Билет 14

Число "e" как предел числовой последовательности

Теорема

Последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Доказательство

1. Докажем, что $\{a_n\}$ возрастает.

   Разложим $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ по биному Ньютона:

$$C_n^j = \frac{n!}{(n-j)!j!}$$
$$a_n = \sum_{j=0}^{n} 1^{n-j} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^j \cdot C_n^j = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^j \cdot C_n^j$$
$$a_n = 1 + 1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{n!}{(n-2)!2!} + \left(\frac{1}{n}\right)^3 \frac{n!}{(n-3)!3!} + ... + \left(\frac{1}{n}\right)^n \frac{n!}{(n-n)!n!}$$

   Рассмотрим члены a_n:

$$\frac{n!}{2!(n-2)!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$
$$\frac{n!}{3!(n-3)!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right) = \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$
$$...$$
$$\frac{n!}{n!(n-n)!}\left(\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

   Сравним a_n и a_{n+1}:

$$a_n = 1 + 1 + \underline{\frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$
$$a_{n+1} = 1 + 1 + \underline{\frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + ...$$
$$... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)...\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$\left[\frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right] \wedge \left[\frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\right] \wedge ... \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow \{a_n\} \text{ возрастает}$$

2. Докажем, что $\{a_n\}$ ограничена сверху:

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$1 - \frac{s}{n} < 1,\ s = \overline{1, n-1} \Rightarrow a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} = 2 + \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m!}$$

$$2^{n-1} \le n! \Rightarrow \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow a_n < 2 + \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{2^{m-1}} = 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) < 3$$

3. Таким образом, $\{a_n\}$ возрастает и ограничена сверху $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ сходится $\square$.

Определение числа e

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad\qquad e = 2,718281828...$$

Теорема

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Доказательство

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}\ \square.$$