Билет 5

Типы числовых множеств. Верхняя и нижняя грани множества.

Определение типов числовых множеств

1. Отрезок (сегмент): $[a;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
2. Интервал (открытый промежуток): $(a;b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
3. Окрестность (ε-окрестность) $a \in \mathbb{R}$: $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
4. Числовая прямая: $(-\infty; +\infty)$
5. Полупрямая (луч): $[a; +\infty)$; $(-\infty; a]$
6. Полуотрезок: $[a;b)$; $(a;b]$
7. Открытая полупрямая (луч): $(a; +\infty)$; $(-\infty; a)$
8. Расширенная числовая прямая: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Определение ограниченного множества

$A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху, если $\exists M : \forall a \in A\ a < M$

$A \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу, если $\exists M : \forall a \in A\ a > M$

$A \subset \mathbb{R}$ ограничено, если оно ограничено и сверху, и снизу

Определение точной верхней и нижней граней множества

M — верхняя грань $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall a \in A\ a \leq M$

M — нижняя грань $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall a \in A\ a \geq M$

Наименьшая (наибольшая) из всех верхних (нижних) граней множества $A \subset \mathbb{R}$, называется точной верхней (нижней) гранью.

Точная верхняя грань — $\sup A$ (супремум)

Точная нижняя грань — $\inf A$ (инфенум)

Теорема

$A \neq \varnothing \wedge A$ — ограничено сверху $\Rightarrow \exists \sup A$

$A \neq \varnothing \wedge A$ — ограничено снизу $\Rightarrow \exists \inf A$

Доказательство

1. A — ограничено сверху

   Рассмотрим $U := \{u \in \mathbb{R} \mid a \leq u \; \forall a \in A\}$ — множество всех верхних граней A.

   $$\exists M \in \mathbb{R} : a < M \; \forall a \in A \Rightarrow M \in U \Rightarrow U \neq \varnothing$$

   Если $\exists \min U$, то $\exists \sup A$ (по определению $\sup A$)

   По аксиоме полноты:

   $$\begin{aligned}
   &a \leq u \; \forall a \in A, u \in U \Rightarrow \exists m \in \mathbb{R} : a \leq m \leq u \; \forall a \in A, u \in U \\
   &a \leq m \; \forall a \in A \Rightarrow m \in U \\
   &(m \leq u \; \forall u \in U) \wedge (m \in U) \Rightarrow m = \min U \Rightarrow m = \sup A \; \square.
   \end{aligned}$$

2. A — ограничено снизу

   Рассмотрим $V := \{v \in \mathbb{R} \mid v \leq a \; \forall a \in A\}$ — множество всех нижних граней A.

   $$\exists M \in \mathbb{R} : M < a \; \forall a \in A \Rightarrow M \in V \Rightarrow V \neq \varnothing$$

   Если $\exists \max V$, то $\exists \inf A$ (по определению $\inf A$)

   По аксиоме полноты:

   $$\begin{aligned}
   &v \leq a \; \forall a \in A, v \in V \Rightarrow \exists m \in \mathbb{R} : v \leq m \leq a \; \forall a \in A, v \in V \\
   &m \leq a \; \forall a \in A \Rightarrow m \in V \\
   &(v \leq m \; \forall v \in V) \wedge (m \in V) \Rightarrow m = \max V \Rightarrow m = \inf A \; \square.
   \end{aligned}$$

Теорема

$$u = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq u \; \forall x \in A & (i) \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in A : x > u - \varepsilon & (ii) \end{cases}$$
$$v = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq v \; \forall x \in A & (iii) \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in A : x < v + \varepsilon & (iv) \end{cases}$$

Доказательство

$$\begin{aligned}
(i) &\Rightarrow u \text{ — верхняя грань} \\
(ii) &\Rightarrow u \text{ — наименьшая верхняя грань } \square. \\
(iii) &\Rightarrow v \text{ — нижняя грань} \\
(iv) &\Rightarrow v \text{ — наибольшая нижняя грань } \square.
\end{aligned}$$