Билет 25

Предел суперпозиции функции

Определение суперпозиции

Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$

$h : X \to Z$, $h(x) = g(f(x))$ — суперпозиция (сложная функция) функций g и f

Обозначение: $h = g \circ f$

Теорема

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0 \land \exists \lim\limits_{y \to y_0} f(y) = L$

y_0 — точка сгущения области определения f

$g(x) \neq y_0$ в $\dot{S}$ — проколотой окрестности x_0

Тогда $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = g$

Доказательство

Возьмём произвольную $\{x_n\} \subset \dot{S}$, сходящуюся к x_0, по определению предела

$$\lim_{n \to \infty} g(x_n) = y_0 \qquad\qquad (\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \in \dot{S} \Rightarrow g(x_n) \neq y_0$$

Тогда последовательность $\{g(x_n)\}$ тоже соответсвует определению предела

$$\lim_{n \to \infty} g(x_n) = y_0 \land (\forall n \in \mathbb{N})\ g(x_n) \neq y_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(g(x_n)) = L \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall \{x_n\}((\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \in \dot{S} \land x_n \to x_0) f(g(x_n)) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L\ \square.$$