Билет 40

Свойства функции, обратной строго монотонной непрерывной функции. Теорема о пределе корня.

Теорема

f — непрерывна и строго монотонна на $[a;b] \Rightarrow f^{-1}$ — непрерывна и строго монотонна на $f([a;b])$

Доказательство

1. Докажем, что f — взаимно-однозначна на $[a;b]$

$$\begin{aligned} &\sqsupset f(x_1) = f(x_2) \\ &x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \text{ но } f(x_1) = f(x_2) \quad (1) \\ &x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \text{ но } f(x_1) = f(x_2) \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

2. Докажем теорему, используя материал предыдущих билетов:

   По т. Дарбу (Билет 36): $f([a;b]) = [c;d]$

   f рассматривается на $[a;b]$, то есть f — непрерывна означает, что она непрерывна на $[a;b]$.

   Аналогично сокращаются утверждения про f^{-1} на $[c;d]$

   По теореме о непрерывности обратной функции (Билет 37):

   f — взаимно-однозначна $\wedge$ f — непрерывна $\Rightarrow f^{-1}$ — непрерывна

   По теореме о строгой монотонности непрерывной взаимно-однозначной функции (Билет 38):

   f^{-1} — взаимно-однозначна $\wedge$ f^{-1} — непрерывна $\Rightarrow f^{-1}$ — строго монотонна $\square$.

Теорема о пределе корня

$f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ — непрерывна на $[0;+\infty)$ при чётных n и непрерывна на $\mathbb{R}$ при нечётных n

Доказательство

1. n — чётно

   $g(x) = x^n$ — непрерывна и строго монотонна на $[0;+\infty) \Rightarrow$
   $\Rightarrow g^{-1}(x) = f(x) = \sqrt[n]{x}$ — непрерывна и строго монотонна на $g([0;+\infty)) = [0;+\infty)$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{x_k} = \sqrt[n]{x_0}, \text{ если } \lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \wedge \forall x_k \geq 0$$

2. n — нечётно

   $g(x) = x^n$ — непрерывна и строго монотонна на $\mathbb{R} \Rightarrow$
   $\Rightarrow g^{-1}(x) = f(x) = \sqrt[n]{x}$ — непрерывна и строго монотонна на $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ $\square$.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{x_k} = \sqrt[n]{x_0}, \text{ если } \lim_{k\to\infty} x_k = x_0$$