убывающая, то она строго монотонна
6. Если последовательность возрастающая или убывающая, то она монотонна