ВЕРНЫЕ ЦИФРЫ

Определение 1. Цифра в позиционном р-ичном представлении приближения (приближенного числа) a к числу (точному числу) A называется верной, если погрешность приближения не более половины единицы разряда, в котором находится эта цифра.

Очевидно, что если какая-то цифра верна, то и все предыдущие цифры верны.

Определение 2. Количество верных цифр в числе есть число цифр от включительно самой правой цифры, про которую известно, что она верна, до включительно самой левой ненулевой цифры числа.

Если основание p системы исчисления четно, то существуют в редком случае 2 варианта записи числа с верными цифрами. Случай такой: истинное число имеет вид $A=A_0.A_1A_2\ldots A_r\, p^n$, где A_i – р-ичные цифры, причем $A_r = p/2$ и n - целое число. Тогда приближений с r значащими цифрами, которые все верны, два: Одно: $m = A_0.A_1A_2\ldots A_{r-1}\, p^n$. Другое: $M = A_0.A_1A_2\ldots A_{r-1}\, p^n+p^{n-r+1}$. Отметим, что во втором случае после выполнения сложения часть цифр числа, или даже все, могут измениться (когда они равны p-1).

Если p нечетно, то ситуация $A_r = p/2$ не возникает и все верные цифры определены однозначно, Более того, если истинное число имеет вид $A=A_0.A_1A_2\ldots A_{r\ldots} A_k\, p^n$, а приближение к нему: с r верными цифрами имеет вид $B=B_0.B_1B_2\ldots B_{r\ldots} B_k\, p^n$ и $A_r < p/2$, то $A_i = B_i$, $i=0,\ldots r$-1

Иногда применяется несколько иное определение верной цифры, которое отлично от О1 заменое «не более» на «меньше». В этом случае тоже не возникает неоднозначности.

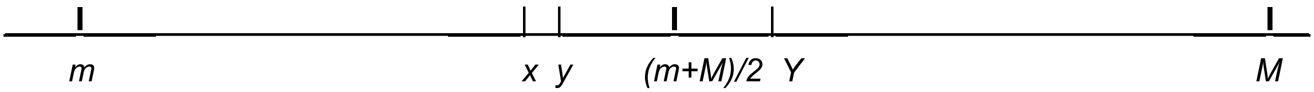
На множестве не верных значащих цифр иногда вводится понятие сомнительной цифры. Устоявшегося определения нет, приведу 2

Определение 3. Цифра в позиционном р-ичном представлении приближения (приближенного числа) a к числу (точному числу) A называется сомнительной, если погрешность приближения более половины, но меньше единицы разряда, в котором находится эта цифра

Определение 4. Цифра в позиционном р-ичном представлении приближения (приближенного числа) a к числу (точному числу) A, следующая за верной, называется сомнительной, если она не верна и усечение приближение a до верной цифры делает эту цифру не верной.

Получение заданного количества верных цифр в приближенном решении имеет некоторые тонкости.

1. Верные цифры можно потерять при округлениях. Дадим этому геометрическую интерпретацию.



На рисунке проведена числовая ось. Отметки m и M, определенные выше, соответствуют разрядной сетке с r значащими цифрами, x - вычисленное приближение к решению, y и Y - варианты расположения истинного решения задачи. Легко заметить, что при “правильном” округлении x до m и реализации y, погрешность будет меньше половины разряда, т. е. $|y - m| < (M - m)/2$. Однако, при реализации Y и правильном округлении будет $|Y - m| > (M - m)/2$. (В тех трансляторах, где при укорочении при печати мантиссы числа происходит “правильное” округление, ситуация когда $x > (m + M)/2$ симметрична рассмотренной.) Таким образом, последняя цифра числа m окажется неверной, несмотря даже на то, что разность $|Y - x|$ может быть весьма малой. Чтобы избежать такой неприятности, следует уменьшать погрешность вычислений d до тех пор, пока не станет d $< |x - (m + M)/2|$.

Если $x = A_0.A_1A_2...A_{r-1}...A_k\ p^{n}$, то как найти $s=(m + M)/2$ при четном p? .
Положим $s = A_0.A_1A_2...A_{r-1}\ B_r\, p^n$, где $B_r = p/2$. Тогда
$|x-s| = |B_r p^{n-r} - A_r.A_{r+1}...A_k\ p^{n-r}| < (p/2)\, p^{n-r} = p^{n-r+1}/2$

Таким образом, для вывода приближения x с r значащими цифрами, которые все верны, Следует обеспечить такую оценку погрешности приближения к истинному значению x^*

$$| x - x^*| < p^{n-r+1}/2$$

В 16-ричной системе исчисления будет $| x - x^*| < 8p^{n-r}$.

Число n извлекается непосредственно из машинного представления числа.

Определение 3. Погрешность вычислений d - это оценка $|x - x^*| \le$ d, где x^* - точное решение.

2. Кое какие проблемы возникают при работе с разными основаниями позиционного представления числа. В частности, появление результатов после форматирования в нашей «родной» десятичной системе, в то время как вычисления на современных ЭВМ идут в 16-ричной системе. Это оставим без анализа.

3. Приближенные вычисления обычно происходят с заранее заданной абсолютной погрешностью. Она, как правило, входит в критерий остановки бесконечного итеративного процесса. Реже используется относительная погрешность. Количество верных цифр – это третий вид погрешности, имеющий общее и с абсолютной и с относительной погрешностью. Как внедрить в программу с критерием остановки по

достижению заданной абсолютной погрешности остановку по достижению заданного количества верных цифр?

По ходу итеративного процесса должны появиться приближения, содержащие большее число цифр, чем заданное число верных: $a = a_0 .a_1 a_2 \ldots a_{r-1} p^n$ где a_j - p-ичные цифры . Это число будет иметь r верных цифр, если $|a-A|<p^{n-r}/2$. Поэтому если известен способ S оценки абсолютной погрешности, который чувствителен к изменениям приближений на величины порядка $p^{n-r}/2$, то остановиться следует, когда $S(a) < p^{n-r}/2$.

Остается только оперативно узнавать число n. Оно занимает конкретные биты в 16-ричном представлении числа с плавающей точкой (типы float, double,…)

Задание получить требуемое количество верных цифр невыполнимо, если упомянутый способ S чересчур груб, или не существует вовсе.

Примеры. Пусть p=10: A– истинное значение

a приближение к A

Z(t) – количество значащих цифр в t;

V(t) – количество верных цифр в t.

1) Z(200) = Z(00200)= Z(0.0200)= Z(0.0213)=3
2) Z(2.330E5)= Z(2.330E-5)=4
3) A=5 => V(4.99)=2 & V(5.04)=2 & V(5.05)=1 & V(5.06)=1
4) |a-A| <5.0Ed & |a|=a1.a2…..ak E g ‘ & a1, ,ak – цифры & a1>0 =>

   => V(a)= -d +g, если g>=d, иначе V(a)=0

   Может V(a) быть не только меньше, но и больше k. Потому что после ak подразумевается бесконечная последовательность нулей

4/9/2023 С. Михеев