Билет 10

Предел последовательности модулей чисел: свойства пределов, обусловленные неравенствами; принцип сжатой переменной

Теорема

$$a_n \to g \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} |a_n| = |g|$$

Доказательство

$$a_n \to g \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists k : (\forall n > k)\ |a_n - g| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} |a_n| - |g| \le |a_n - g| < \varepsilon \\ |g| - |a_n| \le |a_n - g| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow ||a_n| - |g|| < \varepsilon\ \square.$$

Теорема

$$c_n \to g \land (\forall n \in \mathbb{N})\ c_n \ge 0 \Rightarrow g \ge 0$$

Доказательство

Пусть $g < 0$, тогда:

$$\sqsupset \varepsilon = -g > 0\ \exists k : (\forall n > k)\ |c_n - g| < -g$$
$$c_n \ge 0 \land -g > 0 \Rightarrow |c_n - g| = c_n - g$$
$$|c_n - g| < -g \Rightarrow c_n - g < -g \Rightarrow c_n < 0$$

Пришли к противоречию, значит $g \ge 0\ \square$.

Теорема

$$a_n \to g \land b_n \to h \land (\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \ge b_n \Rightarrow g \ge h$$

Доказательство

$$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = g - h \land (\forall n \in \mathbb{N})\ a_n - b_n \ge 0 \Rightarrow g - h \ge 0 \text{ (по предыдущей теореме)} \Rightarrow g \ge h\ \square.$$

Теорема

$$a_n \to g \land b_n \to h \land (\forall n \in \mathbb{N})\ a_n > b_n \not\Rightarrow g > h$$

Доказательство

Пример: $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$

$$(a_n \to 0 = g) \land (b_n \to 0 = h) \land (a_n > b_n) \land g = h\ \square.$$

Теорема (принцип сжатой переменной)

$$a_n \to g \wedge b_n \to g \wedge (\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} c_n = g$$

Доказательство

$$a_n \to g \wedge b_n \to g \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists k : (\forall n > k)\ \begin{cases} |a_n - g| < \varepsilon \Rightarrow g - \varepsilon < a_n \\ |b_n - g| < \varepsilon \Rightarrow b_n < g + \varepsilon \\ a_n \leq c_n \leq b_n \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < g + \varepsilon \Rightarrow |c_n - g| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} c_n = g\ \square.$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Доказательство

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \wedge \lim_{n\to\infty} -|a_n| = 0 \wedge -|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0\ \square.$$