Билет 72

Неопределенный интеграл: интегрирование по частям. Примеры.

Теорема (формула интегрирования по частям)

u, v — дифференцируемы на $(a;b)$

$$\exists \int v(x)u'(x)dx \Rightarrow \exists \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Доказательство

Рассмотрим $u(x)v(x)$:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \Rightarrow \int (u(x)v(x))'dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx \Rightarrow \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \,\square.$$

Другими словами:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Теорема (обобщённая формула интегрирования по частям)

$$\int u(x)v^{(n+1)}(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x) + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}(x)v(x)dx$$

Доказательство

Индукция: $P(n)$ — верность теоремы для n

1. $P(0)$

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

2. $P(n-1) \Rightarrow P(n)$

$$\int u(x)v^{(n+1)}(x)dx = \int u(x)(v'(x))^{(n)}dx = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^{(k)}(x)(v'(x))^{(n-1-k)} + (-1)^n\int u^{(n)}(x)v'(x)dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x) + (-1)^n u^{(n)}(x)v(x) - (-1)^n\int u^{(n+1)}v(x)dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x) + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}(x)v(x)dx \,\square.$$

Пример

$$I = \int x \operatorname{arctg}(x) dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \operatorname{arctg}(x) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(x) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(x) - 2\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(x) - 2\left(\int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx\right) =$$
$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(x) - 2x + \operatorname{arctg}(x) + c$$

Пример

$$I = \int \frac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arctg}'(x) \operatorname{arctg}(x) dx = \operatorname{arctg}^2(x) - \int \operatorname{arctg}(x) \operatorname{arctg}'(x) dx =$$
$$= \operatorname{arctg}^2(x) - \int \frac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}^2(x) - I \Rightarrow I = \operatorname{arctg}^2(x) - I \Rightarrow I = \frac{\operatorname{arctg}^2(x)}{2}$$

Пример

$$I_m = \int x^\alpha \ln^m(x) dx,\ \alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \neq -1 = \int \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' \ln^m(x) dx =$$
$$= \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) \ln^m(x) - \int \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) \ln^m(x)' dx = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) \ln^m(x) - \int \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\left(\frac{m \ln^{m-1}}{x}\right) dx =$$
$$= \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) \ln^m(x) - \frac{m}{\alpha+1} \int x^\alpha \ln^{m-1}(x) dx = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) \ln^m(x) - \frac{m}{\alpha+1} I_{m-1} - \text{рекуррентная форма}$$

Пример

$$I = \int x^n e^{cx} dx,\ c \neq 0 = \int x^n \left(\frac{e^{cx}}{c^{n+1}}\right)^{(n+1)} dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x^n)^{(k)} \left(\frac{e^{cx}}{c^{n+1}}\right)^{(n-k)} + (-1)^{n+1} \int (x^n)^{(n+1)} \left(\frac{e^{cx}}{c^{n+1}}\right) dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x^n)^{(k)} \left(\frac{e^{cx}}{c^{n+1}}\right)^{(n-k)} + \kappa = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{e^{cx}}{c^{k+1}} + \kappa,\ \kappa = \text{const}$$

Пример

$$I = \int x^\alpha \ln^m(x) dx,\ \alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \neq -1$$
$$x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt \wedge t = \ln(x)$$
$$I = \int e^{(\alpha+1)t} t^m dt = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!} t^{m-k} \frac{e^{(\alpha+1)t}}{(\alpha+1)^{k+1}} + c = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!} \ln^{m-k}(x) \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{k+1}} + c$$

Пример

$$I = \int e^x \sin(x) dx = \int (e^x)'' \sin(x) dx = \sin(x)(e^x)' - \cos(x) e^x + \int e^x \sin''(x) dx =$$
$$= \sin(x) e^x - \cos(x) e^x - \int e^x \sin(x) dx = \sin(x) e^x - \cos(x) e^x - I$$
$$I = (\sin(x) - \cos(x)) e^x - I \Rightarrow I = e^x \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} + c$$

Пример

$$
\begin{aligned}
J_n &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \int (x)' \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x \left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n} \right)' dx = \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x \frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \left[\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \right] = \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \left[J_n - a^2 J_{n+1} \right] = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1} = J_n \Rightarrow \\
&\Rightarrow J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1) J_n \right] \text{ — рекуррентная форма} \\
J_1 &= \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + c
\end{aligned}
$$