Билет 39

Условие непрерывности монотонной функции

Теорема

f — монотонна на промежутке X

$$f(X) = Y, \text{ где } Y \text{ — промежуток} \Rightarrow f \text{ — непрерывна на } X$$

Здесь под промежутком имеется в виду как открытый, полуоткрытый, так и закрытый промежуток

Доказательство

Без ограничения общности пусть f — монотонно возрастающая. Докажем, что f — непрерывна слева в $\widetilde{X} := \{x \in X \mid \exists x' \in X : x' < x\} = X \setminus \{x \in X \mid \forall x' \in X : x \leq x'\}$.

$\widetilde{X} = X \setminus \{\min X\}$, если $\exists \min X$. $\widetilde{X} = X$, если его не существует.

Иными словами:

X	$\widetilde{X}$
$(a;b)$	$(a;b)$
$(a;b]$	$(a;b]$
$[a;b)$	$(a;b)$
$[a;b]$	$(a;b]$

Докажем, что f — непрерывна слева в $\forall x_0 \in \widetilde{X}$:

Для этого будем рассматривать f на $\widetilde{X}_L := \{x \in \hat{X} \mid x < x_0\}$ и $\widetilde{X}_R := \{x \in \hat{X} \mid x_0 \geq x\}$

1. Найдём $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$:

$$(\forall x \in \widetilde{X}_L)\ f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow \exists \sup f(\widetilde{X}_L)$$
$$g := \sup f(\widetilde{X}_L) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(x_0 - \delta) > g - \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall x \in (x_0 - \delta; x_0))\ g - \varepsilon < f(x_0 - \delta) \leq f(x) \leq g \Rightarrow g - \varepsilon < f(x) \leq g \Rightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = g$$

2. Докажем, что $f(x_0) = g$

$$\sqsupset f(x_0) < g \Rightarrow \sqsupset \varepsilon = g - f(x_0) > 0\ \exists x \in \widetilde{X}_L : g - \varepsilon < f(x) \Rightarrow f(x_0) < f(x), \text{ но } x < x_0 \quad (1)$$
$$\sqsupset f(x_0) > g,\ (f(x) \leq g\ \forall x \in \widetilde{X}_L) \wedge (f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in \widetilde{X}_R) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (g; f(x_0)) \not\subset Y, \text{ но } Y \text{ — промежуток} \quad (2)$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow f(x_0) = g$$

Таким образом, была доказана непрерывность слева для внутренних точек X и $\max X$, если он существует. Аналогично доказывается непрерывность справа для внутренних точек X и $\min X$, если он существует.

Таким образом для любой внутренней точки x_0 промежутка X:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \wedge \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Из этого следует, что f — непрерывна на X $\square$.