Билет 31

Число e как предел функции. Замечательные пределы, неопределенности вида 1^∞, 0^0, ∞^0.

Теорема

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство

Возьмём $\{n_k\} \subset \mathbb{N} : \lim\limits_{n\to\infty} n_k = +\infty$

$$\begin{aligned}
&E(n) := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \lim_{n\to\infty} E(n) = e \\
&\forall r\ \exists k : (\forall m > k)\ n_m > r \\
&\forall \varepsilon > 0\ \exists r : (\forall n > r)\ |E(n) - e| < \varepsilon \wedge \exists k : (\forall m > k)\ n_m > r \\
&\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists k : (\forall m > k)\ |E(n_m) - e| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{k\to\infty} E(n_m) = e
\end{aligned}$$

Возьмём теперь $\{x_k\} \subset (0;1) : \lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$

Тогда определим $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&n_k := \left\lfloor \frac{1}{x_k} \right\rfloor \Rightarrow n_k \le \frac{1}{x_k} < n_k + 1 \\
&\forall r > 0\ \exists k : (\forall m > k)\ 0 < x_m < \frac{1}{r} \Rightarrow r < \frac{1}{x_m} < n_m + 1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \lim_{k\to\infty} n_k = +\infty \Rightarrow \lim_{k\to\infty} E(n_k) = e
\end{aligned}$$

$$n_k \le \frac{1}{x_k} < n_k + 1 \Rightarrow \frac{1}{n_k+1} < x_k \le \frac{1}{n_k} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n_k+1} < 1 + x_k \le 1 + \frac{1}{n_k} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1} = e$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e$$

Тогда по принципу сжатой переменной:

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e \Rightarrow \lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Рассмотрим теперь предел для $y \to 0-0$ с помощью замены $x = -y$

$$\lim_{y\to 0-0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{x\to 0+0}(1-x)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1-x+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to 0+0}\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}-1+1} = \lim_{x\to 0+0}\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{x}+1}$$

Сделаем замену:

$$z = \frac{x}{1-x} \Rightarrow \lim_{x\to 0+0} z = 0+0$$
$$\lim_{y\to 0-0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{x\to 0+0}\left(1+\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{x}+1} = \lim_{z\to 0+0}(1+z)^{\frac{1}{z}+1} = \lim_{z\to 0+0}(1+z)^{\frac{1}{z}}\lim_{z\to 0+0}(1+z) = e$$

Тогда можно сделать вывод:

$$\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \wedge \lim_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \,\square.$$

Замечательные пределы

1. 1.0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \text{ (по билету 30)}$$

   1.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

   1.2.

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x}$$
$$x = \sin(y) \Rightarrow x \to 0 \sim y \to 0$$
$$L = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin(y)} = 1$$

   1.3.

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}(x)}{x}$$
$$x = \mathrm{tg}(y) \Rightarrow x \to 0 \sim y \to 0$$
$$L = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\mathrm{tg}(y)} = 1$$

2. 2.0.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

2.1.

$$\begin{aligned}
&L = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \\
&z = \frac{1}{x} \Rightarrow z\to 0 \sim x\to\infty \\
&L = \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e
\end{aligned}$$

3. 3.0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

3.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

4. 4.0.

$$\begin{aligned}
&L = \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \\
&y = a^x - 1 \Rightarrow y\to 0 \sim x\to 0 \\
&L = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(y+1)} = \ln a
\end{aligned}$$

4.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \ln e = 1$$

5. 5.0.

$$\begin{aligned}
&L = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} \\
&y = (1+x)^\mu - 1 \Rightarrow y\to 0 \sim x\to 0 \\
&L = \lim_{x\to 0}\frac{y}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}\frac{\ln(y+1)}{\ln(x+1)}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(y+1)}{\ln(x+1)}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(y+1)}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln((1+x)^\mu-1+1)}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\mu\ln(1+x)}{\ln(1+x)} = \mu
\end{aligned}$$

Раскрытие неопределенностей со степенями

Раскрытие происходит через сведение к неопределенности вида $0 \cdot \infty$

1. $u \to 1$, $v \to \infty$

$$1^\infty = u^v = e^{v \ln u} = e^{\infty \cdot 0}$$

2. $u \to 0$, $v \to 0$

$$0^0 = u^v = e^{v \ln u} = e^{0 \cdot \infty}$$

3. $u \to \infty$, $v \to 0$

$$\infty^0 = u^v = e^{v \ln u} = e^{0 \cdot \infty}$$