1. Найти массу окружности $x^2 + y^2 = ax$, если плотность в каждой ее точке $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$x = \rho cos\varphi,\ y = \rho sin\varphi\ \rho^2 = a\rho\cos\varphi \implies \rho = a\cos\varphi$

$$m = \int\limits_{3\pi/2}^{5\pi/2} a\cos\varphi\sqrt{(a\cos\varphi)^2 + (-a\sin\varphi)^2}\ d\varphi = \int\limits_{3\pi/2}^{5\pi/2} a^2\cos\varphi\ d\varphi$$

$$= a^2[\sin\varphi]_{3\pi/2}^{5\pi/2} = 2a^2.$$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_L (2a - y)\ dx + (y - a)\ dy$, где L – дуга циклоиды

$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi,$

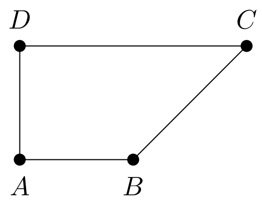
пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

$dx = a(1 - \cos t)dt,\ dy = a\sin t dt$

$$\int\limits_0^{2\pi} (a^2(1 - \cos^2 t) - a^2\cos t\sin t)dt = a^2\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t - \sin t\cos t\ dt$$

$$= a^2\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} - \frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} = a^2\pi.$$

3. С помощью формулы Грина вычислить $I = \int\limits_L \frac{x}{y}\ dy - \ln y\ dx$, где L – ломаная $ABCD,\ A(1;1),\ B(2;1),\ C(3;2),\ D(1;2)$.



$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y}\quad I = \iint\limits_{\varsigma} \frac{2}{y}\ d\varsigma = \int\limits_1^2 \frac{2}{y}\ dy\int\limits_1^3\ dx = 4\ln 2$$