Билет 58

Построение графиков функций с помощью дифференциального исчисления: асимптоты *Билет не просмотрен Ксюшей, но проверен Артёмом*

Построить график функции означает изучить свойства функции и изобразить их графически.
Свойства, которые можно изобразить графически:

1. нули функции $f(x) = 0$
2. непрерывность
3. дифференцируемость
4. точки разрывов функции $f(x)$ и $f'(x)$
5. периодичность
6. чётность \ нечётность
7. монотонность
8. локальные extr-мы $f(x)$
9. поведение $f(x)$ при $x \to \pm\infty$
10. ассимптота
11. выпуклость \ вогнутость функции
12. точки перегиба функции

Под кривой или $y = f(x)$ мы будем понимать множество всех точек графика этой функции. В частности, прямая линия – это график линейной функции $y = a \cdot x + b$.
Мы будем говорить, что точки кривой $y = f(x)$ лежат над прямой $y = \varphi(x)$ (или под прямой), если выполняется $f(x) > \varphi(x)$ $(f(x) < \varphi(x))$
Будем говорить, что точки некоторой кривой лежат по разные стороны от прямой $y = \varphi(x)$, если выполняется следующие условия:
$x \neq z$
$(f(x) > \varphi(x)) \wedge (f(z) < \varphi(z))$
$(f(x) < \varphi(x)) \wedge (f(z) > \varphi(z))$

Определение
Прямая $y = a \cdot x + b$ называется наклонной асимптотой кривой $y = f(x)$, если
$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - a \cdot x - b] = 0. \Rightarrow\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - a \cdot x] = b$
Из определения следует, что асимптота занимает то предельное положение, к которому стремится касательная kk' кривой $y = f(x)$ в $(\cdot)(x, f(x))$ при $x \to \pm\infty$

Определение
Прямая $x = c$, параллельная оси Oy, — вертикальная асимптота кривой $y = f(x)$, если
$\lim_{x\to c-0} f'(x) = \pm\infty = \lim_{x\to c-0} f(x) \vee \lim_{x\to c+0} f'(x) = \pm\infty = \lim_{x\to c+0} f(x)$

Определение
Прямая $y = c$, параллельная оси Ox, — горизонтальная асимптота кривой $y = f(x)$, если
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$
Пример 1:
$y = \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}$
Ox - горизонтальная асимптота
Oy - вертикальная асимптота