Билет 63

Дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница для дифференциалов. Неинвариантность формы дифференциалов высших порядков.

Определение дифференциалов высших порядков

Дифференциал dy функции $y = f(x)$ по отношению к приращению h — функция относительно x

Дифференциалом этой функции в x по отношению к тому же приращению h — дифференциал второго порядка функции $y = f(x)$ в x по отношению к приращению h

Обозначение: d^2y, $d^2f(x)$

Дифференциал функции $d^{n-1}y$ — дифференциал n-го порядка и обозначается d^ny

$d^ny = d(d^{n-1}y)$

Теорема

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ d^ny = y^{(n)}dx^n \tag{1}$$

Доказательство

Индукция: $P(n) = (d^ny = y^{(n)}dx^n)$

1. $dy = y'dx \Rightarrow P(1)$
2. $P(n-1) \Rightarrow P(n)$

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = d(y^{(n-1)}dx^{n-1}) = y^{(n)}dxdx^{n-1} = y^{(n)}dx^n \Rightarrow P(n)\ \Box.$$

Замечание:

В данной теореме x— независимая переменная

Замечание:

Из теоремы следует формула $f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$

Замечание:

Форма дифференциала второго порядка неинвариантна, то есть формула (1) не верна при $d^2x \neq 0$

$y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ ($d^2x \neq 0 \Rightarrow \varphi(t)$ — нелинейная функция от t)

$$d^2y = d(dy) = d(f'_x\varphi'_t dt) = f''_{x^2}dx\varphi'_t dt + f'_x\varphi''_{t^2}dt^2 = f''_{x^2}dx^2 + f'_x d^2x \neq f''_{x^2}dx^2$$

Из-за $d^2x \neq 0$ будут неинвариантны и формы порядков $n > 2$

Теорема (формула Лейбница для дифференциалов)

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(d^{n-k}u)(d^kv), \text{ где } d^0u = u \text{ и } d^0v = v$$

Доказательство

$$d^n(uv) = (uv)^{(n)}dx^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}dx^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(u^{(n-k)}dx^{n-k})(v^{(k)}dx^k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(d^{n-k}u)(d^kv)\ \Box.$$