Билет 16

Принцип сходимости Коши-Больцано

Теорема (принцип сходимости Коши-Больцано)

$$\{a_n\} \text{ — сходится} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists r : (\forall n > r) \ |a_n - a_r| < \varepsilon$$

Необходимость

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r : (\forall n \geq r) \ |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |a_r - g| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим $|a_n - a_r|$:

$$|a_n - a_r| = |(a_n - g) - (a_r - g)| \leq |a_n - g| + |a_r - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ \square.$$

Достаточность

Пусть условие Коши выполнено:

$$\sqsupset \varepsilon = 1 \ \exists r \in \mathbb{N} : (\forall n > r) \ |a_n - a_r| < \varepsilon = 1 \Rightarrow |a_n| - |a_r| \leq |a_n - a_r| < 1 \Rightarrow |a_n| < 1 + |a_r|$$

Покажем, что $\{a_n\}$ — ограничена:

$$M := \max\{1 + |a_r|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_r|\} \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \ |a_n| \leq M \Rightarrow \{a_n\} \text{ — ограничена}$$

$\{a_n\}$ — ограничена $\Rightarrow$ (по принципу выбора Больцано-Вейерштрасса) можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{m_n}\}$

Пусть $g := \lim\limits_{n\to\infty} a_{m_n}$, тогда $\forall \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
&\exists k : (\forall n > k) \ |a_{m_n} - g| < \frac{\varepsilon}{3} \\
&\exists r : (\forall n > r) \ |a_n - a_r| < \frac{\varepsilon}{3} \\
&(\forall n \in \mathbb{N}) \ m_n \geq n \Rightarrow (\forall n > r) \ |a_{m_n} - a_r| < \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

Рассмотрим $|a_n - g|$ при $n > \max\{r, k\}$:

$$\begin{aligned}
|a_n - g| &= |(a_n - a_r) + (a_r - a_{m_n}) + (a_{m_n} - g)| \leq \\
&\leq |a_n - a_r| + |a_r - a_{m_n}| + |a_{m_n} - g| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \ \square.
\end{aligned}$$