Билет 24

Правосторонний и левосторонний пределы функции в точке. Свойства пределов функций

Определение правостороннего и левостороннего пределов функции в точке

Пусть функция f определена на $(a; x_0)$

$g \in \overline{\mathbb{R}}$ называется пределом f в точке x_0 слева, если

$$\forall\{x_n\} : ((\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \in (a; x_0) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0)\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = g$ или $f(x_0 - 0) = g$

Пусть функция f определена на $(x_0; a)$

$g \in \overline{\mathbb{R}}$ называется пределом f в точке x_0 справа, если

$$\forall\{x_n\} : ((\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \in (x_0; a) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0)\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = g$ или $f(x_0 + 0) = g$

Теорема

f определена на $X := (a; x_0) \cup (x_0; b)$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = g \wedge \lim_{x\to x_0-0} f(x) = g \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = g$$

Необходимость

Возьмём последовательность $\{x_n\} \subset X$, сходящуюся к g

$\{x_{a_n}\}$ — подпоследовательность всех $x_n < x_0$

$\{x_{b_n}\}$ — подпоследовательность всех $x_n > x_0$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = g \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_{a_n}) = g \qquad\qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = g \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_{b_n}) = g$$

Иными словами:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists k : (\forall m > k)\ |f(x_{a_m}) - g| < \varepsilon \wedge |f(x_{b_m}) - g| < \varepsilon \Rightarrow (\forall n > \max\{a_m, b_m\})\ |f(x_n) - g| < \varepsilon\ \square.$$

Достаточность

Определение предела по Гейне распространяется в том числе и на последовательности из $(a; x_0) \subset X$ и $(x_0; a) \subset X\ \square$.

Свойства пределов функций

Арифметические свойства, свойства, связанные с операциями сравнения и принцип сжатой переменной доказываются через поледовательности

Аналогично эти свойства доказываются и для односторонних пределов