Билет 9

Арифметические свойства пределов последовательностей, изменение конечного числа членов числовой последовательности

Арифметические свойства пределов последовательностей

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = h \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = g + h$$

Доказательство

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon > 0\ \exists k : (\forall n > k)\ |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |b_n - h| < \frac{\varepsilon}{2} \\
&|(a_n + b_n) - (g + h)| = |(a_n - g) + (b_n - h)| \leq |a_n - g| + |b_n - h| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \square.
\end{aligned}$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = h \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = gh$$

Доказательство

$$\forall\eta > 0\ \exists k : (\forall n > k)\ |a_n - g| < \eta \wedge |b_n - h| < \eta$$

a_n — сходящаяся $\Rightarrow$ она ограничена:

$$\exists M > 0 : (\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| < M$$

Рассмотрим $|a_n b_n - gh|$:

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - gh| &= |a_n b_n - a_n h + a_n h - gh| = |a_n(b_n - h) + h(a_n - g)| \leq \\
&\leq |a_n||b_n - h| + |h||a_n - g| \leq M|b_n - h| + |h||a_n - g| < \eta(M + |h|)
\end{aligned}$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \sqsupset \eta = \frac{\varepsilon}{M + |h|}\ \exists k : (\forall n > k)\ |a_n b_n - gh| < \eta(M + |h|) = \varepsilon\ \square.$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = h \wedge (\forall n \in \mathbb{N})\ b_n \neq 0 \wedge h \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{g}{h}$$

Доказательство

1. Докажем, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{h}$

   Возьмём $\varepsilon = \frac{|h|}{2}$:

$$\sqsupset \varepsilon = \frac{|h|}{2}\ \exists k_1 : (\forall n > k)\ |b_n - h| < \frac{|h|}{2} \Rightarrow |h| - |b_n| \leq |b_n - h| < \frac{|h|}{2} \Rightarrow |b_n| > \frac{|h|}{2}$$

   Также по определению предела:

$$\forall \eta > 0\ \exists k_2 : (\forall n > k_2)\ |b_n - h| < \eta$$

   Тогда для $n > k := \max\{k_1, k_2\}$:

$$|b_n| > \frac{|h|}{2} \wedge |b_n - h| < \eta$$

   Рассмотрим теперь $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}|$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| = \frac{1}{|b_n|}\frac{|h-b_n|}{|h|} < \frac{2}{|h|}\frac{|h-b_n|}{|h|} < \frac{2\eta}{h^2}$$

   Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \sqsupset \eta = \frac{h^2\varepsilon}{2}\ \exists k : (\forall n > k)\ \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| < \frac{2\eta}{h^2} = \varepsilon\ \square.$$

2. Докажем теперь теорему:

$$(a_n \to g) \wedge \left(\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{h}\right) \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} \to \frac{g}{h}\right)\ \text{(по предыдущей теореме)}\ \square.$$

Следствие 1

$a_n \to g \wedge c = \mathrm{const}$

$$\lim_{n\to\infty} c + a_n = c + \lim_{n\to\infty} a_n \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$$

Следствие 2

$a_n \to g \wedge b_n \to h \wedge c = \mathrm{const}$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n + (-1)b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}(-1)b_n = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

Теорема

Изменение, добавление или отбрасывание конечного числа элементов последовательности не влияет на её сходимость и величину предела.

Доказательство

Возьмём $a_n \to g$ и изменим, добавим и отбросим конечное число элементов из неё, получив a'_n.

Количество изменений конечно, значит:

$$\exists m, p : (\forall n > m)\ a_n = a'_{n+p}$$

Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k : (\forall n > k)\ |a_n - g| < \varepsilon \Rightarrow (\forall n > \max\{k, m\})\ |a'_{n+p} - g| < \varepsilon\ \square.$$