Билет 73

Интегрирование рациональных выражений и правильных дробей.

Определение рационального выражения

Пусть P, Q — многочлены с вещественными коэфицентами, тогда выражение $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется рациональной дробью с вещественными коэфицентами

Если $\deg P < \deg Q$, то дробь — правильная, иначе — неправильная

Неправильную дробь можно разложить на сумму многочлена и правильной дроби

Определение приводимого полинома

Полином Q приводим, если:

$$\exists P, S : Q = PS \wedge \deg P \geq 1 \wedge \deg S \geq 1$$

Где P, S, Q — полиномы с вещественными коэфицентами

Из основной теоремы алгебры следует, что любой полином $\deg > 2$ приводим

Определение простых дробей

Простыми дробями называются дроби вида:

$$\frac{A}{(x-p)^k},\ k \in \mathbb{N} \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m},\ m \in \mathbb{N}$$

Где $A, B, p, q \in \mathbb{R}$

При этом $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней

Другими словами: f/g^k — простая дробь, если $\deg f < \deg g$ и g — неприводимый со старшим коэфицентом $= 1$

Теорема

Любая правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где старший коэфицент $Q = 1$ может быть представлена в виде суммы простых дробей:

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=0}^{k_i - 1} \frac{A_{ij}}{g_i^{k_i - j}}$$

Причём $\deg Q = N_1 + 2N_2$, где

N_1 — количество дробей с $g_i : \deg g_i = 1$

N_2 — количество дробей $g_i : \deg g_i = 2$

Доказательство

Разложим Q на произведение μ неприводимых полиномов:

$$Q = \prod_{i=1}^{\mu} g_i^{k_i},\ k_i \in \mathbb{N} \qquad i \neq j \Rightarrow g_i \neq g_j \qquad g_i \text{ — неприводимый}$$

$$\deg Q = \sum_{i=1}^{\mu} k_i \deg g_i$$

Старший коэфицент $Q = 1 \Rightarrow$ старшие коэфиценты $g_i = 1$

Возьмём $g_1^{k_1}$:

$$\widetilde{Q} := \prod_{k=2}^{\mu} g_i^{k_i} \qquad Q = \widetilde{Q} g_1^{k_1}$$

Применим следующий алгоритм к $\widetilde{Q}$ и $g_1^{k_1}$ (алгоритм Евклида):

$$\begin{aligned}
\text{Делим } \widetilde{Q} \text{ на } g_1^k \text{ с остатком: } & \widetilde{Q} = Q_0 g_1^{k_1} + R_1 && \deg R_1 < \deg g_1^{k_1} \\
\text{Делим } g_1^{k_1} \text{ на } R_1 \text{ с остатком: } & g_1^{k_1} = Q_1 R_1 + R_2 && \deg R_2 < \deg R_1 \\
& R_1 = Q_2 R_2 + R_3 && \deg R_3 < \deg R_2 \\
& \ldots \\
& R_{k-1} = Q_k R_k + R_{k+1} && \deg R_{k+1} < \deg R_k \\
& R_k = Q_{k+1} R_{k+1} && R_{k+1} \setminus R_k
\end{aligned}$$

Алгоритм заканчивается, когда R_{k+1} делит R_k без остатка ($R_{k+1} \setminus R_k$)

Алгоритм конечный, т.к. $\deg R_{k+1}$ на каждом шаге уменьшается, значит в конце концов $\deg R_{k+1}$ достигнет $0 \Rightarrow R_{k+1} = \text{const} \Rightarrow R_{k+1} \setminus R_k$

$$R_{k+1} \setminus R_k \wedge R_{k-1} = Q_k R_k + R_{k+1} \Rightarrow R_{k+1} \setminus R_{k-1} \Rightarrow R_{k+1} \setminus R_{k-2} \Rightarrow \ldots$$
$$\ldots \Rightarrow R_{k+1} \setminus \widetilde{Q} \wedge R_{k+1} \setminus g_1^{k_1} \Rightarrow R_{k+1} =: c = \text{const} \text{ (по построению } \widetilde{Q} \text{ и } g_1^{k_1} \text{ не имеют общих корней)}$$

R_{k+1} по $k+1$ шагу можно выразить через R_{k-1} и R_k.

Аналогично можно выразить R_k, R_{k-1} и т.д.

Можно прийти к следующему выводу:

$$\exists \text{многочлены } U, V : c = R_{k+1} = cU\widetilde{Q} + cVg_1^{k_1} \Rightarrow U\widetilde{Q} + Vg_1^{k_1} = 1$$
$$\frac{P}{Q} = \frac{PU\widetilde{Q} + PVg_1^{k_1}}{g_1^{k_1}\widetilde{Q}} = \frac{PV}{\widetilde{Q}} + \frac{PU}{g_1^{k_1}}$$

Обозначим PU как f_1:

$$f_1 := PU \qquad \frac{P}{Q} = \frac{PV}{\widetilde{Q}} + \frac{f_1}{g_1^{k_1}}$$

Применив эти шаги к $PV/\widetilde{Q}$ и $g_2^{k_2}$, $g_3^{k_3}$, ..., $g_{\mu-1}^{k_{\mu-1}}$ получим:

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{f_i}{g_i^{k_i}}$$

Применим следущий алгоритм к f_i

$$f_i = D_1 g_i + A_{i0} = (D_2 g_i + A_{i1}) g_i + A_{i0} = D_2 g_i^2 + A_{i1} g_i + A_{i0} = \sum_{j=0}^{k_i} A_{ij} g_i^j \qquad \deg A_{ij} < \deg g_i$$

Алгоритм конечен, т.к. состоит только из k_i шагов

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{f_i}{g_i^{k_i}} = \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=0}^{k_i} \frac{A_{ij} g_i^j}{g_i^{k_i}} = \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{k_i} \frac{A_{ij}}{g_i^{k_i-j}} = \left(\sum_{i=0}^{\mu} A_{ik_i} \right) + \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{A_{ij}}{g_i^{k_i-j}}$$
$$S := \sum_{i=0}^{\mu} A_{ik_i}$$

Пусть $S \neq 0$:

$$\frac{P}{Q} = S + ... \Rightarrow P = QS + ... \Rightarrow \deg P = \deg Q + \deg S \Rightarrow \deg P \geq \deg Q, \text{ но } \deg P < \deg Q \Rightarrow S = 0$$

$\deg A_{ij} < \deg g_i$ и g_i — неприводимый со старшим коэффициентом $= 1 \Rightarrow A_{ij}/g_i^{k_i-j}$ — простая дробь

Тогда:

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{A_{ij}}{g_i^{k_i-j}} \qquad\qquad \deg Q = \sum_{i=1}^{\mu} k_i \deg g_i = N_1 + 2N_2 \; \square.$$

Теорема

Если интеграл можно свести к интегралу от рациональной дроби, то его можно вычислить через элементарные функции

Доказательство

Рациональную дробь можно выразить как сумму простых дробей, а простые дроби интегрируемы в элементарных функциях (материал 74 билета) □.

Формула Остроградского

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$$

$P_1(x)/Q_1(x)$ — рациональная часть интеграла

$Q = Q_1 Q_2$, $\deg P < \deg Q$