Билет 62

Первый дифференциал функции в точке, его свойства.
Инвариантность формы первого дифференциала

Определение первого дифференциала функции в точке

Дифференциалом или первым дифференциалом $y = f(x)$ в точке x по отношению к приращению h называется $f'(x)h$ и обозначается как dy или $df(x)$

$d_x(f(x), h)$ — дифференциал относительно приращения h и переменной x

Если $f(x) = x$, то $f'(x) = 1 \Rightarrow df(x) = dx = h = \Delta x$

$dy = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал в некоторой точке — линейная часть приращения функции

Свойства первого дифференциала

Теорема

$y = f(x)$, $z = g(x)$

$$d(y \pm z) = dy \pm dz$$

Доказательство

$$d(y \pm z) = (y \pm z)'dx = y'dx \pm z'dx = dy \pm dz \, \square.$$

Теорема

$y = f(x)$, $z = g(x)$

$$d\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{z \cdot dy - y \cdot dz}{z^2}$$

Доказательство

$$d\left(\frac{y}{z}\right) = \left(\frac{y}{z}\right)' dx = \frac{y'z - yz'}{z^2} dx = \frac{z \cdot dy - y \cdot dz}{z^2} \, \square.$$

Теорема

$y = f(x)$, $z = g(x)$

$$d(yz) = z \cdot dy + y \cdot dz$$

Доказательство

$$d(yz) = (yz)'dx = (y'z + yz')dx = z \cdot dy + y \cdot dz \, \square.$$

Теорема

$y = f(x)$ дифференцируема в x_0

dy — главная часть Δy

Доказательство

Рассмотрим $\Delta y - dy$:

$\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0$ (по условию теоремы) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta y - dy = o(\Delta x) \Rightarrow \Delta y = dy + o(\Delta x)$ $\square$.

Теорема об инвариантности формы первого дифференциала

$z = g(y)$, $y = f(x)$

$$dz = g'_x(x)dx = g'_y(y)dy$$

Иными словами, не имеет значения по какой переменной берётся дифференциал

Доказательство

Рассмотрим $g'_y dy$:

$$g'_y(y)dy = g'_y(f(x))f'(x)dx = g'_x(x)dx \; \square.$$