Билет 54

Приращение дифференцируемой функции. Теорема о дифференцировании суперпозиции.

Теорема

$$\exists f'(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta f(x) = f'(x)h + \alpha(h)h,\ \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$$

Доказательство

Определим $\alpha(h)$:

$$\alpha(h) := \frac{\Delta f(x)}{h} - f'(x) \Rightarrow \Delta f(x) = f'(x)h + \alpha(h)h$$

Покажем, что $\alpha(h) \to 0$:

$$\lim_{h\to 0} \alpha(h) = \left(\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x)}{h}\right) - f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0\ \square.$$

Теорема

$f(x) = g(\phi(x))$ — суперпозиция (сложная функция)

$\phi(x)$ — дифференцируема в x_0

$g(t)$ — дифференцируема в $\phi(x_0)$

$$f'(x) = g'(\phi(x))\phi'(x)$$

Доказательство

g — дифференцируема в $\phi(x_0)$

$$\begin{aligned} &t = \phi(x),\ t_0 = \phi(x_0) \\ &\Delta g(t_0) = g(t_0 + \Delta t) - g(t_0) = g'(t_0)\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Рассмотрим $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(\phi(x_0 + \Delta x)) - g(\phi(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(\phi(x_0) + \Delta\phi(x_0)) - g(\phi(x_0))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g'(\phi(x_0))\Delta\phi(x_0) + o(\Delta\phi(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g'(\phi(x_0))\Delta\phi(x_0) + o(\Delta\phi(x_0))}{\Delta\phi(x_0)} \frac{\Delta\phi(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

ϕ — непрерывна в x_0

$$\Delta\phi(x_0) = \phi(x_0 + \Delta x) - \phi(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta\phi(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \frac{o(\Delta\phi(x_0))}{\Delta\phi(x_0)} = 0$$

Вернёмся к $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \left(g'(\phi(x_0)) + \frac{o(\Delta\phi(x_0))}{\Delta\phi(x_0)}\right) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta\phi(x_0)}{\Delta x} = g'(\phi(x_0))\phi'(x_0)\ \square.$$