Билет 12

Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

Теорема (принцип выбора Больцано-Вейерштрасса)

Любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность

Доказательство

Рассмотрим $Z := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a_n \text{ для } \infty \text{ количества чисел } n\}$

$$\begin{aligned} \{a_n\} \text{ — ограничена } \Leftrightarrow \exists M > 0 :& (\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| < M \Rightarrow a_n > -M \Rightarrow -M \in Z \Rightarrow Z \neq \varnothing \\ & (\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| < M \Rightarrow a_n < M \Rightarrow z < M\ \forall z \in Z \end{aligned}$$

$$(Z \neq \varnothing) \wedge (z < M\ \forall z \in Z) \Rightarrow \exists \sup Z =: g$$

Покажем, что любая ε-окрестность g содержит бесконечное количество элементов a_n

$g = \sup Z \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in Z : g - \varepsilon < x \Rightarrow g - \varepsilon \in Z$ (по построению Z)
$g = \sup Z \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ g + \varepsilon \notin Z$
$\forall \varepsilon > 0\ (g - \varepsilon \in Z) \wedge (g + \varepsilon \notin Z) \Rightarrow$ для ∞ количества n: $g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - g| < \varepsilon$

Построим теперь подпоследовательность $\{a_n\}$, сходящуюся к g

$$\begin{aligned} &\sqsupset \varepsilon = 1 \Rightarrow \exists m_1 : |a_{m_1} - g| < 1 \\ &\sqsupset \varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists m_2 > m_1 : |a_{m_2} - g| < \frac{1}{2} \\ &... \\ &\sqsupset \varepsilon = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists m_n > m_{n-1} : |a_{m_n} - g| < \frac{1}{n} \\ &... \end{aligned}$$

Такие m_n существуют, тк подходящих индексов бесконечное количество,

а индексов $\leq m_{n-1}$ — конечное.

Таким образом: $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_{m_n} - g| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{m_n} = g\ \square$.