Задание (штрафное) №7. Вычисление определенного интеграла

Выполняется в дополнение к основному заданию при нарушении срока сдачи

1. Реализовать малую квадратурную формулу Ньютона-Котеса для *произвольного* количества узлов. Определить количество узлов n, при котором впервые появляются отрицательные коэффициенты среди коэффициентов A_k (в качестве подынтегральной функции взять функцию $F(x) = p(x) \cdot f(x)$, где $f(x)$ и $p(x) = (x-a)^{-\alpha} \cdot (b-x)^{-\beta}$ — функции в Вашем варианте задания)

2. Построить график изменения абсолютной погрешности при использовании малой и составной (на базе 3-х точечной) квадратурных формул Ньютона-Котеса. *Примечание*: Малые квадратурные формулы строить для количества узлов $n = 2N + 1$, где N — количество разбиений интервала интегрирования соответствующей составной квадратурной формулы, $N = 1, 2, 3 \ldots$ и т. д. Для удобства сравнения представить результаты на одном графике.

3. Реализовать два варианта *смешанной* составной квадратурной формулы на базе малых n-точечных квадратурных формул Гаусса ($n < 4$) и m-точечных квадратурных формул Ньютона-Котеса. В первом варианте: параметры n и m выбирать такими, чтобы малые квадратурные формулы в составе смешанной формулы имели *разные* алгебраические степени точности, а во втором — *одну и ту* же алгебраическую степень точности.

4. Для каждой построенной квадратурной формулы из п. 3 вычислить последовательность квадратурных сумм для различных длин шага разбиения интервала интегрирования $h = (b\text{-}a)/L$, при $L = 1, 2, \ldots 50$. На каждых последовательных трех сетках оценить скорость сходимости по правилу Эйткена.

5. С помощью реализованных в Задании (основное) №7 составных квадратурных формул: *средних и левых прямоугольников, трапеции, Симпсона* вычислить определенный интеграл с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ (погрешность оценивать *методом Рунге)*. На каждых последовательных трех сетках оценивать скорость сходимости по правилу Эйткена. Для каждой квадратурной формулы указать длину шага разбиения интервала интегрирования, при котором была достигнута требуемая точность ε. В качестве подынтегральной функции взять функцию $f(x)$ Вашего варианта (т.е. положить весовую функцию $p(x) \equiv 1$).