Задание №7. Вычисление определенного интеграла

Цель задания: *практическое освоение методов управления численным процессом с целью обеспечения заданной точности вычисления определенного интеграла за приемлемое время, используя составные квадратурные формулы с методами оценки погрешности и выбора оптимального разбиения*

$$J(F) = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b p(x) \cdot f(x)\, dx$$

Часть №1: Квадратурные формулы Ньютона-Кот(е)са и Гаусса

1.1. Реализовать методы вычисления определенного интеграла с использованием составных квадратурных формул: *средних* и *левых прямоугольников*, *трапеции*, *Симпсона*. В качестве подынтегральной функции взять функцию $f(x)$ Вашего варианта (т.е. положить весовую функцию $p(x) \equiv 1$):

$$J(F) = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

1.2. Реализовать методы вычисления определенного интеграла с использованием составных квадратурных формул на базе 3-х-точечных формул Ньютона-Кот(е)са и Гаусса.

В качестве подынтегральной функции взять функцию $F(x) = p(x) \cdot f(x)$, где $f(x)$ и $p(x) = (x-a)^{-\alpha} \cdot (b-x)^{-\beta}$ — функции в Вашем варианте задания:

$$J(F) = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha} \cdot (b-x)^{\beta}}\, dx$$

Примечание: узлы каждой малой 3-х-точечной квадратурной формулы Гаусса находить с помощью формул Кардано.

1.3. Для каждой квадратурной формулы из пп.1.1-2 представить график зависимости абсолютной погрешности от количества разбиений интервала интегрирования.

Часть №2: Методы оценки погрешности составных квадратурных формул

2.1. Вычислить определенный интеграл с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ с использованием составной 3-х-точечной квадратурной *формулы Ньютона-Кот(е)са*. Погрешность оценивать *методом Ричардсона*. На каждых последовательных трех точках оценивать скорость сходимости по *правилу Эйткена*. Указать длину шага h разбиения интервала интегрирования, при котором была достигнута требуемая точность ε.

2.2. Выполнить всё, что указано в п. 2.1, используя 3-х-точечные *формулы Гаусса* вместо формул Ньютона-Кот(е)са.

2.3. Проведя вычисления (для одной из построенных квадратурных формул из п.2.1-2) по трем сеткам с малым числом шагов (например, 1, 2 и 4) и используя оценку скорости сходимости по Эйткену, выбрать шаг h_{opt}. Начать расчет с полученного шага и снова довести вычисления интеграла до требуемой точности ε. Указать шаг разбиения интервала интегрирования, при котором достигнута требуемая точность, и сравнить его с шагом, вычисленным в 2.1 или 2.2 (в зависимости от того, какую квадратурную формулу Вы выбрали для выполнения задания в п. 2.3).

Варианты заданий для самостоятельного выполнения

1. $f(x) = 2\cos(2.5x)\exp(x/3) + 4\sin(3.5x)\exp(-3x) + x$,
   $a = 1.5$, $b = 3.3$, $\alpha = 1/3$, $\beta = 0$;

2. $f(x) = 3\cos(0.5x)\exp(x/4) + 5\sin(2.5x)\exp(-x/3) + 2x$,
   $a = 1.7$, $b = 3.2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1/4$;

3. $f(x) = 2.5\cos(2x)\exp(2x/3) + 4\sin(3.5x)\exp(-3x) + 3x$,
   $a = 0.1$, $b = 2.3$, $\alpha = 1/5$, $\beta = 0$;

4. $f(x) = 3\cos(3.5x)\exp(4x/3) + 2\sin(3.5x)\exp(-2x/3) + 4x$,
   $a = 1$, $b = 3$, $\alpha = 0$, $\beta = 1/6$;

5. $f(x) = \cos(1.5x)\exp(2x/3) + 3\sin(5.5x)\exp(-2x) + 2$,
   $a = 2.5$, $b = 4.3$, $\alpha = 2/7$, $\beta = 0$;

6. $f(x) = 4\cos(0.5x)\exp(-5x/4) + 2\sin(4.5x)\exp(x/8) + 2$,
   $a = 1.3$, $b = 2.2$, $\alpha = 0$, $\beta = 5/6$;

7. $f(x) = 4.5\cos(7x)\exp(-2x/3) + 1.4\sin(1.5x)\exp(-x/3) + 3$,
   $a = 2.1$, $b = 3.3$, $\alpha = 2/5$, $\beta = 0$;

8. $f(x) = 3.7\cos(1.5x)\exp(-4x/3) + 2.4\sin(4.5x)\exp(2x/3) + 4$,
   $a = 1.8$, $b = 2.3$, $\alpha = 0$, $\beta = 3/5$;

9. $f(x) = 3\cos(1.5x)\exp(x/4) + 4\sin(3.5x)\exp(-3x) + 4x$,
   $a = 2.5$, $b = 3.3$, $\alpha = 2/3$, $\beta = 0$;

10. $f(x) = 1.3\cos(3.5x)\exp(2x/3) + 6\sin(4.5x)\exp(-x/8) + 5x$,
    $a = 0.7$, $b = 3.2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1/4$;

11. $f(x) = 0.5\cos(2x)\exp(2x/5) + 2.4\sin(1.5x)\exp(-6x) + 6x$,
    $a = 1.1$, $b = 2.5$, $\alpha = 2/5$, $\beta = 0$;

12. $f(x) = 4\cos(2.5x)\exp(4x/7) + 2.5\sin(5.5x)\exp(-3x/5) + 4.3x$,
    $a = 1.8$, $b = 2.9$, $\alpha = 0$, $\beta = 4/7$;

13. $f(x) = 2\cos(3.5x)\exp(5x/3) + 3\sin(1.5x)\exp(-4x) + 3$,
    $a = 1.5$, $b = 2.3$, $\alpha = 1/5$, $\beta = 0$;

14. $f(x) = 3\cos(2.5x)\exp({}^{7x}\!/\!_{4}) + 5\sin(0.5x)\exp({}^{3x}\!/\!_{8}) + 4\,,$
$a = 2.3,\ b = 2.9,\ \alpha = 0,\ \beta = {}^{2}\!/\!_{5};$

15. $f(x) = 3.5\cos(0.7x)\exp(-{}^{5x}\!/\!_{3}) + 2.4\sin(5.5x)\exp(-{}^{3x}\!/\!_{4}) + 5\,,$
$a = 1.1,\ b = 2.3,\ \alpha = {}^{4}\!/\!_{5},\ \beta = 0;$

16. $f(x) = 2.7\cos(3.5x)\exp(-{}^{7x}\!/\!_{3}) + 4.4\sin(2.5x)\exp({}^{5x}\!/\!_{3}) + 2\,,$
$a = 2.8,\ b = 4.3,\ \alpha = 0,\ \beta = {}^{3}\!/\!_{7};$

17. $f(x) = 6\cos(1.5x)\exp({}^{5x}\!/\!_{3}) + 2\sin(0.5x)\exp(-1.3x) + 5.4x\,,$
$a = 3.5,\ b = 3.7,\ \alpha = {}^{2}\!/\!_{3},\ \beta = 0;$

18. $f(x) = 4\cos(2.5x)\exp({}^{5x}\!/\!_{4}) + 2.5\sin(1.5x)\exp(-{}^{2x}\!/\!_{7}) + 5x\,,$
$a = 2.7,\ b = 3.2,\ \alpha = 0,\ \beta = {}^{3}\!/\!_{4};$

19. $f(x) = 0.5\cos(3x)\exp({}^{2x}\!/\!_{5}) + 4\sin(3.5x)\exp(-3x) + 3x\,,$
$a = 1.1,\ b = 2.3,\ \alpha = {}^{2}\!/\!_{5},\ \beta = 0;$

20. $f(x) = 1.5\cos(3.7x)\exp({}^{4x}\!/\!_{7}) + 3\sin(2.5x)\exp({}^{3x}\!/\!_{4}) + 3x\,,$
$a = 1.5,\ b = 3,\ \alpha = 0,\ \beta = {}^{5}\!/\!_{6};$

21. $f(x) = 3\cos(2.5x)\exp({}^{4x}\!/\!_{3}) + 4\sin(5.5x)\exp(-3.5x) + 3\,,$
$a = 2.5,\ b = 4.3,\ \alpha = {}^{2}\!/\!_{7},\ \beta = 0;$

22. $f(x) = 5\cos(0.3x)\exp(-{}^{7x}\!/\!_{4}) + 7\sin(0.5x)\exp({}^{2x}\!/\!_{3}) + 4\,,$
$a = 0.5,\ b = 2.2,\ \alpha = 0,\ \beta = {}^{3}\!/\!_{5};$

23. $f(x) = 2.5\cos(5.7x)\exp(-{}^{4x}\!/\!_{3}) + 2.4\sin(2.5x)\exp(-{}^{3x}\!/\!_{3}) + 7\,,$
$a = 0.2,\ b = 3.1,\ \alpha = {}^{3}\!/\!_{5},\ \beta = 0;$

24. $f(x) = 5.7\cos(2.5x)\exp(-{}^{4x}\!/\!_{7}) + 4.4\sin(4.3x)\exp({}^{2x}\!/\!_{7}) + 5\,,$
$a = 0.8,\ b = 1.3,\ \alpha = 0,\ \beta = {}^{4}\!/\!_{7}.$